4

Espacios compactos

En este capítulo introducimos los conceptos de espacio y subespacio compacto. Se estudian propiedades de los conjuntos compactos, así como relación entre la compacidad y las funciones continuas. Analizamos cómo son los subconjuntos compactos de la recta real y del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y, en general en los espacios métricos, la compacidad secuencial y la compacidad por punto límite o propiedad de Bolzano-Weierstrass, hasta el teorema de Heine-Borel-Lebesgue. Finalizamos probando que la compacidad está caracterizada por la propiedad de la intersección finita.

La estandarización del concepto de compacidad tardó muchos años en producirse. Desde principios del siglo XX se fueron introduciendo distintas definiciones de compacidad, que pretendían extender a espacios topológicos arbitrarios algunas propiedades conocidas de los intervalos cerrados y acotados $[a, b]$ de la recta real, cruciales en la demostración de ciertos teoremas, tales como el teorema del valor máximo y el teorema de la continuidad uniforme.

Surgieron así los distintos “tipos” de compacidad: compacidad numerable, compacidad por punto límite, compacidad secuencial, etc. Posteriormente, los matemáticos asumieron que era posible encontrar una definición en términos más débiles y generales; de hecho, en términos de recubrimientos del espacio por conjuntos abiertos.

Se pretenden alcanzar las siguientes competencias específicas:

- Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de espacio métrico.
- Reconocer y utilizar las propiedades sencillas de la topología métrica.

- Identificar los subconjuntos compactos de la recta real y, en general, de los espacios euclídeos.
- Relacionar los conceptos de compacidad y continuidad en un espacio métrico.
- Saber caracterizar diferentes propiedades y conceptos topológicos mediante el uso de sucesiones, particularmente la continuidad, la adherencia, los subconjuntos cerrados y los subconjuntos compactos.

Se desarrollarán los contenidos siguientes:

- Espacio y subespacio compacto.
- Relación entre la compacidad y las funciones continuas.
- Subconjuntos compactos de la recta real y del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.
- Compacidad secuencial.
- Propiedad de Bolzano-Weierstrass.
- Teorema de Heine-Borel-Lebesgue.
- Propiedad de la intersección finita.

4.1. Compacidad

Definición 4.1.1. *Sea X un conjunto y sea $A \subset X$. Un* ***cubrimiento*** *o* ***recubrimiento*** *de A es una familia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X de manera que $A \subset \cup_{i \in I} A_i$. Un* ***subcubrimiento*** *o* ***subrecubrimiento*** *es una subfamilia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ que es también un recubrimiento de A. Un recubrimiento es finito si está formado por una cantidad finita de conjuntos. Cuando (X, d) es un espacio métrico y cada A_i es un abierto de X, se dice que $\mathcal{A}$ es un* ***recubrimiento abierto*** *de A.*

Ejemplos

Ej.4.1. Sea $X = \mathbb{R}$, entonces la familia $\mathcal{A} = \{[-n, n]\}_{n=1}^{\infty}$ constituye un recubrimiento de $\mathbb{R}$, pero no es un recubrimiento abierto para la distancia usual. Un ejemplo de un subrecubrimiento de $\mathcal{A}$ es $\mathcal{D} = \{[-2n, 2n]\}_{n=1}^{\infty}$, pues sólo contiene los intervalos cuyos extremos son números pares.

La familia $\{(-n, n)\}_{n=1}^{\infty}$ también es un recubrimiento, esta vez abierto, de $\mathbb{R}$, pero no es un subrecubrimiento de $\mathcal{A}$, pues estos intervalos son abiertos y aquellos son cerrados.

Definición 4.1.2. *Un espacio métrico (X, d) es* ***compacto*** *si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.*

Ejemplos

Ej.4.2. La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta, pues el recubrimiento de $\mathbb{R}$ por intervalos abiertos

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene ningún subrecubrimiento de $\mathbb{R}$. En efecto, si suponemos que la familia $\{(n, n+2) : n \in H\}$, con $H \subset \mathbb{Z}$ finito, es un subrecubrimiento finito, entonces tomando $n_1 = \text{mín}\{n : n \in H\}$ y $n_2 = \text{máx}\{n : n \in H\}$ tenemos que $\bigcup_{n \in H}(n, n+2) \subset (n_1, n_2 + 2)$, que no coincide con $\mathbb{R}$.

Ej.4.3. Cualquier espacio X que contenga a un número finito de puntos es compacto, pues de cualquier recubrimiento por abiertos de X se puede extraer claramente un subrecubrimiento finito.

Ej.4.4. El intervalo $(0, 1]$, con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}$, no es compacto; el recubrimiento abierto

$$\mathcal{A} = \{(1/n, 1] : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$$

no contiene ningún subrecubrimiento finito. En efecto, si suponemos que la colección $\{(1/n, 1] : n \in H, n \geq 2\}$, con $H \subset \mathbb{N}$ finito, es un subrecubrimiento finito de $(0, 1]$, tomamos $n_0 = \text{máx}\{n : n \in H\}$ de modo que

$$\bigcup_{n \in H}(1/n, 1] = (1/n_0, 1]$$

que, evidentemente, no es $(0, 1]$. Aplicando un argumento análogo se demuestra que tampoco es compacto el intervalo $(0, 1)$ con la topología usual inducida.

Ej.4.5. Cualquier conjunto infinito con la distancia discreta (X, d_D) no es compacto, puesto que $\{\{x\} : x \in X\}$ es un recubrimiento abierto de X del que no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito.

