1. Encontrar todos los valores de b para los cuales la ecuación $x^3 + 14x^2 + bx - 90 = 0$ tiene tres raíces enteras.

Si r, s, t son raíces enteras de la ecuación, se tiene

$$x^3+14x^2+bx-90 = (x-r)(x-s)(x-t) = x^3-(r+s+t)x^2+(rs+st+tr)x-rst, \text{ luego } \begin{cases} r+s+t=-14 & (1) \\ rs+st+tr=b & (2) \\ rst=90 & (3) \end{cases}$$

Se trata pues de encontrar las soluciones (enteras) del sistema (1)+(3), y la respuesta al problema serán los correspondientes valores de b.

El 90 admite bastantes factorizaciones como producto de 3 enteros, pero en las que nos interesan, uno de los factores debe ser ≤ -5, pues de lo contrario los tres serían ≥ -4 y por tanto su suma sería ≥ -12 y no podría valer -14.

Los divisores de 90 que son ≤ -5 son $-5, -6, -9, -10, -15, -18, -30, -45$ y -90.

Para $r=-5$ nos quedaría $\begin{Bmatrix} st=-18 \\ s+t=-9 \end{Bmatrix}$ luego s, t serían las raíces de $x^2+9x-18$, cuyo discriminante es $9^2+4\cdot 18 = 153$; como no es un cuadrado perfecto, los valores de s, t no son enteros en este caso, por lo que lo descartamos.

Para $r=-6$ tenemos $\begin{Bmatrix} st=-15 \\ s+t=-8 \end{Bmatrix}$, raíces de $x^2+8x-15$ con discrim. $8^2+4\cdot 15=124$, no valen.

Para $r=-9$ tenemos $\begin{cases} st=-10 \\ s+t=-5 \end{cases}$, raíces de $x^2+5x-10$, con discrim $25+40=65$, no valen

Para $r=-10$ $\begin{cases} st=-9 \\ s+t=-4 \end{cases}$, raíces de x^2+4x-9, con discrim. $16+36=52$, no valen.

Para $r=-15$ $\begin{cases} st=-6 \\ s+t=1 \end{cases}$, raíces de $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$, luego $\{r,s,t\}=\{-15,-2,3\}$

es un juego de raíces enteras del polinomio cuando $\boxed{b=rs+st+tr=-21}$

Para $r=-18$ $\begin{cases} st=-5 \\ s+t=4 \end{cases}$, raíces de $x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{b=-77}$

Los casos $r=-30$, $r=-45$ y $r=-90$ se descartan como antes, o viendo que con esos valores tan altos (o bajos) de r la suma no puede llegar a -14.

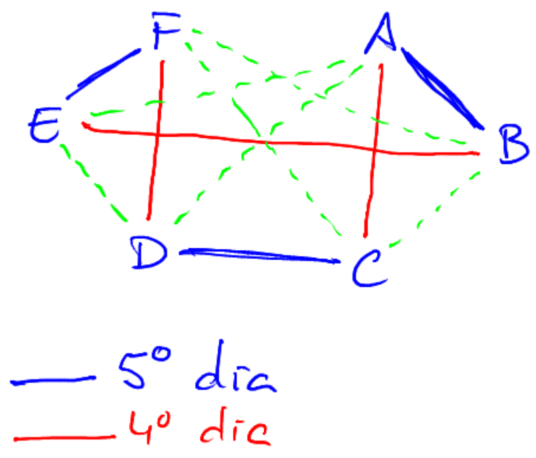
En definitiva, hay exactamente dos valores posibles, $b=-21$ y $b=-77$.

2. En un torneo de ajedrez participan seis maestros durante cinco días. Cada día se disputan tres partidas en las cuales participan todos los maestros, y al finalizar el torneo todos se han enfrentado contra todos exactamente una vez.

Demostrar que al terminar el tercer día del torneo existe un conjunto de al menos tres maestros que ya han jugado entre ellos todas las partidas. ¿Es único dicho conjunto?

Sea A un jugador cualquiera, sea B su rival el día 5º ($B \neq A$) y sea C su rival el día 4º ($C \neq A$, obvio, y $C \neq B$ porque B juega contra A una sola vez).
Sea D el rival de C el día 5º ($D \neq C$, obvio, y $D \neq A$, $D \neq B$ porque A y B juegan entre sí ese mismo día). El día 4º, el rival de D no puede ser A ni C (juegan entre sí ese día) ni B, porque entonces los otros dos maestros (distintos de A, B, C, D) tendrían que jugar entre sí los días 4º y 5º.
Sea E (distinto de A, B, C, D) el rival de D el día 4º. Entonces ese día también se enfrentarían B y F (F es el maestro que aún no hemos considerado), y el día 5º se enfrentarían E y F.
Podemos hacer un hexágono A, B, C, D, E, F y marcar con líneas sólidas los enfren-

tamientos de los días 4º y 5º; entonces vemos que se pueden marcar con líneas punteadas dos triángulos ADE y BCF, lo que significa que ninguno de esas partidas (AD, DE, EA; ni BC, CF, FB) se juegan los días 4º y 5º, y por tanto ya se habían jugado al final del tercer día.



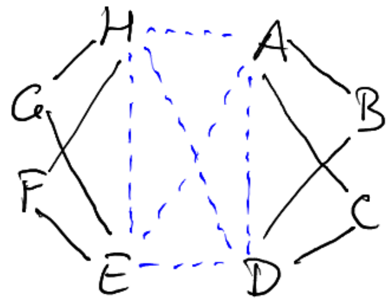
Esto prueba que el conjunto existe, y que NO es único (de hecho hay exactamente dos).

