La compactificación de Alexandroff

Trabajo Fin de Grado

Carlos Ruiz Sánchez

Departamento de Matemáticas

Universidad de Murcia

Tutor: Ángel Ferrández Izquierdo

Índice general

Quisiera agradecer esta trabajo a mi familia, la cual siempre me ha apoyado y ha confiado en mi hasta en los peores momentos y ha hecho que este llegue hasta aquí.

Al Dr. Ángel Ferrández Izquierdo, tutor de esta memoria por toda la ayuda proporcionada, el cual siempre ha estado disponible para cualquier duda que me ha surgido y la libertad que me ha dado para poder decidir el camino que mejor me ha parecido que siguiera el trabajo.

A mis compañeros de carrera, los cuales han hecho que mi trayectoria durante la misma haya sido la mejor época de mi vida y sea inolvidable.

Con especial cariño, también quiero dedicar este trabajo al Dr. Matías Raja Baño, el cual, a pesar de no tener relación directa con el trabajo, siempre se ha preocupado pro el desarrollo del mismo, siempre ha tenido un momento para hablar de matemáticas y una recomendación excelente para leer sobre ellas. Además también al profesor Pedro José Herrero Piñeyro, por su devoción a la enseñanza y por mostrarme la belleza de esta rama de las matemáticas.

Por último, también con cariño y con muchísima gratitud, lo quiero dedicar a mi compañero y amigo Antonio Roberto Martinez Fernandez, porque durante toda la carrera siempre ha estado ahí para dejarme apuntes o pasar horas explicándome cuando tenia alguna duda y siempre con una sonrisa y sin el no sería el matemático que soy ahora. Desde aquí le deseo toda la suerte del mundo para su futuro y la esperanza de convertirme en la mitad de matemático que es él.

Resumen

El tema principal de esta memoria es el estudio de la compactificación de Alexandroff, también conocida como compactificación por un punto, de un espacio topológico. El trabajo se completará con las compactificaciones por n puntos y de Stone-Cech. Comenzaremos con las propiedades de las compactificaciones, que se relacionarán con las propiedades topológicas del espacio de partida. Para todo esto, se necesitarán unos preliminares topológicos, los cuales están recogidos en el primer capítulo, con la intención que esta memoria sea lo más autocontenida posible.

En el Capítulo 1 se hace una pequeña revisión bibliográfica sobre las compactificaciones, debido a que, unos de los grandes problemas de la topología, no hay unicidad en las definiciones, ya que según la antigüedad del texto pueden cambiar, como por ejemplo la definición de compacto. Por eso, además de estudiar las compactificaciones como tal, se ha intentado asentar las definiciones, viendo la equivalencia en algunos casos, cuando las propiedades del espacio topológico coinciden en ambos textos.

A continuación se desarrollan los conceptos y resultados topológicos necesarios para desarrollar la teoría que se expone en esta memoria. Primero se fijarán conceptos básicos para que no haya confusión por la poca unicidad de estas en los textos de topología. Posteriormente se entrará en los espacios topológicos localmente compactos, espacios de vital importancia para el estudio de la compactificación de Alexandroff y la compactificación por n puntos, estudiando propiedades de los mismos, relacionando las definiciones, caracterizando cuando un espacio compacto es localmente compacto y para acabar una condición suficiente para que un espacio topológico sea localmente compacto a partir de funciones propias.

Seguidamente se hablarán de los axiomas de numerabilidad, de bases numerablemente localmente finitas y de espacios σ-compactos. Se demostrará que todo espacio compacto $2A\mathbb{N}$ posee una base numerablemente localmente finita, resultado que nos ayudará a estudiar cuando la compactificación de Alexandroff es metrizable. Después de dar algu-

nos lemas sobre conjuntos densos y funciones continuas, se expondrán los axiomas de separación, empezando a partir del T_3. Se pondrá especial énfasis es los espacios Tychonoff o $T_{3\frac{1}{2}}$, mencionando dos propiedades que serán muy útiles para el desarrollo de la teoría. Luego se hablará del peso de un espacio topológico, concepto que nos ayudará a saber como de grande puede ser una compactificación, de las topologías débiles generadas por una familia de funciones y de un teorema de la diagonal o del embebimiento, el cual es esencial para la contrucción de la compactificación de Stone-Cech. Después se nombrará el teorema de Taimonov, el cual será útil para demostrar un criterio de cuando dos compactificaciones son equivalentes como para dar una caracerización de la compactificación de Stone-Cech. Por último se definirán los conjuntos cero, concepto que será útil para la caracterización de la compactificación de Stone-Cech, además aunque no se expliquen en esta memoria también son importantes ya que se puede construir la compactificación de Stone-Cech a partir de Z-ultrafiltros, donde Z es la familia de conjuntos cero de X. Para terminar el capitulo se verá que todo punto de espacio Tychonoff posee una base de entornos formada por conjuntos cero.

En el Capítulo 2 nos centraremos ya en la compactificación de Alexandroff. Primero se dará un breve introducción histórica sobre las compactificaciones, mencionando a varios de los grandes representantes que impulsaron esta teoría. Seguidamente se empezará con la definición de compactificación y de compactificación Hausdorff. Se dará una relación de equivalencia y de pre-orden, las cuales ayudarán a caracterizar las compactificaciones de Alexandroff y de Stone-Cech. Veremos que el producto de espacios topológicos conserva la compactificación, lo cual es una herramienta útil para compactificar espacios. Para acabar la primera sección de este capítulo, se demostrará que los únicos espacios que tienen una compactificación Hausdorff son los espacio Tychonoff y daremos un criterio para saber si dos compactificaciones Hausdorff son equivalentes. La siguiente sección se basará en el tamaño de un compactificación, dándonos una serie de cotas, las cuales desembocan un una que solo depende de los subconjuntos densos del espacio que queremos compactificar.

Llega la hora de abordar la compactificación de Alexandroff. En primer lugar, se definirá explicitamente la topología y se verá que cumple todas las propiedades de ser una compactificación, tomando como embebimiento la inclusión. Se demuestra que la compactificación de Alexandroff se comporta bien con respecto a los dos primeros axiomas de separación, pero que hay que pedir que el espacio topológico de partida sea localmente compacto y Hausdorff para que su compactificación sea Hausdorff. Se demostrará el teorema de Alexandroff, el cual no dice que toda compactificación Hausdorff por un punto de un espacio topológico es equivalente a su compactificación de Alexandorff y que el hecho de que un espacio tenga una compactificación Hausdorff por un punto es equivalente a que sea Hausdorff y localmente compacto. Como corolario se obtendrá que todo espacio localmente compacto y Hausdorff es Tychonoff. También se estudiarán las condiciones topológicas de X, para que el punto añadido de la compactificación de Alexandroff tenga una base de numerable y, como consecuencia, se obtendrá que la compactificación de Alexandroff es metrizable si, y solo si, el espacio topológico de partida es $2A\mathbb{N}$. Para terminar, veremos que la compactificación de Alexandroff veremos conserva el peso de un espacio topológico y una de las caracterizaciones más importantes cuando esta es Hausdorff, que es que es la menor compactificación dado el orden que se define al principio del capítulo.

En el capítulo 3 se expondrán la compactificación Hausdorff de un espacio topológico por n-puntos y la compactificación de Stone-Cech. La primera sección esta dedicada a la compactificación Hausdorff n-puntos, donde empezaremos demostrando el teorema que caracteriza los espacios que poseen esta compactificación, dando la construcción explícita de la compactificación. Seguidamente se dará la definición de n-estrella, concepto que será fundamental en el desarrollo de la teoría de esa compactificación, ya que una n-estrella determina completamente la compactificación. Y una relación de equivalencia, a partir de la cual se demostrará que dos compactificaciones por n-puntos son equivalentes si las dos n-estrellas que las determinan son equivalentes. Unos de los resultados más sorprendentes de esta sección es un criterio que determina si el espacio no posee una compactificación por n-puntos, para un cierto n, en función de los complementarios de ciertos compactos, del cual se extraerá como corolario que $\mathbb{R}$ no se puede compactificar por más de dos puntos y $\mathbb{R}^n$ por más de uno, y que dicha compactificación sea Hausdorff. Para terminar esta sección, se generalizará el corolario anterior para espacios métricos que cumple una determinada propiedad.

La última sección del capítulo trata sobe la compactificación de Stone-Cech. Aquí solo se trabajará con espacios Tychonoff. Se dará una construcción explícita de βX gracias al teorema de la diagonal y al hecho de que todo espacio Tychonoff tiene al menos una compactificación Hausdorff. Lo primero en demostrar será un teorema que construye la compactificación βX y que será la más grande dado el orden previamente definido, y que posee la propiedad de la extensión de Stone, la cual nos dice que toda función continua de X en un compacto se puede extender de manera continua a βX y que cualquier compactificación con esta propiedad es equivalente a βX. En la prueba de este teorema se ultiliza el clásico teorema de Tychonoff para productos compactos, pues en el caso en el que los compactos sean Hausdorff, se verá que la existencia de βX implica el teorema de Tychonoff. Seguidamente se demostrará un teorema que recogerá una serie de condiciones equivalentes que indicarán cuándo un compactificación Hausdorff de X

es equivalente a la de Stone-Cech. Se demostrará que la compactificación de Stone-Cech de un espacio Hausdorff compacto es el mismo y una caracterización de cuándo βX es metrizable. Para acabar la sección, y el capítulo, de definirrá el concepto de $\mathcal{C}^*$-embebido y la relación que tiene con la compactificación de Stone-Cech.

En el Apéndice se incluyen otras propiedades de βX y de $\beta\mathbb{N}$, la compactificación de Stone-Cech de $\mathbb{N}$, así como la existencia de algunas compactificaciones que no se han estudiado en esta memoria y una breve referencia bibliográfica de ellas.

Finalmente, quisiera destacar mi aportación personal a esta memoria. En primer lugar, hay una serie de resultados que aparecen en los textos sin demostración, ya bien como proposiciones, ejercicios o "trivialidades", y que por utilizarlos me ha parecido apropiado demostrarlos. Son 1.10 ([4] pág 421), 1.14 ([8]), 1.18([4] pag. 437), de este último se ha dado una versión más general, 1.25 ([9] pág 17), 1.50 ([4] pág 436), 2.6 ([7] pág 191), 2.10 ([4] pág 418) y 3.10 ([9] pág 26). Además, las demostraciones dadas en las proposiciones 4.1 y 4.2 son originales. También quisiera mencionar que en la demostración de 2.24, la parte final de la misma la cambié por el sencillo motivo que en la prueba dada en el texto hacía referencia a un resultado y yo quise utilizar otro que aparece en un texto diferente. Por este motivo, tuve que demostrar el lema 1.21, resultado que no he encontrado en ningún texto. La demostración de 1.23 también es original, pero está basada en otra. También son originales los lemas 1.45 y 1.46. Se verá también durante la memoria que la compactificación de Alexandroff y la de Stone-Cech son únicas salvo equivalencia, pero no hay un resultado para las compactificaciones por n puntos, por lo que también he construido unos ejemplos de que en ese caso no hay unicidad.

Summary

The main subject of this work is the study of Alexandroff's compactification, also known as onepoint compactification, of a topological space. The memory has been completed with the N-points and Stone-Cech's compactifications. We are going to study the properties of compactifications and their relations with those of the given topological spaces. We need some topological preliminaries in order to understand this theory. These concepts are collected in the firts chapter, with the intention that this work is self-contained.

In the Chapter 1, we make a short bibliographic review about compactifications, in order to state the concepts that we will use along the memory. We think that was necessary after observing different compactness definitions in the main general topology reference books. This is the reason, besides studying the theory, we have attempted to set up these definitions and see the equivalence of them according to the properties of the topological spaces.

We state the concepts and topological results needed to understand this theory. First, we set basic concepts to avoid confusions for the lack of uniqueness in topology's texts. Then, we start to study the locally compact spaces, which will play an important role to study Alexandroff's and N-points compactifications. We see the properties of this spaces and characterize when a compact space is locally compact. We finish this part by giving a sufficient condition for a space to be locally compact from compact functions. We continue talking about the countability axioms, basis countably locally finite and σ-compact spaces. We show that any compact $2A\mathbb{N}$ space have a basis countably locally finite. This lemma helps us to show when Alexandroff's compactifications is metrizable. Then, we expose some lemmas about density and separations axioms, starting from T_3. We go more deeply into Tychonoff's spaces or $T_{3\frac{1}{2}}$ spaces, mentioning two very useful properties to understand this theory. We will also consider the weight of a topological space, which help us to know the size of a compactification. Also, we talk about weak topologies as generated by a family of functions and the Embedding Theorem. This re-

sult will be very useful when constructing the Stone-Cech compactification. Taimonov's Theorem will play a key role to characterize Stone-Cech's compactification and to know when two compactifications are equivalent. Finally, the zero-sets allows us to characterize Stone-Cech's compactificaction and show that any Tychonoff space has a neighborhood base of zero-sets. This concept is important because we can build the Stone-Cech compactificaction with Z-ultrafilters, where Z is the family of zero-sets in X.

The Chapter 2 focuses on the theory of compactifications. First, we make a short historical introduction about compactifications, mentioning several representatives of this theory. Then we start with the definition of compactification and Hausdorff compactification of a space. We set up equivalence and pre-order relations in order to characterize Alexandroff's and Stone-Cech's compactifications. We are going to see that the product of topological spaces preserve the compactification, which will be very useful when constructing them. We will show that Tychonoff's spaces are the only ones admitting a Hausdorff compactification. We give a method to know when two compactifications are equivalent. The next section is based on the size of a compactification, giving a number of dimensions, which lead one one that only depends on dense subsets of the given space.

It is the time to define Alexandroff's compactification of a topological space, first considering the topology of the compact space and showing that this is a compactification with the inclusion. We show that Alexandroff's Compactifications preserve T_0 and T_1 axioms of separability, but we X must be Hausdorff and locally compact for X^* to be Hausdorff. After proving Alexandroff's Theorem, which says that Alexandroff's compactification is unique, up to equivalence, provided X is locally compact Hausdorff and X^* is Hausdorff if and only if X locally compact Hausdorff. As a consequence of this theorem, we see that any locally compact space is Tychonoff. Also, we study a property of the topological spaces for the extra point of his Alexandroff's compactification has a countably base of neighborhoods, so that X^* is metrizable if, and only if X is $2A\mathbb{N}$. We finish showing that Alexandroff's compactification preserves the weight and one of the most important caracterization of Hausdorff Alexandroff's compactification, which is the least compactification such as was defined at the beginning of this chapter.

The Capter 3 deals with Hausdorff N-points compactifications. We start showing a theorem which characterizes the spaces with a compactificaciton by N points. In the proof we can see the construction of this topological spaces and then we define the $N-$stars and an equivalence relation. This concept is very important because an N-star determines a compactification by N points. We are going to see that two compactificactions by N points are equivalent if and only if the two N-stars are related. One of the most surprising results of this section is a method to know when a topological space can not have a compactification by N points. As a corollary, we show that $\mathbb{R}$ has no compactification by N points when $N > 2$ and $\mathbb{R}^d$ has no compactification by N points when $N > 1$ and $d > 1$. To finish section, we generalize the previous results when X has no bounded metric space with a special property.

This chapter finishes with the Stone-Cech Compactification of a topological space. Here we only consider Tychonoff spaces. We are going to get a construction of βX by using the diagonal theorem and the fact that all Tychoncoff spaces have a Hausdorff compactification. First, we show a theorem where it is constructed the Stone-Cech compactification, that it is the largest compactification in the order and show that this compactification has the Stone extension property, which says us that any continuous function $f : X \to Y$, where Y is Hausdorff compact, can be extended to $\widehat{f} : \beta X \to Y$ and that any compactification with this property is equivalent to the Stone-Cech compactification. In the proof of this theorem, we use the Tychonoff theorem for the product of compact spaces. We are going to see that, in the case of Hausdorff compact spaces, the existence of βX implies the Tychonoff theorem. Then we give several equivalent conditions that caracterize the Stone-Cech compactification. We show that $\beta X = X$ when X is Hausdorff compact and when βX is metrizable. To finish this section, and the chapter, we define the concept of $\mathcal{C}^*$-embedding and its relation with the compactification.

The Appendix contains some other properties of βX and $\beta\mathbb{N}$, the Stone-Cech compactification of $\mathbb{N}$, and the existence of other compactifications not considered in this work and a brief bibliographic reference about them.

Finally, I would like to point out my personal contribution to this memory. First, we have used some results which appear without proof in reference book. Then I thought it could be a good idea to show them. They are 1.10 ([4] pag. 421), 1.14 ([8]), 1.18 ([4] pag. 437), of the latter has been given a more general version, 1.25 ([9] pag. 17), 1.50 ([4] pag. 436), 2.6 ([7] pag. 191), 2.10 ([4] pag. 418), and 3.10 ([9] pag. 26) . Furthermore, I give original proofs in propositions 4.1 and 4.2. It is worth mentioning that the final part of the proof of 2.24 has been changed in order to use a different one containes in another book. To do that, we had to show the Lemma 1.21, which I could not find at any text. They are also original proofs those of 1.23, and Lemmas 1.45 and 1.46. Throughout the memory, it will be seen that Alexandroff and Stone-Cech compactifications are unique up to equivalence. Since this is not the case for n points compactifications, I exhibit some examples to show that.