4.2. Subconjuntos compactos

Definición 4.2.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un subconjunto. Diremos que K es un* ***conjunto compacto*** *en (X, d) si (K, d_K), con la topología relativa, es un espacio compacto. En este caso se dice que (K, d_K) es un* ***subespacio compacto****.*

Ejemplos

Ej.4.6. El siguiente subespacio de $\mathbb{R}$ es compacto con la distancia usual inducida,

$$X = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Esta claro que se trata de la sucesión convergente $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ junto a su límite 0. Para todo recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X, existe un elemento A_0 de $\mathcal{A}$ que contiene al 0. Como A_0 es abierto, contiene una bola $B(0, \varepsilon)$; y como $1/n \longrightarrow 0$, existe n_0 tal que si $n > n_0$, entonces $1/n \in B(0, \varepsilon) \subset A_0$; es decir, el conjunto A_0 contiene a todos los puntos de la forma $1/n$ excepto a un número finito de ellos; elijamos para cada uno de estos puntos que no están en A_0 un elemento de $\mathcal{A}$ que lo contenga. La colección de estos elementos de $\mathcal{A}$, junto con el propio A_0, constituyen un subrecubrimiento finito de X.

Proposición 4.2.2. *Sea K un subespacio de un espacio métrico (X, d). Entonces K es compacto si, y sólo si, para toda familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de abiertos en X tal que $K \subset \cup_{i\in I} A_i$, existe una subfamilia finita $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ tal que $K \subset \cup_{i=1}^{n} A_i$.*

DEMOSTRACIÓN. -

"$\Rightarrow$"Supongamos que K es compacto y sea $K \subset \cup_{i\in I} A_i$, donde $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos de (X, d). Entonces, según la definición de topología relativa, la familia $\{A_i \cap K\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de K por abiertos de (K, d_K). Como este subespacio es compacto, se puede extraer un subrecubrimiento finito de modo que

$$K = (A_{i_1} \cap K) \cup \cdots \cup (A_{i_n} \cap K).$$

De aquí se deduce que $K \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$.

"$\Leftarrow$"Veamos que (K, d_K) es compacto. Para ello, sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de (K, d_K) que recubren K. Entonces cada abierto A_i se puede escribir de la forma $A_i = B_i \cap K$, donde B_i es un abierto en (X, d) y así se tiene que $K \subset \cup_{i\in I} B_i$. Por hipótesis, existirán $B_{i_1}, \ldots, B_{i_n}$ tales que $K \subset B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_n}$ de forma que

$$K = (B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_n}) \cap K = (B_{i_1} \cap K) \cup \cdots \cup (B_{i_n} \cap K) = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$$

y, por tanto, K es compacto. $\square$

A partir de este último resultado hablaremos de subconjuntos compactos en general, obviando que se trata de la topología relativa. Veamos a continuación algunas propiedades sobre subconjuntos compactos.

Observación 4.2.3. Observe que si d y d' son distancias equivalentes (vea la Definición 1.4.1), (X, d) y (X, d') tienen los mismos subconjuntos compactos, ya que la definición de compacidad está dada en términos de los abiertos.

Teorema 4.2.4. *En un espacio métrico compacto* (X, d)*, todo subconjunto cerrado* $C \subset X$ *es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. -

Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de C en (X, d). Entonces C^c es abierto y $\mathcal{A} \cup C^c$ es un recubrimiento abierto de X, del cual se puede extraer un subrecubrimiento finito; si este subrecubrimiento finito no contiene a C^c, estará formado únicamente por una cantidad finita de conjuntos de $\mathcal{A}$ y como $C \subset X$ ya estaría probado. Si C^c está en el recubrimiento finito, dicho recubrimiento será de la forma $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}, C^c\}$ y como $C \subset X = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} \cup C^c$, tenemos que $C \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$. □

Teorema 4.2.5. *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $K \subset X$ *un subconjunto compacto. Entonces se verifican:*

(a) K *es cerrado.*

(b) K *es acotado.*

DEMOSTRACIÓN. -

(a) Probaremos que si $K \subset X$ es compacto, su complementario K^c es abierto demostrando que es entorno de todos sus puntos. Sea $a \notin K$; si $x \in K$, $x \neq a$, la propiedad de Hausdorff, que cumplen los espacios métricos, nos asegura que existen bolas abiertas disjuntas $B(a, r_x)$ y $B(x, r_x)$.

Entonces la familia $\{B(x, r_x)\}_{x \in K}$ obtenidas de esta manera, son un recubrimiento abierto del compacto K, por tanto, se puede extraer un subrecubrimiento finito $B(x_1, r_{x_1})$,...,$B(x_n, r_{x_n})$, para ciertos puntos $x_1, \ldots, x_n \in K$ (recordemos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple $B(x_i, r_{x_i}) \cap B(a, r_{x_i}) = \varnothing$). Entonces si tomamos $r_a = \min\{r_{x_i} : i = 1, \ldots, n\}$, la bola $B(a, r_a)$ está contenida en cada $B(a, r_{x_i})$ y tiene intersección vacía con $K = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})$, lo que significa que $B(a, r_a) \subset K^c$ y, por tanto, que K^c es entorno de $a \in K$. Como esto se puede hacer para todo $a \in K^c$, entonces K^c es abierto.

(b) Si $a \in K$ la colección de bolas $\{B(a, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de K que, como es compacto, admite un subrecubrimiento finito $\{B(a, n_i)\}_{i=1}^{k}$. Como se trata de bolas concéntricas, si $m = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ se tiene

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(a, n_i) = B(a, m),$$

por lo que K está acotado. □

Ejercicios y Problemas

P.4.1 Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre:

(a) La intersección de cualquier familia de subconjuntos compactos es un subconjunto compacto.

(b) La unión de una familia finita de subconjuntos compactos es un conjunto compacto. ¿Y la unión de una familia arbitraria?

P.4.2 (a) Pruebe que, en $(\mathbb{R}, |\ |)$, no son compactos los intervalos (a, b), $[a, b)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$.

(b) Estos conjuntos le proporcionan contraejemplos del Teorema 4.2.4 (si el espacio no es compacto, un cerrado no es en general, compacto); del Teorema 4.2.5(b) (un conjunto acotado, en general, no es compacto). Identifíquelos con las explicaciones adecuadas.

