
Tema 4. Probabilidad

Resumen del tema

4.1. Introducción a la Probabilidad

- *Experimento*: cualquier proceso que permite asociar a cada individuo de una población un símbolo (numérico o no) entre los símbolos de un conjunto dado a priori.
 - ★ *Experimento determinista*: es aquel en el que los resultados están totalmente determinados una vez que se fijan las condiciones en las que se realiza el experimento.
 - ★ *Experimento aleatorio*: está caracterizado por las tres propiedades siguientes:
 - Todos sus posibles resultados son conocidos con anterioridad.
 - No se puede predecir el resultado del experimento.
 - El experimento puede repetirse en condiciones idénticas.
- *Ensayo o prueba*: es la realización concreta de un experimento aleatorio.
- *Dato, observación o resultado*: es el símbolo que se ha obtenido en un ensayo de un experimento aleatorio.
- *Suceso elemental*: cada resultado de un experimento aleatorio.
- *Espacio muestral* (Ω): conjunto de todos los sucesos elementales.
- *Suceso* (A, B, \dots): conjunto de sucesos elementales.
- *Suceso seguro*: es el espacio muestral.
- *Suceso imposible* (\emptyset): no consta de ningún suceso elemental.

4.2. Operaciones con sucesos

- *Suceso contrario*: Dado un suceso A , se denomina **suceso contrario** de A al suceso \bar{A} que ocurre cuando no ocurre A ; es decir, \bar{A} consta de los sucesos elementales de Ω que no están incluidos en A .
- *Unión de sucesos*: Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento, se entiende por **unión** de ambos, y se denota por $A \cup B$, al suceso que ocurre cuando ocurre A , cuando ocurre B o cuando ocurren ambos; es decir, al formado por todos los sucesos elementales que son de A o de B .
- *Intersección de sucesos*: Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento, se entiende por **intersección** de ambos, y se representa por $A \cap B$, al suceso que ocurre cuando ocurren A y B a la vez; es decir, al formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a A y a B simultáneamente.

- **Sucesos incompatibles:** A y B son dos sucesos incompatibles si no tienen ningún suceso elemental en común ($A \cap B = \emptyset$).
- **Diferencia de sucesos:** Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se entiende por **diferencia** de ambos, y se denota por $A - B$, al suceso que ocurre cuando ocurre A pero no B ; es decir, al que consta de los sucesos elementales de A que no están en B .

4.3. Regla de Laplace

Si un experimento aleatorio da lugar a un número finito de sucesos elementales, todos ellos igualmente posibles (es decir, no se conoce razón alguna que favorezca la presentación de uno respecto de los otros), entonces la **probabilidad de un suceso** A es:

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de casos favorables al suceso } A}{\text{n}^\circ \text{ de casos posibles del experimento}}.$$

4.4. Propiedades de la probabilidad

- **Propiedad fundamental de la probabilidad:** La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1; es decir:

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad \text{para todo suceso } A.$$

- **Probabilidad del suceso seguro:** La probabilidad del espacio muestral es 1; es decir:

$$P(\Omega) = 1.$$

- **Probabilidad del suceso contrario:** La probabilidad del suceso contrario de A es:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

- **Probabilidad del suceso imposible:** La probabilidad del suceso imposible es cero; es decir:

$$P(\emptyset) = 0.$$

- **Probabilidad de la diferencia de sucesos:** Si B está incluido en A entonces:

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

- **Probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles:** Si A y B son dos sucesos incompatibles entonces la probabilidad del suceso unión es la suma de las probabilidades de A y B ; es decir:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad \text{si } A \text{ y } B \text{ son incompatibles.}$$

- **Probabilidad de la unión de n sucesos incompatibles:** Si varios sucesos son incompatibles dos a dos, la probabilidad de la unión de todos ellos es la suma de sus probabilidades; es decir:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n),$$

si A_1, A_2, \dots, A_n son incompatibles dos a dos.

- **Probabilidad de la unión de dos sucesos cualesquiera:** La probabilidad de la unión de dos sucesos cualesquiera es igual a la probabilidad del primero, más la probabilidad del segundo, menos la probabilidad de la intersección; es decir:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- **Probabilidad de la unión de tres sucesos cualesquiera:** Si A , B y C son tres sucesos cualesquiera entonces la probabilidad de la unión de los tres sucesos es:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Ejemplos que se van a resolver en clase

Ejemplo 4.1. Dar un ejemplo de experimento aleatorio. Determinar el espacio muestral. Poner dos ejemplos de sucesos (A y B).

