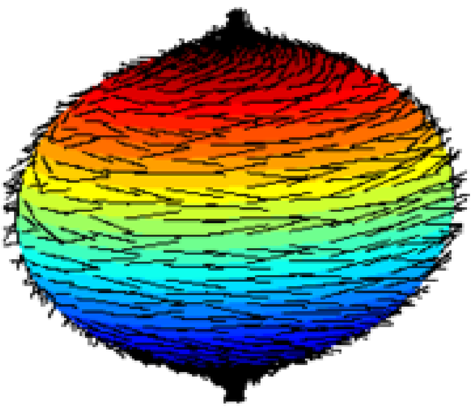
UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Una introducción al grupo fundamental y algunas aplicaciones



José David Rodríguez Abellán

Curso 2014-2015

dirigido por

Luis José Alías Linares

Índice general

Introducción

Uno de los problemas básicos de la *topología* es el de determinar cuándo dos espacios son o no homeomorfos. No hay un método para resolver este problema en general, pero existen técnicas que se aplican en casos particulares.

Demostrar que dos espacios son homeomorfos consiste en construir una aplicación continua de uno en el otro que tenga inversa continua, y construir aplicaciones continuas es un problema relativamente sencillo.

Ahora bien, para demostrar que dos espacios no son homemorfos debemos probar que no existe ninguna aplicación continua con inversa continua, y este es un problema más complicado que el anterior.

Si podemos encontrar alguna propiedad topológica que sea cierta para un espacio pero no para el otro, entonces el problema queda resuelto, pues los espacios no pueden ser homeomorfos. Por ejemplo, el intervalo cerrado $[0,1]$ no puede ser homeomorfo al intervalo abierto $(0,1)$, puesto que el primer espacio es compacto y el segundo no lo es. Tampoco la recta real $\mathbb{R}$ puede ser homeomorfa al plano $\mathbb{R}^2$, pues quitando un punto de $\mathbb{R}^2$ el espacio se mantiene conexo, y, en cambio, quitándolo de $\mathbb{R}$ esto no ocurre.

Sin embargo, en muchas ocasiones, la mayoría de las propiedades topológicas que conocemos (compacidad, conexión, metrizabilidad, ...) no van muy lejos en la resolución del problema, pues no encontramos una propiedad que distinga entre ambos espacios topológicos. Tenemos una prueba de ello tomando las siguientes superficies: la esfera $\mathbb{S}^2$, el toro $\mathbb{T}^2$ y el doble toro $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$. Los tres espacios son conexos, compactos y metrizables.

Una técnica usada en topología muy útil para ello es la de, dado un espacio topológico X, asociarle un objeto algebraico $H(X)$, de modo que a cualquier espacio Y homeomorfo a X le corresponda, por el mismo procedimiento, un objeto algebraico $H(Y)$ isomorfo a $H(X)$, es decir, $H(\cdot)$ es lo que se llama un *invariante*

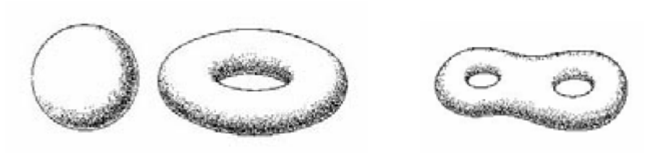


Figura 1: Esfera (izquierda), toro (centro) y doble toro (derecha)

topológico. Estos objetos algebraicos permiten detectar cuándo dos espacios topológicos no son homeomorfos: si los invariantes asociados al uno y al otro no son isomorfos.

Una de las propiedades más usuales es la de ser *simplemente conexo* (es decir, toda curva cerrada en el espacio puede contraerse a un punto del espacio). Esta propiedad va a distinguir entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, pues si quitamos un punto de $\mathbb{R}^3$ el espacio obtenido sigue siendo simplemente conexo, mientras que si lo quitamos de $\mathbb{R}^2$ esto no sucede, aunque existe una idea más general que el concepto de conexión simple, una idea que incluye la conexión simple como un caso particular. Esta involucra cierto objeto algebraico conocido como *grupo fundamental* del espacio. Dos espacios que son homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos. Conexión simple significa, en este caso, como veremos posteriormente, grupo fundamental trivial. Así pues, para ver que $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{T}^2$ no son homeomorfos, veremos que el grupo fundamental de $\mathbb{S}^2$ es trivial y el grupo fundamental de $\mathbb{T}^2$ no lo es, como también veremos que $\mathbb{T}^2$ y $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ tampoco son homeomorfos, pues el primero tiene grupo fundamental abeliano y el segundo no.