4.3. Compacidad y funciones continuas

Teorema 4.3.1. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua entre espacios métricos y $K \subset X$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto en Y.*

DEMOSTRACIÓN. -
Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de $f(K)$ en Y. Entonces

$$\{f^{-1}(A_i)\}_{i\in I}$$

es un recubrimiento abierto de K. Por la compacidad de K, existe un subrecubrimiento finito:

$$K \subset f^{-1}(A_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_1 \cup \cdots \cup A_n),$$

lo que implica que $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es un subrecubrimiento finito de $f(K)$. $\square$

Corolario 4.3.2. *Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ continua y X un espacio compacto. Entonces f es una aplicación cerrada.*

DEMOSTRACIÓN. - Supongamos que $C \subset X$ es cerrado, por el Teorema 4.2.4, C es compacto, luego según el Teorema anterior 4.3.1, como f es continua, $f(C)$ es compacto en Y, que es cerrado según el Teorema 4.2.5. $\square$

Ejemplos

Ej.4.7. La compacidad del espacio de partida en el Corolario 4.3.2 anterior es imprescindible. En efecto, $\mathbb{R}$, con la distancia usual no es compacto; la aplicación

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \quad \text{definida como} \quad f(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

es continua y la imagen de $[0,+\infty)$ (cerrado) es $f([0,+\infty))=(0,1]$, que no es cerrado (véase la Figura 4.1).

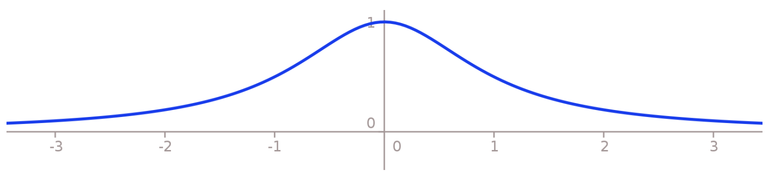

Figura 4.1 – La imagen de un cerrado, en general no es cerrado.

Proposición 4.3.3. *Sea $K\subset X$ un subconjunto compacto de un espacio métrico (X,d). Entonces toda función continua $f:(X,d)\to(Y,d')$ está acotada en K, es decir $f(K)$ es un conjunto acotado en Y..*

DEMOSTRACIÓN. -

Por el Teorema 4.3.1, $f(K)$ es compacto en Y, luego es un según el Teorema 4.2.5 $f(K)$ conjunto acotado, lo que equivale a decir que la función f está acotada. $\square$

Corolario 4.3.4 (Teorema de Weierstrass). *Sea $K\subset X$ un subconjunto compacto de un espacio métrico (X,d). Entonces toda función continua $f:X\to\mathbb{R}$ alcanza sus extremos en K.*

DEMOSTRACIÓN. -

Si K es compacto entonces $f(K)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y, por tanto, es cerrado y acotado. Luego según el Problema **P.2.26**, $f(K)$ está contenido en un intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ con $a,b\in f(K)$, de modo que existirán $x,y\in K$ tales que $f(x)=a$ y $f(y)=b$. $\square$

Proposición 4.3.5. *Toda aplicación continua $f:(X,d)\to(Y,d')$ entre espacios métricos, donde (X,d_d) es compacto, es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN. -

Como f es continua, dado $x\in X$ y

dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta_x$ entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$.

Fijado $\varepsilon > 0$, la colección de bolas $\{B(x, \delta_x/2)\}_{x\in X}$ constituye un recubrimiento abierto de X que admite un subrecubrimiento finito $\{B(x_i, \delta_i/2)\}_{i=1}^n$ ya que X es compacto. Tomemos $\delta = \text{mín}\{\delta_i/2 : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Tomemos $x, y \in X$ arbitrarios cumpliendo $d(x, y) < \delta$; tendremos que $x \in B(x_k, \delta_k/2)$ para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$d(y, x_k) \leq d(y, x) + d(x, x_k) < \delta + \frac{\delta_k}{2} \leq \delta_k,$$

lo que implica que

$$d'(f(y), f(x_k)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

y entonces

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_k)) + d'(f(x_k), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto, f es uniformemente continua. □

Corolario 4.3.6. *Toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ambos espacios con la distancia usual, es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN. Es una aplicación inmediata de la Proposición 4.3.5. □

Los Problemas **P.4.3** y **P.4.4** son importantes resultados y conviene que les preste atención.

Ejercicios y Problemas

P.4.3 Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una aplicación biyectiva y continua, con (X, d) compacto. Demuestre que f es un homeomorfismo. [I] [R]

P.4.4 Demuestre que la compacidad es una propiedad topológica. Es decir, demuestre que si $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ es un homeomorfismo. Entonces X es compacto si, y sólo si, Y es compacto.

4.4. Compactos en $\mathbb{R}$.

Vamos a estudiar es esta sección una clase de conjuntos compactos de $\mathbb{R}$ con la topología usual, que juegan un importante papel: los intervalos cerrados y acotados $[a, b]$. Para esto veamos en primer lugar una caracterización de los intervalos de números reales que nos será útil.

Lema 4.4.1. *Sea* $(\mathbb{R}, d_u)$ *y un subconjunto* $I \subset \mathbb{R}$*. Son equivalentes:*

(a) I *es un intervalo.*

(b) Para cada $x, y \in I$*,* $x \leq y$*, se verifica que* $[x, y] \subset I$*.*

DEMOSTRACIÓN. -

"(a)⇒(b)" Se trata de una consecuencia inmediata de la definición de intervalo.

"(b)⇒(a)" Supongamos que se satisface (b). Llamemos

$$a = \text{ínf}\, I \qquad \text{y} \qquad b = \sup I,$$

teniendo en cuenta que si I no está acotado inferiormente entonces $a = -\infty$ y si I no está acotado superiormente entonces $b = +\infty$. Vamos a ver que ha de ocurrir que $(a, b) \subset I \subset [a, b]$. En los casos $a = -\infty$ y/o $b = +\infty$ estaremos cometiendo un pequeño abuso de notación.

