

Capítulo 6

Interpolación a partir de puntos e isoclinas.

El proceso de *interpolación espacial* consiste en la estimación de los valores que alcanza una variable Z en un conjunto de puntos definidos por un par de coordenadas (X,Y) , partiendo de los valores de Z medidos en una muestra de puntos situados en el mismo área de estudio (por ejemplo la interpolación de la temperatura a partir de datos de observatorios meteorológicos), la estimación de valores fuera del área de estudio se denomina *extrapolación*. En algunos casos pueden utilizarse otras *variables de apoyo* V de las que se conoce su variación espacial en el proceso de interpolación/extrapolación (en el caso de la interpolación de la temperatura puede ser la altitud ya que aquella depende de esta. El área de estudio vendría definida, aunque no de forma muy clara, por el entorno de los puntos en los que sí se dispone de datos.

Cuando se trabaja con un SIG la interpolación espacial suele utilizarse para obtener capas raster que representan la variable a interpolar. En esos casos cada celdilla de la capa raster constituye un punto en el que hay que realizar la interpolación.

Lo más habitual es partir de medidas puntuales (variables climáticas, variables del suelo) o de isoclinas (curvas de nivel). Aunque los métodos que se utilizan en uno u otro caso son bastante diferentes, todos los métodos de interpolación se basan en la presunción lógica de que cuanto más cercanos estén dos puntos sobre la superficie terrestre, los valores de cualquier variable cuantitativa que midamos en ellos serán más parecidos, para expresarlo más técnicamente, las variables espaciales muestran *autocorrelación espacial*.

6.1. Un poco de estadística

Casi todos los procedimientos de interpolación se basan, en mayor o menor medida, en el uso de técnicas estadísticas, por tanto se hace necesario partir de unos conceptos básicos de esta ciencia.

La *estadística descriptiva*, aquella que nos permite determinar las características de una *muestra de individuos* a los que se les ha medido un conjunto de *variables*, se basa en el cálculo de una serie de *estadísticos* que se obtienen a partir de los valores medidos en los individuos. Complementariamente las técnicas de *estadística inferencial* tratan de *determinar* las características de la población de la que se ha extraído la muestra a partir de los estadísticos medidos sobre esta. Existen diversos tipos de estadísticos para caracterizar una variable:

- Estadísticos de tendencia central (media, mediana, moda)
- Estadísticos de dispersión (rango, varianza, desviación típica)
- Estadísticos de forma (sesgo y curtosis)

De estos los más utilizados son:

- **Media**

$$m_x = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} \quad (6.1)$$

- **Varianza**

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - m_x)^2}{N} \quad (6.2)$$

- **Desviación típica**

$$s_x = \sqrt{s_x^2} \quad (6.3)$$

Una alternativa al uso de la media es la media ponderada cuya finalidad es dar mayor importancia a algunos de los individuos (ya que, por ejemplo, pueden considerarse más representativos) a la hora de calcular la media:

$$m_x = \sum_{i=1}^N W_i * X_i \quad (6.4)$$

Donde W_i representa un conjunto de coeficientes de ponderación cuya suma es 1. Por ejemplo, cuando en un examen se dice que la nota final depende en un 60 % de la teoría y en un 40 % por ciento de la práctica, se afirma que los coeficientes de ponderación para el cálculo de la nota media serán 0.6 y 0.4 respectivamente.

Cuando en lugar de caracterizar una sola variable X queremos caracterizar el comportamiento conjunto de dos o más variables (X, Y, \dots) debemos utilizar técnicas de análisis multivariante. Los dos estadísticos fundamentales son:

- **Covarianza**

$$COV_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - m_x) * (Y_i - m_y)}{N} \quad (6.5)$$

▪ **Coefficiente de correlación de Pearson**

$$r_{x,y} = \frac{COV_{x,y}}{s_x * s_y} \quad (6.6)$$

La covarianza puede tener valores positivos o negativos, en el primer caso se interpreta que las dos variables crecen al unísono, en el segundo que cuando la primera crece la segunda decrece y viceversa. El valor absoluto de la covarianza va a depender tanto de la relación que existe entre ambas variables como de las medias y varianzas de ambas variables por separado.

El coeficiente de correlación se introduce precisamente para obtener un estadístico que dependa sólo de la relación entre las variables. Sus valores oscilan entre 1 y -1. Un valor próximo a 1 indica que las dos variables crecen al unísono, un valor próximo a -1 que cuando la primera crece la segunda decrece y viceversa, finalmente un valor próximo a 0 indica ausencia de relación.

Resulta obvio observando las ecuaciones ?? y ?? que:

$$COV_{x,y} = COV_{y,x} \quad (6.7)$$

$$r_{x,y} = r_{y,x} \quad (6.8)$$

$$COV_{x,x} = s_x^2 \quad (6.9)$$

$$r_{x,x} = 1 \quad (6.10)$$

$$(6.11)$$

Si se determina que el coeficiente de correlación entre dos variables es significativamente distinto de cero y, por lo tanto, que el aumento de una variable implica el aumento ($r > 0$) o disminución ($r < 0$) de la otra, el siguiente paso sería calcular los parámetros de una ecuación lineal de la forma

$$Y = A * X + B \quad (6.12)$$

que nos permitiera estimar una de las variables (Y) a partir de la otra (X). Estos coeficientes se calculan mediante las ecuaciones:

$$A = \frac{COV_{x,y}}{s_x^2} \quad (6.13)$$

$$B = m_y - A * m_x \quad (6.14)$$

$$(6.15)$$

Puesto que $r_{x,x} = 1$ (una variable siempre crece al unísono consigo misma), en principio no tendría mucho sentido calcular la correlación de una variable consigo misma. Sin embargo en análisis de series temporales y de

variables en el espacio si resulta de interés calcular el **coeficiente de autocorrelación** de una variable sometida a un retardo temporal o desplazamiento en el espacio (h). Por ejemplo, en el caso de variables temporales:

$$r_x^h = \frac{COV_x^h}{s_x^2} = \frac{\sum_{t=1}^{N-h} (X_t - m_x) * (X_{t+h} - m_x)}{N-h} \frac{1}{s_x^2} \quad (6.16)$$

se calcula la covarianza de la variable consigo misma retrasada h unidades temporales. Por ejemplo podemos calcular el coeficiente de correlación de la serie de precipitación anual con la misma serie retardada un año (r_p^1) para determinar si podríamos, a partir de la precipitación de un año, estimar lo que lloverá el siguiente año.

Asignando un valor de r_x^h para cada h podemos construir un gráfico denominado correlograma de gran interés para determinar la independencia o no de los valores de una serie temporal respecto a los valores de períodos anteriores.

6.1.1. Un ejemplo

La siguiente tabla muestra la precipitación mensual en el observatorio de Murcia entre 1951 y 1998:

