

## **Matemáticas II para Alumnos de Bachillerato**

### **Recomendaciones para la preparación de las P.A.U. en la materia Matemáticas II. Curso 2015-2016.**

A finales del curso 2008-2009, una vez publicados los nuevos currículos del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia y las nuevas normas reguladoras de las Pruebas de Acceso a la Universidad (P.A.U.), la Comisión Organizadora de dichas pruebas encomendó la tarea de elaborar las recomendaciones para la preparación de dichas pruebas en la materia Matemáticas II a un grupo de trabajo constituido a tal efecto.

Conviene recordar que los contenidos y criterios de evaluación generales son, **por ley**, los establecidos en el currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia, publicados en el **B.O.R.M. de 10 de septiembre de 2008** (y que se incluye al comienzo de este documento). No obstante, y con objeto de aclarar aquellos aspectos que no estuvieran suficientemente claros o que tuvieran una especial relevancia en las citadas pruebas, dicho grupo de trabajo confeccionó una serie de **recomendaciones** que sirvieran para preparar dichas pruebas a partir del curso 2009-2010 y que estado vigentes hasta el curso 2011-2012.

En mi calidad de Coordinador de la materia de Matemáticas II, a finales del curso 2011-2012 revisé con detalle las citadas recomendaciones e incluí unas ligeras modificaciones, que fueron debatidas y discutidas con los profesores de los centros en la reunión de coordinación del día 16 de octubre de 2012. El resultado de dicho debate fue el presente documento que recoge las recomendaciones y que está **vigente desde el pasado curso 2012-2013**.

En Murcia, a 20 de noviembre de 2015.

Atentamente



Luis J. Alías Linares  
Coordinador de Matemáticas II  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Matemáticas, Universidad de Murcia

# **Contenidos y Criterios de Evaluación Oficiales de la asignatura Matemáticas II**

**(Decreto n.º 262/2008, de 5 de septiembre, por el que se establece el currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia, páginas 28109-28110).**

## **CONTENIDOS**

### **BLOQUE 1. Álgebra lineal.**

- Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos.
- Operaciones con matrices. Aplicación de las operaciones y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.
- Determinantes. Cálculo de determinantes de órdenes 2 y 3 mediante la regla de Sarrus. Propiedades elementales de los determinantes.
- Rango de una matriz. Cálculo del rango de una matriz: por el método de Gauss y por menores. Inversa de una matriz.
- Sistemas de ecuaciones lineales. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Representación matricial de un sistema. Clasificación de los sistemas lineales según sus soluciones. Teorema de Rouché-Fröbenius. Regla de Cramer.
- Aplicación de los sistemas de ecuaciones a la resolución de problemas.
- Utilización de los distintos recursos tecnológicos (calculadoras científicas y gráficas, programas informáticos, etc.) como apoyo en los procedimientos que involucren el manejo de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

### **BLOQUE 2. Geometría.**

- Vectores en el espacio tridimensional. Productos escalar, vectorial y mixto: Significado geométrico y expresión analítica.
- Ecuaciones de rectas y planos en el espacio.
- Resolución de problemas de posiciones relativas: incidencia, paralelismo y perpendicularidad, entre rectas y planos.
- Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

### **BLOQUE 3. Análisis.**

- Límite de una sucesión. Concepto de límite de una función. Cálculo de límites.
- Continuidad de una función en un punto y en un intervalo. Propiedades elementales. Tipos de discontinuidad.
- Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto. Función derivada. Propiedades elementales. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta.
- Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales y la representación gráfica de una función. Problemas de optimización.
- Primitiva de una función. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas, por cambio de variable o por otros métodos sencillos.
- Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Cálculo de integrales definidas. Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.
- Utilización de los distintos recursos tecnológicos (calculadoras científicas y gráficas, programas informáticos, etc.) como apoyo en el estudio de las propiedades y en los procedimientos de cálculo.

### **CRITERIOS DE EVALUACIÓN**

1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices y determinantes como instrumento para representar e interpretar datos, tablas, grafos, relaciones y ecuaciones, y en general para resolver situaciones diversas.
2. Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en tres dimensiones y utilizar el lenguaje vectorial, las operaciones con vectores y las técnicas apropiadas en cada caso para resolver situaciones y problemas extraídos de ellas, así como de la física y demás ciencias del ámbito científico-tecnológico, dando una interpretación de las soluciones.
3. Identificar, calcular e interpretar las distintas ecuaciones de la recta y el plano en el espacio para resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos y utilizarlas, junto con los distintos productos entre vectores dados en bases ortonormales, para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes.
4. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajusta da al contexto.

5. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados, que incluyen la utilización de límites y derivadas, para encontrar, analizar e interpretar características destacadas (dominio, recorrido, continuidad, simetrías, periodicidad, puntos de corte, asíntotas, extremos, intervalos de crecimiento) de funciones expresadas algebraicamente en forma explícita, con objeto de representarlas gráficamente y extraer información práctica en una situación de resolución de problemas relacionados con fenómenos naturales.
6. Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización.
7. Aplicar el cálculo de integrales en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables.
8. Utilizar los distintos recursos tecnológicos a su disposición de forma conveniente en la realización de cálculos, estimación y comprobación de soluciones y en la resolución de problemas en un contexto adecuado.
9. Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar, comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas y tecnológicas adecuadas en cada caso.
10. Expresarse de forma correcta, verbalmente o por escrito, en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, empleando los términos, notaciones y representaciones matemáticas adecuadas a cada caso.
11. Emplear razonamientos rigurosos al aplicar conceptos y procedimientos en la resolución de problemas, realizando correctamente los cálculos necesarios y utilizando la notación apropiada para obtener el resultado expresado en la unidad adecuada.

# **Recomendaciones para la preparación de las P.A.U. en la materia MATEMÁTICAS II para Alumnos de Bachillerato, vigentes desde el pasado curso 2012-2013.**

## **CONTENIDOS**

### **ÁLGEBRA LINEAL**

#### 1. Matrices y determinantes.

Operaciones con matrices: suma, producto por un número y producto de matrices. Propiedades elementales de los determinantes. Cálculo de determinantes de órdenes dos y tres. Rango de una matriz. Obtención por el método de Gauss y usando determinantes. Definición de matriz inversa de una matriz cuadrada. Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada de órdenes dos y tres por Gauss o mediante determinantes. Ecuaciones matriciales.

#### 2. Sistemas.

Representación matricial de un sistema. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales por Gauss y Cramer. Enunciado, demostración y aplicación del Teorema de Rouche-Fröbenius distinguiendo los tres casos posibles en un sistema. Discusión de sistemas sencillos con uno o dos parámetros. Aplicación a la resolución de problemas.

### **GEOMETRÍA**

#### 3. Vectores.

Vectores en el espacio tridimensional. Dependencia e independencia lineal. Determinar si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente. Determinar si un conjunto de vectores es una base del espacio. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico. Ángulo entre dos vectores.

#### 4. Rectas y planos.

Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas entre puntos, rectas y planos. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

### **ANÁLISIS**

#### 5. Funciones.

Concepto de función real. Dominio de una función. Concepto de límite de una función. Cálculo de límites. Límites infinitos y en  $+$  y  $-$  infinito. Cálculo de límites laterales. Asíntotas. Continuidad de una función en un punto y en un

intervalo. Tipos de discontinuidad. Determinación del signo de una función (regionamiento).

Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto. Cálculo de la ecuación de la recta tangente y normal a una función en un punto. Función derivada. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función y a la resolución de problemas de optimización. Aplicación de la regla de l'Hôpital para el cálculo de límites indeterminados.

Utilización de las propiedades locales y globales de una función para su estudio gráfico. Representación gráfica aproximada de funciones polinómicas, racionales, potenciales, exponenciales y logarítmicas sencillas.

## 6. Integrales.

Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Enunciado y aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de Barrow. Integrales inmediatas. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas por partes, cambio de variable y descomposición en fracciones simples en el caso en que el denominador tenga raíces reales de orden uno. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas sencillas determinadas por curvas y rectas.

## **CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN**

### **ÁLGEBRA LINEAL**

#### **Matrices.**

1. Conocer y realizar con destreza las operaciones de matrices (suma, resta, producto y multiplicación por un escalar).
2. Utilizar las matrices como herramienta para la representación de datos estructurados en tablas y grafos.
3. Conocer el concepto de rango de una matriz y saber calcularlo mediante transformaciones elementales.
4. Calcular la inversa de una matriz mediante transformaciones elementales.
5. Resolver ecuaciones matriciales.

#### **Determinantes.**

1. Conocer y saber aplicar las propiedades de los determinantes.
2. Calcular determinantes de matrices de orden 2 y 3.
3. Aplicar el conocimiento de los determinantes para calcular la inversa de una matriz.
4. Calcular el rango de una matriz mediante determinantes.