NOTA El enunciado original propuesto por la RSME proponía un torneo con 8 maestros (y por tanto 7 jornadas), y se trataba de ver que al final de la 5ª jornada había un conjunto de 4 maestros que habían jugado todas sus partidas. Esto admite un análisis análogo, aunque hay que distinguir dos posibilidades.

Lo esquematizamos a continuación, sin incluir los argumentos (análogos a los de antes) que garantizan que "letras distintas corresponden a maestros distintos".

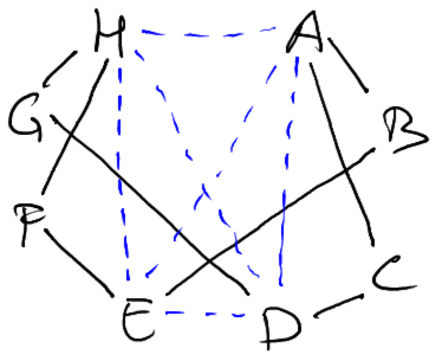
AB (7º día) → AC (6º día) → CD (7º); ahora hay dos posibilidades

<u>OPCIÓN 1</u> BD (6º) → EF (7º) → EG (6º) → GH (7º) → FH (6º); esto nos lleva al diagrama de arriba, donde las líneas punteadas nos dicen que todos los enfrentamientos entre $\{A,D,E,H\}$ se han producido en los días anteriores (y lo mismo para $\{B,C,F,G\}$, para $\{A,D,F,G\}$ y para $\{B,C,E,H\}$).

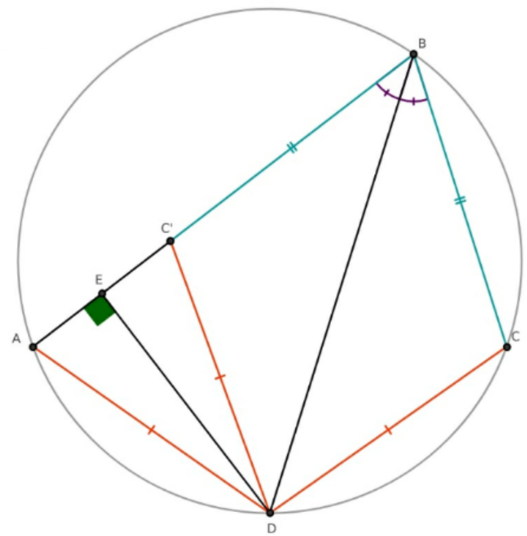


<u>OPCIÓN 2</u> BE (6º) → EF (7º) → DG (6º día; si fuera DF los otros dos maestros repetirían enfrentamiento) → GH (7º) → FH (6º)

Así, los conjuntos $\{A,D,E,H\}$ y $\{B,C,G,F\}$ ya han tenido todos sus enfrentamientos en los días anteriores.



3. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo verificando $AB > BC$, $CD = DA$ y $\angle ABD = \angle DBC$. Sea E el punto de la recta AB tal que $\angle DEB = 90°$. Probar que $AE = \dfrac{AB - BC}{2}$.



Solución 1 Sea C' el punto simétrico de C con respecto a la recta BD, lo incluimos en la figura.

Por simetría se tiene que $\angle C'BD = \angle CBD$, $BC' = BC$ y $DC' = DC$. En particular C' está en el segmento AB y cumple que $AC' = AB - BC$.

Además, el triángulo DAC' es isósceles con $DA = DC'$, por lo tanto la altura y la mediana de D deben coincidir, es decir:

$$AE = \frac{AC'}{2} = \frac{AB - BC}{2}.$$

Solución 2. Aplicando el teorema del coseno en los triángulos ABD y BCD,

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos(\alpha) \qquad CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cos(\alpha)$$

donde hemos denotado $\alpha = \angle ABD = \angle DBC$. Como $AD = CD$ y $AB \neq BC$, se tiene igualando

$$(AB + BC)(AB - BC) = AB^2 - BC^2 = 2BD(AB - BC)\cos(\alpha), \qquad BE = BD\cos(\alpha) = \frac{AB + BC}{2}.$$

Luego $AE = AB - BE = \frac{AB - BC}{2}$.

4. Demostrar que todos los números racionales pueden expresarse como suma de algunas fracciones de la forma $\dfrac{n-1}{n+2}$, con $n \geq 0$ entero, admitiendo repetir sumandos.

Con $n=1$ se obtiene el 0.

Con $n=0$ se obtiene $-1/2$, y repitiéndole se obtiene el -1.

Con $n=2$ se obtiene $1/4$, y repitiéndole se obtiene el 1.

Como se pueden repetir sumandos y ya tenemos el 0, basta con obtener las fracciones del tipo $\frac{1}{k}$ y $\frac{-1}{k}$ para $k \geq 1$ (entero).

Para los n de la forma $n=3k-2$, las fracciones del enunciado toman la forma $\frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}$, y sumándole -1 (que ya tenemos de antes) obtenemos $\frac{-1}{k}$.

Ahora, repitiendo $k-1$ veces este último tenemos $\frac{1-k}{k} = \frac{1}{k} - 1$, y sumando el 1 que ya teníamos obtenemos $1/k$, con lo que hemos terminado.