Año	Enero	Feb.	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Octubre	Novi.	Dici.
1951	10.7	1.0	65.1	105.0	63.9	7.0	0.0	27.2	66.9	27.7	12.3	140.0
1952	6.0	5.2	3.5	57.9	22.8	0.0	0.0	7.4	29.0	64.2	2.6	2.6
1953	25.0	3.4	27.8	35.3	3.0	34.0	4.8	3.0	2.2	88.4	57.0	13.0
1954	11.4	14.3	43.3	89.6	14.0	13.4	1.5	0.0	3.0	56.1	5.5	124.9
1955	8.8	5.8	16.4	0.2	11.4	9.4	0.0	22.7	15.3	22.4	100.9	24.0
1956	48.3	27.3	27.5	15.8	16.8	1.0	0.0	2.3	12.8	13.2	40.0	3.0
1957	85.0	1.5	3.3	33.5	47.0	0.2	0.0	2.4	15.4	65.4	45.9	9.5
1958	19.2	1.8	9.9	56.3	6.7	9.9	0.0	0.4	2.9	83.8	22.7	14.3
1959	23.0	80.4	16.3	3.5	108.0	5.8	2.7	0.0	53.6	39.0	2.4	13.2
1960	21.3	29.7	17.5	39.2	28.6	80.7	0.6	0.3	0.0	49.6	8.1	37.2
1961	6.4	0.1	4.4	7.4	12.1	11.4	0.0	1.2	21.6	25.8	36.2	10.8
1962	1.2	24.5	52.7	44.4	53.4	18.7	6.9	0.0	26.7	62.3	35.2	14.9
1963	22.5	13.4	0.0	12.3	6.2	6.6	0.0	5.8	44.7	0.1	6.0	36.3
1964	24.3	7.9	21.3	10.3	0.0	55.3	3.6	0.0	9.6	1.4	9.3	95.8
1965	24.1	33.2	12.2	28.1	23.1	58.2	0.5	6.7	3.9	38.5	11.2	93.0
1966	5.0	9.3	3.4	16.5	6.9	19.2	0.0	7.0	23.4	69.0	36.3	0.0
1967	10.4	61.6	10.6	89.2	11.3	71.1	0.0	2.7	8.6	1.0	54.7	2.5
1968	79.7	38.3	34.2	13.7	50.6	18.7	0.0	2.6	0.8	0.0	26.9	9.0
1969	17.4	22.6	40.3	39.6	12.1	54.8	0.0	8.4	44.2	145.7	64.4	12.7
1970	19.5	0.4	26.0	12.8	4.6	4.0	0.0	0.0	0.2	28.9	0.2	48.1
1971	12.2	2.7	88.6	9.2	30.8	19.4	2.5	0.0	13.2	28.8	59.8	79.4
1972	12.9	3.2	41.6	46.4	40.7	29.1	0.0	7.0	71.2	197.4	90.0	6.5
1973	8.2	7.9	54.9	2.1	3.0	24.8	0.0	0.6	73.9	37.8	26.2	62.1
1974	3.3	41.0	56.6	73.3	1.4	10.0	6.9	69.1	4.2	142.2	15.4	0.0
1975	1.7	21.4	48.3	45.7	51.1	38.5	0.0	0.3	10.6	9.9	26.0	67.4
1976	9.5	20.9	2.0	64.4	112.9	3.5	8.9	28.4	53.5	42.0	1.0	41.6
1977	47.8	0.9	5.0	16.0	62.6	7.3	7.8	41.5	10.0	61.0	62.7	11.1
1978	5.2	2.8	20.4	55.1	7.8	13.8	0.0	1.6	0.5	6.8	21.2	14.2
1979	26.4	12.7	4.8	3.5	3.2	15.4	4.1	0.0	16.6	56.6	11.9	1.1
1980	126.1	85.5	15.1	52.2	41.7	2.2	41.6	4.1	7.0	0.1	5.0	18.3
1981	1.3	31.7	10.9	71.6	9.3	38.1	0.0	14.1	4.0	5.7	0.0	3.8
1982	12.7	9.6	44.9	20.3	11.6	0.9	0.0	0.9	2.4	81.4	10.4	1.0
1983	2.2	25.7	0.2	7.0	1.4	8.5	0.0	21.0	0.0	5.5	77.9	9.7
1984	5.3	6.5	8.0	35.4	41.3	3.6	0.0	0.8	0.7	26.8	50.1	4.6
1985	5.4	105.7	17.3	0.3	32.3	0.0	0.2	0.0	31.1	18.1	86.6	28.0
1986	5.9	2.0	18.2	17.5	15.7	6.8	11.0	0.9	44.8	212.7	15.4	7.1
1987	31.1	33.9	1.2	3.1	23.9	3.1	26.6	21.1	32.6	53.9	175.6	27.4
1988	16.7	46.1	4.5	33.4	13.1	34.6	0.0	0.0	9.1	21.6	55.7	5.3
1989	36.4	58.5	153.2	23.5	37.0	4.3	7.4	10.0	120.0	3.0	17.1	70.4
1990	63.3	0.0	58.1	50.6	46.7	0.4	0.0	0.0	15.7	30.5	9.4	19.1
1991	154.7	23.9	31.3	6.4	3.8	72.8	0.6	7.3	18.1	26.6	3.1	15.6
1992	10.4	65.3	39.9	4.7	29.0	83.9	0.0	0.0	0.2	31.9	18.7	10.9
1993	1.2	106.8	35.8	2.0	56.0	6.3	0.2	0.6	18.2	13.0	20.9	12.7
1994	2.2	5.0	4.0	38.5	8.2	0.1	0.0	0.2	32.6	32.9	11.3	13.3
1995	0.7	17.9	9.1	1.7	1.0	48.3	0.3	9.0	10.1	3.0	1.5	35.4
1996	34.8	27.9	16.7	28.4	19.4	8.3	0.0	3.9	36.1	32.7	53.6	52.2
1997	34.9	3.0	23.4	81.8	23.7	68.1	1.8	9.3	66.0	22.1	14.5	29.6
1998	20.0	5.9	7.9	5.2	40.3	5.0	0.0	12.0	18.3	0.0	34.4	0.0

Aplicando las ecuaciones vistas anteriormente se obtienen los siguientes resultados:

Mes	Enero	Feb.	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Octubre	Novi.	Dici.	Anual
Media	24.2	24.1	26.2	31.4	26.5	21.6	2.9	7.6	23	43.5	32.3	28.2	291.6

Matriz de varianzas-covarianzas

	Enero	Feb.	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Octubre	Novi.	Dici.
Enero	973.9	84.7	19.6	-71.9	72.3	53.59	87.3	-23.5	-43.1	-228.3	-103.5	-88
Feb.	84.7	756.4	73.5	-107.8	193.3	52.49	55.7	-19	20.4	-339.7	37	-98.7
Marzo	19.6	73.5	766.2	83.6	77.5	-0.64	-4.8	9.9	316.9	58.7	-111.5	37.8
Abril	-71.9	-107.8	83.6	761.9	81.9	66.14	6.1	81.3	40.7	170.9	-237.9	211
Mayo	72.3	193.3	77.5	81.93	650.8	-151.8	31.4	32.9	188.3	-73.6	-53	74.9
Junio	53.6	52.5	-0.6	66.1	-151.8	588.7	-36.1	-45.9	-87.6	-53.1	-106.7	73
Julio	87.3	55.7	-4.8	6.1	31.4	-36.1	53.4	18	10.8	21	43.7	-6.9
Agosto	-23.5	-19	9.9	81.2	32.9	-45.9	18	164.4	20.2	119.3	68.3	-10.5
Sept.	-43.1	20.4	316.9	40.7	188.3	-87.6	10.8	20.2	637.7	205.3	24.5	201.6
Octubre	-228.3	-339.7	58.7	170.9	-73.6	-53.1	21	119.3	205.3	2256.9	245.2	-340.1
Novi.	-103.5	37	-111.5	-237.9	-53	-106.7	43.7	68.2	24.5	245.2	1135.9	-188.9
Dici.	-88.0	-98.7	377.9	211	74.9	73.0	-6.9	-10.5	201.6	-340.1	-188.9	1095.7

Matriz de correlaciones

	Enero	Feb.	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Octubre	Novi.	Dici.
Enero	1	0.099	0.023	-0.083	0.091	0.071	0.383	-0.058	-0.055	-0.154	-0.098	-0.085
Febrero	0.099	1	0.096	-0.142	0.275	0.078	0.277	-0.054	0.029	-0.260	0.04	-0.108
Marzo	0.023	0.096	1	0.109	0.11	-0.001	-0.024	0.028	0.453	0.045	-0.12	0.412
Abril	-0.083	-0.142	0.109	1	0.116	0.098	0.03	0.23	0.058	0.130	-0.256	0.231
Mayo	0.091	0.275	0.11	0.116	1	-0.245	0.168	0.101	0.292	-0.061	-0.062	0.089
Junio	0.071	0.079	0	0.099	-0.245	1	-0.204	-0.147	-0.143	-0.046	-0.130	0.090
Julio	0.383	0.277	-0.024	0.030	0.168	-0.203	1	0.192	0.059	0.060	0.177	-0.029
Agosto	-0.059	-0.054	0.028	0.23	0.101	-0.147	0.192	1	0.062	0.196	0.158	-0.025
Septiembre	-0.054	0.03	0.453	0.058	0.292	-0.142	0.059	0.062	1	0.171	0.029	0.241
Octubre	-0.154	-0.26	0.045	0.130	-0.061	-0.046	0.060	0.196	0.171	1	0.153	-0.216
Noviembre	-0.098	0.04	-0.119	-0.256	-0.062	-0.130	0.177	0.158	0.029	0.153	1	-0.169
Diciembre	-0.085	-0.108	0.412	0.231	0.089	0.090	-0.029	-0.025	0.241	-0.216	-0.169	1

La figura ?? muestra la serie de precipitación de Enero en Murcia. Destaca un cierto carácter cíclico que se pone de manifiesto en el correlograma (figura ??) en el que se aprecia un máximo para el coeficiente de autocorrelación de 11 años, que es aproximadamente los años que transcurren entre los diferentes picos de precipitación en la serie. Se trata de un hecho anómalo que tiene que ver con la aparición cíclica de inviernos fríos y secos que alternan con otros más suaves y lluviosos.

Más interesante para el tema que nos ocupa es comprobar como el coeficiente de autocorrelación (que como cabía esperar es 1 cuando el retardo es cero) desciende bruscamente cuando este aumenta lo que significa que los resultados de un año no son similares a los de los años próximos.