Capítulo 1

El estado del arte

1.1. Revisión bibliográfica

En este apartado se detallará una revisión bibliográfica sobre las compactificaciones de espacios topológicos, ya que dada su importancia, no solo por las diversas aplicaciones, sino también como teorías en sí mismas, se abordan en varios textos, pero cada uno a su manera. Se hará un seguimiento minucioso de cómo está tratada la teoría en libros de topología general clásicos como Dugundji [2], Engelking [3], Kelley [5] o Willard [13], y también en libros más modernos como Freiwald [4] y Munkres [10], y se expondrán una serie de aplicaciones interesantes de cada una de las compactificaciones que se estudiarán en esta memoria, como son las compactificaciones *de Alexandroff*, *por un número finito de puntos* y de *de Stone-Cech*

Antes de empezar con la compactificaciones, es primordial fijar unas definiciones coherentes, ya que también según el texto que estemos estudiando, la definición puede variar, como por ejemplo los conceptos de espacio localmente compacto, de compacidad y de entorno de un punto, dando lugar a conclusiones diferentes, como por ejemplo, que todo espacio compacto es paracompacto (resultado que es cierto si el espacio es Hausdorff). En esta memoria seguiremos el texto de Freiwald [4], que será nuestra principal guía, aunque nos apartaremos de él en contadas ocasiones, con el objetivo de que esta memoria sea lo más general posible con respecto a pedirle condiciones al espacio. Esta elección se debe a su actualidad, pues su última versión es de junio de 2013, con una revisión de febrero de este mismo año.

En muchos textos clásicos, cuando se habla de una compactificación, se da como condición que el espacio compacto X' sea Hausdorff como en Freiwald [4], además de todos los textos que exigen que los espacios compactos sean Hausdorff como en Dugundji [2], Engelking [3], Kelley [5] y Willard [13]. En esta memoria se ha preferido no implementar esta condición al espacio compacto para tener más riqueza en cuanto a la elección del espacio y se seguirá López [7]. Cuando sea necesario que el espacio compacto sea Hausdorff se mencionará explicitamente y sobre estas se detallaran propiedades exclusivas donde se verá su importancia, tanta como que para los textos mas clásicos solo traten sobre ellas. También son de gran importancia los espacios topológicos llamados en muchos textos clásicos de Tychonoff, ya que son los espacios básicos para trabajar con las compactificaciones Hausdorff y en particulas con la compactificación de Stone-Cech. En esta memoria usaremos esta terminología, aunque en Munkres [10] viene como espacios completamente regulares , definición en que también según que textos está incluida que el espacio sea T_1, o el axioma de separabilidad $T_{3\frac{1}{2}}$. Toda esta falta de unicidad en las definiciones es un problema que se intentará solventar en esta memoria.

Para la teoría sobre compactificaciones, se ha seguido Freiwald [4], donde se estudian tanto las propiedades como el tamaño de las mismas. Trata la compactificación de Alexandroff, pero muy escasamente, y no trata la compactificación por un número finito de puntos. Las propiedades de las compactificaciones se tratan en Engelking [3] con gran profundidad, incluso más propiedades de las que se pueden ver en Freiwal [4]. En este se consideran las compactificaciones de Alexandroff y de Stone-Cech, pero tampoco la compactificación por N puntos, pero se ha tomado Engelking [3] más como libro ayuda que principal porque Freiwald [4] es más moderno, con notación más actual y de más fácil comprensión.

Para la compactificación de Alexandroff, se han seguido Munkres [10], López [7] y Margalef-Outerelo-Pinilla [9]. Este último es un libro antiguo, pero es uno de los que hacen una profundización más exhaustiva de las propiedades de esta compactificación, el inconveniente es que su notación es pesada y deja muchas cosas en el aire, por eso para la parte donde se defina la compactificación se han seguido los dos primeros. En todos los textos sobre topología que se han elegido para esta memoria se trata la compactificación de Alexandroff, pero en la mayoría de ellos no hay una profundización sobre ella, excepto en Margalef-Outerelo-Pinilla [9], solo se expone cómo viene definida la topología del espacio compacto.

Para la compactificación por N puntos, se ha seguido Margalef-Outerelo-Pinilla [9], el cual esta basado en el articulo *N-Points compactifications* de K.D. Magill [8], del cual también se han sacado unos resultados, a mi parecer, interesantes. De todos los textos revisados, Margalef-Outerelo-Pinilla [9] es el único que trata la compactificación Hausdorff por N puntos.

La compactificación por N puntos, donde N es finito, también se puede ver en Kimura [6], que es un artículo sobre la compactificacion de un espacio topológico por $\aleph_0$ puntos, pero se ha descartado su inclusión en esta memoria, porque abarca conocimientos demasiado muy alejados de las pretensiones de este trabajo.

Para la compactificación de Stone-Cech, al contrario que para las otras dos compactificaciones expuestas en esta memoria, hay muchos textos buenos y muy especializados. Nosotros nos hemos basado sobretodo en Engelking [3] y Freiwald [4], ya que Dugundji [2], Munkres [10] y Willard [13] solo lo tratan de pasada. En Margalef-Outerelo-Pinilla [9] Vol. 3, también se profundiza bastante, ya que es un texto especializado en las compactificaciones, pero se han seguido los otros dos para utilizar otros textos. La obra de Walker [12] está especializada en la compactificación de Stone-Cech, que la trata desde la construcción dada gracias a los teoremas de Tychonoff y del embebimiento y los ultrafiltros.

En Engelking [3] se profundiza bastante también en este tema y en las compactificaciones de tipo Wallman. Además del estudio de la compactificación de Stone-Cech, en Freiwald [4], y sobre todo en Walker [12], se trata en particular la compactificación de los números naturales $\beta\mathbb{N}$. Otros textos que enfocan punto de vista diferente sobre $\beta\mathbb{N}$, aunque no se han utilizado para el desarrollo de esta memoria es, por ejemplo, *Topics in Topology*, de Stevo Todorcevic, donde se demuestra un resultado muy interesante sobre los números naturales que nos dice lo siguiente: si el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ se particiona en un número finito de conjuntos, es posible encontrar uno de ellos, pongamos A, y un subconjunto infinito B de A, con la propiedad de que cualquier suma finita de elementos de B pertenece a A. Además, otro texto interesante sobre βX es *Rings of Continuos Functions*, de Leonard Gillman, el cual tampoco se ha utilizado para esta memoria.

1.2. Preliminares

En esta sección, pues el contenido topológico de la memoria es grande, se hará un resumen con definiciones y resultados topológicos que serán necesarios para el desarrollo de la teoría sobre compactificaciones.

Empezaremos fijando las definiciones básicas que utilizaremos a lo largo de toda la memoria con la intención de que sea lo más autocontenida posible, pues como se avisó en el capítulo dedicado a la revisión, puede que cada texto las trate distintas. Empezaremos por el siguiente concepto:

Definición 1.1. ([4], pág 110) *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $x \in X$ y $V \subseteq X$. Diremos que V es un **entorno** de x si $x \in Int(V)$.*

Definición 1.2. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{B}$ es una **base** para τ si cumple:*

1. *Para todo $x \in X$ y todo entorno U de x, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathcal{B} \subset U$.*
2. *Si $x \in B_1 \cap B_2$, con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$*

Ya que hablamos de compactificaciones, es obligado que nuestra primera definición sea la siguiente:

Definición 1.3. *Diremos que un espacio (X,τ) topológico es **compacto** si para todo recubrimiento por abierto de X, se puede extraer un subrecubrimiento finito.*

Observación 1.4. *Nótese que en nuestra definición de espacio compacto no pedimos que el espacio sea Hausdorff como en muchos textos clásicos de topología como .*

El siguiente resultado es uno de los más importantes en topología por su gran profundidad y herramienta básica en muchas ramas de las matemáticas.

Teorema 1.5. (Tychonoff, [4], pág 406) *Supongamos que $X = \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$. Entonces X es compacto si y solo si X_i es compacto para cada $i \in I$.*

Definición 1.6. *Diremos que un espacio X es **localmente compacto** si cada $x \in X$ posee una base de entornos compactos.*

En otros textos puede aparecer otra definición que no es equivalente a esta, como por ejemplo la dada por [10], ya que según esta definición todo espacio compacto es localmente compacto, y con nuestra definición no se cumple. Al omitir la condición de que el espacio sea Hausdorff, podemos encontrar un espacio compacto que no es localmente compacto.

Ejemplo 1.7. *Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales y τ su topología heredada de la topología usual de $\mathbb{R}$. Tomamos $X = \mathbb{Q} \cup \sqrt{2}$ y una topología definida por $\tau' = \tau \cup \{X\}$. Entonces X es compacto, no es Hausdorff ni localmente compacto, pues ningún número racional tiene una base de entornos compactos.*

Vamos a ver que cuando el espacio compacto es Hausdorff, las dos definiciones son equivalentes.

Proposición 1.8. ([2], pág 314) *Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es localmente compacto.*
2. *Para todo $x \in X$ existe V_x entorno de x tal que V_x es compacto en (X, τ).*
3. *Para todo $x \in X$, existe U_x entorno abierto tal que $\overline{U_x}$ es compacto en (X, τ)*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Es evidente, por la definición de localmente compacto.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $x \in X$. Por hipótesis existe V_x entorno compacto de X. Por ser entorno, existe un abierto U_x, tal que $x \in U_x \subset V_x$. Como (X, τ) es Hausdorff, V_x es cerrado y por lo tanto $\overline{U_x} \subset V_x$, lo que implica que $\overline{U_x}$ es compacto.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $x \in X$ y V_x un entorno de x. Por hipótesis existe U_x entorno abierto tal que $\overline{U_x}$ es compacto en (X, τ). Si $\overline{U_x} \subset V_x$ ya lo tenemos. Podemos suponer que $\overline{U_x} \not\subseteq V_x$. Para todo $y \in \overline{U_x} \backslash V_x$, existen V_x^y y V_y entornos abiertos disjuntos de x e y respectivamente. Entonces, como

$$\overline{U_x} \subset \left(\bigcup_{y \in \overline{U_x} \backslash V_x} V_y \right) \cup V_x,$$

por ser compacto, existen $y_1, .., y_n \in \overline{U_x} \backslash V_x$ tales que

$$\overline{U_x} \subset V_{y_1} \cup .... \cup V_{y_n} \cup V_x.$$

Sea $C = \overline{U_x} \backslash ((V_{y_1} \cup .... \cup V_{y_n}) \cap \overline{U_x}) \subset V_x$. Se tiene que C es cerrado en $(\overline{U_x}, \tau|_{\overline{U_x}})$ que es compacto, lo que implica que C es compacto en $(\overline{U_x}, \tau|_{\overline{U_x}})$ y por tanto en (X, τ). Entonces C es un entorno compacto de x contenido en V_x.

□

Corolario 1.9. *Si (X, τ) es un espacio topológico compacto y Hausdorff, entonces es localmente compacto.*

El siguiente teorema recoge algunas propiedades importantes de los espacios Hausdorff localmente compactos, en el cual me ha parecido interesante incluir la demostración debido a que en la prueba se utilizan la definiciones tal y como se han expuesto anteriormente.

Necesitamos el siguiente lema auxiliar:

Lema 1.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico, V abierto y A un subconjunto. Entonces*

$$V \cap \overline{A} \subseteq \overline{V \cap A}.$$

Demostración. Sea $x \in V \cap \overline{A}$. Para que $x \in \overline{V \cap A}$, para todo U entorno de x, $U \cap V \cap A \neq \emptyset$. Como $x \in \mathrm{Int}U \subset U$, vamos a ver $\mathrm{Int}U \cap V \cap A \neq \emptyset$. Pero esto es cierto, pues $\mathrm{Int}U \cap V \neq \emptyset$, pues x pertenece a los dos conjuntos y por ser intersección de abiertos, es abierto. Entonces $\mathrm{Int}U \cap V$ es un entorno de x, y como x pertenece a $\overline{A}$ por hipótesis, por lo tanto $\mathrm{Int}U \cap V \cap A \neq \emptyset$. Teniendo en cuenta que $\emptyset \neq \mathrm{Int}U \cap V \cap A \subset U \cap V \cap A$, ya tenemos el resultado. □

Teorema 1.11. ([4], pág 421) *Sea $A \subseteq X$, donde X es Hausdorff:*

1. *Si X es localmente compacto y $A = F \cap G$ donde F es cerrado y G es abierto, entonces A es localmente compacto.*

2. *Si A es un localmente compacto de X, entonces A es abierto en su clausura.*

3. *Si A es un subespacio localmente compacto de X, entonces $A = F \cap G$ donde G es abierto y F es cerrado.*

Demostración. (1) Primero veamos que si F es cerrado y G es abierto en un espacio Hausdorff localmente compacto, entonces son localmente compactos. Sea $x \in F$, tomamos V un entorno compacto de x, como X es Hausdorff V es cerrado. Entonces $V \cap F \subseteq V$ es un cerrado contenido en un compacto, por lo tanto es compacto y es un entorno de x. Si $x \in G$, por ser abierto es entorno de todos sus puntos, por lo tanto existe V entorno compacto de x tal que $V \subset G$. Por lo tanto G es localmente compacto.

Sea ahora $A = F \cap G$. Sea $x \in A$, entonces $x \in F$ y $x \in G$, que son localmente compactos, por lo tanto existen V y U compactos tales que $x \in V \subset F$ y $x \in U \subset G$. La intersección de dos compactos en un espacio Hausdorff vuelve a ser un compacto, por lo tanto A es localmente compacto tomando como base de entornos compacto de x la familia

$$\{U \cap V \,:\, U \text{ entorno compacto de } x \text{ en } G \text{ y } V \text{ entorno compacto de } x \text{ en } F\}.$$

(2) Sea $a \in A$ y sea K un entorno compacto de a en A. Entonces $a \in \mathrm{Int}_X A = U$. Como A es Hausdorff, enontces K es cerrado y por la definición de clausura tenemos que $\overline{U^A} \subseteq K$, entonces $\overline{U^A}$ es compacto. Como U es abierto en A, existe V abierto en X tal que $U = A \cap V$ y tenemos que

$$\overline{(A \cap V)} \cap A = (\overline{U} \cap A) = \overline{U^A} \subseteq A.$$

Entonces $(\overline{A \cap V}) \cap A$ es compacto y por la tanto cerrado por ser X Hausdorff. Como $A \cap V \subseteq (\overline{A \cap V}) \cap A$ y $(\overline{A \cap V}) \cap A$ es cerrado tenemos que $\overline{A \cap V} \subseteq (\overline{A \cap V}) \cap A$. Como V es abierto, por el lema anterior tenemos que $V \cap \overline{A} \subseteq \overline{V \cap A}$. Tomamos $W = V \cap \overline{A} \subseteq \overline{V \cap A} \subseteq \overline{(A \cap V)} \cap A \subseteq A$. Entonces $a \in W$ puesto que este contiene a U, $W \subseteq A$ y es abierto en $\overline{A}$. Por lo tanto A es abierto en $\overline{A}$.

(3) Como A es localmente compacto, por el apartado 2), A es abierto en $\overline{A}$ entonces $A = \overline{A} \cap G$ para un cierto G abierto en X y tomamos $F = \overline{A}$. □

Corolario 1.12. *Sea (X, τ) es un espacio localmente compacto y Hausdorff y $A \subset X$ es un subconjunto abierto o cerrado, entonces A es localmente compacto.*

Demostración. Basta tomar $X = G$ o $X = F$ en el primer apartado del teorema anterior. □

Definición 1.13. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una función. Diremos que f es **propia** si la antiimagen de un compacto de Y es un compacto en X.*

Lema 1.14. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una función continua, suprayectiva, y propia. Si (Y, τ') es localmente compacto, entonces (X, τ) es localmente compacto.*

Demostración. Vamos a ver que todo punto de x tiene un entorno compacto. Sea $x \in X$, entonces $f(x) \in Y$, que es localmente compacto, por lo tanto existe K compacto tal que $f(x) \in K$. Como f es propia y suprayectiva, $f^{-1}(K)$ es compacto en (X, τ). Utilizando la proposición 1.8 ya tenemos el resultado.

□

Definición 1.15. ([10]) *Sean (X, τ) un espacio topológico y A una familia de subconjuntos de X. Se dice que A es **localmente finita** si para todo punto de X, hay un entorno del punto cuya intersección con A es finita.*

Definición 1.16. ([10]) *Sea (X, τ) un espacio topológico y B una familia de subconjuntos de X. Se dice que B es **numerablemente localmente finita** si se puede expresar como unión numerable de familias localmente finitas.*

Definición 1.17. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que cumple el* 1^{er} ***axioma de numerabilidad****, o que es* $1A\mathbb{N}$*, si cada punto de* X *posee una base de entornos con cardinal numerable.*

Lema 1.18. *Sea* X *un espacio Hausdorff y* $1A\mathbb{N}$ *y* D *un subconjunto denso de* X*, entonces para cada* $x \in X \backslash D$ *y para cada una sucesión en* D *convergente a* x *existe una subsucesión* (y_n) *con todos los términos distintos.*

Demostración. Sea $x \in X \backslash D$, como D es denso y X es $1A\mathbb{N}$ existe una sucesión $(x_n)_n \in D$ convergente a x. Como $x \notin D$, cualquier termino de la sucesión es distinto de x. Vamos a construir la sucesión $(y_n)_n$. Tomamos $y_1 = x_1$. Como X es Hausdorff, existen U, V disjuntos tales que $x \in V$ y $x_1 \in U$. Por ser $1A\mathbb{N}$ existe A_2 abierto tal que $x \in A_1 \subset V$. Como la sucesión es convergente, existe n_0 tal que $(x_{n_0}) \in A_1$. Tomamos $y_2 = x_{n_0}$. Vamos a ver como se elige un termino general. Supongamos que ya tenemos elegidos $y_1, .., y_{n-1}$. Tenemos que existen abiertos U_n, V_n disjuntos tales que $y_{n-1} \in U_n$ y $x \in V_n$ y existe A'_n tal que $x \in A'_n \subset V_n$.Tomamos $A_n = A_2 \cap ...A_{n-1} \cap A'_n$ que es abierto y por lo tanto existe n'_0 tal que $(x_{n'_0}) \in A_n$ y tomamos $y_n = x_{n'_0}$. Hay que notar que son todos distintos pues $y_2 \notin A_3$, $y_3 \notin A_4$ y así sucesivamente. Y el hecho de ser $1A\mathbb{N}$ nos garantiza el hecho de que siempre exista un A'_n.