Si $z \in (a, b)$, tenemos que $a < z$ y por la definición de ínfimo, existe $x \in I$ tal que $x < z$; de la misma manera tenemos que $z < b$ y por la definición de supremo, existe $y \in I$ tal que $z < y$. Entonces, como $x < y$ con $x, y \in I$, por la hipótesis (b), $z \in [x, y] \subset I$, luego $(a, b) \subset I$. El contenido $I \subset [a, b]$ es por la propia definición de a y de b, de donde se deduce que I es un intervalo. □

Teorema 4.4.2 (Heine-Borel). *Todo intervalo cerrado y acotado* $[a, b]$ *en* $\mathbb{R}$ *con la topología usual es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. -

Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de $[a, b]$. Vamos a ver que se puede extraer un subrecubrimiento finito. Consideremos el conjunto siguiente:

$$G = \{x \in [a, b] \ : \ [a, x] \text{ se recubre con una subfamilia finita de } \{A_i\}_{i\in I}\}.$$

Paso 1. $G \neq \varnothing$. Además existe $\delta > 0$ tal que $[a, a + \delta) \subset G$.
En efecto, como $a \in [a, b] \subset \cup_{i\in I} A_i$, existirá un índice $j \in I$ tal que $a \in A_j$. Como A_j es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset A_j$ y, por tanto, $[a, a + \delta) \subset A_j$. Esto implica que si $x \in [a, a + \delta)$, $[a, x] \subset [a, a + \delta) \subset A_j$, que es un *subrecubrimiento finito*. Por tanto, $[a, a + \delta) \subset G$.

Paso 2. G es un intervalo.
Si $x, y \in G$, entonces $[x, y] \subset G$ ya que para todo $z \in [x, y]$ se satisface

$$[a, z] \subset [a, y] \subset G.$$

Aplicando el Lema 4.4.1, G debe ser un intervalo.

Paso 3. $b \in G$.
Consideremos $c = \sup\{G\}$, y veamos que $c = b$. Como a es cota inferior de G,

entonces $a < c$. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $c < b$. Como $[a,b] \subset \cup_{i \in I} A_i$, entonces $c \in A_k$ para algún $k \in I$. A_k es abierto, luego es entorno de c y, por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset A_k$. Pero como $c = \sup\{G\}$ entonces $c-\varepsilon \in G$. Por tanto, $[a, c-\varepsilon] \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$, con lo cual tenemos que $c+\varepsilon$ también está en G, ya que $[a, c+\varepsilon]$ tiene un subrecubrimiento finito de la forma

$$[a, c+\varepsilon] \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} \cup A_k,$$

y esto es una contradicción con el hecho de que $c = \sup\{G\}$.

Por tanto, $c = b \in G$ y $[a,b]$ tiene un subrecubrimiento finito. □

Proposición 4.4.3. *En* $(\mathbb{R}, |\ |)$ *un conjunto* K *es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Realice la demostración como ejercicio. □

Ejercicios y Problemas

P.4.5 Demuestre la Proposición 4.4.3. [I]

P.4.6 Sea $[c,d] \subset \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $S = \{x\} \times [c,d]$ es compacto en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual (véase la Figura 4.2). [I]

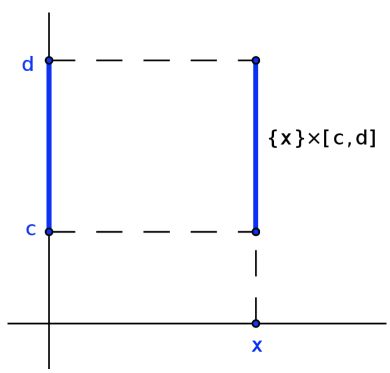

Figura 4.2 – El conjunto $S = \{x\} \times [c,d]$ es compacto.

4.5. Compacidad secuencial

Vamos a estudiar ahora un nuevo concepto de compacidad ligado a la idea de sucesión convergente.

Definición 4.5.1. *Sea (X,d) un espacio métrico y $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$, una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ y sea $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una aplicación monótona estrictamente creciente. La aplicación $x \circ \tau : \mathbb{N} \longrightarrow X$ es otra sucesión contenida en la anterior y se dice que es una* ***subsucesión****; que se denota $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.*

Ejemplos

Ej.4.8. Cualquier sucesión es subsucesión de sí misma.

Ej.4.9. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x(n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en un espacio métrico (X,d), entonces si tomamos $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como $\tau(n) = 2n$, tenemos una aplicación estrictamente creciente y $(x \circ \tau)(n) = x(2n) = x_{2n}$. De modo que hemos obtenido una subsucesión $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$, formada por los términos de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que ocupan lugar par.

Teorema 4.5.2. *Sea (X,d) un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}x \subset X$ una sucesión. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \in X$ si, y sólo si, cada subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, converge a x.*

DEMOSTRACIÓN. -

"$\Rightarrow$" Supongamos que $x_n \to x$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se cumple $d(x_n, x) < \varepsilon$. Esto quiere decir que $x_n \in B(x,\varepsilon)$ y, por tanto, sólo hay una cantidad finita de términos de la sucesión que no están en dicha bola. En consecuencia, ninguna subsucesión $(x_{n_k})_k$ puede tener infinitos términos fuera de la bola, luego debe ser convergente a x.

"$\Leftarrow$" Es evidente puesto que cualquier sucesión es subsucesión de sí misma. □

Ejemplos

Ej.4.10. Si una sucesión no converge, no quiere decir que ninguna subsucesión sea convergente. Por ejemplo, la sucesión $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ no es convergente pero tiene al menos dos subsucesiones convergentes: $(1,1,\dots)$ que converge a 1 y la de los términos impares $(-1,-1,\dots)$ que converge a -1. En general, una subsucesión arbitraria de $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ será convergente si, y sólo si, a partir de un cierto valor n_0 todos los términos son iguales, es decir, es una sucesión de "cola constante".

Ej.4.11. La sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, no posee ninguna subsucesión convergente.

Definición 4.5.3. *Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un subconjunto. Diremos que K es* **secuencialmente compacto** *si cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en K posee una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente a un punto de K.*

Ejemplos

Ej.4.12. En el Ejemplo **Ej.4.3.** hemos visto que cualquier espacio métrico finito es compacto. Además también es secuencialmente compacto pues cualquier sucesión sólo puede tener una cantidad finita de términos distintos, luego la subsucesión constante, formada por los infinitos términos iguales es convergente.