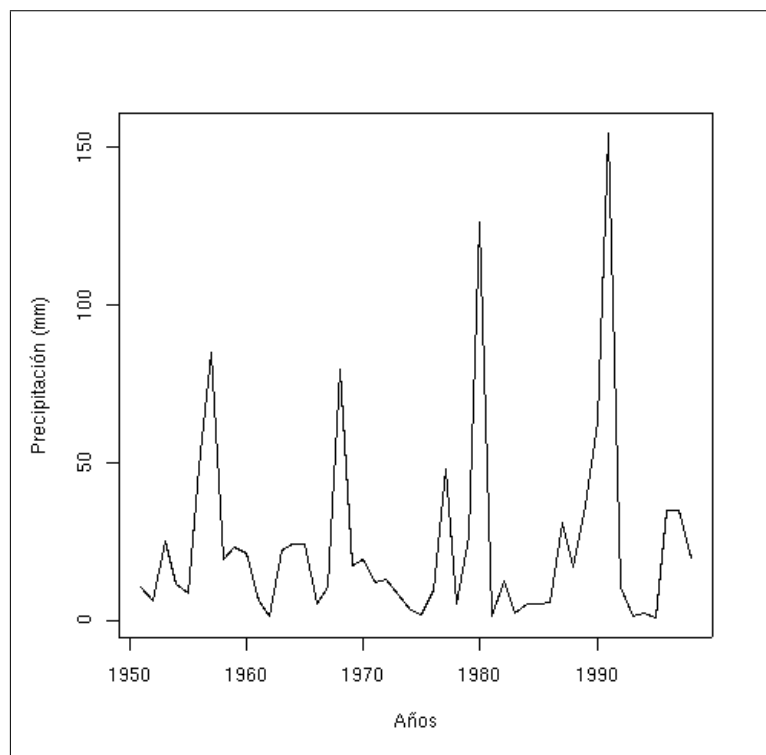


Figura 6.1: Serie de precipitación de Enero en el observatorio de Murcia

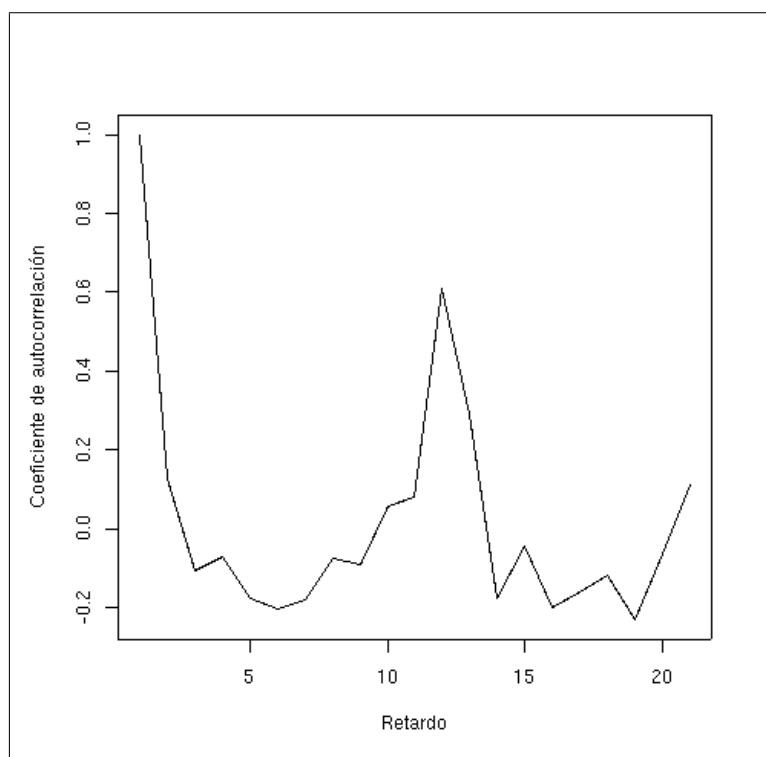


Figura 6.2: Correlograma de la serie de precipitación de Enero en el observatorio de Murcia

6.1.2. Estadística espacial

El caso del espacio es similar al del tiempo pero algo más complejo. El espacio es bidimensional y no hay una dirección preferente. Esto implica que los valores de autocorrelación no tienen por que ser los mismos en todas las direcciones.

Otra dificultad es que mientras que en una serie temporal disponemos de todos, o casi todos, los datos medidos como valores agregados (diarios, mensuales, etc.); en un estudio espacial sólo disponemos de los valores medidos en algunos puntos de muestreo en un espacio infinito, por tanto la estimación de medias, desviaciones típicas y covarianzas no es muy fiable. Por ello se prefiere utilizar otro estadístico alternativo al coeficiente de correlación y que no se basa en estos parámetros, es el *semivariograma*.

El semivariograma nos da una visión de cual es la estructura de variabilidad espacial de una variable medida en un conjunto de puntos, para su cálculo se siguen los siguientes pasos (figura ??):

1. Determinar todos los posibles pares de puntos (en total $\sum_{i=1}^{n-1} i$ donde n es el tamaño de la muestra).
2. Para cada par (i, j) , anotar la distancia $(d_{i,j})$ entre los puntos y el cuadrado de la diferencia de los valores $(dZ^2 = (Z_i - Z_j)^2)$.
3. Establecer una serie de valores críticos de distancia (h) , por ejemplo 500, 1000, 1500, 2000 m, y asignarles los pares cuya distancia d sea más similar, de manera que cada valor de h recibe n_h pares.
4. Calcular para cada valor de h la función semivariograma como:

$$\gamma(h) = \frac{\sum_{k=1}^{n_h} dZ_k^2}{2n_h} \quad (6.17)$$

donde k hace referencia a cada uno de los pares.

Calculando γ para diferentes valores de h obtenemos un *semivariograma experimental*. Lógicamente para valores de h pequeños la función $\gamma(h)$ alcanzará valores pequeños (puesto que los valores en puntos cercanos tenderán a ser más parecidos) y conforme aumenta h aumentará $\gamma(h)$. El valor de $\gamma(h)$ suele alcanzar un máximo (denominado meseta). La representación gráfica (h en abscisas y $\gamma(h)$ en ordenadas) proporciona un resumen de la estructura de variación de la variable (figura ??).

Este gráfico nos proporciona información de gran utilidad para interpolar nuevas capas de información espacial a partir de datos puntuales. Nos da una indicación de como la distancia entre los puntos influye sobre las diferencias en los valores de las variables medidas en ellos. La interpretación del semivariograma utiliza tres conceptos fundamentales:

- **efecto pepita**, es el valor del semivariograma en el origen. Resulta del componente aleatorio, no correlacionado espacialmente, que experimenta cualquier variable espacial. Se denomina así por las pepitas de oro que representan un brusco incremento en la variable concentración de oro para distancias muy cortas.

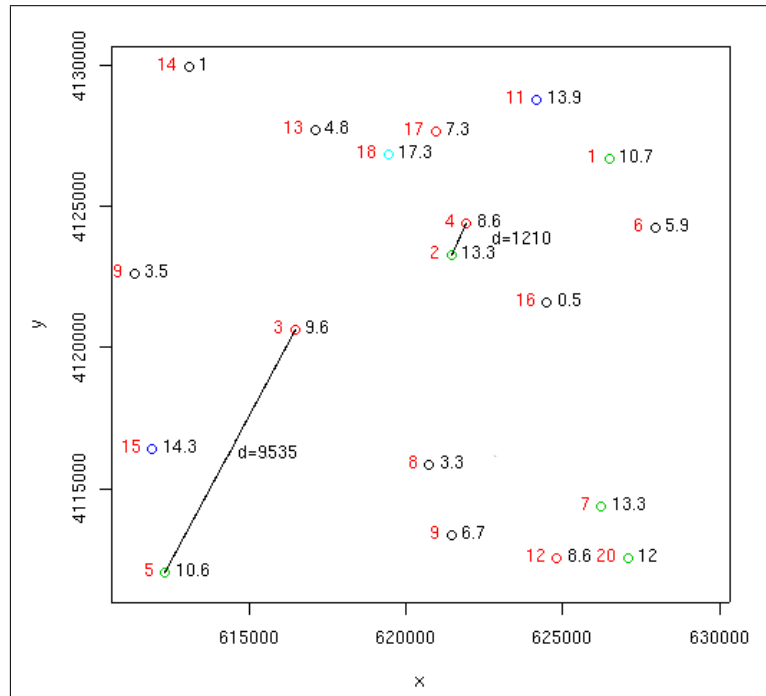


Figura 6.3: Selección de pares de puntos para la elaboración del semivariograma

- **meseta**, es el valor máximo que adota el semivariograma para distancias elevadas más allá de las cuales no hay autocorrelación espacial.
- **rango**, es la distancia a la que se alcanza la meseta. Puede asimilarse a la distancia más allá de la cual dos medidas pueden considerarse independientes.

En la figura ?? aparece el semivariograma para la precipitación de octubre de 1990 en el centro de la Región de Murcia obtenido a partir de los datos puntuales que se muestran en la figura ?. El efecto pepita alcanza un valor de 23.5, la meseta 113.5 y el alcance 13350 metros.

Sin embargo un semivariograma experimental resulta bastante fluctuante, considerándose que incluye un componente importante de aleatoriedad. Por ello suele ajustarse a diferentes modelos teóricos que dependen de un conjunto de parámetros que, a su vez, se relaciona con el efecto pepita, el rango y el alcance.