□

Observación 1.19. *Nótese que la condición de que el punto no pertenezca al subconjunto denso es necesaria, pues si el punto pertenece al denso podemos elegir la sucesión constante.*

Definición 1.20. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que cumple el* 2^{er} ***axioma de numerabilidad****, o que es* $2A\mathbb{N}$*, si posee una base con cardenal numerable.*

Lema 1.21. *Sea (X, τ) un espacio topológico compacto y* $2A\mathbb{N}$*. Entonces posee una base numerablemente localmente finita.*

Demostración. Podemos expresar $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Como X es compacto, podemos extraer un subrrecubrimiento finito, $B_1, .., B_n$. Como $\mathcal{B}$ tiene cardinal numerable, podemos ordenar la base

$$\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_n, B_{n+1}, ...\}.$$

Definimos:

$$A_0 = \{B_1, .., B_n\}$$

$$A_1 = \{B_1, .., B_n, B_{n+1}\}$$

$$A_2 = \{B_1, .., B_n, B_{n+1}, B_{n+2}\}$$

$$\vdots$$

Claramente $\mathcal{B} = \{A_n | n = 0, 1, ...\}$ y cada A_n es una familia localmente finita, pues cada una cubre X, y todo entorno corta un número finito ya que A_n es finita. por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base numerablemente localmete finita. □

Definición 1.22. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que es **metrizable** si existe una distancia d en X que genera la misma topología que τ.*

Lema 1.23. *Sea (X, τ) un espacio topológico compacto y metrizable. Entonces es $2A\mathbb{N}$.*

Demostración. Sea d la distancia. Tomamos $A_n = \{B(x, \frac{1}{n}) | x \in X\}$. Cada A_n es un recubrimiento por abiertos de X que es compacto, por lo tanto, podemos extraer un subrrecubrimiento finito $A_n^{m_n} = \{B(x_n^{m_n}, \frac{1}{n}) | x \in X \quad m_n \in \mathbb{N}\}$. Definimos

$$\mathcal{B} = \{A_n^{m_n} | n \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$ Vamos a ver que $\mathcal{B}$ es una base. Sea $x \in X$ y U entorno de x. Tenemos $a = d(x, X \backslash U)$. Si tomamos n_0 de tal manera que $\frac{1}{n_0} < \frac{a}{2}$, por ser $A_{n_0}^{m_{n_0}}$ un recubrimiento de X, existe $x_{n_0}^{m_{n_0}}$ tal que $x \in B(x_{n_0}^{m_{n_0}}, \frac{1}{n_0}) \subset U$. Con el mismo razonamiento se demuestra la otra propiedad de ser base. □

Definición 1.24. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que es **σ-compacto** si X es unión numerable de subconjuntos compactos.*

Lema 1.25. *Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto y $2A\mathbb{N}$. Entonces es σ-compacto.*

Demostración. Por ser localmente compacto, para todo $x \in X$, existe K_x tal que $x \in \text{Int}K_x$. Por ser $\mathcal{B}$ base, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset \text{Int}K_x$. Podemos poner $X = \bigcup_{B_x \in \mathcal{B}} B_x$, pero esta unión es a lo sumo numerable, pues (X, τ) es $2A\mathbb{N}$. Si numeramos esos elementos, tenemos que $X = \bigcup_{i \in I} B_i \subset \bigcup_{i \in I} \text{Int}K_i \subset X$. con lo que tenemos que (X, τ) es σ-compacto. □

Lema 1.26. ([4], pág 179) *Sea (X, τ) un espacio topológico, sea U un abierto y sea D un subconjunto denso de X, entonces se tiene*

$$\overline{U} = \overline{U \cap D}.$$

Demostración. El contenido $\overline{U \cap D} \subseteq \overline{U}$ es obvio puesto que la clausura conserva inclusiones. Vamos a probar que $\overline{U} \subseteq \overline{U \cap D}$. Supongamos que $x \in \overline{U}$, si V es cualquier conjunto abierto que contiene a x, entonces $V \cap U \neq \emptyset$ que será abierto, por ser U abierto. Como D es denso en X se tiene que $\emptyset \neq D \cap (V \cap U) = (D \cap V) \cap U$. Como consecuencia $x \in \overline{U \cap D}$ □

Lema 1.27. *Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff. Si f, g son dos funciones continuas tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, donde D es denso en X, entonces $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X$.*

Demostración. Por ser (X, τ) Hausdorff, el conjunto

$$A = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$$

es cerrado. Como la clausura conserva inclusiones, se tiene que $X = \overline{D} \subset \overline{A} = A$, con lo que ya tenemos el resultado. □

Definición 1.28. ([4], pág 285) *Un espacio topológico (X, τ) se dice **regular** si para todo F cerrado y para todo $x \notin F$, existen U, V abiertos disjuntos tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.*

Observación 1.29. *En la Proposición 1.8 se puede cambiar la hipótesis de ser Hausdorff por la de ser regular. La prueba se puede ver en [9], Vol. 2, pág 227.*

Teorema 1.30. ([4], pág 285) *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es regular.*
2. *Si O es abierto que contiene a un punto x, entonces existe un abierto U, tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset O$.*
3. *Para cada $x \in X$ existe una base de entornos que consiste en entornos cerrados.*

Definición 1.31. *Un espacio topológico (X, τ) se dice que es T_3 si es regular y T_1.*

Definición 1.32. ([4], pág 292) *Un espacio (X, τ) se dice **completamente regular** si para cada F cerrado en X y $x \notin F$, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 0$ y $f|_F = 0$.*

Definición 1.33. [4], pág 293
*Un espacio X se dice **Tychonoff** si es completamente regular y T_1.*

Proposición 1.34. ([4], pág 294) *Sea $\{X_i | i \in I\}$ una colección de espacios topológicos. $\prod_{i\in I} X_i$ es Tychonoff si, y solo si, X_i es Tychonoff para cada $i \in I$.*

La siguiente propiedad de los espacios Tychonoff es muy interesante y a la vez nos será de mucha ayuda.

Proposición 1.35. ([4], pág 298) *Un espacio X es Tychonoff si y sólo si es homeomorfo a algún subconjunto de $[0,1]^m$, para algún cardinal m.*

Definición 1.36. *Un espacio topológico (X, τ) se dice **normal** si para cualesquiera F y C cerrados disjuntos, existen abiertos disjuntos, U y V, tales que $F \subset U$ y $C \subset V$.*

Definición 1.37. *Un espacio topológico (X, τ) se dice T_4 si es normal y T_1.*

Definición 1.38. *Supongamos que A y B son dos subespacios de (X, τ). Se dice que A y B están **completamente separados** si existe una función continua $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.*

Teorema 1.39. ([10], pág 231) *Todo espacio (X, τ) compacto y Hausdorff es T_4.*

El siguiente teorema nos dará un corolario de mucha utilidad en este contexto gracias al teorema anterior.

Teorema 1.40. Lema de Urysohn([10]) *Sea (X, τ) un espacio T_4 y sean A y B dos subespacios cerrados disjuntos de X. Sea $[0,1]$ el intervalo unidad de la recta real. Entonces existe una aplicación continua $f \to [0,1]$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.*

Corolario 1.41. *Sea (X, τ) un espacio T_4. Entonces A y B están completamente separados para cualesquiera A, B subespacios cerrados disjuntos.*

Definición 1.42. *Sea (X, τ) un espacio topológico, definimos el **peso** de X, $\omega(X)$, como*

$$\omega(X) = \aleph_0 + \textit{mín}\{|B| : B \textit{ es una base de } \tau\}$$

El siguiente resultado será útil en la construcción de la compactificación de Stone-Cech.

Definición 1.43. *Sea X un conjunto. Para cada $i \in I$, suponemos que (X_i, τ_i) es un espacio topológico y $f_i : X \to (X_i, \tau_i)$ un aplicación. Se define la **topológía débil** generada por $\mathcal{F} = \{f_i \,|\, i \in I\}$ en X, como la topología más pequeña que hace continuas las f_i para todo $i \in I$.*

Teorema 1.44. ([4], pág 262) *Supongamos que X tiene la topología débil generada por las aplicaciones $f_i : X \to (X_i, \tau_i)$ y la familia $\mathcal{F} = \{f_i | i \in I\}$ separa puntos. Entonces $e : X \to \prod X_i$ definido como $e(x) = (f_i(x))_{i\in I}$ es un embebimiento.*

Lema 1.45. *Sean (X, τ), (Y, τ') y $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ un homeomorfismo. La topología de X coincide con la topología débil τ_w generada por f.*

Demostración. Claramente $\tau \supset \tau_w$. Vamos a ver el recíproco. Sea $U \in \tau$, como f es homeomorfismo, $f(U) = V$ es abierto en (Y, τ'). Entonces $U = f^{-1}(V) \in \tau_w$. □

Lema 1.46. *Si $f : X \to Y$, $g : X \to Z$ son dos funciones continuas y f es un homeomorfismo. Entonces la topología débil generada por f y g es la mismas que la de f, es decir, $\tau_{w_{f,g}} = \tau_{w_f} = \tau$.*

Demostración. Basta con demostrar que $\tau_{w_g} \subset \tau_{w_f}$. Sea $U \in \tau_{w_g}$, por ser f homeomorfismo $f(U) = V$ es abierto en Y, por lo tanto $U = f^{-1}(V) \in \tau_{w_f}$. Para la última igualdad basta aplicar el lema anterior. □

Teorema 1.47. (Teorema de Taimonov, [4], pág 434) *Supongamos que C es un subconjunto denso de un espacio Tychonoff (X, τ) y sea Y un compacto Hausdorff. Una función continua $f : C \to Y$ tiene una extensión $\widehat{f} : X \to Y$ si, y solo si para cualesquiera A y B subconjuntos cerrados disjuntos de Y se verifica que*

$$\overline{f^{-1}(A)}^X \cap \overline{f^{-1}(B)}^X = \emptyset.$$

Observación 1.48. *Aunque no aparece en el resultado anterior, este teorema se puede extender de manera natural a cualquier espacio topológico que sea homeomorfo a un subespacio denso de un espacio Tychonoff.*

Definición 1.49. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $f \in \mathcal{X}$. Se define el* ***conjunto cero*** *de f, $Z(f)$, como*

$$\{x \in X \mid f(x) = 0\}.$$

Proposición 1.50. *Sea (X, τ) un espacio Tychonoff. Cada punto $x \in X$ posee una base de entornos formada por conjuntos cero.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea V entorno de x, entonces $x \in \mathrm{Int}V$. Tomamos $C = X \backslash \mathrm{Int}V$. Por ser completamente regular, existe $f \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) = 0$ y $f(C) = 1$. Tomamos $U = \{x \in X \| f(x) < \frac{1}{2}$ que será abierto por ser f continua. Definimos $g(x) = -(f(x) - \frac{1}{2}) - |f(x) - \frac{1}{2}|$ que es continua y tenemos que $x \in V \subset Z(g)$, lo que implica que $x \in \text{Int}Z(g)$. Pero además $Z(g) \subset \text{Int}V$, puesto que si existiera algún punto $y \in Z(g)\backslash\text{Int}V$ implica que $y \in C$, luego $g(y) = -(f(y) - \frac{1}{2}) - |f(y) - \frac{1}{2}| = -(1 - \frac{1}{2}) - |1 - \frac{1}{2}| = -1$ lo cual es una contradicción. por lo tanto hemos encontrado un entorno cero de x que está incluido en V. Por lo tanto ya tenemos el resultado. $\square$

Con objeto de aclarar un concepto que será fundamental que la teoría de compactificaciones, vamos a dar la siguiente definición:

Definición 1.51. *Un **embebimiento** es una aplicación* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *entre dos espacios topológicos tal que*

$$f : (X, \tau) \to (f(X), \tau'|_{f(X)})$$

es un homeomorfismo.

Capítulo 2

La compactificación de Alexandroff

Antes de entrar a fondo con la teoría haremos una breve introducción histórica y responderemos al "por qué" los matemáticos se empezaron a plantear este problema.

El "por qué" es una pregunta muy fácil de responder. En los espacios compactos se trabaja muy fácilmente gracias a las numerosas propiedades que tienen, por eso surge la pregunta de cómo hacer compacto un espacio que no lo es. La idea es "meterlo" dentro de un compacto de tal forma que topológicamente sean casi iguales.

Las compactificaciones (de subconjuntos abiertos del plano) fueron primeramente estudiadas por Carathéodory en 1913 en el contexto de las funciones analíticas. El Teorema 2.10 lo demostró Tychonoff en 1930. El orden de las compactificaciones fue definido por Lubben en 1941. La existencia de la compactificación más "grande"fue dada, primero por Cech en 1937 y por M. H. Stone también en 1937. El Teorema 2.11 fue probado por Smirnov en 1952 y la demostración del Teorema 2.16 se debe a Alexandroff en 1924.

Definición 2.1. *Una compactificación de un espacio topológico* (X, τ) *es un par* $((X', \tau'), f)$ *donde:*

1. (X', τ') *es un espacio compacto.*
2. $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ *es un embebimiento, es decir,* f *es una función continua inyectiva tal que* $f|_{(f(X), \tau'|_{f(X)})}$ *es un homeomorfismo.*
3. $f(X)$ *es denso en* X' *es decir,* $\overline{f(X)} = X'$.

Dos compactificaciones $((X_1, \tau_1), f_1)$ y $((X_2, \tau_2), f_2)$ de X se consideran topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : X_1 \to X_2$ tal que $h \circ f_1 = f_2$.

Proposición 2.2. *La relación $((X_1, \tau_1), f_1) \sim ((X_2, \tau_2), f_2)$ si, y solo si, son topológicamente equivalentes es una relación de equivalencia*

Demostración.

1. (Reflexiva) $((X_1, \tau_1), f_1) \sim ((X_1, \tau_1), f_1)$ pues tomando h con la identidad entre los espacios topologicos tenemos que $h \circ f_1 = f_1$.

2. (Simétrica) Si $((X_1, \tau_1), f_1) \sim ((X_2, \tau_2), f_2)$ entonces $\exists\, h : X_1 \to X_2$ tal que $h \circ f_1 = f_2$, como h es un homeomorfismo, posee inversa continua h^{-1}, entonces $h^{-1} \circ h \circ f_1 = h^{-1} \circ f_2$ lo cual implica $f_1 = h^{-1} \circ f_2$ por lo tanto $((X_2, \tau_2), f_2) \sim ((X_1, \tau_1), f_1)$.

3. (Transitiva) Si $((X_1, \tau_1), f_1) \sim ((X_2, \tau_2), f_2)$ y $((X_2, \tau_2), f_2) \sim ((X_3, \tau_3), f_3)$ $\exists h$ y h' tales que $h \circ f_1 = f_2$ y $h' \circ f_2 = f_3$. Como la composición de homeomorfismos es de nuevo un homeomorfismo, tenemos $h' \circ h \circ f_1 = h' \circ f_2 = f_3$ por lo tanto $((X_1, \tau_1), f_1) \sim ((X_3, \tau_3), f_3)$

$\square$

Observación 2.3. *Si $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ es un embebimiento de X en un espacio topológico compacto X', $((X', \tau'), f)$, no tiene por que ser una compactificación, pues $f(X)$ podría no ser densa en X'. Sin embargo, podemos cambiar X' por $\overline{f(X)}$ y entonces si se tendría una compactificación, pues $\overline{f(X)}$ es un cerrado en un espacio compacto, por lo tanto $\overline{f(X)}$ es compacto.*

Definición 2.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se considera*

$$\mathcal{C} = \{((X', \tau'), f) \,|\, ((X', \tau'), f) \text{ es una compactificación de } (X, \tau)\}.$$

Diremos que

$$((X', \tau'), f) \leq ((X'', \tau''), f')$$

si, y solamente si, existe una aplicación continua y suprayectiva g, de $((X'', \tau''), f')$ en $((X', \tau'), f)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X' & & X'' \arrow[ll, "g"'] \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

En general, $\leq$ no es un orden en $\mathcal{C}/\sim$ (véase el Ejemplo 4.8). Pero tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.5. ([9], vol. 3) *Sean (X,τ) un espacio topológico y $((X',\tau'),f)$, $((X'',\tau''),g)$ compactificaciones de (X,τ) tales que:*

1. $((X',\tau'),f) \leq ((X'',\tau''),g)$ *y* $((X'',\tau''),g) \leq ((X',\tau'),f)$.
2. (X',τ') *ó* (X'',τ'') *es Hausdorff.*

Entonces,

$$((X',\tau'),f) \sim ((X'',\tau''),g).$$

Demostración. Por la condición $a)$ se tiene que existe una función continua y suprayectiva, $h:(X'',\tau'')\to(X',\tau')$, tal que $h\circ g=f$ y existe una función continua y suprayectiva, $k:(X',\tau')\to(X'',\tau'')$, tal que $k\circ f=g$. Se tiene que $k\circ h|_{g(X)}=1_{g(X)}$ y $h\circ k|_{f(X)}=1_{f(X)}$. Como uno de los dos es Hausdorff, aplicando el Lema 1.27, $k\circ h|_{X''}=1_{X''}$ ó $h\circ k|_{X'}=1_{X'}$. Supongamos que $h\circ k|_{X'}=1_{X'}$, como $1_{X'}$ es biyectiva, obliga a que k sea inyectva, que al ser suprayectva, tenemos que k es biyectva. Componiendo por la inversa, k^{-1} por la derecha, tenemos que $h=k^{-1}$, lo cual nos dice que k^{-1} es continua y que h es biyectiva. Con lo que tenemos que k es un homeomorfismo con inversa h. Con este homeomorfismo tenemos que $((X',\tau'),f)\sim((X'',\tau''),g)$. □

Vamos a ver que la compactificación se porta bien con respecto al producto de espacios topológicos.