Ej.4.13. El intervalo abierto $(0, 1)$, con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}$, no es secuencialmente compacto: la sucesión $(1/n)_{n=2}^{\infty} \subset (0, 1)$ converge a 0 en $\mathbb{R}$ y, por tanto, cualquier subsucesión suya también converge a 0; pero $0 \notin (0, 1)$.

4.5.1. Conjuntos totalmente acotados

Definición 4.5.4. *Dado un espacio métrico (X, d) y $T \subset X$ un subconjunto, diremos que T es* **totalmente acotado** *si para cada $r > 0$ existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n \in T$ tales que $T \subset B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r)$.*

Proposición 4.5.5. *Sea (X, d) un espacio métrico y $T \subset X$. Se verifican:*

(a) *Si T es compacto, entonces T es totalmente acotado.*

(b) *Si T es totalmente acotado, T es acotado.*

DEMOSTRACIÓN. -

(a) Supongamos que T es compacto y sea $r > 0$. Entonces $\{B(x, r) \ : \ x \in T\}$ es un recubrimiento abierto de T del que se puede extraer un subrecubrimiento finito $T \subset B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r)$ con $x_1, \ldots, x_n \in T$, lo que significa que T es totalmente acotado.
(b) Sea $r > 0$ y supongamos que $T \subset B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r)$. Definamos

$$R = \max\{d(x_1, x_i) \ : \ i = 2, \ldots, n\}$$

Entonces $T \subset B(x_1, R+r)$, lo que significa que está acotado. En efecto, si $x \in T$, entonces $x \in B(x_i, r)$ para algún $i = 1, \ldots, n$, de modo que

$$d(x, x_1) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_1) < r + R.$$

□

Los recíprocos de los dos apartados de la Proposición 4.5.5 no se cumplen, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplos

Ej.4.14. Ya hemos visto que el intervalo $(0,1) \subset \mathbb{R}$, con la distancia usual, no es ni compacto, ni secuencialmente compacto, sin embargo, es totalmente acotado.

En efecto, si $r \geq 1$, entonces $(0,1) \subset (-r,r)$ y no hay nada que probar; si $0 < r < 1$, sea n el menor número natural tal que $nr \geq 1$, entonces la familia de bolas

$$\left(\frac{r}{2}-r, \frac{r}{2}+r\right), (r-r, r+r), \left(\frac{3r}{2}-r, \frac{3r}{2}+r\right), \ldots, (nr-r, nr+r)$$

contiene a $(0,1)$, es decir, $(0,1)$ es unión de una cantidad finita de bolas de radio r.

Ej.4.15. $\mathbb{R}$ con la distancia discreta es acotado pues $B(0,2) = \mathbb{R}$, pero no es totalmente acotado puesto que $B(x,1/2) = \{x\}$ y, por tanto, no se puede expresar como unión de un número finito de bolas de radio $1/2$.

Proposición 4.5.6. *Si (X,d) es un espacio métrico y $K \subset X$ es secuencialmente compacto, entonces K es totalmente acotado.*

DEMOSTRACIÓN. -

Supongamos que K es secuencialmente compacto y no es totalmente acotado. Existirá un número $r > 0$ de modo que K no se puede expresar como una unión finita de bolas de radio r con centro en puntos de K. Vamos a construir una sucesión de la siguiente manera.

Sea $x_1 \in K$ un punto arbitrario. Escogemos los puntos de la siguiente forma: $x_2 \in K$ tal que $d(x_1,x_2) \geq r$, que existe pues de lo contrario $B(x_1,r)$ sería un recubrimiento finito de K.

Tomamos $x_3 \in K$ tal que $d(x_1,x_3) \geq r$ y $d(x_2,x_3) \geq r$, que existe pues en caso contrario $\{B(x_1,r), B(x_2,r)\}$ sería un recubrimiento finito de K. Y así sucesivamente.

Obtenemos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en K que verifica que $d(x_n,x_m) \geq r$ si $n \neq m$ y que no tiene ninguna subsucesión convergente en K, pues si tuviéramos $(x_{n_k})_k$ con $\lim_k x_{n_k} = x \in K$, dado $r > 0$ existiría $k_r \in \mathbb{N}$ tal que si $n_k > n_{k_r}$ entonces $d(x_{n_k},x) < r/2$, con lo que tendríamos que si $n_k, n_m > n_{k_r}$ distintos,

$$d(x_{n_k},x_{n_m}) \leq d(x_{n_k},x) + d(x,x_{n_m}) < \frac{r}{2}+\frac{r}{2} = r,$$

en contra de que $d(x_{n_k}, x_{n_m}) \geq r$. Entonces K no sería secuencialmente compacto. $\square$

Lema 4.5.7 (de Lebesgue). *Sea (X,d) un espacio métrico, $K \subset X$ un subconjunto secuencialmente compacto y $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de K. Entonces existe $r > 0$ tal que para cada $x \in K$ existe $i \in I$ de modo que $B(x,r) \subset A_i$. Este número $r > 0$ se llama **número de Lebesgue** del recubrimiento.*

DEMOSTRACIÓN. -

Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de K para el que no existe ningún número de Lebesgue. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá $x_n \in K$ tal que $B(x_n, 1/n)$ no está contenida en ningún A_i para todo $i \in I$, y de esta manera hemos construido una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Como K es secuencialmente compacto, ha de existir una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente a un punto $x \in K$. Además, como $\{A_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de K, entonces $x \in A_j$ para algún $j \in I$. Pero A_j es abierto, luego existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, 2/n_j) \subset A_j$.

Como la subsucesión anterior converge a x, dado $n_j > 0$ existirá $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_r \geq n_{r_0}$ entonces $x_{n_r} \in B(x, 1/n_j)$.