Ejemplo 4.2. Determinar los sucesos contrarios de los del Ejemplo 4.1 (\bar{A} y \bar{B}).

Ejemplo 4.3. Con los sucesos A y B del Ejemplo 4.1 determinar las siguientes uniones de sucesos: $A \cup B$ y $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Ejemplo 4.4. Con los sucesos A y B del Ejemplo 4.1 determinar las siguientes intersecciones de sucesos: $A \cap B$ y $\bar{A} \cap \bar{B}$.

Ejemplo 4.5. ¿Son incompatibles los sucesos A y B del Ejemplo 4.1?

Ejemplo 4.6. Con los sucesos A y B del Ejemplo 4.1 determinar las siguientes diferencias de sucesos: $A - B$ y $B - A$.

Ejemplo 4.7. En una biblioteca que consta de 250 libros, 20 de ellos están escritos en inglés y el resto en español. ¿Cuál es la probabilidad de que un libro elegido al azar, entre los 250 de dicha biblioteca, esté escrito en inglés?

Ejemplo 4.8. Estamos investigando la calidad de las fotocopias hechas en una biblioteca. En una muestra de 100 copias, se observa que 2 están en blanco y manchadas, 3 están en blanco pero no están manchadas y 25 no están en blanco pero están manchadas. ¿Cuál es la probabilidad de que esta máquina fotocopidora realice una copia que no esté en blanco ni manchada?

Ejemplo 4.9. Una biblioteca dispone de tres empleados (A , B y C) para atender a los usuarios. El 20% de las ocasiones está disponible (para atender a cualquier usuario) el empleado A , el 30% de las veces está disponible el empleado B y el 25% de las ocasiones está disponible el empleado C . Además, el 10% de las veces están disponibles A y B , el 12% están disponibles A y C , el 14% están disponibles B y C , y el 8% de las ocasiones están disponibles los tres empleados. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea atendida en el mismo momento en que llegue a la biblioteca?

Ejemplo 4.10. En un grupo de alumnos de una licenciatura en documentación, el 25% suspendió la asignatura Análisis Documental, el 15% la asignatura Documentación General y el 10% ambas asignaturas. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno suspenda Análisis Documental o Documentación General?

Ejemplo 4.11. En un estudio realizado en un determinado país sobre la participación de la mujer en trabajos sobre información y documentación, antes y después de ser madre, se selecciona una muestra de 683 mujeres obteniéndose los siguientes resultados:

		Después	
		NO	SÍ
Antes	NO	169	3
	SÍ	337	174

- a) Calcular la probabilidad de que una mujer participe en dicho mercado laboral antes de ser madre.

- b) Calcular la probabilidad de que una mujer participe en dicho mercado laboral después de ser madre.
- c) Calcular la probabilidad de que una mujer participe en dicho mercado laboral antes y después de ser madre.
- d) Calcular la probabilidad de que una mujer participe en dicho mercado laboral antes o después de ser madre.

Problemas propuestos

Problema 4.1. Un centro de información dispone de 10 ordenadores para consultar diversas bases de datos. Se realiza el experimento que consiste en observar, en diferentes instantes del día, el número de ordenadores que no están ocupados. Determinar el espacio muestral. Poner dos ejemplos de sucesos (A y B). Hallar los sucesos contrarios (\bar{A} y \bar{B}), el suceso unión ($A \cup B$), el suceso intersección ($A \cap B$), el suceso diferencia ($A - B$), y los sucesos $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$ y $\overline{A - B}$.

Problema 4.2. El número de libros por estante de una biblioteca viene dado por:

Nº de libros	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Nº de estantes	2	3	7	5	14	11	12	9	6	6	3	2

Calcular la probabilidad de que un estante elegido al azar tenga:

- exactamente 24 libros.
- 24 o 25 libros.
- menos de 24 libros.

Problema 4.3. Los asistentes a un acto cultural preparado por una biblioteca se clasifican de la siguiente manera:

	menos de 18 años	entre 18 y 24 años	entre 25 y 40 años	más de 40 años
Hombre	17	28	31	52
Mujer	23	39	50	75

- Calcular la probabilidad de que un asistente al acto, elegido al azar, tenga más de 40 años.
- Calcular la probabilidad de que un asistente al acto, elegido al azar, sea mujer y tenga más de 40 años.
- Calcular la probabilidad de que una mujer asistente al acto, elegida al azar, tenga más de 40 años.