## **Sistemas de Ecuaciones Lineales.**

1. Conocer el concepto de sistemas de ecuaciones lineales equivalentes así como sus transformaciones elementales.
2. Conocer los conceptos de sistema compatible (determinado e indeterminado) e incompatible.
3. Clasificar y, en su caso, resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.
4. Saber enunciar, demostrar y aplicar el Teorema de Rouché-Fröbenius a la discusión de sistemas de ecuaciones lineales con o sin parámetros (no más de dos).
5. Conocer y saber utilizar la Regla de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y la discusión de éstos en función de parámetros (no más de dos).

## **GEOMETRÍA**

### **Vectores.**

1. Conocer y manejar las operaciones con vectores en  $\mathbb{R}^3$  (suma, diferencia, producto por un escalar).
2. Determinar si un conjunto de vectores son o no linealmente independientes.
3. Determinar si un vector es combinación lineal de otros dados.
4. Determinar si una familia de vectores es una base en  $\mathbb{R}^3$ .
5. Determinación de bases de  $\mathbb{R}^3$  mediante determinantes.

### **Rectas y planos.**

1. Deducir e identificar las ecuaciones de una recta o de un plano en todas sus variantes (vectorial, paramétrica, implícita y continua) y saber pasar de una forma a cualquiera de las demás.
2. Determinar puntos, rectas y planos a partir de propiedades que los definan. Por ejemplo: recta que pasa por dos puntos, plano determinado por una recta y un punto, etc.
3. Determinar si varios puntos son colineales o coplanarios
4. Resolver problemas de incidencia y paralelismo.
5. Estudiar las posiciones relativas de rectas y planos, como aplicación del estudio de sistemas de ecuaciones lineales.
6. Conocer y saber aplicar el concepto de haz de planos paralelos a uno dado o con arista una recta dada.

### **Problemas Métricos.**

1. Conocer el producto escalar de dos vectores, sus propiedades y su interpretación geométrica, así como su expresión en coordenadas rectangulares.
2. Aplicar el producto escalar para la determinación de ángulo de dos vectores.
3. Plantear y resolver problemas métricos en  $\mathbb{R}^3$ . Por ejemplo: distancia de un punto a una recta, a un plano, perpendicular común a dos rectas, distancia entre dos rectas, ángulo entre dos rectas, entre recta y plano, etc.

4. Conocer el producto vectorial de dos vectores y su interpretación geométrica y aplicarlo al cálculo de áreas de triángulos y paralelogramos.
5. Conocer el producto mixto de tres vectores y aplicarlo al cálculo de volúmenes de paralelepípedos y tetraedros.

## **ANÁLISIS**

### **Límites de funciones. Continuidad.**

1. Conocer los conceptos de límite y límites laterales de una función en un punto, así como el de límites en  $+\infty$  y en  $-\infty$ .
2. Calcular límites de funciones, resolviendo las indeterminaciones de las formas:  $\infty/\infty$ ,  $0/0$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ .
3. Conocer y saber representar el significado gráfico de un límite o un límite lateral.
4. Determinación y representación de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
5. Conocer el concepto de función continua en un punto y los tipos de discontinuidades. Estudiar la continuidad de funciones definidas a trozos.
6. Determinación del dominio y los puntos de continuidad de una función. Determinación del signo de una función (regionamiento).

### **Derivada. Aplicaciones.**

1. Conocer el concepto de derivada de una función en un punto, así como el de función derivada de una dada y la relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función en un punto.
2. Conocer la interpretación geométrica de la derivada y calcular la ecuación de la recta tangente y normal a una curva en uno de sus puntos.
3. Conocer la interpretación de la derivada como medida de la variación de una magnitud respecto a otra y saber resolver ejercicios en los que dichas magnitudes vengan relacionadas de forma sencilla.
4. Conocer el álgebra de las funciones derivables y saber calcular la derivada en un punto de funciones sencillas a partir de la definición.
5. Saber calcular la derivada de cualquier función elemental.
6. Estudiar la derivabilidad de funciones definidas a trozos.
7. Conocer la Regla de la Cadena para la derivación de funciones compuestas y aplicarla para calcular derivadas de dicho tipo de funciones.
8. Distinguir entre extremos absolutos y relativos de una función.
9. Determinar los posibles extremos relativos de una función.
10. Estudiar el crecimiento de una función mediante su función derivada.
11. Determinar el tipo de extremo relativo a partir del crecimiento de la función.
12. Conocer el criterio de la segunda derivada para la determinación del tipo de extremo relativo.
13. Conocer el concepto de punto de inflexión de una función y saber determinar los puntos de inflexión de una función dada.
14. Conocer los conceptos de función cóncava y convexa y saber encontrar los intervalos de concavidad y convexidad de una función.
15. Aplicar la teoría de máximos y mínimos a problemas de optimización de tipo geométrico, tecnológico, etc.