Tomemos ahora $n_r \geq n_{r_0}$ tal que también sea $n_r \geq n_j$. Entonces se verifica que $B(x_{n_r}, 1/n_r) \subset B(x, 2/n_j)$ ya que si $y \in B(x_{n_r}, 1/n_r)$ tendríamos

$$d(x,y) \leq d(x, x_{n_r}) + d(x_{n_r}, y) < \frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_r} \leq \frac{2}{n_j}.$$

De aquí se deduce que $B(x_{n_r}, 1/n_r) \subset A_j$, en contradicción con la hipótesis. $\square$

4.6. Propiedad de Bolzano-Weierstrass

Existen otras formulaciones de compacidad equivalentes y que son frecuentemente utilizadas. En esta sección introducimos la más débil, en general, aunque coincide cuando se trata de espacios métricos.

Definición 4.6.1. *Sea (X,d) un espacio métrico; diremos que X tiene la **propiedad de Bolzano-Weierstrass** o que es **compacto por punto límite** o **por punto de acumulación** si cada subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.*

Veamos ahora que las tres definiciones que hemos dado de compacidad son equivalentes en el caso de los espacios métricos.

Teorema 4.6.2 (de Heine-Borel-Lebesgue). *Sea (X,d) un espacio métrico y un subconjunto $K \subset X$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) K *es compacto.*

(b) K *tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass.*

(c) K *es secuencialmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. -

"(a)⇒(b)" Supongamos que $A \subset K$ es un subconjunto infinito que no tiene ningún punto de acumulación. Entonces para cada $x \in K$ existe una bola $B(x, r_x)$ que no corta a A o bien sólo lo corta en el propio punto x.

La familia $\{B(x, r_x)\}_{x \in K}$ es un recubrimiento abierto del conjunto compacto K y, por tanto, admite un subrecubrimiento finito. Este subrecubrimiento finito también recubre a A, con lo que A sería finito, en contra de la hipótesis.

"(b)⇒(c)" Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en K con un número finito de términos distintos, entonces a partir de un cierto término es constante, por lo que converge a dicho término y no hay nada que probar. Supongamos entonces que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en K con infinitos términos distintos. Según (b), dicha sucesión tiene un punto de acumulación $x \in K$ y por la Proposición 2.6.6 existe una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente a x. Por tanto, K es secuencialmente compacto.

"(c)⇒(a)" Supongamos que K es secuencialmente compacto y que $\{A_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de K. Por el Lema de Lebesgue 4.5.7 existe un número de Lebesgue $r > 0$ para este recubrimiento. Por la Proposición 4.5.6, K es totalmente acotado, de modo que existe un recubrimiento finito de X por bolas de radio r, $\{B(x_1, r), \ldots, B(x_n, r)\}$. Pero por el Lema de Lebesgue cada bola $B(x_i, r)$ ha de estar contenida en un abierto A_j del recubrimiento $\{A_i\}_{i \in I}$, por lo que $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es un subrecubrimiento finito de X. $\square$

Ejercicios y Problemas

$\boxed{\textbf{P.4.7}}$ Sea K un subconjunto compacto de un espacio métrico (X, d) y un punto $a \in X$, $a \notin K$. De uestre que existen en X dos conjuntos abiertos A y B tales que $a \in A$, $K \subset B$ y $A \cap B = \varnothing$. [I] [R]

$\boxed{\textbf{P.4.8}}$ Sea K un subconjunto compacto de un espacio métrico (X, d). Demuestre que si $a \in X - K$, entonces, existe un abierto A tal que $a \in A \subset K^c$. Utilice este resultado para demostrar que todo compacto en un espacio métrico, es cerrado. [I]

$\boxed{\textbf{P.4.9}}$ Sean K y H dos compactos disjuntos en un espacio métrico (X, d). Demuestre que existen dos abiertos disjuntos $A, B \subset X$ tales que $K \subset A$ y $H \subset B$. [I] [R]

4.7. Compactos en $\mathbb{R}^n$

Vamos a ver en esta sección que los rectángulos, o primas, generalizados

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

son compactos en $\mathbb{R}^n$ con la topología usual (véase la Figura 4.3.

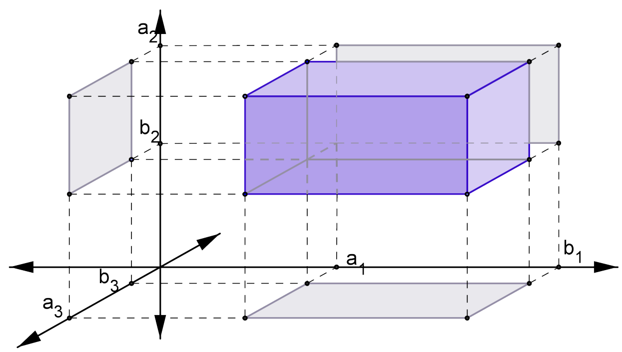

Figura 4.3 – Los prismas generalizados son compactos en $\mathbb{R}^n$.

Haremos la prueba en $\mathbb{R}^2$ y con un procedimiento similar por inducción se prueba en $\mathbb{R}^n$. Además, como las tres distancias d_1, d_2 y d_∞ en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, por comodidad en el razonamiento utilizaremos d_∞, teniendo en cuenta también que la topología inducida por estas distancias sobre $\mathbb{R}$ es la usual.

Lema 4.7.1. *Sea un intervalo $[c, d] \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ y $\{A_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto del conjunto $\{x\} \times [c, d]$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces existe $r > 0$ tal que el producto $(x - r, x + r) \times [c, d]$ está recubierto por una cantidad finita de elementos de $\{A_i\}_{i \in I}$.*

DEMOSTRACIÓN. -

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $\{x\} \times [c, d]$. Por el Problema **P.4.6** este conjunto es compacto, y por tanto, admite un subrecubrimiento finito $\{A_j\}_{j=1}^n$.

