LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA (2024)

FASE LOCAL - REGIÓN DE MURCIA
Facultad de Matemáticas - Universidad de Murcia
Viernes, 19 de enero de 2024

PRIMERA SESIÓN (mañana, 10:15 - 13:15)

Olimpiada Matemática Española RSME

INSTRUCCIONES

- No puedes usar tablas, calculadoras ni dispositivos electrónicos, sí útiles de dibujo.
- Entrega los problemas en hojas separadas (cada uno puede ocupar las hojas que necesites).
- En cada hoja, arriba, pon el número del problema y tu nombre y apellidos.

PROBLEMAS

1. Hallar el menor entero positivo n tal que la suma de los n términos

$$A(n) = 1 + 11 + 111 + \cdots + 11\ldots 11$$

sea divisible por 45.

2. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 5 y sean a y b números reales diferentes de 0. Supongamos que el resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax + b$ es igual al resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax^2 + b$. Determinar el valor de $a + b$.

3. Sea $ABB'A'$ un cuadrilátero, y sean γ_1, γ_2 las circunferencias con diámetros BA' y AB', respectivamente (esto es, con centros en los correspondientes puntos medios de dichas diagonales, denotados mediante I y J).

   a) Sea B'' el punto de la recta BB', distinto de B, que corta a γ_1, y sea A'' el punto de la recta AA', distinto de A, que corta a γ_2. Demostrar que el punto de corte C de las rectas $A'B''$ y $A''B'$ verifica que
$$CA' \cdot CB'' = CA'' \cdot CB'.$$

   b) Análogamente, sea B''' el punto de la recta BB', distinto de B', que corta a γ_2, y sea A''' el punto de la recta AA', distinto de A', que corta a γ_1. Si D es el punto de corte de las rectas AB''' y $A'''B$, demostrar que CD es perpendicular a IJ.

LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA (2024)

FASE LOCAL - REGIÓN DE MURCIA
Facultad de Matemáticas - Universidad de Murcia
Viernes, 19 de enero de 2024

SEGUNDA SESIÓN (tarde, 16:00 - 19:00)

INSTRUCCIONES

- No puedes usar tablas, calculadoras ni dispositivos electrónicos, sí útiles de dibujo.
- Entrega los problemas en hojas separadas (cada uno puede ocupar las hojas que necesites).
- En cada hoja, arriba, pon el número del problema y tu nombre y apellidos.

PROBLEMAS

4. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 5$ y $AB = 10$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F. Calcular el área del cuadrilátero $AFCE$.

5. En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas distintas son o bien amigas o bien enemigas (una y solo una de las dos cosas, y esta relación es recíproca). Una persona no se considera ni amiga ni enemiga de sí misma. Además, se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigas y B y C son enemigas, entonces A y C son amigas. Demostrar que se pueden encontrar dos personas que son amigas y tienen el mismo número de enemigos.

6. Dado $p \in \mathbb{N}$ un número primo, se dice que p "verifica la propiedad $\star$" si se tiene que

$$A(n,p) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1}$$

es un número decimal periódico para todo entero positivo n. Determinar el conjunto de todos los números primos p que verifican la propiedad $\star$.

OME Murcia 2024 - SOLUCIONES

1. Hallar el menor entero positivo n tal que la suma de los n términos

$$A(n) = 1 + 11 + 111 + \cdots + 11\ldots 11$$

sea divisible por 45.

Solución:

Para que $A(n)$ sea múltiplo de 5, la última cifra debe de ser 0 o 5, con lo que n tiene que ser múltiplo de 5. Para que sea múltiplo de 9, observamos que

$$A(n) \equiv 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \pmod 9,$$

con lo que o bien n o bien $n+1$ es múltiplo de 9. Si n es múltiplo de 9, el menor n posible es 45. Si 9 divide a $n+1$, hay que hallar el menor n tal que n es múltiplo de 5 y $n+1$ múltiplo de 9. Es inmediato comprobar que $n = 35$. Por lo tanto, 35 es el número buscado.

2. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 5 y sean a y b números reales diferentes de 0. Supongamos que el resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax + b$ es igual al resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax^2 + b$. Determinar el valor de $a + b$.

