Walter Schachermayer

Matemáticas y Finanzas

Palabras pronunciadas por el profesor
Dr. D. Walter Schachermayer
con motivo de su investidura como
Doctor Honoris Causa por la
Universidad de Murcia

La Matemática Financiera sirve como ejemplo de una aplicación floreciente y de alta calidad de la teoría matemática. Se ha transformado en herramienta esencial para diversas cuestiones de la industria financiera y los desarrollos hacia una "matematización" del negocio financiero parecen hoy irreversibles.

Quisiera resumir brevemente cómo se han desarrollado estas ideas, comenzando con el trabajo fundamental de Louis Bachelier, quien defendió su tesis "Théorie de la spéculation" en 1900 en París. Henri Poincaré fue un miembro del tribunal y escribió un informe muy favorable. Bachelier utilizó argumentos de probabilidad lo que le llevó a introducir el movimiento Browniano por primera vez (cinco años antes de que A. Einstein lo hiciera también). Lo utilizó como un modelo matemático para el desarrollo de una teoría de valoración de opciones financieras.

Este tema quedó aislado durante más de 70 años hasta que el eminente economista Paul Samuelson lo retomara. Tras ello Fisher Black, Robert Merton y Myron Scholes aplicaron una versión ligeramente modificada del modelo de Bachelier, y la "fórmula de Black-Sholes" resultante para el precio de una opción Europea rápidamente adquirió mucha influencia en el mundo financiero.

Bachelier estaba interesado en diseñar una teoría racional para los precios de contratos de duración determinada. Las dos formas de contrato que se admitían en la Bolsa de París en ese tiempo juegan hoy también un papel básico: los contratos de futuro y las opciones. Nos fijaremos en el derivado más interesante desde el punto de vista matemático, a saber en las opciones.

Una opción Europea de compra (resp. de venta) sobre un activo subyacente S consiste en el derecho (pero no la obligación) *de comprar (resp. vender) una cantidad fijada del activo subyacente S, a un precio fijo K y en un tiempo T futuro y también fijado de antemano.*

El activo subyacente S, usualmente denominado *stock,* puede ser una acción de una compañía, moneda extranjera, oro, etc. En el caso de Bachelier los activos subyacentes eran *"rentas"*, una forma de bono perpetuo que era muy común en la Francia del siglo XIX.

Fijemos la letra K para el precio de ejercicio de la opción, tras un momento de reflexión llegamos a la conocida figura de "palo de hockey" para la gráfica de la función de pago de la opción de compra en el tiempo T. Representamos el valor de la opción como función del precio del activo subyacente S_T en el tiempo T.

Denotemos con C el precio de la opción.

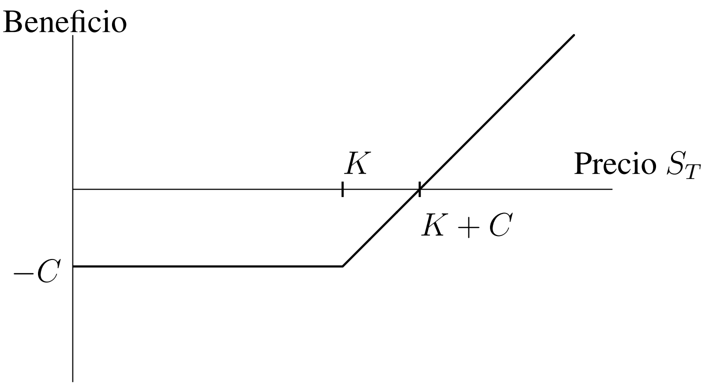

Figura 1: Función de pago de una opción de compra en el tiempo T.

La gráfica representada en la Figura 1 aparece de forma explícita en la tesis de Bachelier. Nos da el beneficio o la pérdida de la opción en el tiempo T, cuando conozcamos el valor del activo subyacente S. Pero tenemos que determinar el precio C de la opción que debemos pagar en el instante $t = 0$. Este es nuestro paradigmático problema.

Luis Bachelier continúa ahora con su tema central, *Probabilidades en las Operaciones Bursátiles*. Con cierta ironía, él ya había valorado la dificultad básica de introducir la probabilidad en el contexto del mercado bursátil en la introducción de la tesis de forma muy escéptica: "El cálculo de probabilidades, sin duda, nunca podrá ser aplicado a las fluctuaciones de la cotización de garantías, y la dinámica de la Bolsa nunca será una ciencia exacta"

Sin embargo, él procede a modelar el proceso de los precios de valores con una distribución de probabilidad distinguiendo "dos tipos de probabilidades :

(i) La probabilidad que podría ser llamada "matemática", que puede ser determinada *a priori* y que está estudiada en los juegos de azar.

(ii) La probabilidad que depende de los sucesos futuros, y consecuentemente imposible de predecir matemáticamente.

Esta última probabilidad es la que el especulador trata de predecir."

Mi interpretación personal de esta — algo confusa — definición es la siguiente: sentado diariamente en la bolsa de valores y mirando el movimiento de los precios, Bachelier tuvo la misma impresión que hoy podemos tener observando el movimiento de precios en los mercados financieros, por ejemplo en internet. El desarrollo de hojas de información de precios de acciones, índices, etc. sobre la pantalla o pizarra se asemeja a un "juego de azar". Por otra parte, el segundo tipo de probabilidad parece referirse a la esperanza de un especulador que tenga su opinión particular sobre la traza de precios. Bachelier continúa:

"Sus (del especulador) deducciones son absolutamente personales, ya que la otra parte en una transacción tiene necesariamente la opinión contraria."