Para cada $y \in [c, d]$, el punto $(x, y) \in A_k$ para algún $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$; y como estos conjuntos son abiertos, existe $r_y > 0$ tal que (recuerde como son las bolas para d_∞, Ejemplo **Ej.1.21.**)

$$(x, y) \in B_\infty((x, y), r_y) = (x - r_y, x + r_y) \times (y - r_y, y + r_y) \subset A_k.$$

Entonces que $\{(y - r_y, y + r_y)\}_{y \in [c,d]}$ es un recubrimiento abierto de $[c, d]$, que es compacto. Luego existe un subrecubrimiento finito $\{(y_j - r_{y_j}, y_j + r_{y_j})\}_{j=1}^m$.

Ahora tomamos $r = \text{mín}\{r_{y_j} \ : \ j = 1, \dots, m\}$, de modo que

$$(x - r, x + r) = \bigcap_{j=1}^{m} (x - r_{y_j}, x + r_{y_j}).$$

Se concluye entonces que

$$(x - r, x + r) \times [c, d] \subset \bigcup_{j=1}^{m} \{(x - r, x + r) \times (y_j - r_{y_j}, y_j + r_{y_j})\} \subset$$

$$\subset \bigcup_{j=1}^{m} \{(x - r_{y_j}, x + r_{y_j}) \times (y - r_{y_j}, y + r_{y_j})\} \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

obteniendo el subrecubrimiento finito buscado. □

Proposición 4.7.2. *Un rectángulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. -

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de $[a, b] \times [c, d]$, también es un recubrimiento de $\{x\} \times [c, d]$, para cada $x \in [a, b]$. Por el Lema 4.7.1, para cada x existe $r_x > 0$ tal que el conjunto $(x - r_x, x + r_x) \times [c, d]$ admite un subrecubrimiento finito. Pero $\{(x - r_x, x + r_x)\}_{x \in [a,b]}$ es un recubrimiento abierto de $[a, b]$. Por la compacidad de $[a, b]$, dicho recubrimiento admite un subrecubrimiento finito $\{(x_k - r_{x_k}, x_k + r_{x_k})\}_{k=1}^{m}$. Entonces tenemos que

$$[a, b] \times [c, d] \subset \bigcup_{k=1}^{m} \{(x_k - r_{x_k}, x_k + r_{x_k}) \times [c, d]\}$$

y cada uno de los conjuntos $(x_k - r_{x_k}, x_k + r_{x_k}) \times [c, d]$ está recubierto por un número finito de elementos de $\{A_i\}_{i \in I}$. Luego el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ está contenido en una unión finita de elementos A_i. □

Corolario 4.7.3. *Los rectángulos generalizados $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ son compactos en $\mathbb{R}^n$.*

DEMOSTRACIÓN. -

La demostración es un proceso de inducción a partir de la Proposición 4.7.2 anterior. □

Teorema 4.7.4 (de Heine-Borel en $\mathbb{R}^n$**).** *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ con la topología usual. Entonces K es compacto si, y sólo si, K es cerrado y acotado.*

DEMOSTRACIÓN. -

"$\Rightarrow$" Se trata del Teorema 4.2.5.

"$\Leftarrow$" Si K está acotado, hay alguna bola cerrada tal que $K \subset \overline{B}_\infty(a,r)$, para algún $a \in \mathbb{R}^n$. Esta bola es un rectángulo cerrado que, por el Corolario 4.7.3, es compacto. Como K es cerrado y está contenido en un compacto, el Teorema 4.2.4 implica que K es compacto. $\square$

Ejemplos

Ej.4.16. La esfera unidad $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ y la bola cerrada unidad $\overline{B^n} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ en $\mathbb{R}^n$ son compactos, pues son cerrados y acotados.

Ej.4.17. El conjunto $A = \{(x, y) : 0 \leq x, 1 \leq y \leq 2\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$, pero no es compacto porque no está acotado (véase la Figura 4.4(a)).

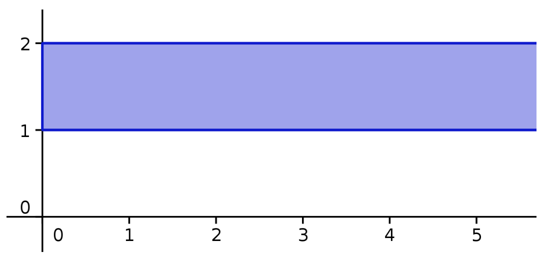

Figura 4.4 – Subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no compacto: no acotado y cerrado.

Ej.4.18. El conjunto $A = \{(1/n, y)) : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\}$ está acotado en $\mathbb{R}^2$, pues $A \subset [0,1] \times [0,1]$ (véase la Figura 4.5), pero no es compacto porque no es cerrado ya que $(0,0) \notin A$ pero $(0,0) \in \overline{A}$.

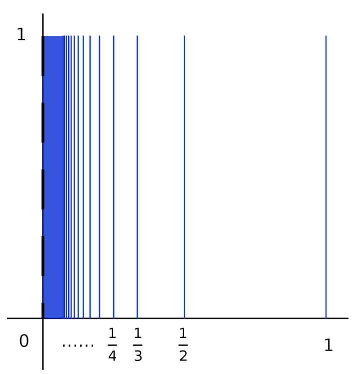

Figura 4.5 – Subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no compacto: acotado pero no cerrado.

Después de los resultados que hemos demostrado en los espacios métricos referidos a la compacidad, podemos completar el Teorema 4.7.4 de Heine-Borel.

Teorema 4.7.5 (Teorema de Heine-Borel-Lebesgue en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ con la topología usual. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) K es compacto.

(b) K es cerrado y acotado.

(c) Todo subconjunto $S \subset K$ infinito tiene un punto límite en K.

(d) K es secuencialmente compacto.

Ejercicios y Problemas

P.4.10 ¿Cuáles de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son compactos? Justifique la respuesta.

1. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$
2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2=1\}$
3. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x|+|y| \leq 1\}$
4. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2<1\}$
5. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 1, \ 0 \leq y \leq 1/x\}$

P.4.11 Sea $(\mathbb{R}, d)$ el espacio métrico de los números reales con la distancia

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Sea $A = [1,+\infty)$. Estudie si A es cerrado, acotado o compacto en dicho espacio.