Proposición 2.6. *Sea (X,τ), (Y,σ) dos espacios topológicos con sus correspondientes $((X',\tau'),f)$ e $((Y',\sigma'),g)$. Entonces $((X'\times Y',\tau'\times\sigma'),h(x,y)=(f(x),g(y)))$ es una compactificación de $(X\times Y,\tau\times\sigma)$.*

Demostración. Claramente $(X'\times Y',\tau'\times\sigma'$ es compacto y h es un embebimineto. Solo haría falta ver que $h(X\times Y,\tau\times\sigma)$ es denso. Pero eso es fácil, ya que si tomamos un punto $(x',y')\in(X'\times Y')$ y un entorno de (x,y), W, de la forma $U\times V$ donde U es un entorno de x' y V es un entorno de y' , como $f(X)$ es denso en X', existe un punto $x\in X$ tal que $f(x)\in U$ y de la misma manera existe $y\in Y$ tal que $g(y)\in V$, por lo tanto $h(X\times Y,\tau\times\sigma)$ es denso. □

Definición 2.7. *Diremos que una* ***compactificación es Hausdorff*** *cuando X' sea Hausdorff.*

Nótese que para que una compactificación sea Hausdorff, X debe ser Hausdorff, pues es homeomorfo a su imagen $f(X)$ y esta es un subespacio de un espacio Hausdorff.

Vamos a ver que una compactificación Hausdorff cumple una propiedad que parace trivial, pero que si no fuera así no se tiene porqué cumplir.

Proposición 2.8. ([7]) *Toda compactificación Hausdorff de un espacio compacto* (X, τ) *es equivalente a* $((X, \tau), 1_X)$.

Demostración. Sea $((X', \tau'), f)$ una compactificación de (X, τ). Entonces $f(X)$ es un compacto de 'X', que es un espacio Hausdorff, lo que implica que es cerrado. Por otro lado $\overline{f(X)} = X'$. Por lo tanto $f(X) = X'$ y f es un homeomorfismo. Evidentemente $f^{-1} \circ f = 1_X$. □

Ejemplo 2.9. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* $\infty \notin X$*. Sea* $X' = X \cup \infty$ *y la topología* $\tau' = \tau \cup X'$*. Entonces,* (X', τ') *es una compactificación no Hausdorff de* (X, τ) *con la inclusión. La compactificación es no Hausdorff porque no se puedes separar* ∞ *de cualquier otro punto de* X *mediante dos abiertos disjuntos de* τ'*. Si el espacio* (X, τ) *es compacto y Hausdorff,* X' *es una compactificación de* X *que no es homeomorfa a* X*.*

El siguiente resultado da una caracterización de los espacios que poseen una compactificación Hausdorff.

Proposición 2.10. *Sea* X *un espacio topológico.* X *tiene una compactificación Hausdorff si y sólo si* X *es Tychonoff.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si X tiene una compactificación Hausdorff, eso implica que X es homeomorfo a un subconjunto de X', donde X' es compacto y Hausdorff. Entonces X' es T_4, lo que implica que es Tychonoff, y como ser Tychonoff es una propiedad hereditaria, cualquier subconjunto con la topología inducida será Tychonoff y como consecuencia X es Tychonoff.
($\Leftarrow$) Si X es Tychonoff, por la Proposición 1.35, X es homeomorfo a un subconjunto de $[0, 1]^m$, que es Hausdorff y compacto(consecuencia del Teorema de Tychonoff, 1.5). Sea $f : X \to [0, 1]^m$ el embebimiento. Si tomamos $X' = \overline{f(X)}$, (X', f) es una compactificación Hausdorff de X. □

Vamos a dar una condición necesaria y suficiente para que dos compactificaciones Hausdorff sean equivalentes.

Teorema 2.11. ([3], pág 168) *Dos compactificaciones Hausdorff* (Y_1, f_1), (Y_2, f_2) *de* X *son equivalentes si, y solo si, para cualquier par de subconjuntos cerrados* A *y* B *de* X *tenemos que*

$$\overline{f_1(A)}^{Y_1} \cap \overline{f_1(B)}^{Y_1} = \emptyset \text{ si, y solo si, } \overline{f_2(A)}^{Y_2} \cap \overline{f_2(B)}^{Y_2} = \emptyset.$$

Demostración. Si las dos compactificaciones son equivalentes, son homeomorfas, por lo tanto se tiene la segunda condición para cualquier par de cerrados de X.

Recíprocamente, supongamos tenemos dos compactificaciones que cumplen la segunda condición. Por el teorema de Taimonov 1.47, las funciones

$$f_1 \circ f_2^{-1} : f_2(X) \to Y_1 \text{ y } f_2 \circ f_1^{-1} : f_1(X) \to Y_2$$

se pueden extender a funciones continuas

$$F_2 : Y_2 \to Y_1 \text{ y } F_1 : Y_1 \to Y_2.$$

Claramente $F_2 \circ f_2 = f_1$ y $F_1 \circ f_1 = f_2$ y F_i es suprayectiva ya que $F_i(Y_i)$ es compacto dentro de un Hausdorff, por lo tanto es un cerrado que contiene a $f_(j)(X)$ que es denso en Y_j, con lo que tenemos que $Y_j = \overline{f_j(X)} = F_i(Y_i)$. Luego $(Y_1, f_1) \leq (Y_2, f_2)$ y $(Y_2, f_2) \leq (Y_1, f_1)$, luego, por la Proposición 2.5, tenemos que son equivalentes.

□

Definición 2.12. *Sea X, Y dos espacios Tychonoff y sean (X', e_1) e (Y', e_2) dos compactificaciones Hausdorff de X e Y respectivamente y sea $f : X \to Y$ una función continua. Si existe una función continua $F : X' \to Y'$ tal que $F \circ e_1 = e_2 \circ f$ se dice que f **se extiende continuamente** sobre X' e Y' y F es **la extensión de** f sobre X' e Y'.*

2.1. El tamaño de la compactificación

Supongamos que X es un espacio Tychonoff, por lo tanto posee una compactificación Hausdorff X'. Cuando compactificamos X, ¿cómo de grande es X' con respecto a X? En otras palabras, ¿cuánto vale $|X' \backslash X|$?

Vamos a ver cómo de "grande" puede ser la compactificación de un espacio topológico.

Lema 2.13. *Si X es un espacio T_0, entonces $|X| \leq 2^{\omega(X)}$.*

Demostración. Sea B una base de τ, para cada $y \in X$, definimos $B_y = \{U \in \tau : \ y \in U\}$. Como X es T_0, tenemos que $B_y \neq B_{y'}$ si $y \neq y'$. Entonces tenemos una aplicación $y \to B_y \subseteq B$ inyectiva, por lo tanto $|X| \leq |P(B)| = 2^{|B|}$. En particular, si tomamos una base cuyo cardinal sea el mínimo tenemos $|X| \leq 2^{|B|} \leq 2^{|\omega(X)|}$ □

Lema 2.14. *Supongamos que X es un espacio T_3 infinito, y sea D un subconjunto denso en X, entonces*

$$\omega(X) \leq 2^{|D|} \leq 2^{|X|}.$$

Demostración. Si un espacio T_3 tiene una base finita, este debe ser finito, pues todo punto del espacio se puede separar de los otros pero solo hay un número finito de entornos básicos. Por la tanto la base debe ser infinita. Sea $B = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ una base de X. Cada U_α es abierto, entonces tenemos que

1. $U_\alpha \subseteq \text{int}\overline{U_\alpha} \subseteq \overline{U_\alpha}$;

2. como D es denso en X se tiene que $\overline{U_\alpha} = \overline{U_\alpha \cap D}$ por el Lema 1.26.

Para todo α, definimos $V_\alpha = \text{Int}\overline{U_\alpha \cap X}$, así que $U_\alpha \subseteq \text{Int}\overline{U_\alpha} = \text{Int}\overline{U_\alpha \cap X} = V_\alpha$.

Entones $B' = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ es una base para X. Para comprobar esta afirmación, supongamos $y \in O \subseteq X$ donde O es abierto. Como X es regular, usando el Teorema 1.30, existe un abierto A tal que $y \in A \subset \overline{A} \subset O$. Por ser B una base, hay un U_α tal que $y \in U_\alpha \subseteq \text{Int}\overline{U_A} = V_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha A} \subset O$. Por lo tanto B' es una base.

Ya que $U_\alpha \cap D \subseteq D$, no hay más V_α que subconjuntos de D. por lo tanto $|B'| \leq |P(D)|$. Por el razonamiento hecho al comienzo de esta demostración, B' debe ser infinita, entonces tenemos que $\omega(X) \leq |B'| \leq |P(D)| = 2^{|D|} \leq 2^{|X|}$ □

La condición de que el espacio sea infinito es fundamental, pues en un espacio finito X, cualquier subconjunto denso D es finito, por lo tanto $2^{|D|}$ es finito y $\omega(X) \geq \aleph_0$.

Teorema 2.15. *Si Y es una compactificación de X y D es denso en X, entonces $|Y| \leq 2^{2^{|D|}}$.*

Demostración. Y es Tychonoff, pues es T_4 (hay que recordar que en esta sección X es un espacio Tychonoff, por lo tanto su compactificación es Hausdorff, y todo espacio Hausdorff compacto es T_4). Si Y es finito entonces la topología que posee es la discreta,puesto que todo espacio Hausdorff finito posee la topología discreta, por lo tanto $Y = X = D$ ya que implica que X es finito y discreto por lo que ya es compacto y los únicos subconjuntos densos en un espacio finito discreto son el propio espacio, y por lo tanto $|Y| \leq 2^{2^{|Y|}} = 2^{2^{|D|}}$. Supongamos que Y es infinito. Como D es denso en X, su imagen mediante el embebimineto f es densa en Y con el mismo cardinal, ya que un embebimiento es una biyección cuando lo restringimos a la imagen. Usando el lema anterior tenemos que $\omega(Y) \leq 2^{|f(D)|} = 2^{|D|}$ y utilizando el Lema 2.13 obtenemos que

$$|Y| \leq 2^{\omega(Y)} \leq 2^{2^{|D|}}.$$

□

2.2. La compactificación de Alexandroff

En este apartado vamos a desarrollar la *compactificación de Alexandroff*, o la compactificación por un punto, dando la topología y viendo que si esta compactificación es Hausdorff, esta propiedad que caracteriza los espacios Hausdorff localmente compactos.

Teorema 2.16. ([7], pág 186) *Sea* (X, τ) *un espacio topológico no compacto,* ∞ *un elemento que no pertenece a* X*. Se define el conjunto* $X^* = X \cup \{\infty\}$ *y*

$$\tau^* = \tau \cup \{A \subset X^* : X^* \backslash A \text{ es cerrado y compacto en } X\}.$$

Entonces $((X^*, \tau^*), i)$ *es una compactificación de* X*, donde* i *es la aplicación inclusión.*

Demostración. El punto ∞ sólo pertenece a los abiertos del segundo tipo, y por otra parte, todos los abiertos que no están en τ contienen a ∞.

1. Primero se va a probar que τ^* es una topología en X^*. Es evidente que $\emptyset \in \tau \subset \tau^*$. Por otra parte $\emptyset$ es cerrado y compacto en X, y $X^* = X^* \backslash \emptyset \ \in \tau^*$.

   Sean A_1 y $A_2 \in \tau^*$. Si ambos pertenecen a τ, su intersección también pertenece a *tau* por ser una topología, luego la intersección pertenece a τ^*. Si $\infty \in A_1 \cap A_2$, entonces $X^* \backslash A_1, X^* \backslash A_2$ son cerrados y compactos en X, luego su unión es cerrada y compacta en X. Por las leyes de DeMorgan, $A_1 \cap A_2 \in \tau^*$.

   Falta ver el caso en el que $\infty \in A_1$ y $A_2 \in \tau$. Entonces $\infty \notin A_1 \cap A_2$. Se concluye que

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= A_1 \cap (A_2 \backslash \{\infty\}) \\ &= A_1 \cap (A_2 \cap X) \\ &= A_1 \cap (X - (X^* \backslash A_2)) \in \tau. \end{aligned}$$

   Sea ahora $A_{i i \in I}$ una familia de abiertos en τ^*. Si $\forall\ i \in I$, $A_i \in \tau$, entonces la unión está en τ. Supongamos ahora que $\exists\ i_0$ tal que $\infty \in A_{i_0}$, entonces el conjunto $X^* \backslash A_{i_0}$ es cerrado y compacto en X. Además,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = (\bigcup_{j \in J} A_j) \cup (\bigcup_{k \in K} A_k),$$

   donde $\infty \in A_j,\ \forall j \in J$ y $\infty \notin A_k, \forall k \in K$. Entonces

$$X^* \backslash \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in J} (X^* \backslash A_j) \bigcap_{k \in K} (X^* \backslash A_k)$$

es un cerrado en X. Como $X^*\setminus\bigcup_{i\in I} A_i \subset X^*\setminus A_{i_0}$, por lo que $X^*\setminus\bigcup_{i\in I} A_i$ es compacto.

2. Probaremos ahora que la inclusión $i : X \to X^*$ es un embebimiento. Hay que probar que $\tau = \tau^*|_X$. Sea $A \in \tau \subset \tau^*$, entonces $A = A \cap X \in \tau^*|_X$. Por otra parte sea $A \in \tau^*|_X$. Entonces existe $A^* \in \tau^*$ tal que $A = A^* \cap X$. Caben dos posibilidades: si $A^* \in \tau$, entonces $A^* \cap X \in \tau$. La otra posibilidad es que $\infty \in A^*$. Entonces
$$A = (A^*\setminus\infty) \cap X = X\setminus(X^*\setminus A^*) \in \tau.$$

3. Demostramos que (X^*, τ^*) es compacto. Sea $A_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de X^*. Sea $i_0 \in I$ tal que $\infty \in A_{i_0}$. Entonces $X^*\setminus A_{i_0}$ es compacto en X y ya que $(X, \tau^*|_X = \tau)$, es compacto en X^*, existe n tal que
$$X^*\setminus A_{i_0} \subset A_{i_1} \cup .... \cup A_{i_n}.$$
Por lo tanto
$$X^* = A_{i_0} \cup A_{i_1} \cup .... \cup A_{i_n}.$$

4. Por último se prueba que $i(X) = X$ es denso (X^*, τ^*). Si no fuera denso, existiría $A \in \tau^*$ tal que $A \cap X = \emptyset$. Entonces $A \notin \tau$ e $\infty \in A$. Luego $X \subset X^*\setminus A$, es decir, $X = X^*\setminus A$. Esto quiere decir que X es compacto, lo cual es falso.

□

Vamos a ver que la compactificación de Alexandroff se porta bien con respecto a los dos primeros axiomas de separación.

Proposición 2.17. ([9], vol. 3, pág 12) *Sea (X, τ) un espacio topológico no compacto y $((X^*, \tau^*), i)$ su compactificación de Alexandroff. Entonces:*

1. *(X^*, τ^*) es T_0 si, y solo si, (X, τ) es T_0.*
2. *(X^*, τ^*) es T_1 si, y solo, si (X, τ) es T_1.*

Demostración. Como los axiomas de separación son hereditarios sólo hace falta probar el recíproco.

1. Supongamos que (X, τ) es T_0. Como $\tau \subset \tau^*$, es suficiente considerar puntos distintos de los cuales uno sea ∞. Para todo $x \in X$ se verifica que X es un entorno de x que no contiene a ∞, por lo tanto (X^*, τ^*) es T_0.

2. Supongamos que (X,τ) es T_1. Como $\tau \subset \tau^*$, es suficiente considerar puntos distintos de los cuales uno sea ∞. Para todo $x \in X$ se verifica que X es un entorno de x que no contiene a ∞. Por otro lado $X^*\backslash\{x\}$ es un entorno de ∞ en (X^*,τ^*) que no contiene a x. Así, (X^*,τ^*) es T_1.

□

Proposición 2.18. *Sea (X,τ) un espacio topológico no compacto, localmente compacto y T_2. Se considera la compactificación de Alexandroff $((X',\tau'),i)$, de (X,τ). Si $((X'',\tau''),f)$ es una compactificación Hausdorff de (X,τ), se tiene que $((X',\tau'),i) \leq ((X'',\tau''),f)$.*

Demostración. Se considera la aplicación $h : X'' \to X'$ definida por

$$h(x'') = \begin{cases} \infty, \text{ si } x'' \in X''\backslash f(X) \\ f^{-1}(x'), \text{ si } x'' \in f(X). \end{cases}$$

Evidentemente h es una aplicación suprayectiva tal que $h \circ f = i$. Vamos a ver que es continua.

Sea $A \in \tau'$. Si $\infty \neq A$, se tiene que $h^{-1}(A) = f(A) \in \tau''|_{f(A)}$. Por el Teorema 1.11, tenemos que $f(A)$ es abierto en (X'',τ''), así $h^{-1}(G) \in \tau''$.

Si $\infty \in A$, $X' - A$ es compacto en (X,τ), por tanto,

$$h^{-1}(X'\backslash A) = X'' - h^{-1}(A) = f(X'\backslash A)$$

es compacto en (X'',τ''). Así, $X'' - h^{-1}(A)$ es un cerrado en (X'',τ''). □

El siguiente resultado caracteriza cuándo la compactificación de Alexandroff es Hausdorff, los cuales hay que añadirle una condición adicional aparte de ser Hausdorff.

Teorema 2.19. ([7]) *Sea un espacio topológico (X,τ) no compacto. Entonces (X^*,τ^*) es Hausdorff si y solo si (X,τ) es Hausdorff y localmente compacto.*

Demostración. Si X^* es Hausdorff, como el axioma de separación Hausdorff es una propiedad hereditaria y $\tau = \tau^*|_X$, entonces (X,τ) es Hausdorff. Por otra parte (X^*,τ^*) es Hausdorff y compacto, luego es localmente compacto por el teorema 1.12. Como $X \in \tau^*$, es decir, es un abierto, es localmente compacto por el corolario 1.12. Probamos ahora que X^* es Hausdorff. Sean $x, y \in X^*$ distintos. Caben dos posibilidades:

1. Si $x, y \in X$, ya que X es Hausdorff, existen entornos de X y por lo tanto de X^*, que los separan.

2. Queda el caso que queda es que $x = \infty$. Por ser X Hausdorff y localmente compacto, existe $V \in \mathcal{U}_y$ compacto y cerrado en X, luego cerrado en X^*. Entonces $X^* \backslash V$ es abierto en X^* que contiene a ∞ y no corta a V

□

Se vió en la Proposición 2.10 una caracterización de los espacios que poseen una compactificación Hausdorff. La primera parte del siguiente teorema caracteriza aquellos espacios que admiten una compactificación Hausdorff por un punto.