6.2. Diseño muestral para interpolación a partir de puntos

Se parte de un conjunto de puntos de muestreo en los que se ha medido la variable que se quiere interpolar, constituyen una *muestra*. En relación con la localización de estos puntos de muestreo pueden darse diversas

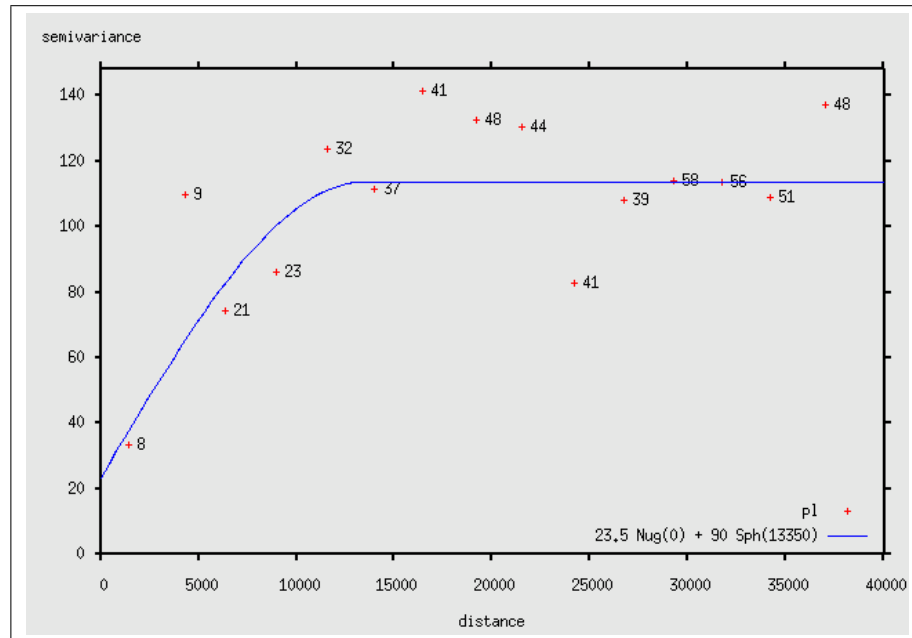


Figura 6.5: Representación gráfica de la función semivariograma

situaciones atendiendo a dos factores:

1. Si podemos o no decidir su ubicación
2. Si podemos aumentar el tamaño muestral (número de puntos) una vez hecho el muestreo

Por ejemplo, la interpolación de variables climáticas representa el peor de los casos ya que, normalmente, la localización de los puntos de muestreo (estaciones meteorológicas) se decidió hace tiempo y resulta claramente imposible aumentar su número para mejorar la interpolación (aunque podría aumentarse el número para obtener mejores mapas en el futuro).

En el caso de un muestreo de campo de variables del suelo, podemos decidir donde medir y, en función de los resultados, volver a muestrear en otros puntos, aumentando así, el tamaño muestral.

Suponiendo que tenemos la posibilidad (y la responsabilidad) de hacer nuestro propio *diseño de muestreo*, para ello nos debemos basar en el conocimiento previo que tengamos acerca de la *estructura de variación* de la variable a interpolar. Los modelos básicos que podremos utilizar (o incluso combinar) son los siguientes (figura ??):

- Muestreo regular, los puntos de muestreo se disponen siguiendo una malla regular (figura ??a)

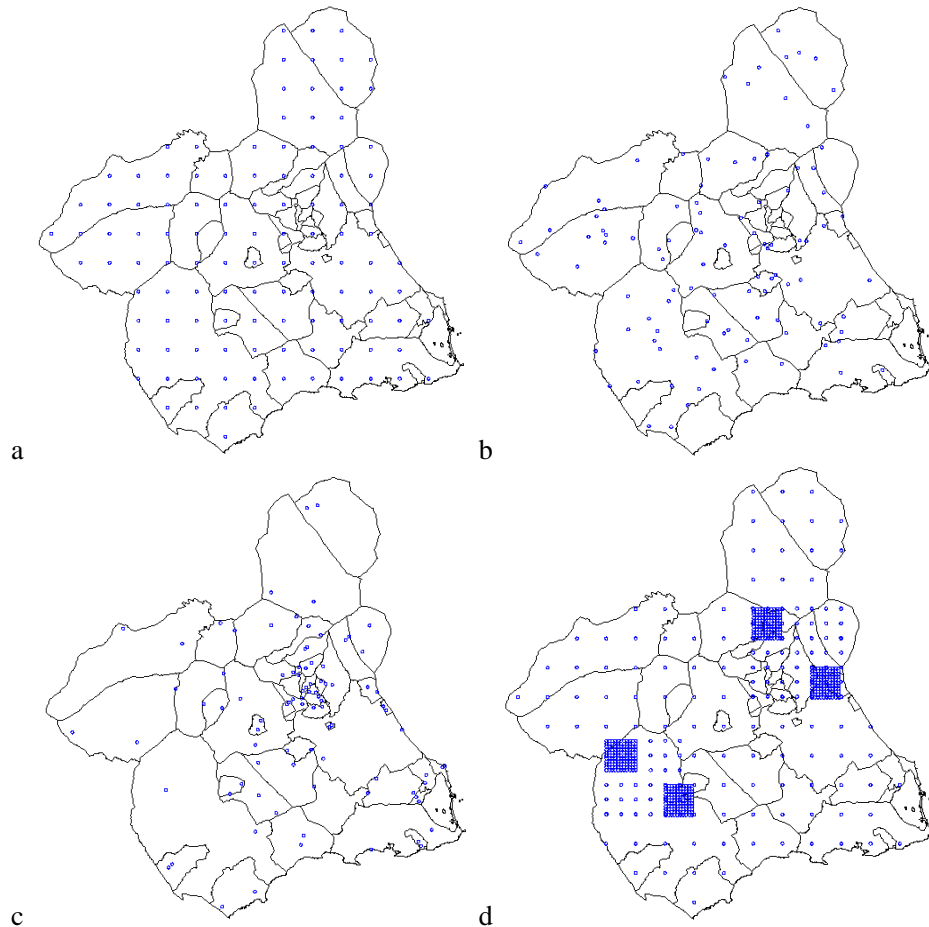


Figura 6.6: Métodos de muestreo: a) sistemático, b) aleatorio, c) estratificado y d) por agregados

- Muestreo aleatorio, los puntos de muestreo se disponen al azar (figura ??b)
- Muestreo estratificado, se utiliza una variable de apoyo para realizar el muestreo de forma que se debe muestrear en todos los valores posibles de la variable de apoyo. Por ejemplo en la figura ??c la variable de apoyo serían los diferentes municipios de la Región de Murcia. El muestreo se ha hecho de modo que se cojan dos puntos al azar dentro de cada municipio
- Muestreo por agregados, se establecen varias escalas de muestreo y en cada una de ellas se hacen muestros regulares o aleatorios (en la figura ??d aparecen 3 escalas de muestreo)

Los dos primeros son los más adecuados cuando no conocemos nada acerca de la estructura de variación. El muestreo regular puede dar problemas si la variable presenta un comportamiento rítmico, el aleatorio por

su parte puede dejar áreas extensas sin muestras. Una solución de compromiso sería un muestreo aleatorio estratificado en el que el espacio a muestrear se divide en bloques que serán muestreados con uno o más puntos cuya ubicación dentro del bloque es aleatoria (figura ??-c).

El muestreo estratificado es útil cuando tenemos una *variable de apoyo*, fácil de medir u observar, que sabemos que influye sobre la variable a interpolar, por ejemplo el tipo de suelo o la topografía van a condicionar el contenido en sales. Un muestreo estratificado dividiría el área de estudio en función de estas variables de apoyo para muestrear todos los posibles valores que aparezcan. Si la variable de apoyo es cualitativa la división se hace mediante polígonos y si es cuantitativa mediante un muestreo por transectos o isoclinas.

Finalmente el muestreo por agregados se utiliza cuando el objetivo del muestreo no es tanto realizar un mapa como conocer la estructura de variabilidad de la variable ya que permite analizar la misma a diferentes escalas.

Finalmente, para seleccionar el método de interpolación y las *variables de apoyo* hay que tener en cuenta además la escala del trabajo ya que los factores que expliquen la distribución espacial de una misma variable pueden cambiar con la escala. Por ejemplo, a media escala las propiedades del suelo variarán fundamentalmente en función de la roca; pero a escala de detalle lo harán en relación con la topografía.

6.3. Métodos de interpolación a partir de puntos

Los diferentes métodos de interpolación desarrollados pueden dividirse en dos tipos fundamentales:

1. *Métodos globales*, utilizan toda la muestra para estimar el valor en cada nuevo punto.
2. *Métodos locales*, utilizan solo los puntos de muestreo más cercanos.