P.4.12 Demuestre que un triángulo, incluidos sus lados, es compacto en $\mathbb{R}^2$. [I]

P.4.13 Demuestre que, en un espacio métrico, el conjunto formado por una sucesión convergente junto con su límite, es compacto. [I] [R]

4.8. Propiedad de la intersección finita

Definición 4.8.1. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X. Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la* ***propiedad de la intersección finita*** *si la intersección de cualquier subfamilia finita de $\mathcal{F}$ es no vacía.*

Ejemplos

Ej.4.19. La familia $\{(0, 1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tiene claramente la propiedad de la intersección finita.

Ej.4.20. La familia $\{[n, n+1]\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ no tiene la propiedad de la intersección finita, pues, por ejemplo, $[2, 3] \cap [4, 5] = \varnothing$.

Proposición 4.8.2. *Sea X un espacio métrico. Entonces X es compacto si, y sólo si, toda familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de cerrados en X que tiene la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.*

DEMOSTRACIÓN. -

"$\Rightarrow$" Supongamos que X es compacto y que $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tal que $\cap_{i\in I}F_i = \varnothing$. Si tomamos complementarios tendremos que $\cup_{i\in I}F_i^c = X$, luego obtenemos un recubrimiento abierto de X que, por ser compacto, admite un subrecubrimiento finito, $F_1^c \cup \cdots \cup F_n^c = X$. Tomando de nuevo complementarios $F_1 \cap \cdots \cap F_n = \varnothing$, en contra de que la familia $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finta.

"$\Leftarrow$" Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X; entonces $(\cup_{i\in I}A_i)^c = \varnothing$. Por tanto $\cap_{i\in I}A_i^c = \varnothing$, con lo que tenemos una familia de cerrados $\{A_i^c\}_{\in I}$ que no tiene la propiedad de la intersección finita; luego debe existir una subfamilia finita cuya intersección es vacía: $A_{i_1}^c \cap \cdots \cap A_{i_n}^c = \varnothing$. Tomando complementarios obtenemos que $A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} = X$ y así hemos obtenido un subrecubrimiento finito. $\square$

Ejemplos

Ej.4.21. $(\mathbb{R}, d_u)$ no es compacto, cosa que ya sabemos porque no es acotado. Pero esto mismo puede deducirse de otra forma. La familia de cerrados $\{[m, +\infty)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ tiene la propiedad de la intersección finita y, sin embargo, la intersección de todos los elementos de esta familia es vacía. Ahora basta aplicar la Proposición 4.8.2.

Ejercicios y Problemas

$\boxed{\textbf{P.4.14}}$ ¿Cuáles de las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$ satisfacen la propiedad de intersección finita? Justifique la respuesta en cada caso.

1. $\{(n, n+2)\}_{n\in\mathbb{N}}$

2. $\left\{\left(\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$
3. $\{(-n, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$

P.4.15 Demuestre que un espacio métrico (X, d) es compacto si, y sólo si, para toda familia de cerrados $\{C_i\}_{i\in I}$ tales que $\bigcap_{i\in I} C_i = \varnothing$, existe una subfamilia finita $\{C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}\}$ que cumple $C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_k} = \varnothing$.

P.4.16 Demuestre que si (X, d) e (Y, d') son dos espacios métricos e Y es compacto, entonces la proyección $\pi_1 : X \times Y \to X$ es una aplicación cerrada.

P.4.17 Sea (X, d) un espacio métrico con la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

(a) Si $f : X \to Y$ es continua, ¿Tiene $f(X)$ la propiedad de Bolzano-Weierstrass?

(b) Si A es un subconjunto cerrado de X, ¿es A compacto por punto límite?

P.4.18 Un espacio (X, d) es ***numerablemente compacto*** si cada recubrimiento numerable de abiertos de X contiene una subcolección finita que recubre a X. Demuestre que para un espacio métrico, la condición numerablemente compacto equivale a la de compacto por punto límite. [I]

P.4.19 Demuestre que X es numerablemente compacto si, y sólo si, cada sucesión encajada $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ de conjuntos cerrados no vacíos de X tiene intersección no vacía.

P.4.20 Dado un espacio métrico (X, d), se dice que un subconjunto $M \subset X$ es ***relativamente compacto*** si $\overline{M}$ es compacto. Pruebe:

(a) Todo conjunto compacto es relativamente compacto. Busque un ejemplo en $\mathbb{R}$ con la topología usual que muestre que el recíproco no es cierto en general.

(b) Todo conjunto relativamente compacto y cerrado es compacto.

(c) Todo conjunto relativamente compacto es acotado.

(d) Todo conjunto relativamente compacto es totalmente acotado. ¿Es cierto el recíproco?

(e) Todo subconjunto de un conjunto relativamente compacto es relativamente compacto. Deduzca que todo subconjunto de un conjunto compacto es relativamente compacto.

P.4.21 Sea K un conjunto compacto en un espacio métrico (X, d). Demuestre que para todo subconjunto $B \subset X$, existe un punto $x_0 \in K$ tal que $d(x_0, B) = d(K, B)$. [I] [R]

P.4.22 Sea K un conjunto compacto en un espacio métrico (X, d) y $B \subset X$ un cerrado tal que $K \cap B = \varnothing$. Demuestre que $d(K, B) > 0$. [I] [R]

$\boxed{\textbf{P.4.23}}$ Sea K y H dos conjuntos compactos en un espacio métrico (X, d). Demuestre que existen $x \in K$ e $y \in H$ tales que $d(x, y) = d(K, H)$. [I]

$\boxed{\textbf{P.4.24}}$ Sea K un conjunto compacto en un espacio métrico (X, d). Demuestre el conjunto derivado K' es compacto. [I] [R]

$\boxed{\textbf{P.4.25}}$ Demuestre que toda sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente ($C_{n+1} \subset C_n$) de cerrados no vacíos, contenidos en un subconjunto compacto K de un espacio métrico, tiene intersección no vacía.

$\boxed{\textbf{P.4.26}}$ Demuestre el Teorema de Bolzano-Weierstrass: *En* $\mathbb{R}$*, toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente*. [I]