Teorema 2.20. (Teorema de Alexandroff, [7], pág 188) *Sea (X, τ) un espacio topológico no compacto. Entonces se tiene los siguientes resultados:*

1. *X admite una compactificación Hausdorff por un punto si y solo si X es Hausdorff y localmente compacto.*

2. *Si X es un espacio Hausdorff y localmente compacto, dos compactificaciones por un punto son topologicamente equivalentes y por lo lo tanto equivalentes a la compactificación de Alexandroff*

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Sea $((X', \tau'), f)$ una compactificación Hausdorff por un punto de (X, f) y $\omega = X' \backslash f(X)$. El espacio X es Hausdorff, pues es homeormorfo al conjunto $f(X)$ que es Hausdorff. Ya que ω es cerrado, $f(X)$ es abierto, dentro de X' que es Hausdorff y localmente compacto, por el corolario 1.12 $f(X)$ es localmente compacto, y como consecuencia X es localmente compacto.

   ($\Leftarrow$) Basta aplicar el teorema anterior.

2. Sea ahora$((X'.\tau'), f)$ una compactificación por un punto de X, $X' = f(X) \cup \omega$. Definimos $h : X' \to X^*$ mediante $h(\omega) = \infty$ y $h(f(x)) = x \; \forall x \in X$. Evidentemente $h \circ f = i$ y h es biyectiva.

   Vamos a probar que h es abierta: sea $A' \in \tau'$. Si $A' \subset f(X)$, $A' \in \tau|_{f(X)}$, luego existe A es X tal que $f(A) = A'$. Entonces $h(A') = O \in \tau^*$. Si $\omega \in A'$, $X' \backslash A'$ es un cerrado en X', luego es compacto. Como $X' \backslash A' \subset f(X)$, existe $K \subset X$ cerrado y compacto tal que $f(K) = X' \backslash A'$. Entonces $X^* \backslash h(A') = h(X') \backslash h(A') = h(X' \backslash A') = K$ que es cerrado y compacto en X, entonces $h(A') \in \tau^*$ por como esta definida la topología de Alexandroff. Con un razonamiento análogo para h^{-1} tenemos que h es un homeomorfismo.

□

Corolario 2.21. *Todo espacio localmente compacto y Hausdorff es un espacio Tychonoff.*

Demostración. Basta tener en cuenta el teorema anterior y la Proposición 2.10. □

El reciproco no es cierto en general, pero vamos a dar unas condiciones para que lo sea.

Proposición 2.22. [3], pág 169 *Sea (X, τ) un espacio Tychonooff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es localmente compacto.*
2. *Para toda compactificacion X' de X, $X' \backslash e(X)$ es cerrado.*
3. *Existe una comactificación $\widehat{X}$ de X tal que $\widehat{X} \backslash e(X)$ es cerrado.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) es consecuencia de que un espacio localmente compacto es abierto en su clausura por el teorema 1.11.
2) $\Rightarrow$ 3) es obvia.
3) $\Rightarrow$ 1) tenemos que $e(X)$ es abierto en un espacio compacto Hausdorff, que es localmente compacto por el corolario 1.9, luego por el corolario 1.10 es localmente compacto. □

Las siguientes demostraciones tienen como objetivo ver cuándo la compactificación de Alexandorff de un espacio localmente compacto y Hausdorff es metrizable.

Proposición 2.23. ([9], vol. 3, pág 16) *Sea (X, τ) un espacio no compacto, localmente compacto y Hausdorff. Sea considera la compactificación, $((X^*, \tau *), i)$, de Alexandorff de (X, τ). Entonces, ∞ tiene una base de entornos numerable si, y solo si, (X, τ) es σ-compacto.*

Demostración. Sea $\{V_n^\infty | n \in \mathbb{N}\}$ un base numerable de entornos abiertos de ∞ en (X^*, τ^*). Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n^\infty = \{\infty\}$, ya que (X^*, τ^*) es Hausdorff. Así $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X^*{}_n^\infty)$ y (X, τ) es σ-compacto.

Recíprocamente: supongamos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, donde para todo $n \in \mathbb{N}$, K_n es compacto en (X, τ). Como (X, τ) es localmente compacto y Hausdorff, para todo $x \in X$, existe C^x compacto, y por ser Hausdorrf es cerrado, tal que $x \in \mathrm{Int}C^x$ y $\mathrm{Int}C^x \subset \overline{\mathrm{Int}C^x} \subset C^x$, lo que implica que $\overline{\mathrm{Int}C^x}$ es compacto en (X, τ). Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $\mathrm{Int}C^{x_1}, ..., \mathrm{Int}C^{x_{p_n}}$ tales que $K \subset \mathrm{Int}C^{x_1}, ..., \mathrm{Int}C^{x_{p_n}}$. Como la clausura conserva uniones y la unión finita de compactos es compacta, definimos $F_n = \overline{\text{Int}C^{x_1}} \cup ... \cup \overline{\text{Int}C^{x_{p_n}}}$ que es compacto. Entonces tenemos $\{F_n | n \in \mathbb{N}\}$, una familia numerable de compactos cerrados.

Definimos

$$\mathcal{V} = \left\{ V_n^{\infty} = X^* \backslash \bigcup_{i=1}^{n} F_i | n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Es fácil comprobar que $\mathcal{V}$ es base de entornos abiertos de ∞ en (X^*, τ^*). □

Proposición 2.24. *Sean (X, τ) un espacio topológico no compacto, localmente compacto y Hausdorff y sea $((X^*, \tau^*), i)$ su compactificación de Alexandroff. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X^*, τ^*) es metrizable.*
2. *(X, τ) cumple el segundo axioma de numerabilidad.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Como (X^*, τ^*) es compacto y metrizable, por el lema tenemos que (X^*, τ^*) es $2A\mathbb{N}$, y por ser una propiedad hereditaria, también lo es (x, τ).

(2) $\Rightarrow$ (1) Como (X^*, τ^*) es compacto y Hausdorff, es T_4 y por lo tanto es T_3. Además, como (X, τ) es $2A\mathbb{N}$ y localmente compacto, por el lema 1.25, es σ-compacto. Así, por la proposición anterior, tenemos que ∞ tiene una base numerable de entornos en (X^*, τ^*). Por tanto,(X^*, τ^*) cumple $2A\mathbb{N}$. Por ser compacto y $2A\mathbb{N}$, por el lema 1.21, tenemos que (X^*, τ^*) tiene una base numerablemente localmente finita. Luego, por el *Teorema de metrización de Nagata-Smirnov*(véase [10], pág 285), (X^*, τ^*) es metrizable. □

En la siguiente proposición vamos a ver que la compactificación Hausdorff de Alexandroff conserva el peso del espacio topológico inicial.

Proposición 2.25. ([9], vol. 3, pág 18) *Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y no compacto y sea $((X^*, \tau^*), i)$ su compactificación de Alexandroff. Entonces (X, τ) y (X', τ') tienen el mismo peso.*

Demostración. Si $\mathcal{B}^*$ es una base de (X^*, τ^*), se tiene que $\mathcal{B}^*|_X = \{B^* \cap X | B^* \in \mathcal{B}^*\}$ es una base de (X, τ). Por lo tanto, el peso de (X^*, τ^*) es mayor que el de (X, τ). Sea $\mathcal{B}$ una base de (X, τ) tal que $|\mathcal{B}|$ sea mínimo. Se considera

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} | \text{existe } K \text{ compacto en } (X, \tau) \text{ con } B \subset K\}.$$

Para cada $B \in \mathcal{B}'$ se elige K_B, compacto tal que $B \subset K_B$. Como (X, τ) es localmente compacto, se tiene que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} = X$ ya que cada punto posee un entorno compacto.

Se considera

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \left\{ X^* \backslash \bigcup_{B \in \mathcal{F}} K_B | \mathcal{F} \subset \mathcal{B}' \text{ con } \mathcal{F} \text{ finito} \right\}.$$

Entonces $\mathcal{B}^*$ es una base de (X^*, τ^*) y que $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}^*|$(pues $|\mathcal{B}|$ es infinito ya que (X, τ) no es compacto). Así, el peso de (X, τ) es mayor o igual que el peso de (X^*, τ^*). □

Para terminar la sección, demostraremos que (X, τ) posee una compactificación $((X', \tau'), f)$ tal que $((X'', \tau''), g) \geq ((X', \tau'), f)$, para toda compactificación Hausdorff de (X, τ), esa es equivalente a la compactificación de Alexandroff de (X, τ).

Proposición 2.26. ([9], vol. 3, pág 19) *Sea (X, τ) un espacio topológico no compacto. sunpongamos que existe, $((X', \tau'), f)$ una compactificación Hausdorff de (X, τ) tal que toda compactificación Hausdorff de (X, τ) es mayor o igual que ella. Entonces $((X', \tau'), f)$ es topológicamente equivalente a la compactificación de Alexandroff de (X, τ).*

Demostración. Vamos a ver que $X' \backslash f(X)$ consta de un solo punto. Supongamos que existen dos puntos $x, y \in X' \backslash f(X)$ tales que $x \neq y$. Sea $Y \backslash \{x, y\}$. Como (X', τ') es localmente compacto e Y es abierto en (X', τ'), se tiene que $(Y, \tau'|_Y)$ es localmente compacto, Hausdorff y no compacto. Entonces la compactificación de Alexandroff,$((Y^*, \tau^*), i)$ de $(Y, \tau'|_Y)$ es Hausdorff. Por lo tanto $((Y^*, \tau^*), i \circ f)$ es una compactificación de Hausdorff de (X, τ). Entonces, por hipótesis, existe una aplicación continua y suprayectiva, h, de (Y^*, τ^*) a $X', \tau')$ tal que $h \circ i \circ f = f$. Luego $h|_{f(X)} = 1|_{f(X)}$, donde $f(X)$ es un subconjunto denso de un espacio Hausdorff y h y 1 con continuas, por lo tanto, aplicando el lema 1.27, $h|_Y = 1|_Y$. Pero esto nos dice que, al ser h suprayectiva, $h(\{\omega\}) \supset \{x, y\}$, donde $\{\omega = Y^* \backslash Y\{$, lo cual es absurdo.

Al ser $((X', \tau'), f)$ una compactificación por un punto, por el Teorema 2.20, esta es topológicamente la compactificación de Alexandroff de (X, τ).

□

Corolario 2.27. *En las condiciones anteriores, (X, τ) es Hausdorff y localmente compacto.*

Demostración. Basta aplicar el teorema 2.19 al hecho que su compactificación de Alexandroff sea Hausdorff, pues es homeomorfa a un espacio Hausdorff. □

Capítulo 3

Otras compactificaciones

3.1. Compactificaciones Hausdorff por un número finito de puntos

Para esta sección se seguirá [9], vol. 3, exclusivamente, el cual se basa a su vez en el trabajo *N-point compactifications* de K. D. Magill.

Se puede plantear el problema de compactificar espacios generales por un numero finito de puntos, siendo dichas compactificaciones Hausdorff. Se verá como ejemplo que $(\mathbb{R}, \tau_u)$ no admita por mas de dos puntos y que dicha compactificación sea Hausdorff.

Proposición 3.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico T_2 y $n \in \mathbb{N}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) admite una compactificación Hausdorff por n puntos.*
2. *(X, τ) es localmente compacto y contiene n subconjuntos abiertos no vacíos, $\{G_i | i = 1, 2, ..., n\}$, disjuntos dos a dos y tales que $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ es compacto, mientras que para cada $j \in \{1, ..., n\}$, $X - \bigcup_{i \neq j} G_i$ no es compacto.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $((X', \tau'), f)$ una comapctificación Hausdorff de (X, τ) tal que

$$X' - f(X) = \{x'_1, ..., x'_n\}.$$

Como (X', τ') es compacto y T_2, es localmente compacto por el Corolario 1.9, y como $\{x'_1, ..., x'_n\}$ es cerrado, se tiene que $f(X)$ es abierto que por el Corolario 1.12 se tiene que $(f(X), \tau'|_{fX})$ es localmente compacto y, por tanto (X, τ) es localmente compacto. Por ser (X', τ') T_2, se tiene que existen $G'_1, ..., G'_n$, entornos abiertos de $x'_1, ..., x'_n$, respectivamente , en (X', τ') tales que $G'_i \cap G'_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Se tiene que

$$G^*_1 = G'_1 - \{x'_1\}, .., G^*_n = G'_n \backslash \{x'_n\}$$

son abiertos no vacíos en $(f(X), \tau'|_{f(X)})$. Para todo $i \in 1, ..., n$, sea

$$G_i = f^{-1}(G^*_i)$$

Se tiene que G_i es abierto y no vacío (X, τ) para todo $i \in \{1, .., n\}$. Como

$$K = X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} G_i = f^{-1}\left(X' - \bigcup_{i=1}^{n} G'_i \right)$$

se tiene que $X - \bigcup_{i=1}^n G_i$ es compacto en (X, τ) ya que $X' \backslash \bigcup_{i=1}^n G'_i$, al cerrado en un compacto, es compacto en (X', τ') y como $X' \backslash \bigcup_{i=1}^n G'_i \subset f(X)$ también es compacto en $(f(X), \tau'|_{f(X)})$.

Para todo $i \in \{1, ..., n\}$,

$$K \bigcup G_i = X \backslash \bigcup_{i \neq j} G_j$$

no es compacto. De lo contrario, $f(K) \cup f(G_i) = f(K) \cup G^*_i$ sería compacto y, por tanto, como (X', τ') es T_2, es cerrado en (X', τ'). Entonces,

$$\{x'_i\} = (X' \backslash (f(K) \cup G^*)) \cap G'_i$$

sería abierto en (X', τ'), lo cual es absurdo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $K = X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. Se consideran $\{w_1, .., w_n\}$, n elementos distintos no pertenecientes a X; $X^* = X \cup \{w_1, .., w_n\}$ y

$$B^* = \tau \cup \{A \cup \{w_i\}| \ A \in \tau, (K \cup G_i) \cap (X \backslash A) \text{ es compacto en } (X, \tau), i \in \{1, ..., n\}\}.$$

Se verifica que:

1. B^* es una base para una topología. En efecto:

   a) $\bigcup_{\beta \in B^*} \beta = X^*$, ya que para todo $i \in \{1, .., n\}$ se tiene que $w_i \in G_i \cup \{G_i\} \in B^*$ ya que $(K \cup G_i) \cap (X \backslash G_i) = \ K$ que es compacto.

b) Sean $\beta_1, \beta_2 \in B^*$ y $x^* \in \beta_1 \cap \beta_2$. Si $x^* \in X$ basta tomar

$$\beta_3 = \beta_1 \cap \beta_2 \cap X \in \tau \subset B^*.$$

Si $x^* \notin X$, existe $i \in \{1, ..., n\}$ y existen $A_1, A_2 \in \tau$ tal que $X^* = w_i$, $\beta_1 = A_1 \cup w_i$, $\beta_2 = A_2 \cup w_i$, $(K \cup G_i) \cap (X \backslash A_1)$ y $(K \cup G_i) \cap (X \backslash A_2)$ son compactos en (X, τ). Basta tomar $\beta_3 = (A_1 \cap A_2) \cup \{w_i\}$ ya que la unión de compactos es compacta y $(X \backslash A_1) \cup (X \backslash A_2) = (X \backslash (A_1 \cap A_2))$.

c) (X^*, τ^*) es un espacio topológico T_2.

Sean $x^*, y^* \in X^*$, con $x^* \neq y^*$. Si $x^*, y^* \in X$. como X es localmente compacto, existe un entorno V_{y^*} compacto de y^*. Como $K \cup G_i$ es cerrado en (X, τ) tenemos que $(K \cup G_i) \cap V_{y^*}$ es compacto por ser (X, τ) T_2. Así $W^{x^*} = \left(X \backslash V^{y^*}\right) \cup \{w_i\}$ es un entorno de x^* en (X^*, τ^*) tal que $V_{y^*} \cap W^{x^*} = \emptyset$. Si $x^* = w_i$ y $y^* = w_j$, con $i \neq j$, basta tomar $V^{x^*} = G_i \cup \{w_i\}$ y $V^{y^*} = G_j \cup \{w_j\}$.

d) $\tau^*|_X = \tau$ es obvio por la definición de τ^*.

e) (X^*, τ^*) es compacto. Tomamos $\{U_i | i \in I\}$ un recubrimiento por abiertos de X^*, τ^*. Existen $i_1, ..., i_n \in I$ tales que $w_1 \in U_{i_1}, ..., w_n \in U_{i_n}$. Como B^* es una base para τ^*, existen $A_1, .., A_n$ tales que

$$U_{i_1} \supset A_1 \cup \{w_1\}, .., U_{i_n} \supset A_n \cup \{w_n\}$$

y

$$(K \cup G_1) \cap (X \backslash A_1), ..., (K \cup G_n) \cap (X \backslash A_n)$$

son compactos en (X, τ). Como

$$X \backslash (A_1 \cup .... \cup A_n) \subset \bigcup_{i=1}^{n} [(K \cup G_i) \cap (X \backslash A_i)]$$

se tiene que $C = X \backslash (A_1 \cup .... \cup A_n)$ es compacto en (X, τ) y como consecuencia en (X^*, τ^*), por lo tanto existen $j_1, .., j_m \in I$ tales que $C \subset U_{j_1} \cup ..... \cup U_{j_m}$. Por lo tanto,

$$X^* = (U_{j_1} \cup ....._{j_m}) \cup (U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n})$$

f) $\overline{X} = X^*$.