Problema 4.4. Se pregunta a todos los alumnos de una determinada facultad cuántas horas dedican al estudio en la biblioteca, y los resultados son:

		Curso de la licenciatura				
		1º	2º	3º	4º	5º
Nº de horas	menos de 1 hora	18	20	32	77	96
	entre 1 y 3 horas	22	35	90	83	50
	más de 3 horas	60	70	80	60	14

- Determinar la probabilidad de que un alumno, elegido al azar, estudie más de 3 horas diarias en la biblioteca.
- Hallar la probabilidad de que un alumno de quinto curso, elegido al azar, estudie más de 3 horas diarias en la biblioteca.
- Calcular la probabilidad de que un alumno, elegido al azar, sea de quinto curso o estudie más de 3 horas diarias en la biblioteca.

Problema 4.5. En la siguiente tabla aparece el número de hombres y de mujeres que se han llevado prestados libros y vídeos de una biblioteca pública.

		Tipo de documento		suma
		libro	vídeo	
Sexo	hombre	195	215	410
	mujer	315	205	520
suma		510	420	930

- Calcular la probabilidad de que un usuario de la biblioteca, elegido al azar, sea mujer.
- Calcular la probabilidad de que un usuario de la biblioteca, elegido al azar, se lleve prestado un vídeo.
- Calcular la probabilidad de que un usuario de la biblioteca, elegido al azar, sea mujer y se lleve prestado un vídeo.
- Calcular la probabilidad de que un usuario de la biblioteca, elegido al azar, sea mujer o se lleve prestado un vídeo.

Problema 4.6. El porcentaje de usuarios de la biblioteca G que trabajan en Murcia es del 55 %, y el porcentaje de usuarios de dicha biblioteca que trabajan en Murcia y han nacido en Murcia es del 35 %. Elegido un usuario de dicha biblioteca al azar, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje en Murcia pero no haya nacido en Murcia?

Problema 4.7. El 75 % de los estudiantes de la Universidad de Murcia son murcianos, el 15 % de los estudiantes de la Universidad de Murcia tienen algún hijo y el 10 % de los estudiantes de la Universidad de Murcia son murcianos y tienen algún hijo.

- Si elegimos un estudiante de la Universidad de Murcia al azar ¿cuál es la probabilidad de que sea murciano y no tenga ningún hijo?
- Si elegimos un estudiante de la Universidad de Murcia al azar ¿cuál es la probabilidad de que sea murciano o tenga algún hijo?

Problema 4.8. Se ha estudiado el uso de la biblioteca pública por parte de los profesores universitarios, encontrándose que 42 de 113 psicólogos, 17 de 68 biólogos, 33 de 203 ingenieros y 20 de 78 profesores de inglés son usuarios de la biblioteca pública (y el resto no).

- Elegido un profesor universitario al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea profesor de inglés?
- Elegido un profesor universitario al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea usuario de la biblioteca pública?
- Elegido un profesor universitario al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea usuario de la biblioteca pública y profesor de inglés?
- Elegido un profesor universitario al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea usuario de la biblioteca pública o profesor de inglés?

Soluciones de los problemas propuestos

Solución del problema 4.1.

El espacio muestral es $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Los sucesos A y B podrían ser:

$A = \{\text{el número de ordenadores no ocupados es menor que 4}\} = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{\text{el número de ordenadores no ocupados está comprendido entre 2 y 6}\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Por tanto:

$\bar{A} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\bar{B} = \{0, 1, 7, 8, 9, 10\}$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{2, 3\}$

$A - B = \{0, 1\}$

$\overline{A \cup B} = \{7, 8, 9, 10\} = \bar{A} \cap \bar{B} \neq \bar{A} \cup \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \bar{A} \cup \bar{B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A - B} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \neq \bar{A} - \bar{B}$

Solución del problema 4.2. a) 0'1375, b) 0'2875, c) 0'3875.

Solución del problema 4.3. a) 0'403174603, b) 0'238095238, c) 0'401069518.

Solución del problema 4.4. a) 0'351920693, b) 0'0875, c) 0'53283767.

Solución del problema 4.5. a) 0'559140, b) 0'451613, c) 0'220430, d) 0'790323.

Solución del problema 4.6: 0'2

Solución del problema 4.7. a) 0'65, b) 0'8.

Solución del problema 4.8. a) 0'168831, b) 0' $\hat{24}$, c) 0'043290, d) 0'367965.