Estos pensamientos llevan a Bachelier a una importante conclusión, que en la terminología actual es llamada la "hipótesis de eficiencia del mercado":

"Parece que el mercado, el agregado de los especuladores, en un instante dado no puede creer ni en subidas, ni en bajadas, ya que, para cada precio cotizado, hay tantos vendedores como compradores."

Él aclara entonces que este principio debe entenderse en términos de "precios reales", esto es, precios descontados. Finalmente termina con su famosa sentencia:

"En suma, la consideración de precios reales permite establecer *el siguiente* principio *fundamental*:

La esperanza matemática del especulador es cero."

Este es un principio realmente fundamental y la admiración del lector por el cambio de paradigma de Bachelier se incrementará más aún al continuar con el siguiente epígrafe de la tesis de Bachelier:

"Es necesario evaluar la generalidad de este principio con cuidado: significa que el mercado, en un instante dado, tiene en consideración no solo las transacciones negociables en el instante actual, sino incluso aquellas que se basen en fluctuaciones de precios posteriores siempre que tengan esperanza nula.

Por ejemplo, compro un bono con la intención de venderlo cuando se haya apreciado 50 céntimos. La esperanza de esta compleja transacción es exactamente cero, como si lo intento vender el día de vencimiento, o en cualquier momento intermedio."

En mi opinión, en estos dos párrafos, las ideas básicas que subyacen en los conceptos de martingalas, tiempos de parada, estrategias de inversión, y el teorema de muestreo opcional de Doob ya aparecen de forma muy intuitiva. También nos emplaza al tema básico de la moderna aproximación a la valoración de opciones, que está basada en la noción de martingala.

El concepto de martingala describe de forma matemática un juego absolutamente justo: cualesquiera que sea la forma de apostar en este tipo de juego sus ganancias/pérdidas tienen esperanza cero. Los ejemplos de Bachelier proporcionan una interpretación muy intuitiva: Cuando tengamos la oportunidad de apostar sobre una martingala no es posible ser muy inteligente, esto es, generar una esperanza de resultado positivo.

Bachelier aplicó su *principio fundamental* al problema original de valorar una opción y encontró una relación muy interesante, esto es, una forma explícita de derivar su valor asumiendo dicho principio básico.

Hagamos ahora un gran salto en el tiempo y acerquémonos a los años setenta del siglo veinte, cuando el trabajo de Bachelier experimentó un renacer a través de las aportaciones de Paul Samuelson, Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton. Estos autores no creyeron -a priori - en el "Principio Fundamental" de Bachelier. En su lugar asumieron la condición más débil de que el proceso de precios del stock no fuese totalmente injusto. Para formalizar esta idea intuitiva aparece la noción de arbitraje: una oportunidad de arbitraje es una combinación de apuestas que permita conseguir de forma segura alguna ganancia. El "principio de no arbitraje" postula que no debe ser posible realizar un arbitraje apostando en un mercado financiero.

Claramente la hipótesis de "no arbitraje" sobre un juego es más débil que postular sobre el mismo que sea una martingala. En otras palabras: requerir que un juego no sea totalmente injusto (esto es, que no permita el arbitraje) es mucho menos que pedirle que sea absolutamente justo.

Sin embargo, asumiendo únicamente este principio más débil de "no arbitraje", los autores anteriores obtuvieron la "fórmula de Black-Sholes para valorar opciones" que es análoga al resultado de Bachelier. ¿Cómo estos dos conceptos podrían encajar en el mismo marco?

La conexión entre la noción de "no arbitraje" y la noción de "martingala" es el tema central del *Teorema Fundamental de Valoración de Activos*. Este teorema establece una dicotomía remarcable que es aplicable en cualquier juego concebible: solamente existen dos posibilidades. O bien el juego es totalmente injusto en el sentido de que permite el arbitraje. Apartándose ahora de este caso extremo de falta de justicia nos quedamos con la segunda posibilidad: en este caso siempre podemos "cambiar los pesos", esto es, las probabilidades de los sucesos posibles, de tal forma que tras este cambio el juego pase a ser absolutamente justo, esto es, en una martingala.

Este teorema reconcilia los desarrollos de Bachelier y Black-Sholes y allana el camino para el desarrollo espectacular del campo de la Matemática Financiera. Fue formulado a finales de los setenta por Michael Harrison, David Kreps y Stan Pliska en un marco algo estrecho. El reto matemático de formular y probar el teorema en su marco general quedó así establecido.

En 1992 tuve la suerte de unir fuerzas con Freddy Delbaen para atacar este problema. Conocía a Freddy desde hacia años por nuestro interés común en el campo del análisis funcional, materia donde también mi laudator José Orihuela está activo. Resultó que un conocimiento detallado de algunas técnicas del análisis funcional fueron la llave para resolver el duro problema de encontrar el enunciado y demostración correctos de este "Teorema Fundamental". En 1994 publicamos la solución, la cual - según Google Scholar - ha sido citada alrededor de 2000 veces desde entonces. Este artículo ha jugado un papel central en el desarrollo del campo de la matemática financiera en los últimos 25 años.

Con esta pequeña recopilación sobre el "Teorema Fundamental" he querido esquematizar de manera no técnica -así lo espero- la idea subyacente que describe nuestro trabajo matemático.

Nos queda tan solo agradecer muy sinceramente a la Universidad de Murcia por concederme el gran honor del Doctorado Honoris Causa.