Es suficiente ver que X corta a todo elemento básico de la base. Para todo $i \in \{1, .., n\}$ y todo $V^{w_i} = A \cup w_i$ con $A \in \tau$ y $(K \cup G_i) \cap (X \backslash A)$ compacto. Se tiene que $(X \backslash A) \neq X$, ya que $K \cup G_i$ no es compacto. Luego $V^{w_i} \cap X = A \neq \emptyset$. Así, $((X^*, \tau^*), j)$, donde j es la inclusión, es una compactificación Hausdorff de (X, τ) por $n-$puntos.

□

Definición 3.2. *Sean (X,τ) un espacio topológico T_2 y $n \in \mathbb{N}$. Toda familia, $\{G_i | i = 1,..,n\}$, de n subconjuntos abiertos no vacíos y disjuntos dos a dos tales que $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ es compacto y $X \setminus \bigcup_{j \neq i} G_j$ no es compacto para todo $i \in \{1,...,n\}$, se llama* ***n-estrella*** *de (X,τ). El conjunto de n-estrellas se representará por $\varepsilon_n(X,\tau)$.*

Ejemplo 3.3. *El conjunto $\mathcal{G} = \{(-\infty,a),(b,\infty)\}$ con $a < b$, es una $2-$estrella, ya que $\mathbb{R}\setminus((-\infty,a)\cup(b,\infty)) = [a,b]$ es compacto, pero $\mathbb{R}\setminus(b,\infty)$ ó $\mathbb{R}\setminus(-\infty,a)$ no lo son. Además, también podemos definir $\mathcal{G}' = (-\infty,a)\cup(b,\infty)$, la cual sería una $1-$estrella, puesto que $\mathbb{R}$ no es compacto.*

Ejemplo 3.4. *Tomamos en $\mathbb{R}^2$ el cuadrado unidad $C = [0,1]\times[0,1]$ y tomamos $C' = C\setminus\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. C' es localmente compacto, pues se puede expresar como intersección de un abierto y un cerrado, como por ejemplo $C \cap A$ donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y < 1\}$, y es Hausdorff con la topología inducida por $\mathbb{R}^2$. Podemos definir el siguiente conjunto*

$$\mathcal{G} = \{B((0,0),\frac{1}{3})\cap C', B((1,1),\frac{1}{3})\cap C', B((1,0),\frac{1}{3})\cap C', B((0,1),\frac{1}{3})\cap C'\}.$$

Cada elemento de $\mathcal{G}$ es abierto en C' con la topología inducida. Este conjunto es una $4-$estrella de C', ya que $C'\setminus\mathcal{G}$ es compacto, pero si por ejemplo tomamos $(C'\setminus\mathcal{G})\cap B((0,1),\frac{1}{3})\cup C'$ no es compacto, ya que no sería cerrado pues le falta un vértice.

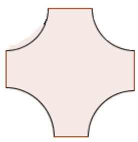

Figura 3.1: $C'\setminus\mathcal{G}$

Es fácil ver a partir de la proposición que $\mathbb{R}$ admite una compactificación Hausdorff por dos puntos, ya que es localmente compacto y podemos tomar como 2-estrella $\{(-\infty,a),(b,\infty)\}$ con $a < b$. En el ejemplos 4.5 se dará una construcción explicita de una compactificación Hausdorff de $\mathbb{R}$ por dos puntos.

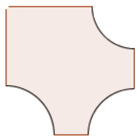

Figura 3.2: $(C'\backslash\mathcal{G}) \cap B((0,1),\frac{1}{3}) \cup C'$

Observación 3.5. *Sean (X,τ) un espacio topológico localmente compacto y T_2 y $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{G}$ una $n-$estrella de (X,τ). Entonces, en la demostración de la proposición anterior, se da una construcción de una compactificación Hausdorff de n puntos de (X,τ) que se designará por $((X^*_{\mathcal{G}},\tau^*_{\mathcal{G}}),j_{\mathcal{G}})$.*

Vamos a dar una condición suficiente para que (X,τ) tenga una compactificación por n puntos.

Teorema 3.6. *Si (Y,τ') tiene compactificación por n puntos y es la imagen de X mediante una función, f, continua y propia, entonces (X,τ) posee una compactificación por n-puntos.*

Demostración. Si (Y,τ') tiene una compactificación por n puntos, por la proposición 3.1, (Y,τ) es localmente compacto y tiene una n-estrella, $\mathcal{G})\{G_i|i=1,..,n\}$. Como f es continua y propia, por el lema 1.14 , (X,τ) es localmente compacto y el conjunto $\{f^{-1}(G_i)|i=1,..n\}$ es una $n-$estrella, ya que $X\backslash\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_i) = f^{-1}\left(Y\backslash\bigcup_{i=1}^n G_i\right)$ que es compacto por ser f propia, y si $X\backslash\bigcup_{i\neq j} f^{-1}(G_i)$ fuera compacto para algún $j\in\{1,..,n\}$, tendríamos que $f\left(X\backslash\bigcup_{i\neq j} f^{-1}(G_i)\right) = f\left(f^{-1}\left(Y\backslash\bigcup_{i\neq j} f^{-1}(G_i)\right)\right) = Y\backslash\bigcup_{i\neq j} f^{-1}(G_i)$ sería compacto, lo cual es absurdo. □

Proposición 3.7. *Sean (X,τ) un espacio topológico localmente compacto y T_2 y $n\in\mathbb{N}$. En $\varepsilon_n(X,\tau)$ sedefine la siguiente relación $\sim$: Sean $G,H\in\varepsilon_n(X,\tau)$, diremos que $\mathcal{G}\sim\mathcal{H}$ si, y sólo si, existe una aplicación biyectiva ψ de $\{1,..,n\}$ en si mismo tal que para todo $i\in\{1,..,n\}$*

$$\left[\left(X\backslash\bigcup_{i=1}^n H_i\right)\cup H_i\right]\cap\left(X\backslash G_{\psi(i)}\right)$$

es compacto en (X,τ). Entonces:

1. Si $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \varepsilon_n(X, \tau)$ cumplen que $\mathcal{G} \sim \mathcal{H}$, las compactificaciones

$$((X^*_{\mathcal{G}}, \tau^*_{\mathcal{G}}), j_{\mathcal{G}}) \text{ y } ((X^*_{\mathcal{H}}, \tau^*_{\mathcal{H}}), j_{\mathcal{H}})$$

son topológicamente equivalentes.

2. Si $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \varepsilon_n(X, \tau)$ cumplen que

$$((X^*_{\mathcal{G}}, \tau^*_{\mathcal{G}}), j_{\mathcal{G}}) \text{ y } ((X^*_{\mathcal{H}}, \tau^*_{\mathcal{H}}), j_{\mathcal{H}})$$

son topológicamente equivalentes, se verifica que $\mathcal{G} \sim \mathcal{H}$.

3. $\sim$ es una relación de equivalencia en $\varepsilon_n(X, \tau)$.

4. Sea $\mathcal{N}(X, \tau)$ las compactificaciones Hausdorff por n puntos de (X, τ) y $\sim'$ la relación de equivalencia dada en la proposición 2.2. Entonces, existe una aplicación biyectiva, φ, entre $\varepsilon_n(X, \tau)/\sim$ y $\mathcal{N}(X, \tau)/\sim'$ dada por

$$\varphi([\mathcal{G}]) = [((X^*_{\mathcal{G}}, \tau^*_{\mathcal{G}}), j_{\mathcal{G}})]$$

Demostración. 1. Sean $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \varepsilon_n(X, \tau)$. Supongamos que

$$X^*_{\mathcal{G}} \backslash X = \{\omega_1, .., \omega_n\} \text{ y que } X^*_{\mathcal{H}} \backslash X = \{\sigma_1, .., \sigma_n\}.$$

Como $\mathcal{G} \sim \mathcal{H}$, se tiene que existe, ψ, aplicación biyectiva de $\{1, .., n\}$ en si mismo tal que para todo $i \in \{1, .., n\}$

$$\left[\left(X \backslash \bigcap_{i=1}^{n} H_i\right) \cup H_i\right] \cap \left(X \backslash G_{\psi(i)}\right)$$

es compacto en (X, τ). Se considera la aplicación $h : X^*_{\mathcal{H}} \to X^*_{\mathcal{G}}$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X, \\ \omega_{\psi(i)} & \text{si } x = \sigma_i, \ \imath = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Se tiene que h es una aplicación biyectiva tal que $h \circ j_{\mathcal{H}} = j_{\mathcal{G}}$.

Veamos que h es una aplicación continua.

Como $X \in \tau^*_{\mathcal{H}}$, es suficiente probar que h es continua en cada σ_i, para todo $i \in \{1, 2, \ldots n$.

Sea $V^{\psi(i)} = A \cup \{\omega_i\}$. Se tiene que $A \in \tau$ y

$$\left[\left(X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} G_i\right) \cup G_i\right] \cap (X \backslash A)$$

es compacto en (X, τ) por la definicíon de $\tau_{\mathcal{G}}$. Por hipótesis, se tiene que

$$\left[\left(X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} H_i\right) \cup H_i\right] \cap \left(X \backslash G_{\psi(i)}\right)$$

es compacto en (X, τ). Así

$$\left[\left(X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} H_i\right) \cup H_i\right] \cap (X \backslash A)$$

es compacto en (X, τ) por ser un subconjunto cerrado del compacto

$$\left[\left[\left(X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} G_i\right) \cup G_i\right] \cap (X \backslash A)\right] \cup \left[\left(X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} H_i\right) \cup H_i\right] \cap \left(X \backslash G_{\psi(i)}\right)$$

Por tanto, $A \cup \{\sigma_i\}$ es un entorno de σ_i en $(X^*_{\mathcal{H}}, \tau^*_{\mathcal{H}})$ y $h(A \cup \{\sigma_i\})$. Como $(X^*_{\mathcal{H}}, \tau^*_{\mathcal{H}})$ es compacto y $(X^*_{\mathcal{G}}, \tau^*_{\mathcal{G}})$ es T_2, se tiene que h es un homeomorfismo.

2. Por hipótesis, existe un homeomorfismo, h, de $(X^*_{\mathcal{H}}, \tau^*_{\mathcal{H}})$ a $(X^*_{\mathcal{G}}, \tau^*_{\mathcal{G}})$ tal que $h \circ j_{\mathcal{H}} = j_{\mathcal{G}}$. Esta igualdad nos dice que $h(x) = x$ para todo $x \in X$, con lo cual h es una biyección del conjunto $\{\sigma_1, .., \sigma_n\}$ al $\{\omega_1, .., \omega_n\}$. Puedo definir ψ, una biyección de $\{1, ..., n\}$ en si mismo, de tal manera que $h(\sigma_i) = \omega_{\psi(i)}$.

   Se tiene que $G_{\psi(i)} \cup \{\omega_{\psi(i)}\}$ es un entorno abierto de $\omega_{\psi(i)}$ en $(X^*_{\mathcal{G}}, \tau^*_{\mathcal{G}})$ ya que

$$\left[\left(X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} G_i\right) \cup G_{\psi(i)}\right] \cap \left(X \backslash G_{\psi(i)}\right) = X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

   que es compacto en (X, τ). Entonces,

$$h^{-1}(G_{\psi(i)} \cup \{\omega_{\psi(i)}\}) = G_{\psi(i)} \cup \{\sigma_i\}$$

   es un entorno abierto de σ_i en $(X^*_{\mathcal{H}}, \tau^*_{\mathcal{H}})$. Así,

$$\left[\left(X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} H_i\right) \cup H_i\right] \cap \left(X \backslash G_{\psi(i)}\right)$$

   es un compacto en (X, τ). Por lo tanto, $\mathcal{G} \sim \mathcal{H}$.

3. Vamos a ver que $\sim$ es una relación de equivalencia:

   a) (Reflexiva) Como $(X^*_{\mathcal{G}}, \tau^*_{\mathcal{G}})$ es topológicamente equivalente consigo misma, por el apartado 2) tenemos que $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}$

   b) (Simétrica) Si $\mathcal{G} \sim \mathcal{H}$, por 1) $(X^*_{\mathcal{G}}, \tau^*_{\mathcal{G}})$ y $(X^*_{\mathcal{H}}, \tau^*_{\mathcal{H}})$ son toplogicamente equivalentes. Tomando el homeomorfismo inverso, tenemos que $\mathcal{H} \sim \mathcal{G}$.

   c) (Transitiva) Si $\mathcal{G} \sim \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} \sim \mathcal{F}$, tenemos que, por 1), existe un homeomorfismo $h : (X^*_{\mathcal{G}}, \tau^*_{\mathcal{G}}) \to (X^*_{\mathcal{H}}, \tau^*_{\mathcal{H}})$ y otro homeomorfismo $f : (X^*_{\mathcal{H}}, \tau^*_{\mathcal{H}}) \to (X^*_{\mathcal{F}}, \tau^*_{\mathcal{F}})$. Componiendo los dos, tenemos un homeomorfismo $r = f \circ h : (X^*_{\mathcal{G}}, \tau^*_{\mathcal{G}}) \to (X^*_{\mathcal{F}}, \tau^*_{\mathcal{F}})$. Por lo tanto estas últimas son topológicamente equivalentes y por 2) tenemos que $\mathcal{G} \sim \mathcal{F}$

4. Como se tiene que si dos n-estrellas están relacionadas, las compactificaciones que generan son topológicamente equivalentes y si dos compactificaciones son topológicamente equivalentes, las n- estrellas respectivas están relacionadas, tenemos claramente una biyección entre los dos conjuntos cociente.

$\square$

Corolario 3.8. *Todas las compactificaciones Hausdorff por dos puntos de* $(\mathbb{R}, \tau_u)$ *son topológicamente equivalentes.*

Demostración. Basta con demostrar que cualesquiera dos 2-estrellas de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ están relacionadas. Sean $\mathcal{G} = \{G_1, G_2\}$ y $\mathcal{H} = \{H_1, H_2\}$ 2-estrellas de $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Como $\mathbb{R}\backslash(G_1 \cup G_2)$ y $\mathbb{R}\backslash(H_1 \cup H_2)$ son compactos, se tiene que

$$\mathbb{R}\backslash(G_1 \cup G_2) \subset [a, b] \qquad \mathbb{R}\backslash(H_1 \cup H_2) \subset [c, d]$$

Puesto que G_1 y G_2 son dos abiertos disjuntos y $(b, \infty) \subset G_1 \cup G_2$ se tiene que

$$G_1 \cap (b, \infty) = \emptyset \quad \text{o} \quad G_2 \cap (b, \infty) = \emptyset.$$

Análogamente

$$H_1 \cap (d, \infty) = \emptyset \quad \text{o} \quad H_2 \cap (d, \infty) = \emptyset.$$

Definimos la aplicación biyectiva $t : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ de tal manera que si $G_i \cap (b, \infty) = \emptyset$, entonces $H_{t(i)} \cap (d, \infty) = \emptyset$.

Hay que darse cuenta de que si $G_1 \cap (b, \infty) = \emptyset$ implica que $G_2 \cap (-\infty, a) = \emptyset$ o viceversa, ya que si no $\mathcal{G}$ no seria una 2-estrella. Si no fuera así, supongamos que

$G_1 \cap (b, \infty) = \emptyset$ y $G_2 \cap (-\infty, a) \neq \emptyset$. Eso implica, por ser lo intervalos conexos, que $G_2 \supset (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ con lo cual $\mathbb{R} \backslash G_1 \subset [a, b]$ que seria compacto lo cual es absurdo.

Entonces, para todo $i \in \{1, 2\}$, se verifica que

$$[(\mathbb{R} \backslash G_1 \cup G_2) \cup G_i] \cap \left(\mathbb{R} \backslash H_{t(i)}\right)$$

es cerrado, por ser intersección de cerrado y está contenido en alguno de estos conjuntos $[b, d], [d, b], [a, c], [c, a]$ según la relación de orden entre b y d y a y c. Por lo tanto es compacto. □

Proposición 3.9. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y (X, τ) un espacio topológico T_2 tal que todo subconjunto compacto de (X, τ) esta dentro de otro subconjunto compacto cuyo complementario tiene a lo mas n componentes conexas. Entonces, para todo $m > n$, no existe una compactificación Hausdorff de (X, τ) por m puntos.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) tiene una compactificación de Hausdorff por m puntos. Por la proposición 3.1, (X, τ) es localmente compacto y tiene una m-estrella, $\mathcal{G} = \{G_i | 1, ..., m\}$. Por hipótesis existe un compacto, K^*, conteniendo al compacto $K = X \backslash \bigcup_{i=1}^{m} G_i$ y tal que $X \backslash K^*$ tiene r componentes conexas, $H_1, ..., H_r$, donde $r \leq n$.

Como $H_1 \cup ..... \cup H_r \subset G_1 \cup .... \cup G_m$ disjuntos y $r < m$, existe $j \in \{1, .., m\}$ tal que $G_j \cap (H_1 \cup ..... \cup H_r) = \emptyset$. Por tanto,

$$G_j \subset K^* \text{ y } K \cup G_i \subset K^*.$$

Así $K \cup G_j$ es compacto, lo cual es absurdo. □

Corolario 3.10.
1. *$(\mathbb{R}, \tau_u)$ no admite una compactificación Hausdorff por n puntos para todo $n > 2$.*
2. *$(\mathbb{R}^d, \tau_u^d)$ con $d > 1$ no admite una compactificación Hausdorff por n puntos para todo $n > 1$.*

Demostración. Como todo compacto en $\mathbb{R}^n$ es acotado, se puede meter dentro de una bola cerrada, que es compacta. El complementario de las bolas en $\mathbb{R}$ tiene dos componentes conexas y en $\mathbb{R}^d$ con $d > 1$ tienen una componente conexa, por lo que utilizando la proposición anterior tenemos el resultado. □

Vamos a ver que el caso de $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$, se puede generalizar. Para ello vamos a necesitar el siguiente lema.