6.3.1. Métodos globales

Los *métodos globales* asumen la dependencia de la variable a interpolar de otras variables de apoyo. Pueden darse dos situaciones en función del tipo de variable de apoyo que se utilice:

Métodos de clasificación

La *variable de apoyo* es cualitativa (usos del suelo, tipos de suelo o roca, etc). En este caso se asume que la variable adopta en cada punto el valor medio correspondiente al valor de la variable de apoyo en ese punto. Por ejemplo si se trata de interpolar el contenido en arcilla de los suelos, puede utilizarse el tipo de suelo como variable de apoyo y asignar a cada suelo su contenido medio de arcilla (figura ??). Estos métodos se basan en una serie de premisas que no se cumplen necesariamente:

1. Las variaciones de Z dentro de las diferentes clases de V son aleatorias y no autocorrelacionadas espacialmente.

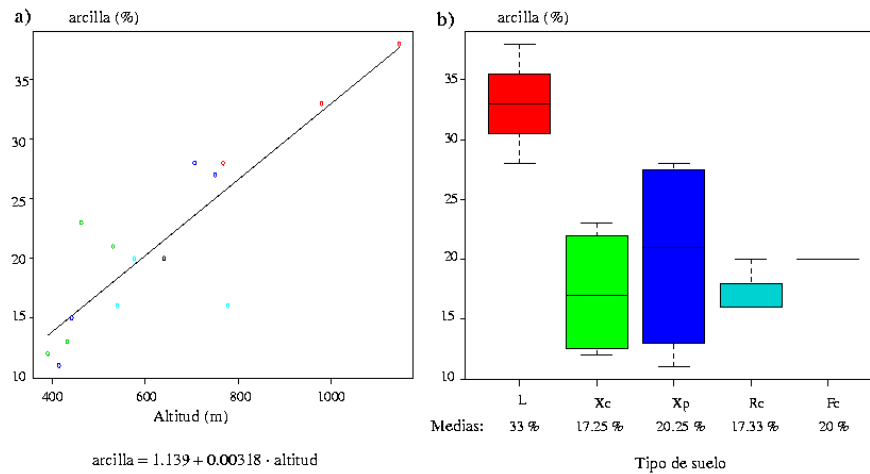


Figura 6.7: Modelos de regresión y clasificación del contenido en arcilla

2. Z está normalmente distribuida en cada clase y su media y varianza es la misma en todas las manchas de una misma clase.
3. Los cambios en la variable Z en las fronteras entre clases se producen de forma brusca.

El resultado es equivalente a una reclasificación que produce un mapa en el que los diferentes valores de V se transforman en valores de Z

Métodos de regresión

Implican, como su nombre indica, un análisis de regresión previo a partir del cual se genera un modelo de interpolación de tipo polinómico. Generalmente se utilizan X e Y (longitud y latitud) como variables de apoyo ya que no necesitan de ninguna medición, y también alguna variable cuantitativa V espacialmente distribuida, un ejemplo habitual es la altitud, y otras variables topográficas derivadas, por su facilidad de medida, su evidente relación con casi todos los procesos ambientales y por las posibilidades que un SIG ofrece en cuanto al tratamiento de la elevación e información derivada. No resulta recomendable utilizar polinomios de grado mayor que 3 ya que, a pesar de un ajuste cada vez mejor, se hacen cada vez más sensibles a los valores extremos con lo que cualquier error en los datos podría generar distorsiones importantes en el resultado final.

En ambos casos (clasificación y regresión) se requiere un análisis estadístico previo para determinar que los datos se ajustan al modelo estadístico implicado. En el caso de la clasificación que las medias de las diferentes clases son significativamente diferentes y que las desviaciones típicas dentro de las clases son pequeñas (figura

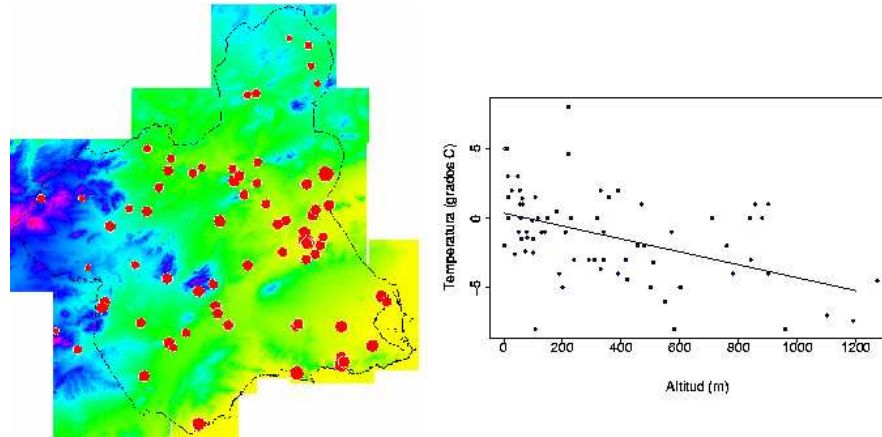


Figura 6.8: Interpolación por regresión de la temperatura respecto a la altitud

??). En el caso de la regresión es necesario verificar que el coeficiente de correlación es significativamente elevado (figura ??).

El problema de los métodos globales es que sólo consiguen modelizar una componente a escala global de la estructura de variación, pero no las componentes a escala más detallada, por tanto se utilizan para *filtrar* esa componente global y eliminarla de los valores medidos para, posteriormente, estimar tan sólo la componente local mediante métodos locales.

6.3.2. Métodos locales basados en medias ponderadas

Los *métodos locales* se basan en la utilización de los puntos más cercanos al *punto de interpolación* para estimar la variable Z en este, llamaremos al conjunto de puntos más cercanos *conjunto de interpolación*. Asumen autocorrelación espacial y estiman los valores de Z como una media ponderada de los valores de un conjunto de puntos de muestreo cercanos. Exigen tomar una serie de decisiones:

1. Decidir que puntos cercanos van a formar parte del *conjunto de interpolación* en función de los siguientes criterios (figura ??):
 - Aquellos cuya distancia al punto de interpolación sea inferior a un valor umbral r
 - Los n puntos más cercanos al punto de interpolación

El semivariograma nos permite determinar un valor de distancia de forma objetiva, lógicamente el valor umbral no debe superar el valor del alcance de este..

2. Cual será el *método de interpolación*

- La solución más simple es asignar el valor del punto más cercano (método del *vecino más próximo*), se utilizó antes de la existencia de ordenadores ya que resultaba sencillo hacerlo a mano. Suele dar peores resultados que los demás
- Media de los valores de los puntos incluidos en el conjunto de interpolación.
- Sin embargo es lógico pensar que cuanto más apartados estén dos puntos más diferentes serán sus valores de Z . Para tener en cuenta este hecho se utilizan medias ponderadas utilizando como factor de ponderación el inverso de la distancia elevado a algún exponente k (generalmente $k = 2$).

$$Z'_j = \sum_{i=1}^N W_i * Z_i \quad (6.18)$$

$$W_i = \frac{1/d_{j,i}^2}{\sum_{i=1}^N 1/d_{j,i}^2} \quad (6.19)$$

Por ejemplo, suponiendo que los valores de distancia (d_i) al punto de interpolación (representado por una x en la figura ??) y de precipitación (Z_i) medidos en los puntos del conjunto de interpolación seleccionado en la figura ??,a son los que aparecen en la tabla ??

i	d_i	Z_i
1	52.7	33
2	90.9	27
3	33.8	45
4	56.3	44
5	36.4	46
6	54.8	41

La estimación de Z en el punto de interpolación sería:

- Vecino más próximo: $Z = 45$
- Media: $Z = 39,3$
- Media ponderada por inverso de la distancia ($k=2$): $W_1 = 0,13$, $W_2 = 0,044$, $W_3 = 0,317$, $W_4 = 0,114$, $W_5 = 0,273$, $W_6 = 0,121$, $Z = 42,3$
- Utilización del *kriggeado*, método desarrollado en el marco de la teoría *geoestadística* y que utiliza toda la información procedente del semivariograma para obtener unos factores de ponderación optimizados. Se trata de un método muy extendido, pero es bastante complejo matemáticamente y muy exigente en cuanto a la calidad de la muestra de puntos y las mediciones realizadas de la variable que se interpola. Si esta no es adecuada son preferibles los modelos de medias ponderadas que son los más utilizados tradicionalmente debido a la sencillez de su manejo y a su robustez. Además hay que tener en cuenta que normalmente la función semivariograma se calcula globalmente, sin que se hayan hecho demasiados estudios sobre su variación espacial, y asumiendo que la variable es estacionaria (la media y varianza son constantes en el espacio). Los programas de SIG suelen disponer de herramientas para su utilización o bien de modos de integrar programas específicos de geoestadística.

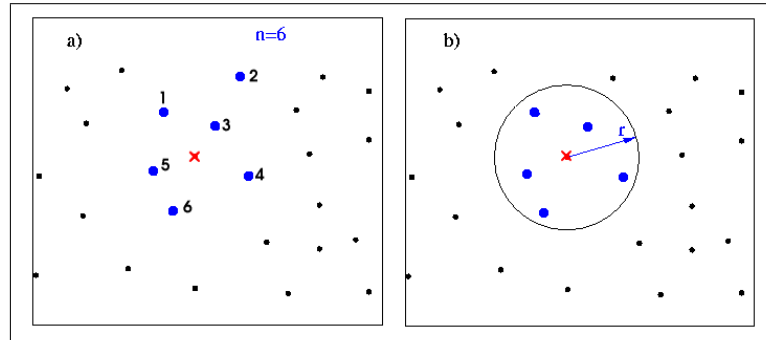


Figura 6.9: Criterios para obtener un conjunto de puntos de interpolación

Uno de los problemas más importantes de los métodos basados en medias ponderadas es que, como su propio nombre indica, interpolan basándose en el valor medio de un conjunto de puntos situados en las proximidades, por tanto nunca se van a obtener valores mayores o menores que los de los puntos utilizados para hacer la interpolación. En consecuencia no se van a interpolar correctamente máximos o mínimos locales y además los puntos de muestreo aparecen en el mapa final como máximos y mínimos locales erróneos. En la figura ?? se muestra un ejemplo en una sola dimensión tratando de interpolar el valor de Z en el punto de coordenada $X = 7$, como puede verse el método de media ponderada por inverso de la distancia genera un valor poco razonable entorno a 15 (la X roja) dada la tendencias observada en los puntos.