16. Representar de forma aproximada las gráficas de funciones de los tipos: polinómicas, racionales, potenciales, exponenciales y logarítmicas sencillas, definidas explícitamente, estudiando todos o sólo algunos de los siguientes apartados: dominio, cortes con los ejes, simetrías, asíntotas, límites laterales, límites en  $+\infty$  y en  $-\infty$ , regionamiento, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión. Por ejemplo:  $x+x^3$ ,  $(x+1)/(x+2)$ ,  $x^2/(x+x^2)$ ,  $(x^2+1)^{1/2}$ ,  $x-(x^2+1)^{1/2}$ ,  $e^{-2x}$ ,  $2^x$ ,  $\ln(x+1)$ , etc.
17. Obtener información sobre una función a partir de la gráfica de la misma o de la de su derivada.
18. Saber aplicar la regla de l'Hôpital para el cálculo de límites indeterminados.

### **Concepto de área. Integrales.**

1. Conocer el concepto de función primitiva de una dada.
2. Conocer la relación entre dos primitivas de una función y saber determinar de entre la familia de las primitivas de una función aquella que pasa por un punto dado.
3. Conocer las integrales indefinidas inmediatas.
4. Conocer y saber aplicar el método de cambio de variable (para cambios sencillos), para calcular integrales indefinidas.
5. Conocer el método de integración por partes para calcular integrales indefinidas y saber aplicarlo iteradamente.
6. Calcular primitivas de funciones racionales por el método de descomposición en fracciones simples en las que el denominador tenga raíces reales simples.
7. Conocer el concepto de integral definida como límite de sumas, y relacionarlo con el cálculo de áreas.
8. Conocer las propiedades de la integral definida (linealidad, aditividad respecto al intervalo de integración y monotonía respecto a la función integrando) a partir de su interpretación geométrica para funciones positivas.
9. Conocer el concepto de función integral. Saber enunciar y aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de Barrow.
10. Calcular áreas de recintos planos de determinación sencilla.

## **Criterios generales de corrección para los exámenes**

1. Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación.
2. Se valorará positivamente las explicaciones claras y precisas y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas.
3. Si se comete un error que pueda influir en resultados posteriores en la misma pregunta, se tendrá en cuenta si existe coherencia de la respuesta final con ese resultado erróneo intermedio obtenido. En caso de tal coherencia, se valorará el resto de las cuestiones de la misma pregunta, aunque si el error ha llevado a un problema más simple que el propuesto, disminuirá la calificación.
4. Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de aproximadamente el 10% de la nota total del correspondiente ejercicio donde se cometan. La reiteración de dichos errores podrá conllevar una penalización mayor.
5. Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza y la incorrecta redacción, podrán ser causa de la bajada de hasta un punto (e incluso más en casos extremos) en la calificación total del ejercicio.
6. Los alumnos podrán utilizar calculadoras, pero estas calculadoras no podrán ser ni programables, ni tener la posibilidad de mostrar gráficos en la pantalla, ni que realicen cálculos algebraicos o integrales, ni aquellas puedan enviar o recibir información a otras calculadoras o dispositivos electrónicos.

# **Exámenes**

## **ESTRUCTURA DE LOS EXÁMENES**

El examen constará de dos opciones (A y B) con cuatro cuestiones cada una. El alumno deberá elegir una opción (A o B) y resolver las cuatro cuestiones de esa opción.

Las cuestiones serán:

**- 1 Álgebra Lineal**

Con un peso aproximado del 25% en la nota final.

**- 1 Geometría**

Con un peso aproximado del 25% en la nota final.

**- 2 Análisis**

Con un peso aproximado del 25% en la nota final cada una.

En cada una de las cuestiones que se propongan en los exámenes aparecerá la puntuación máxima que se puede obtener con la correcta contestación de la misma. Si en una cuestión hay más de un apartado, cada apartado llevará su propia puntuación.

Las cuestiones se pueden responder en el orden que se considere oportuno, pero de manera que quede claro en todo momento qué cuestión se está respondiendo y dónde empieza y termina la resolución.

La duración del examen será de 1 hora y media.