Lema 3.11. ([8], pág 1079) *Sean* (X, d_1), (Y, d_2) *dos espacios métricos no acotados y conexos y sea* $X \times Y$ *su producto. Sea* (x_0, y_0) *un punto de* $X \times Y$ *y sea* k *un numero positivo y tomamos* $K = \{(x, y) \in X \times Y | d_1(x, x_0) \leq k \text{ y } d_2(y, y_0) \leq k\}$. *Entonces* $XY \backslash K$ *es conexo.*

Demostración. Tomamos (x_1, y_1), (x_2, y_2) dos puntos de $XY \backslash K$. Entonces, ó $d_1(x_1, x_0) > k$ ó $d_2(y_1, y_0) > k$ y ó $d_1(x_2, x_0) > k$ ó $d_2(y_2, y_0) > k$. Podemos suponer que $d_1(x_1, x_0) > k$ y $d_1(x_2, x_0) > k$. Sea $A_1 = \{(x_1, y) | y \in Y\}$. Como Y no esta acotado, existe un punto $y_3 \in Y$ tal que $d_2(y_3, y_0) > k$. Sean $A_2 = \{(x, y_3) | x \in X\}$ y $A_3 = \{(x_2, y) | y \in Y\}$. Nótese que tanto A_1 como A_3 son homeomorfos a Y y A_2 es homeomorfo a X. Entonces A_1, A_2 y A_3 con conexos. Más aún, como $(x_1, y_3) \in A_1 \cap A_3$ y $(x_2, y_3) \in A_2 \cap A_3$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es conexo. Finalmente, $K \cap [A_1 \cup A_2 \cup A_3] = \emptyset$, y tenemos que cualquier par de puntos de $X \times Y \backslash K$ están contenidos en un subconjunto conexo. Por lo tanto $X \times Y \backslash K$ es conexo. □

Teorema 3.12. ([8], pág 1079) *Sean* (X, d_1), (Y, d_2) *dos espacios métricos no acotados y conexos. Si para cada* $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ *y todo numero real positivo* k, *los conjuntos* $\{x \in X | d_1(x, x_0) \leq k\}$ *y* $\{y \in Y | d_2(y, y_0) \leq k\}$ *son compactos, entonces* $X \times Y$ *no tiene una compactificación por* n *puntos, con* $n > 1$.

Demostración. Sea $K \neq \emptyset$ un compacto de $X \times Y$. Sean p_X y p_Y las proyecciones sobre X e Y respectivamente. Entonces $p_X(K)$ y $p_Y(K)$ son conjuntos compactos de X e Y respectivamente. Tomamos $x_0 \in p_X(K)$ e $y_0 \in p_Y(K)$. como todo subespacio compacto de un espacio métrico esta acotado, existe un número real positivo k tal que $p_X(K) \subset \{x \in X | d_1(x, x_0) \leq k\} = H_X$ y $p_Y(K) \subset \{y \in Y | d_2(y, y_0) \leq k\} = H_Y$. Por hipótesis, H_X y H_Y son compactos, lo que implica $H_X \times H_Y$ es compacto. Entonces $K \subset H_X \times H_Y$ y por el lema anterior, $X \times Y \backslash H_X \times H_Y$ tiene solo una componente conexa. Utilizando la Proposición 3.9 se tiene el resultado. □

3.2. La compactificación de Stone-Cech

Hemos visto, en la Proposición 2.18, que dentro de de las compactificaciones Hausdorff de un espacio topológico, la compactificación de Alexandroff en la más pequeña dada la relación de pre-orden. Vamos a analizar ahora, que los espacios topológicos Tychonoff poseen una compactificación que es la más grande en ese orden, la cual denotaremos como βX y será la compactificación de Stone-Cech del espacio (X, τ).

Si recordamos la Proposición 1.35, la cual es consecuencia del *teorema del embebimiento* (puede consultarse en [10]), todo espacio Tychonoff se puede embeber dentro de un cubo $[0,1]^m$ para algún m. La idea de esta compactificación es la de tomar la clausura de la imagen mediante el embebimiento.

Observación 3.13. *Hay varias construciones equivalentes de la compactificación de Stone-Cech de un espacio topológico.*

En la mayoría de textos clásicos se da esta construcción, pero en esta memoria se hará la construcción dada en [4] que le da un enfoque distinto. En esta sección solo se trabajará con espacios Tychonoff, por lo tanto cualquier compactificación del espacio será Hausdorff, por lo que supondremos que cada vez que se hable de una compactificación estará implicito el hecho de ser Hausdorff.

Teorema 3.14. ([4], pág 431)

1. *Todo (X,τ) Tychonoff posee la compactificación más grande dado el orden de la definición 2.4 y esta es única salvo equivalencia.*

2. *Supongamos que (X,τ) es Tychonoff e (Y,τ') un espacio compacto Hausdorff. Toda función continua $f : X \to Y$ se puede extender de manera única a una función continua $f^\beta : \beta X \to Y$, llamada la **extensión de Stone** de f.*

3. *Salvo equivalencia, βX es la única compactificación de X con la propiedad de la extensión de Stone.*

Demostración. 1. Como (X,τ) es Tychonoff, tiene al menos una compactificación por la Proposición 2.10. Sea $\{(Y_i,f_i), i\in I\}$ el conjunto de todas las compactificaciones de X salvo equivalencia. Definimos $e : X \to Y = \prod\{(Y_i,f_i), i \in I\}$ como $e(x) = (f_i(x))_{i\in I}$. Como cada f_i es un embebimiento, f_i es un homeomorfismo con la imagen, por lo tanto, la topología de X coincide con la topología débil generada por f_i por el Lema 1.45. Por el Teorema 1.44 se sigue que e es un embebimineto de X en Y, (claramente e separa puntos por ser inyectiva). Definimos $\beta X = \overline{e(X)}$, que es compacto por ser Y compacto. Entonces $((\beta X, \tau_Y|_{\beta X}), e)$ es una compactificación de X. Toda compactificación de X es equivalente a algún (Y_i,f_i). Para ver que βX es la mas grande, basta con ver que $(\beta X, e) \geq (Y_i, f_i)$ para todo $i \in I$. Pero esto es claro, basta con tomar $g_i = \pi_i|_{\beta X}$. Vemos la situación en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \beta X \arrow[rr, "g_i"] & & Y_i \\ & X \arrow[ul, "e"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Tenemos que $g_i \circ e = f_i$, porque $g_i(e(x)) = \pi_i((f_i(x))_{i\in I}) = f_i(x)$.

Por lo tanto $(\beta X, e) \geq (Y_i, f_i)$. Como $\geq$ es antisimétrica, βX es única salvo equivalencia.

Observación 3.15. *Nótese que estamos suponiendo que $\geq$ es un orden, lo cual es cierto gracias a la Proposición 2.5.*

2. Supongamos que $f : X \to Y$ donde Y es un Hausdorff compacto. Necesitamos producir una extensión continua.

   Definimos $g : X \to \beta X \times Y$ por $g(x) = (e(x), f(x))$. Claramente g es inyectiva, por serlo e, y continua, y la topología de X es la topología débil generada por la aplicaciones e, f, por el lema 1.46, por lo tanto, aplicando el teorema 1.44, g es un embebimineto. Como $\beta X \times Y$ es compacto, $(\overline{g(X)}, g)$ es una compactificación de X.

   Pero, por el apartado 1), $(\beta X, e) \geq (\overline{g(X)}, g)$, entonces existe una función continua y suprayectiva h, tal que $h \circ e = g$. Vemos la situación en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \beta X \arrow[rr, "h"] & & \overline{g(X)} \\ & X \arrow[ul, "e"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

   Para cada $z \in \beta X$, definimos $f^\beta(z) = \pi_Y \circ h(z)$. Entonces f^β es continua y para todo $x \in X$ tenemos que $f^\beta(x) = \pi_Y(h(e(x))) = \pi_Y(g(x)) = \pi_Y(e(x), f(x)) = f(x)$.

   Si $k : \beta X \to Y$ es continua y $k \circ e = f$, entonces $k = f^{\beta X}$ en $e(X)$, que es denso en βX, por la Proposición 1.27, $k = f^\beta$. Por lo tanto la extensión de Stone f^β es única.

3. (Y, j) es una compactificación de X con la propiedad de extensión de Stone. Entonces para la aplicación $e : X \to \beta X$, existe una única extensión $e^* : Y \to \beta X$ tal que $e^* \circ j = e$. Vamos a ver que e^* es suprayectiva. $e^*(Y)$ es un compacto dentro de βX que es Hausdorff, luego es cerrado y contiene a $e(X)$ que es

denso, luego $e^*(Y) = \beta X$, por lo tanto es suprayectiva. Entonces tenemos que $(Y, j) \geq (\beta X, e)$. Por el apartado 1), $(\beta X, e)$ es la compactificación mas grande, por lo tanto $(Y, j) \leq (\beta X, e)$. Usando la proposición 2.5 tenemos que $(Y, j) \sim (\beta X, e)$.

□

En nuestra construcción de βX hemos utilizado el teorema 1.5. Vamos a ver que la existencia de βX implica el teorema del producto de Tychonoff para compactos Hausdorff.

Teorema 3.16. ([4], pág 433) *Si todo espacio Tychonoff X tiene una compactificación βX, entonces el productos de compactos Hausdorff es compacto.*

Demostración. Supongamos que $\{X_i | i \in I\}$ is una colección de compactos Hausdorff. Por la proposición 1.34 $\prod_{i\in I} X_i$ es Tychocnoff. Entonces $\prod_{i\in I} X_i$ tiene una compactificación $\beta(\prod_{i\in I} X_i)$ y para cada $i \in I$, la π_i se puede extender a $\pi_i^\beta : \beta(\prod_{i\in I} X_i) \to X_i$,

$$\begin{tikzcd}
\beta(\prod_{i\in I} X_i) \arrow[dr, "\pi_i^\beta"] & \\
\prod_{i\in I} X_i \arrow[u, "e"] \arrow[r, "\pi_i"] & X_i
\end{tikzcd}$$

Para cada $x \in \beta(\prod_{i\in I} X_i)$, definimos $f(x) = (\pi_i^\beta)_{i\in I}$. f es continua por serlo cada coordenada. Si $x \in \prod_{i\in I} X_i$, entonces $f(e(x)) = (\pi_i^\beta(e(x)))_{i\in I} = (x_i)_{i\in I} = (x)$. Entonces $\prod_{i\in I} X_i = f(e(\prod_{i\in I} X_i)) \subset f(\beta(\prod_{i\in I} X_i)) \subset \prod_{i\in I} X_i$, por lo tanto $\prod_{i\in I} X_i = f(\beta(\prod_{i\in I} X_i))$, lo que implica que $\prod_{i\in I} X_i$ es compacto ya que f es continua y $\beta(\prod_{i\in I} X_i)$ es compacto.

□

Ahora, queremos considerar otras formas de reconocer cuando una compacitificación de X es βX. Como βX se puede caracterizar mediante la propiedad de extensión de Stone, el teorema de Taimonov 1.47 será muy útil la demostración del siguiente teorema.

Teorema 3.17. ([4], pág 436)

Supongamos que (Y, j) es una compactificación de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Y es βX

2. *Toda función continua $f : X \to K$, donde K es un compacto Hausdorff, se puede extender a una función continua $\widehat{f} : Y \to K$*

3. *Toda función continua $f : X \to [a,b]$ puede ser extendida a una función $\widehat{f} : Y \to [a,b]$*

4. *Toda función continua $f : X \to [0,1]$ puede ser extendida a una función $\widehat{f} : Y \to [0,1]$*

5. *Conjuntos completamente separados en X, las imágenes mediante j de ellos tiene clausuras disjuntas en Y.*

6. *Dos conjuntos cero disjuntos en X, las imágenes mediante j de ellos tienen clausuras disjuntas en Y.*

7. *Si Z_1 y Z_2 son dos conjuntos cero en X, entonces $\overline{(j(Z_1) \cap j(Z_2))}^Y = \overline{j(Z_1)}^Y \cap \overline{j(Z_2)}^Y$.*

Demostración. El teorema 3.14 nos da la equivalencia entre 1) y 2) y las implicaciones 2) $\Rightarrow$ 3), 3) $\Rightarrow$ 4) son obvias.

4) $\Rightarrow$ 5) Si A y B son dos conjuntos completamente separados en X, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$. Por hipótesis, f se puede extender a una función continua $\widehat{f} : Y \to [0,1]$. Entonces $\overline{j(A)}^Y \subset \overline{\widehat{f}^{-1}(0)} = \widehat{f}^{-1}(0)$ y $\overline{j(B)}^Y \subset \overline{\widehat{f}^{-1}(1)} = \widehat{f}^{-1}(1)$, por lo que $\overline{j(A)}^Y \cap \overline{j(B)}^Y = \emptyset$

5) $\Rightarrow$ 6) Dos conjuntos cero $Z(f)$ y $Z(g)$ en X están completamente separados, por la función $\frac{f^2}{f^2+g^2}$, por lo que , por hipótesis, sus imágenes mediante j tienen clausuras disjuntas en Y.

6) $\Rightarrow$ 7) Por la proposición, tenemos que el sistema de entornos de conjuntos cero de x, es una base de entornos para x.

Sean Z_1 y Z_2 dos conjuntos cero en X. Entonces $\overline{j(Z_1) \cap j(Z_2)} \subseteq \overline{j(Z_1)} \cap \overline{j(Z_1)}$. Supongamos que $y \in \overline{j(Z_1)} \cap \overline{j(Z_2)}$. Si V es un entorno de y y ademas un conjunto cero, entonces $y \in \overline{(j(Z_1 \cap V)}$ e $y \in \overline{(j(Z_2 \cap V)}$, ya que $y \in \overline{(j(Z_1 \cap V)}$ si, y solo si, para todo entorno abierto U de y, $U \cap j(Z_1) \cap V \neq \emptyset$, pero como V es entorno de y, $y \in \text{Int}V$ y $\text{Int}V \cap U$ es un entorno de y, como $y \in \overline{j(Z_1)}$, tenemos que $U \cap j(Z_1) \cap \mathrm{V} \neq \emptyset$ y los mismo para $j(Z_2)$. Como $j^{-1}(V)$ es un conjunto cero en X, es no vacío pues $j(X)$ es denso en Y, $Z_1 \cap j^{-1}(V)$ es un conjunto cero en X e $y \in \overline{(j(Z_1 \cap V)} \cap \overline{(j(Z_2 \cap V)}$, por 6), $Z_1 \cap j^{-1}(V) \cap Z_2 \cap j^{-1}(V) \neq \emptyset$. Lo cual implica que $j(Z_1) \cap j(Z_2) \cap V \neq \emptyset$, para todo entorno conjunto cero de y. Como los entornos conjuntos cero de y forman una base de entornos, tenemos que $y \in \overline{j(Z_1) \cap j(Z_2)}$

7) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $f : X \to K$ es un función continua. K es T_4 y si A y B son dos conjuntos cerrados disjuntos, por el lema de Urysohn, teorema 1.40, existe una función $g : K \to [0,1]$ tal que $A \subseteq Z(g) = Z_1$ y $B \subseteq Z(g-1) = Z_2$.

Entonces $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(Z_1)$ y $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(Z_2)$ y $f^{-1}(Z_1)$ y $f^{-1}(Z_2)$ son dos conjuntos cero disjuntos en X, por 7), $\overline{j(f^{-1}(A))}^Y \cap \overline{j(f^{-1}(B))}^Y \subset \overline{j(Z_1)}^Y \cap \overline{j(Z_2)}^Y = \overline{j(Z_1 \cap j(Z_2))} = \emptyset$, Por el teorema de Taimonov 1.47, f tiene una extensión continua $\widehat{f} : Y \to K$. $\square$

La siguiente propiedad es muy importante

Corolario 3.18. *Para toda compactificación Y' de un espacio Tychonoff Y y toda función continua $f : X \to Y$ de un espacio Tychonoff X en Y existe una extensión continua de f, $F : \beta X \to Y'$, sobre βX e Y'.*

Demostración. Basta con aplicar el teorema anterior a la función $e \circ f$. $\square$

Proposición 3.19. *Sea (X, τ) un compacto Hausdorff, y por tanto Tychonoff. Se tiene que $X = \beta X$.*

Demostración. Como X es Tychonoff sabemos que admite una compactificación de Stone-Cech, a partir de un embebimiento e. $e(X)$ es compacto por ser e un función continua y es cerrado por ser βX Hausdorff. Pero $\beta X = \overline{e(X)} = e(X)$. Por lo tanto e es un homeomorfismo entre X y βX. $\square$

Vamos a analizar cuándo la compactificación de Stone-Cech es metrizable.

Proposición 3.20. ([4], pág 437) *βX es metrizable si, y solo si, X es un compacto metrizable (que por la proposición anterior equivale a que sea metrizable y $X = \beta X$).*

Demostración. ($\Leftarrow$) Es obvio.

($\Rightarrow$) Si βX es metrizable, entonces X es metrizable, y por tanto T_4, y βX es $1A\mathbb{N}$. Suponiendo que X es no compacto, por el lema 1.18 existe una sucesión (x_n) en $e(X)$ tal que $(x_n) \to p \in \beta X \backslash X$, pues si fuera compacto $\beta X \backslash X = \emptyset$. Sea $O = \{x_1, x_3, ..., x_{2n+1}, ..\}$ y $E = \{x_2, x_4, ..., x_{2n}, ...\}$. $e^{-1}(O)$ y $e^{-1}(E)$ son dos conjuntos cerrados disjuntos, porque e es una biyección entre X y $e(X)$, en X que es T_4, luego por el lema de Urysohn 1.40, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(O) = 0$ y $f(E) = 1$. Sea f^β la extensión de f. Entonces $f^{\beta}(p) = \lim_{n\to\infty} f(x_{2n}) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f(x_{2n+1}) = f^{\beta}(p)$, lo cual es absurdo. $\square$

Definición 3.21. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Definimos $\mathcal{C}^*(X)$ como el espacio de las funciones con valores reales continuas acotadas que parten de X.*

Definición 3.22. *Supongamos que $A \subset X$. Se dice que A es* $\mathcal{C}^*$***-embebido en*** *X es X si toda función $f \in \mathcal{C}^*(A)$ tiene una extensión continua $\widehat{f} \in \mathcal{C}^*(X)$*

Vamos a ver qué relación tiene esto con algunos conceptos topológicos.