Solución:

Sea $P(x) = q_1(x)(x^3 + ax^2 + b) + r(x)$ y $P(x) = q_2(x)(x^3 + ax + b) + r(x)$, donde $r(x)$ es el resto de la división euclidiana y $q_1(x)$ y $q_2(x)$ son los cocientes correspondientes. Restando ambas ecuaciones llegamos a

$$q_1(x)(x^3 + ax^2 + b) = q_2(x)(x^3 + ax + b). \tag{1}$$

Dado que $q_1(x)$ y $q_2(x)$ son polinomios de grado 2, y como todo polinomio de grado 3 se factoriza o bien como el producto de un polinomio de grado 1 por uno irreducible de grado 2, o bien como el producto de tres polinomios de grado 1, $x^3 + ax^2 + b$ y $x^3 + ax + b$ no pueden ser primos entre sí. Nótese que la condición a priori plausible de que exista un polinomio de segundo grado irreducible que sea divisor de ambos, y por tanto de su diferencia $a(x^2 - x)$, con $a \neq 0$, queda descartada del hecho de que $(x^2 - x)$ no es irreducible. Por tanto, la igualdad (1) fuerza a que $x^3 + ax^2 + b$ y $x^3 + ax + b$ tengan al menos una raíz real x_0 en común, lo que equivale a que x_0 sea raíz de $x^2 - x$ (pues $a \neq 0$).

Así pues, $x^3 + ax + b$ tiene que tener a 0 ó a 1 como raíz, y dado que 0 no puede serlo debido a que $b \neq 0$, se tiene que 1 es raíz de dicho polinomio, y por consiguiente $1 + a + b = 0$, concluyendo que $a + b = -1$.

3. Sea $ABB'A'$ un cuadrilátero, y sean γ_1, γ_2 las circunferencias con diámetros BA' y AB', respectivamente (esto es, con centros en los correspondientes puntos medios de dichas diagonales, denotados mediante I y J).

   a) Sea B'' el punto de la recta BB', distinto de B, que corta a γ_1, y sea A'' el punto de la recta AA', distinto de A, que corta a γ_2. Demostrar que el punto de corte C de las rectas $A'B''$ y $A''B'$ verifica que

$$CA' \cdot CB'' = CA'' \cdot CB'.$$

b) Análogamente, sea B''' el punto de la recta BB', distinto de B', que corta a γ_2, y sea A''' el punto de la recta AA', distinto de A', que corta a γ_1. Si D es el punto de corte de las rectas AB''' y $A'''B$, demostrar que CD es perpendicular a IJ.

Solución:

Por el teorema de Thales, $\angle A'B''B = 90° = \angle B'A''A$, y por tanto $\angle A'B''B' = \angle B'A''A'$. Así, el cuadrilátero $A'B'B''A''$ es cíclico (esto es, sus vértices están sobre una circunferencia, que denotaremos mediante γ), y por consiguiente el punto C tiene potencia respecto a γ dada por $CA' \cdot CB''$. Como dicho valor es constante (independientemente de la recta que pase por C e interseque a γ), se tiene que $CA' \cdot CB'' = CA'' \cdot CB'$.

Para demostrar b), basta proceder exactamente como en el apartado anterior para deducir que $DA \cdot DB''' = DA''' \cdot DB$. Estas dos igualdades (la demostrada en a) y la inmediatamente anterior) implican que tanto C como D están en el eje radical de γ_1 y γ_2, el cual es perpendicular a la recta determinada por sus centros, esto es, a IJ, como se quería probar.

4. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 5$ y $AB = 10$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F. Calcular el área del cuadrilátero $AFCE$.

Solución:

Como $AD = BC$, tenemos que $ABCD$ es un trapecio isósceles. Sea M el punto medio de AB. Por lo tanto, los triángulos ADM, DMC y MCB son equiláteros de lado 5; eso se observa viendo que la altura del trapecio es $h = \sqrt{5^2 - (5/2)^2}$, y por lo tanto $DM^2 = h^2 + (5/2)^2 = 5^2$. Como ADC es isósceles y $\angle ADC = 120°$ por ser suma de dos ángulos de $60°$, tenemos que $AMCD$ es un rombo y las dos diagonales son bisectrices de $\angle DAB$ y $\angle ABC$. Entonces, $\angle AFO = 60°$, ya que $\angle AOF = 90°$ y $\angle FAO = 30°$; y por el mismo motivo, $\angle AEO = 60°$. Por lo tanto, AEF es equilátero y O es el punto medio de EF ya que AO es la altura y por lo tanto también es la mediana.

Podemos calcular la longitud de AF usando que $AC = BD = 5\sqrt{3}$ (por el teorema de Pitágoras en ABC). Además, por el teorema de la bisectriz en ABC, tenemos que $AO = \frac{10}{\sqrt{3}}$. Por lo tanto, como conocemos la altura del triángulo equilátero AEF, tenemos automáticamente la medida del lado, que es $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{20}{3}$. Entonces, $AE = AF = EF = \frac{20}{3}$. Finalmente, observamos que $AFCE$ es un cuadrilátero con las diagonales perpendiculares cuya área es $\frac{AC \cdot EF}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{3}$.