6.3.3. Interpolación local por *splines*

El método de los *splines* ajusta funciones polinómicas en las que las variables independientes son X e Y . Es similar a una interpolación global mediante regresión, pero ahora esta interpolación se lleva a cabo localmente. En general producen resultados muy buenos con la ventaja de poder modificar una serie de parámetros en función del tipo de distribución espacial de la variable.

La técnica de *splines* consiste en el ajuste local de ecuaciones polinómicas en las que las variables independientes son X e Y . La forma de la superficie final va a depender de un parámetro de tensión que hace que el comportamiento de la superficie interpolada tienda a asemejarse a una membrana más o menos tensa o aflojada que pasa por los puntos de observación.

La ventaja fundamental del método de *splines* respecto a los basados en medias ponderadas es que, con estos últimos, los valores interpolados nunca pueden ser ni mayores ni menores que los valores de los puntos utilizados para interpolar. Por tanto resulta imposible interpolar correctamente máximos y mínimos. En la figura ?? podemos ver como el método de *splines* genera en este caso una estimación mucho mejor, el valor de la curva a su paso por $X=7$, al menos visualmente, que da un valor en torno a 18.

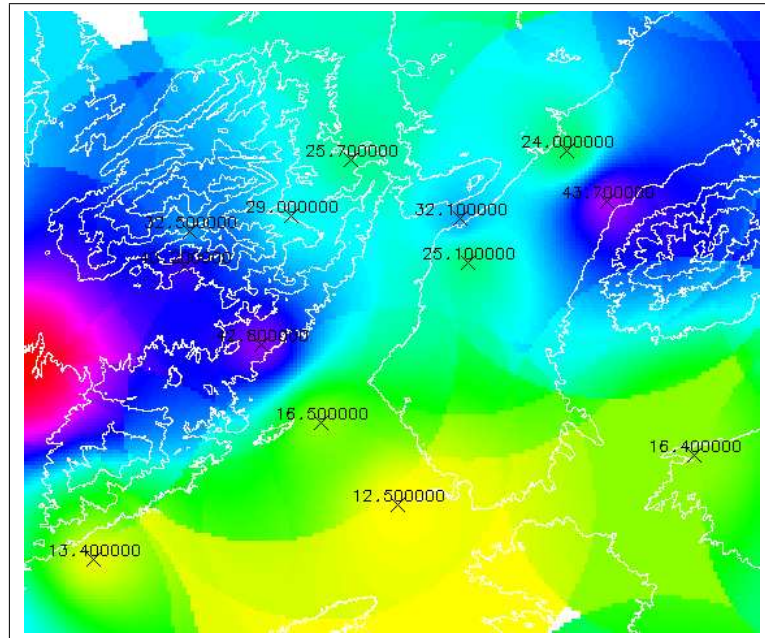


Figura 6.10: Interpolación por media ponderada por el inverso de la distancia

6.3.4. Interpolación local mediante TIN

Las Redes Irregulares de Triángulos (TIN son las iniciales en inglés) se generan a partir de valores puntuales tratando de conseguir triángulos que maximicen la relación área/perímetro, el conjunto de todos los triángulos forma un objeto geométrico denominado *conjunto convexo*. Suelen utilizarse como método para representar modelos de elevaciones (y producen resultados visualmente muy buenos) sin embargo a la hora de integrarlos con el resto de la información raster es necesario interpolar una capa raster a partir de los triángulos (figuras ?? y ??).

Esta interpolación se basa en que cada uno de los tres vértices de los triángulos tienen unos valores X, Y y Z a partir de los cuales puede obtenerse un modelo de regresión $Z = AX + BY + C$ que permite interpolar la variable Z en cualquier punto del rectángulo. En definitiva puede asimilarse a un método de media ponderada por inverso de la distancia ya que el resultado siempre va estar acotado por los valores máximo y mínimo de Z en los vértices del triángulo y será más parecido al del vértice más cercano. En el resultado final de una interpolación TIN no aparecen artefactos circulares, como en los de inverso de la distancia puros, pero si aparecen artefactos triangulares.

En el ejemplo de la figura ?? el punto de interpolación estaría en el triángulo formado por los puntos 3,4 y 5, lo que significa que sus coeficientes de ponderación serían (aplicando la ecuación ?? con $k = 1$): $W_3 = 0,395$, $W_4 = 0,237$, $W_5 = 0,367$ $Z = 45,1$.

El conjunto convexo así generado tiene otra utilidad, define el área en la que es razonable interpolar dada la

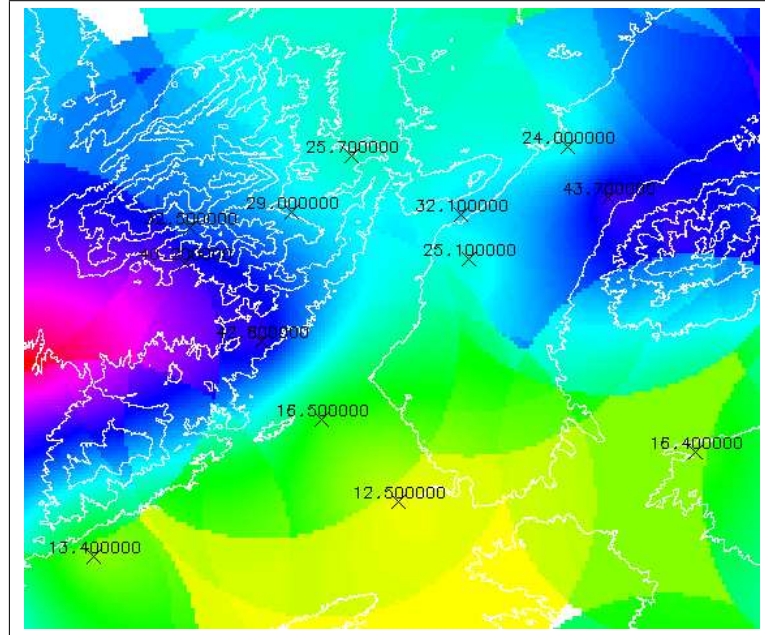


Figura 6.11: Interpolación por kriggeado

muestra de puntos disponible.

6.4. Validación y validación cruzada

Para verificar la calidad de un mapa interpolado debe utilizarse un *conjunto de validación* formado por una serie de puntos de muestreo (de los que por tanto se conoce el valor real) en los que se va a hacer una estimación de dicho valor real (sin utilizar por supuesto el valor medido en ellos). La diferencia entre el valor medido y el estimado es el error de estimación en ese punto. De este modo a cada punto de validación se asigna un error. El conjunto de los errores debe tener las siguientes características:

1. Media de errores y media de errores al cuadrado próxima a cero
2. Los valores de error deben ser independientes de su localización en el espacio y no estar autocorrelacionados
3. La función de distribución de los errores debe aproximarse a la distribución normal

El problema es que en muchos casos se dispone de pocos puntos de muestreo, por lo que no resulta conveniente reservar algunos de ellos como puntos de validación, la alternativa es el procedimiento de validación cruzada.