1. Por el *Teorema de extensión de Tietze* todo subespacio cerrado de un espacio normal es $\mathcal{C}^*$-embebido.

2. Para todo espacio Tychonoff, βX es la compactificación(salvo equivalencia) en la que $e(X)$ es $\mathcal{C}^*$-embebido y por lo tanto X también lo es, por la las funciones acotadas de $e(X)$ son las funciones acotadas de X compuestas previamente por e.

Para acabar vamos a dar un teorema muy útil cuando se trabaja con βX.

Teorema 3.23. ([4], pág 439) *Supongamos que $A \subset X$, (X,τ) es Tychonoff y A es $\mathcal{C}^*$-embebido en X. Entonces $\overline{e(A)}^{\beta X} = \beta A$.*

Demostración. Si $f : A \to [0,1]$ es continua, entonces f se puede extender a $\overline{f} : X \to [0,1]$, y esta a su vez se puede extender a $\widehat{f} : \beta X \to [0,1]$. Entonces $\widehat{f}|_{\overline{e(A)}^{\beta X}}$ es una extensión continua de f. Eso implica que $\overline{e(A)}^{\beta X}$ tiene la propiedad de la extensión de Stone, luego por el Teorema 3.17, $\overline{e(A)}^{\beta X} = \beta A$ $\square$

Capítulo 4

Ejemplos

En este capítulo se van a exponer una serie de ejemplos y alguna aplicación de esta teoría. Antes de dar algún ejemplo de alguna compactificación específica, se va a exponer unas aplicaciónes de cómo esta teoría puede dar demostraciones alternativas a resultados topológicos.

Proposición 4.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Entonces X es un espacio de Baire.*

Demostración. Como X es localmente compacto y Hausdorff, por la proposición 2.21, es Tychonoff, por lo tanto X es homeomorfo a un subespacio denso de un compacto Hausdorff, que es un espacio de Baire (veasé *Teorema de la categoría de Baire*, [10], pág 337). Si denominamos j al embebimiento, tenemos que $j(X)$ es localmente compacto y denso, luego por el Teorema 1.11, es abierto en el compacto, por el Lema 48.8 de [10], todo abierto de un espacio de Baire es un espacio de Baire lo que implica que $j(X)$ y por lo tanto X son espacios de Baire. □

Proposición 4.2. *Sean X, Y dos espacios topológicos compactos Hausdorff, $x \in X$ e $y \in Y$, tales que $X \backslash \{x\}$ es homeomorfo a $Y \backslash \{y\}$. Entonces X e Y son homeomorfos.*

Demostración. Si X e Y son compactos Hausdorff, por el Corolario 1.9, son localmente compactos y como $X \backslash \{x\}$ e $Y \backslash \{y\}$ son abiertos, por el Corolario 1.10, son localmente compactos y Hausdorff. Tenemos que X con la inclusión i es una compactificación por un punto de $X \backslash \{x\}$ e Y, también con su respectiva inclusión j, es una compactificaciónpor un punto de $Y \backslash \{y\}$. Como $X \backslash \{x\}$ es homeomorfo a $Y \backslash \{y\}$, X con $i \circ h$, donde $h : Y \backslash \{y\} \to X \backslash \{x\}$ es un homeomorfismo, es una compactificación por un punto de Y, luego por el teorema de Alexandroff 2.20, las dos compactificaciones son equivalentes y por lo tanto homeomorfas. □

Ejemplo 4.3. *La compactificación de* $\mathbb{R}$ *mediante la* $\mathbb{S}^1$.

Sea h la inversa de la aplicación estereográfica, tenemos que $h(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1 - \{\text{Polo Norte}\}$. Tenemos que $(\mathbb{S}^1, h)$ es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}$, pues la topología de $\mathbb{S}^1$ coincide con al topología de Alexandroff.

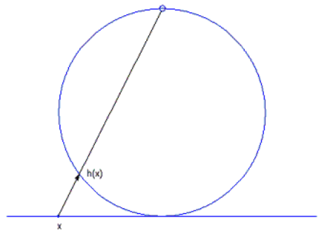

Figura 4.1: Compactificación de $\mathbb{R}$

Ejemplo 4.4. *Compactificación de* $\mathbb{R}$ *por dos puntos.*

Sea $h : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ un homeomorfismo y sea $i : (-1, 1) \to [-1, 1]$ la inclusión, entonces $([-1, 1], h \circ i)$ es una compactifiación por dos puntos de $\mathbb{R}$, que por el Teorema 3.8 es equivalente a cualquier otra.

Vamos a dar otra *compactificación Hausdorff de* $\mathbb{R}$ *por dos puntos.*

Ejemplo 4.5. Sean $p, q \neq \mathbb{R}$. Sea $X = \mathbb{R} \cup \{p, q\}$. Definimos en X la topología τ generada por la base

$$\beta = \{(a, b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \cup \{p\}; a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, \infty) \cup \{q\}; b \in \mathbb{R}\}.$$

La topología usual de de $\mathbb{R}$ está incluida en τ. Vamos a ver que $((X, \tau), i)$ es una compactificación de $\mathbb{R}$ por dos puntos.

Empezaremos viendo que i es un embebimiento. Basta con probar que $\tau|_u = \tau|_{\mathbb{R}}$. La inclusión $\tau_u \subset \tau|_{\mathbb{R}}$ es evidente, pues la primera parte de la definición de β, genera la topología usual en $\mathbb{R}$. Sea ahora un intervalo básico intersecado con $\mathbb{R}$. Entonces la posibilidades de la intersección son $(-\infty, a)$, (b, ∞) o (a, b) con $a.b \in \mathbb{R}$. En cualquiera de los tres casos son abiertos de $\mathbb{R}$.

Veamos que (X, τ) sea un espacio compacto. Sea $A_i; i \in I$ un recubrimineto por abiertos básicos de X Sean $(-\infty, a) \cup \{p\}$, $(b, \infty) \cup \{q\}$ abiertos que contengan a p y q respectivamente (podemos suponer que $a < b$, en otro caso, esos dos abiertos ya formarían un subrrecubrimiento finito). Entonces $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Ya que $[a, b]$ es compacto en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$[a, b] \subset A_{i_1} \cup .... \cup A_{i_n}.$$

Entonces

$$X = ((-\infty, a) \cup \{p\} \cup (b, \infty) \cup \{q\}) \cup A_{i_1} \cup .... \cup A_{i_n}.$$

La densidad de $i(\mathbb{R})$ en X es obvia, al igual del hecho de que X es Hausdorff.

Ejemplo 4.6. *Compactificación de Alexandroff de* $\mathbb{N}$.

Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $((X, \tau), f)$ es una compactificación por un punto de $\mathbb{N}$, donde τ es la topología inducida por $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{N} \to X$ definida como $f(n) = \frac{1}{n}$. Vamos a ver que realmente es una compactificación de $\mathbb{N}$. X es es un espacio compacto por ser una sucesión convergente con su límite. f es inyectiva de forma evidente y es continua por tener $\mathbb{N}$ la topología discreta. De la misma manera f^{-1} es continua, lo cual nos da un homeomorfismo entre $\mathbb{N}$ y $f(N)$. Por último, $f(\mathbb{N})$ es denso en X es evidente, pues 0 es adherente a $f(\mathbb{N})$ por ser el límite de la sucesión.

En el siguiente ejemplo, podemos ver que cuando a un espacio Hausdorff, le suprimimos la condición de se localmente compacto, su compactificación por un punto no es Hausdorff.

Ejemplo 4.7. *Compactificación por un punto de* $\mathbb{Q}$.

Vamos a ver que el punto ∞ no se puede separar de ningún punto de $\mathbb{Q}$. Supongamos que existen $p \in \mathbb{Q}$, $U, V \in \tau^*$ tales que $p \in U$, $\infty \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como $\infty \neq$, tenemos que $U \in \tau$. Como $\infty \in V \in \tau^*$, tenemos que $\mathbb{Q}^* = K$, con K compacto en $\mathbb{Q}$. Como $U \cap V = \emptyset$ tenemos que $U \subset K$, pero los compactos en $\mathbb{Q}$ son conjuntos finitos de conjuntos unipuntuales y los abiertos de $\mathbb{Q}$ tienen cardinal numerable. Con lo cual tenemos la contradicción buscada.

Ya hemos visto algunos ejemplos de compactificación por un punto, por dos. Es fácil construir en $\mathbb{R}$ ejemplos de conjuntos que se puedan compactificar por n, $\aleph_0$ y $\aleph_1$. Para los dos ultimos basta con quitarle al intervalo $(0, 1)$, los racionales o los irracionales y embeberlo en $[0, 1]$.

En siguiente ejemplo, se muestra que el preorden dado en la Definición 2.4 no es en general un orden en $\mathcal{C}/\sim$.

Ejemplo 4.8. Se considera el espacio topológico (X, τ), donde $X = \mathbb{N} - \{1\}$ y τ es la topología discreta. Sean

$$X' = X \cup \mathbb{S}^1,$$
$$\tau' = \{X \cup G | G \in \tau_u^2|_{\mathbb{S}^1}\} \cup \tau,$$
$$X'' = X \cup [-1, 1],$$
$$\tau'' = \{X \cup A | A \in \tau_u|_{[0,1]}\} \cup \tau.$$

Se verifica que $((X', \tau'), i)$ y $((X'', \tau''), j)$, donde $i.j$ son las inclusiones respectivas, son compactificaciones de (X, τ). Se tiene que $g : X' \to X''$, definida por

$$g(x') = \begin{cases} x' \text{ si } x' \in X \\ x'_1 \text{ si } x' = (x'_1, x'_2) \in \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

es una aplicación continua y suprayectiva tal que $g \circ i = j$.

Análogamente, $h : X'' \to X'$ definida por

$$h(x'') = \begin{cases} x'' \text{ si } x'' \in X \\ (\cos \pi x'', \sin \pi x'') \text{ si } x'' \in [-1, 1] \end{cases}$$

es una aplicación continua y suprayectiva tal que $i = h \circ j$. Así, $((X', \tau'), i) \leq ((X'', \tau''), j)$ y $((X'', \tau''), j) \leq ((X', \tau'), i)$ y, sin embargo, $((X'', \tau''), j) \sim ((X', \tau'), i)$, ya que no son homeomorfos los dos espacios.

En el siguiente ejemplo vamos a compactificar un espacio discreto añadiendo c puntos.

Ejemplo 4.9. Sea $I_0 = \{(x, 0) | x \in [0, 1]\}$ e $I_1 = \{(x, 1) | x \in [0, 1]\}$ dos copias disjuntas de $[0, 1]$. Tomamos $Y = I_0 \cup I_1$ y usamos la siguiente base de entornos:

1. Los puntos de I_1 son aislados, una base de entornos para p sería $\{p\}$.
2. Si $p = (x, 0) \in I_0$. Una base de entornos de p sería cualquier conjunto de la forma $V \cup \{(z, 1) | (z, 0) \in V, z \neq x\}$.

Claramente Y es Hausdorff. Vamos a ver que Y es compacto. Es suficiente probar que todo cubrimiento $\mathcal{U}$ formado por entornos básicos abiertos tiene un subrecubrimineto finito.

Sea $\mathcal{W}$ =$\{W \in \mathcal{U} | W \cap I_0\}$. $\mathcal{W}$ recubre I_0 y cada $W \in \mathcal{W}$ es de la forma $V \cup \{(z, 1) | (z, 0) \in V, z \neq x\}$, donde V es abierto en I_0. Las V-partes de $\mathcal{W}$ cubren I_0,

que como son abiertas e I_0 es compacto, existen $W_1, ..., W_n \in \mathcal{W}$ que cubren I_0. Extos conjuntos cubren I_1 excepto posiblimente en un número finito de puntos $p_1, .., p_k$. si tomamos abiertos de $\mathcal{U}$, U_i que contengan a p_i, $\{W_1, ..., W_n, U_1, .., U_k\}$ es un recubrimiento finito.
Todo entorno de un punto de I_0 corta a I_1, por lo tanto $\overline{I_1}^Y = Y$. Por lo tanto Y es una compactificación de I_1 con la topología discreta con la inclusión y $|Y \backslash I_1| = c$.

Se ha visto en la Proposición 2.6 que el producto de compactificaciónes es la compactificación del producto. Vamos a ver que en general el producto de compactificaciones de Alexandroff no el la compactificación de Alenxandroff del producto.

Ejemplo 4.10. Sea $X = Y = (0, 1)$ y $X^* = Y^* = \mathbb{S}^1$. Tenemos que $X^* \times Y^* = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, pero $X \times Y$ es el cuadrado unidad abierto y su compactificación de Alexandroff es $\mathbb{S}^2$ que no es homeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Finalizamos con un ejemplo donde la compactificación de Alexandroff no coincide con la compactificación de Stone-Cech.

Ejemplo 4.11. *La compactificación de Alexandroff de* $\mathbb{N}$ *no es* βN.

Sea $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ dada por $f(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es par} \\ 1 \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Esta función no se puede extender continuamente a ninguna función $\widehat{f} : \mathbb{N}* \to \{0, 1\}$. Pues tomamos las sucesiones $\{1, 3, 5, ...\} = (x_n)$ y $\{2, 4, 6, ...\} = (y_n)$ que son convergentes en $\mathbb{N}^*$, y el limite de esas sucesiones debe ser ∞. Entonces $\widehat{f}(\infty) = \text{lím}_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = \text{lím}_{n\to\infty} f(y_n) = \widehat{f}(\infty)$.

Capítulo 5

Apéndice

En esta memoria, se han desarrollado tres compactificaciones distintas de espacios topológicos. Pero hay más aparte de las que se han expuesto aquí. En esta sección se dará un breve resumen de algunas otras compactificaciones que existen, aunque no se entrará en detalle en su construcción, pues algunas son demasiado complejas o utilizan conocimientos topológicos muy avanzados, quedando lejos de los límites del presente trabajo.

Lo primero es mencionar que, aunque se ha hablado de la compactificación de Stone-Cech de un espacio Tychonoff y una construcción de la misma dada en el Capítulo 3, se puede hacer otra construcción a partir del dual del espacio topológico $(C^*(X)^*, wk^*)$, donde wk^* representa la topología débil. Esta construcción se puede seguir en [1] (pág 140), pero la idea esencial es definir la aplicación $\Delta : X \to C^*(X)^*$ como $\Delta(x) = \delta_x$, donde $\delta_x(f) = f(x)$ y gracias a que la bola $B[0,1]$ es compacta en la topología débil y a que $\overline{\Delta(X)} \subset B[0,1]$, podemos definir la compactificación de Stone-Cech de X como $(\overline{\Delta(X)}, \Delta)$.

En la memoria nos se ha hablado sobre si la compactificación de Stone-Cech se porta bien con el producto de espacios topológicos, es decir, si $\beta X \times \beta Y = \beta(X \times Y)$. En general no, se puede ver el ejemplo en [12] (pág 38), pero el teorema de Glicksberg (véase [12], pág 199) nos dice que si el producto es pseudo-compacto la respuesta es afirmativa. Una de las compactificaciones de Stone-Cech más estudiadas es $\beta\mathbb{N}$. La primera cosa que llama la atención es que $|\beta\mathbb{N}| = 2^c$, esto es consecuencia del Teorema 2.15 y del Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery (véase Theorem 3.5 apartado b), en [4], pág 255). También se puede ver que todo cerrado infinito de $\beta\mathbb{N}$ contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$ y por lo tanto su cardinal es 2^c (véase [4], pág 440, o [12], pág 71).

Otro espacio interesante, por los subespacios que tiene y las patologias que presenta (véanse los capítulos 3 y 4 de [12]), es el compacto $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Se puede ver que la compactificación de Stone-Cech es un caso particular de la compactificación de tipo Wallman cuando el espacio es Tychonoff. La idea de esta compactificación es dada la familia de cerrados de la topología de $X, \mathcal{C}$, en X, la compactificación se define como $\omega\mathcal{C} = \{U \mid U \text{ es un } \mathcal{C}-\text{ultrafiltro sobre } X\}$. Esta construcción se puede ver más detalladamente en [3] (pág 177), [9] (pág 78), [11] (pág 24) o [12] (pág 21). Se ha hablado sobre la compactificación por N puntos, donde N es finito, pero también se ha estudiado la compactificación por $\aleph_0-$puntos, se puede ver, por ejemplo, en [6].

Bibliografía

[1] J. B. Conway, *A course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 185.

[2] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[3] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann-Verlag, 1989.

[4] R. C. Freiwald, *Introduction to Set Theory and Topology*, St. Louis, 2013.

[5] J. L. Kelley, *General topology*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[6] T. Kimura, $\aleph_0$-*point compactification of locally compact spaces and product spaces*, Proc. AMS, Vol. 93, No. 1, 1985, 164-168.

[7] R. López, *Curso de Topología General*, Granada, 1995.

[8] K. D. Magill, *N-points compactifications*, Amer. Math. Monthly, Vol. 72, No. 10, 1065, 1075-1081.

[9] J. Margalef Roig, E. Outerelo Domínguez, J. L. Pinilla Ferrando, *Topología*, Vols. 1, 2 y 3, Alhambra, 1975.

[10] J. R. Munkres, *Topología*, 2ª ed. Prentice Hall, Madrid, 2002.

[11] A. Pérez, *Filtros y sus aplicaciones* (Trabajo de fin de Master:), 2013.

[12] R. C. Walker, *The Stone-Cech compactification*, Springer-Verlag, 1974.

[13] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley Publ. Co. Inc., Reading, Mass., 1970.