5. En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas distintas son o bien amigas o bien enemigas (una y solo una de las dos cosas, y esta relación es recíproca). Una persona no se considera ni amiga ni enemiga de sí misma. Además, se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigas y B y C son enemigas, entonces A y C son amigas. Demostrar que se pueden encontrar dos personas que son amigas y tienen el mismo número de enemigos.

Solución:

Supongamos que no existe tal par. Sea Δ el máximo número de enemigos que tiene una persona, sea u una persona con Δ enemigos y sean $v_1, v_2, \ldots, v_\Delta$ sus enemigos ordenados por número de enemigos (es decir, v_1 es el que tiene menos enemigos y v_Δ el que tiene más). Nótese que $\Delta \geq 2$, dado que de otra forma habría un par de personas con el mismo número de enemigos que son amigos.

Como $v_1, \ldots, v_\Delta$ son todos amigos entre sí, no puede haber dos con el mismo número de enemigos, y como Δ es el máximo número de enemigos, tenemos que v_i tiene i enemigos para todo $1 \leq i \leq \Delta$. Sean $w_1, \ldots, w_{\Delta-1}, w_\Delta = u$ los enemigos de v_Δ. Por el mismo razonamiento, w_i tiene i enemigos. Nótese que u y v_Δ no tienen enemigos en común y, en particular, $v_1 \neq w_1$. Además, v_1 y w_1 son amigos entre sí. Como tienen el mismo número de enemigos, hemos llegado a una contradicción.

6. Dado $p \in \mathbb{N}$ un número primo, se dice que p "verifica la propiedad $\star$" si se tiene que

$$A(n,p) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1}$$

es un número decimal periódico para todo entero positivo n. Determinar el conjunto de todos los números primos p que verifican la propiedad $\star$.

Solución:

Sumando las fracciones se obtiene $A(n,p) = a(n,p)/b(n,p)$, donde

$$a(n,p) := \sum_{i=n}^{n+p-1} \prod_{\substack{j=n \\ j\neq i}}^{n+p-1} j, \quad b(n,p) := \prod_{j=n}^{n+p-1} j.$$

Obsérvese que se tienen las siguientes afirmaciones:

i) $b(n,p)$ es múltiplo de p (por ser producto de p naturales consecutivos);

ii) $a(n,p)$ no es múltiplo de p, pues claramente sólo uno de los sumandos $\prod_{j\neq i} j$ de $a(n,p)$ no es múltiplo de p (ya que, módulo p, el producto de todas las clases residuales no nulas no es congruente con 0, al ser p primo -de hecho, dicho producto es congruente con -1, mod p, por el teorema de Wilson).[1]

Teniendo todo esto en cuenta, veamos entonces en primer lugar que todo primo $p \neq 2, 5$ verifica la propiedad $\star$. Para ello, fijemos un primo $p \neq 2, 5$, y tomemos $n \in \mathbb{N}$ (arbitrario). Si $A(n,p)$ no fuera decimal periódico, $10^r \cdot A(n,p)$ sería entero para todo $r \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Pero entonces escribiendo $m_r := 10^r \cdot A(n,p)$, tendríamos que $10^r \cdot a(n,p) = m_r \cdot b(n,p)$, llegando así a una contradicción, pues p divide a $b(n,p)$ mientras que p no divide ni a 10 ni a $a(n,p)$.

Por último, como $A(1,2) = 1 + 1/2 = 1.5$ y $A(2,5) = 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 = 1.45$, ni $p = 2$ ni $p = 5$ verifican la propiedad $\star$.

Por tanto, el conjunto requerido es $\{p \in \mathbb{N} : p \text{ primo}, p \neq 2, 5\}$.

[1] Por el hecho bien conocido de que el número a/b, con $\text{mcd}(a,b) = 1$, es periódico si y solo si existe un divisor primo $p \neq 2, 5$ de b, se concluye que todo primo $p \neq 2, 5$ verifica la propiedad $\star$, quedando por tanto solo por comprobar que cuando $p \in \{2, 5\}$ existe algún valor de n para el cual $A(n,p)$ es decimal exacto (dado que aún puede haber algún primo $q \neq p$, $q \neq 2, 5$, que sea divisor del denominador de la fracción irreducible que define $A(n,p)$), y por consiguiente 2 y 5 no verifican dicha propiedad $\star$. En lo que sigue finalizamos el problema sin hacer uso de este hecho sobre números decimales periódicos.