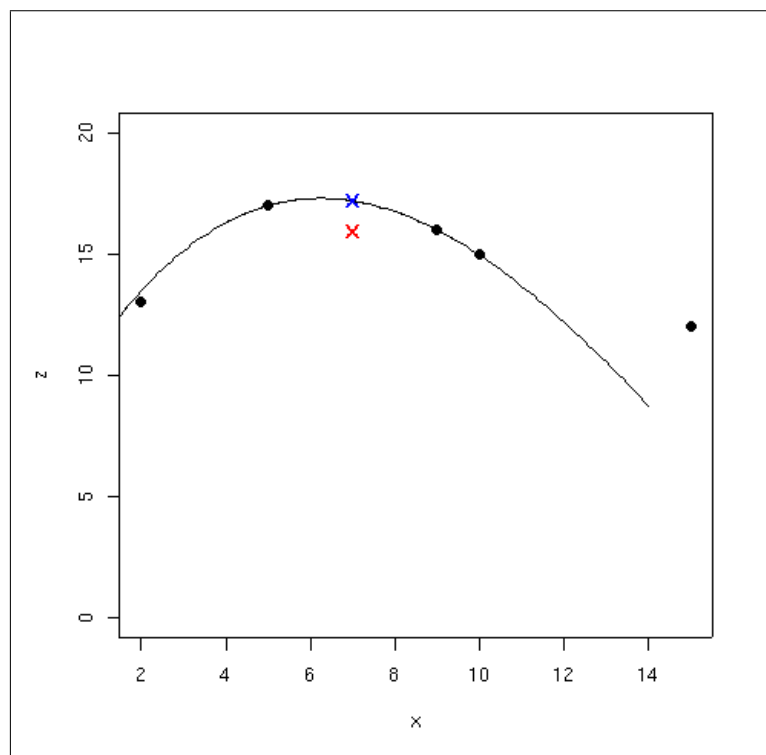


Figura 6.12: Comparación de resultados con medias ponderadas y con splines

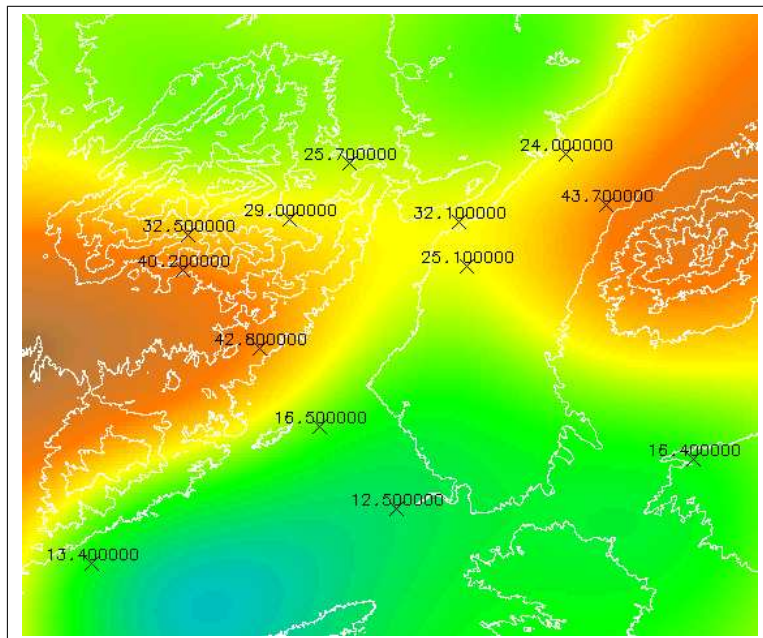


Figura 6.13: Interpolación por splines

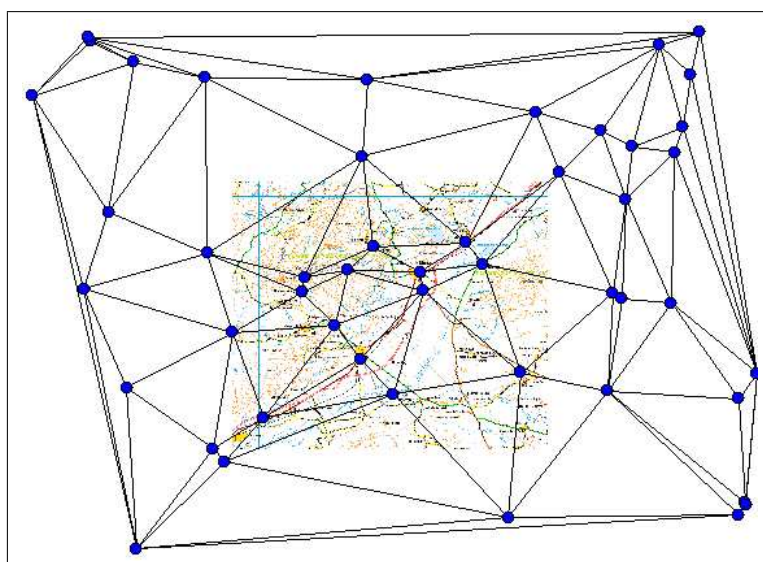


Figura 6.14: Red Irregular de Triángulos formando un conjunto convexo

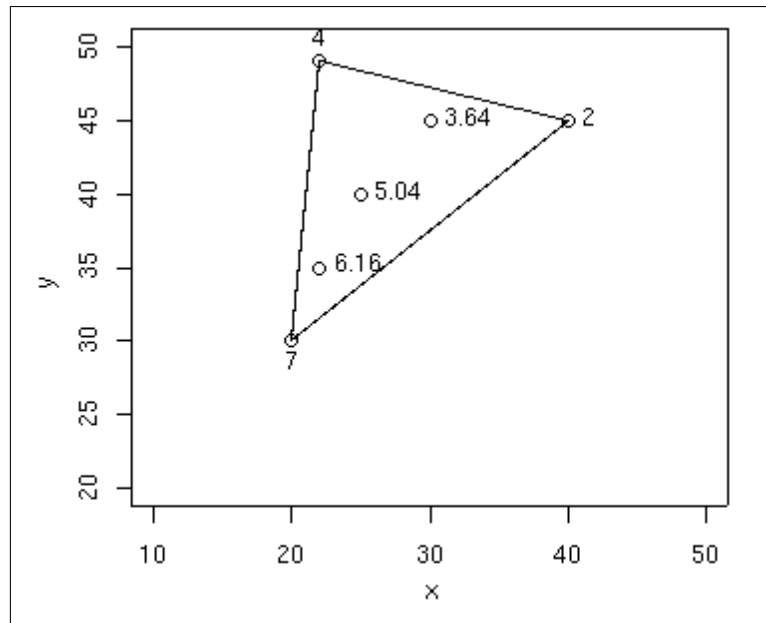


Figura 6.15: Interpolación dentro de uno de los triángulos de un TIN

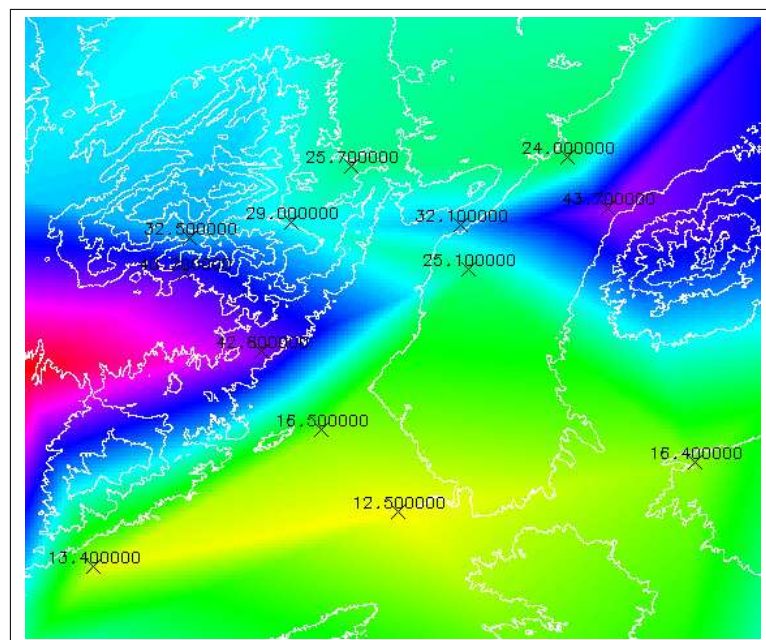


Figura 6.16: Interpolación mediante Red Irregular de Triángulos

Este consiste en la estimación del valor de la variable Z , con el procedimiento de interpolación que quiere validarse, en cada uno de los puntos de muestreo, aunque sin incluir dicho punto de muestro. De esta manera se conoce para cada punto de muestreo tanto el valor real como el valor estimado de forma que puede llevarse a cabo el análisis estadístico de errores antes mencionado.

6.5. Combinación de diferentes métodos

Generalmente se asume que la distribución espacial de una variable cuantitativa está condicionada por la suma de tres procesos:

- Una tendencia a escala global y que por tanto puede modelizarse mediante métodos de interpolación global
- Una variación local autocorrelacionada que puede modelizarse mediante métodos locales
- Un conjunto de factores indeterminados y errores de medida que se agrupan en un término final de error

La lluvia recogida durante un episodio de precipitación concreto puede servir como ejemplo. En primer lugar la disposición de los frentes de lluvia puede dar lugar a una tendencia global por la que la precipitación varía en función de las coordenadas X e Y ; en segundo lugar la dinámica de los núcleos convectivos (nubes de tormenta) genera una variabilidad autocorrelacionada, a una escala más detallada, que se superpone a la tendencia; finalmente diversos factores aleatorios (viento, errores en la medición) introducen una última fuente de variabilidad difícil de modelizar.

La técnica más habitual para interpolar las variables resultantes, es utilizar en primer lugar un procedimiento global, a ser posible fundamentado en bases físicas. Por ejemplo, la temperatura disminuye con la altitud, por tanto si se dispone de un mapa de elevaciones y temperaturas medidas en observatorios de altitud conocida resulta sencillo estimar un modelo de regresión y aplicarlo posteriormente con las técnicas de álgebra de mapas vistas en temas anteriores. En el caso de propiedades del suelo, estas van a depender del tipo y uso de suelo, por lo que un procedimiento de clasificación va a dar buenos resultados.

Una vez que se ha aplicado un método global, deben analizarse los residuales, es decir las diferencias entre los valores originales medidos y los valores estimados por el método. Si estos residuales no cumplen las condiciones expuestas en el apartado anterior (especialmente si se comprueba que no son espacialmente independientes) debería procederse a utilizar métodos locales para la interpolación de estos residuales ya que resulta obvio que existe una estructura de variación espacial local independiente de la estructura general modelizada mediante métodos globales.

6.6. Interpolación a partir de curvas de nivel

La interpolación a partir de puntos resulta necesaria cuando, a priori, no se conoce nada acerca de la distribución espacial de la variable y es necesario medirla en una serie de puntos de muestro a partir de los que estimar sus

valores en toda el área de trabajo. En el caso de la topografía, si contamos con un mapa topográfico, el caso es algo diferente ya que lo que vamos a tener no son puntos sino isolinneas derivadas del análisis de pares de fotogramas estereoscópicos.

El procedimiento va a ser en primer lugar digitalizar las curvas de nivel y en segundo lugar utilizar alguno de los programas que interpolan a partir de curvas. En general el fundamento de todos estos métodos consiste en hacer interpolaciones lineales o polinómicas entre curva y curva. Los algoritmos que utilizan IDSRISI o GRASS son bastante simples pero tiene una serie de problemas a tener en cuenta. Estos problemas se derivan directamente del tipo de algoritmo, que pueden ser resueltos con algo de esfuerzo adicional.

En general existen tres procedimientos una vez que se dispone de curvas de nivel en formato digital:

1. Rasterización del vectorial e interpolación a partir de los valores de las celdillas,
2. Interpolación directa a partir de curvas de nivel mediante splines,
3. Descomposición de las curvas de nivel en puntos e interpolación mediante una Red Irregular de Triángulos.

Puesto que los dos últimos ya se han tratado en parte en apartados anteriores, a continuación se exponen los problemas que presenta la interpolación a partir de curvas de nivel rasterizadas. Este procedimiento suele estar presente en casi todos los SIG y constituye un método de interpolación robusto.

Existen tres problemas fundamentales que pueden dar lugar a errores y que a veces no son fáciles de corregir:

1. Las curvas deben estar cerradas y deben cortar los límites de la capa raster creada, esto supone un problema con los ficheros procedentes de cartografía en papel ya que las curvas de nivel pueden haberse cortado para insertar etiquetas indicando la altitud.
2. Si se rasterizan las curvas, no deben superponerse ya que en la práctica equivale a que algunas curvas no se cierren.
3. Las curvas de nivel rasterizadas mantienen su valor con lo que el MDE adquiere un aspecto abanclado
4. Tanto en GRASS (hasta la versión 4.3) como en IDRISI, el resultado es un MDE con valores enteros por lo que en las zonas llanas se puede producir un *abanclamiento* artificial si las unidades en que se mide la altitud no permiten una relación **equidistancia de curvas de nivel/número de pixels entre curvas de nivel** adecuado.

El primer problema se soluciona en la fase de digitalización y no supone mayor complicación El segundo resulta el más insidioso. Una solución sería retocar a mano las curvas de nivel rasterizadas pero además de muy trabajoso supone desplazar curvas arbitrariamente. Otra solución más adecuada sería generar MDE de áreas especialmente abruptas con resoluciones más pequeñas. Estos MDE pueden después degradarse al tamaño de celdilla adecuado y superponerse al original. Respecto al tercero, la solución será utilizar la capa de curvas de nivel rasterizadas y mantener los valores filtrados de esta. Finalmente, el último de los problemas se soluciona

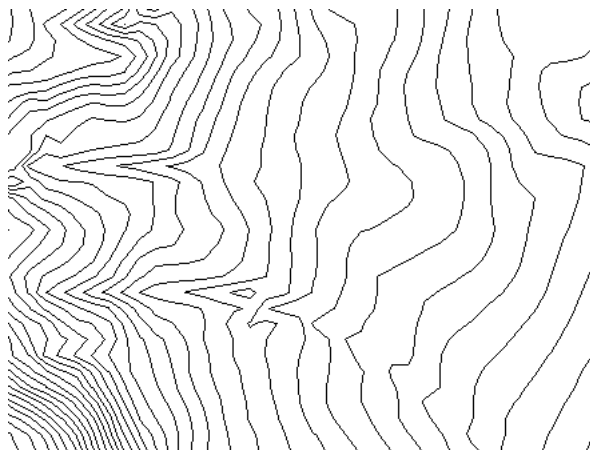


Figura 6.17: Curvas de nivel en formato vectorial

cambiando la unidad en que se expresan las altitudes (de metros a centímetros por ejemplo) multiplicando por la potencia de 10 que sea necesaria.

Como ejemplo, en la figura ?? aparece un conjunto de curvas de nivel a partir de las que se pretende interpolar un MDE. En la figura ?? se muestra el resultado de rasterizar estas curvas de nivel con un tamaño excesivamente grande de celdilla y con un tamaño adecuado. Lógicamente el resultado de la primera interpolación no será bueno.

Las figuras ?? y ?? muestran el problema de la precisión vertical de las curvas. En el primer caso las curvas están en metros y el MDE resultante muestra repeticiones de valor en celdillas vecinas que no tendrían por que producirse, en consecuencia el mapa de pendientes resulta claramente erróneo. Por el contrario si las curvas de nivel se pasan a centímetros (figura ??) tanto el MDE como el mapa de pendientes resultan ser mucho mejores.

6.7. Bibliografía

- Burrough, P.A. & McDonnell, R.A.; 2000 *Principles of Geographical Information Systems* Oxford University Press, Oxford, 333 pp.¹
- Mitas, L & Mitasova, H. (1999) Spatial Interpolation en Lonngley, M. F. Goodchild, D. J. Maguire, D. W. Rhind (Eds.) *Geographical Information Systems*, pp. 481-492.

¹Los capítulos sobre interpolación de este libro son especialmente buenos

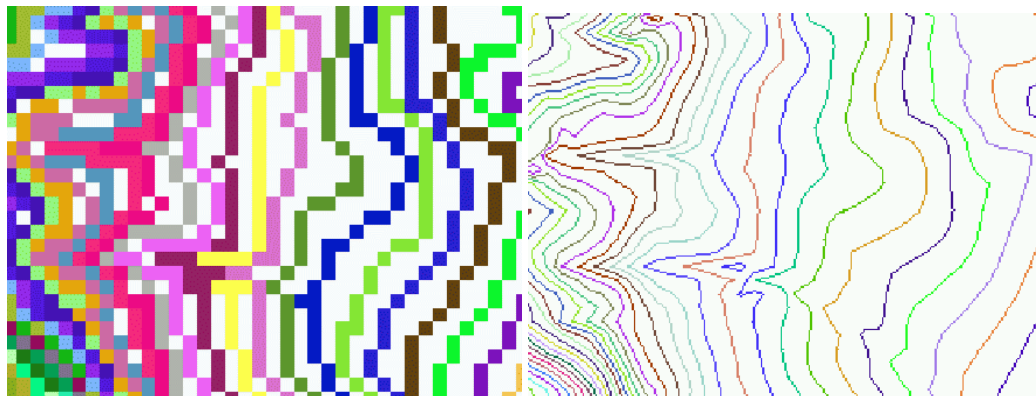


Figura 6.18: Curvas de nivel rasterizadas con tamaño de celdilla demasiado grande y con un tamaño adecuado

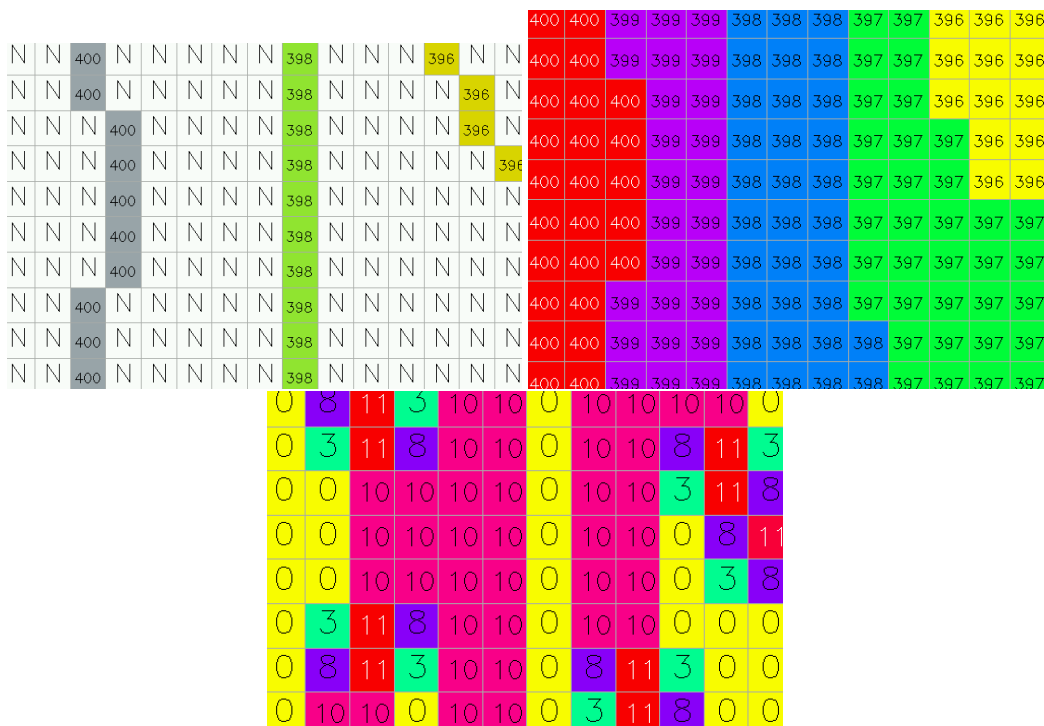


Figura 6.19: Curvas de nivel rasterizadas con equidistancia demasiado pequeña. MDE y mapa de pendientes resultantes



Figura 6.20: MDE obtenido multiplicando por 10 la altitud de las curvas de nivel y mapa de pendientes resultante