En este trabajo definimos el grupo fundamental y estudiamos algunas de sus propiedades. Posteriormente las aplicamos a determinados problemas, incluyendo el problema de demostrar que algunos espacios, tales como los ya mencionados no son homeomorfos.

Otras aplicaciones que veremos incluyen teoremas que tratan con puntos fijos y aplicaciones que conservan los puntos antípodas de la esfera, así como el bien conocido *teorema fundamental del álgebra*, el cual nos dice que toda ecuación polinómica con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz, y el *teorema de la bola peluda*, que nos dice que ningún campo de vectores tangente sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ puede ser distinto de cero en todo punto.

Resumen

Aunque resulta muy complicado resumir un texto matemático, en este capítulo intentamos resaltar lo más importante de este trabajo, con la intención de que le sirva al lector como motivación y para tener desde el comienzo una idea general sobre el contenido del mismo.

Como indica el título del trabajo y como he explicado en la introducción, este proyecto pretende ser una iniciación al concepto de grupo fundamental, así como algunas de sus aplicaciones más importantes. Puesto que en los estudios que he realizado en el Grado en Matemáticas no se estudia este concepto en profundidad, en esta memoria partiremos de cero para que el lector pueda comprender totalmente lo que es el grupo fundamental de un espacio topológico, introduciendo los conceptos previos necesarios para su comprensión, aunque eso sí, muchos otros conceptos y resultados procedentes de *Topología*, *Álgebra*, *Análisis* y *Geometría* se supondrán ya conocidos a estas alturas.

Para facilitar la comprensión del texto, vamos a explicar brevemente, sin entrar en detalles, lo que sigue a continuación capítulo por capítulo para tener una idea más esquematizada de lo que se intenta explicar en cada uno de ellos.

En el Capítulo 1, se introduce el concepto clave de este trabajo, el concepto de *Grupo Fundamental* de un espacio topológico. Para ello, es necesario primero introducir el concepto de *Homotopía* entre dos aplicaciones continuas, para el que pondremos especial énfasis en el caso en que las aplicaciones continuas son caminos, y más concretamente, en el que los caminos son lazos, es decir, caminos con el mismo punto inicial y final.

Posteriormente, veremos que la relación de homotopía es realmente una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos, y análogamente para el caso en que las aplicaciones continuas son caminos.

Como lo que buscamos es la construcción de un *grupo*, definiremos cierta operación sobre las clases de equivalencia de homotopía de caminos. Ahora bien, como la operación que introduciremos no estará definida para cualquier par de clases, será necesario restringirnos a un subconjunto para el que siempre estará bien definida, los *lazos basados en un punto*. El conjunto de las clases de equivalencia de los lazos basados en un punto junto con la operación introducida, constituirá lo que se conoce como grupo fundamental del espacio topológico relativo al punto en cuestión.

Nos preguntaremos sobre la dependencia del punto base escogido y trataremos de dar una respuesta a ello, y finalmente, introduciremos el concepto de ser *simplemente concexo*.

En este capítulo también introduciremos lo que se conoce como *espacios contráctiles*, para lo cual daremos primero un concepto más general que luego particularizaremos.

En el Capítulo 2 calcularemos el grupo fundamental de la circunferencia, lo cual tendrá posteriormente numerosas aplicaciones. Para ello, introduciremos la aplicación exponencial

$$e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

dada por $e(x) = e^{i2\pi x} = (\cos(2\pi x), \mathrm{sen}(2\pi x))$, y demostraremos que es una aplicación recubridora. Después, introduciremos el concepto de levantamiento de una aplicación continua vía la aplicación exponencial y daremos dos resultados técnicos con relación a ello.

Definiremos el grado de un lazo en la circunferencia $\mathbb{S}^1$, y comprobaremos que es una buena definición y que además, es un número entero. También veremos que dos lazos homotópicos en la circunferencia $\mathbb{S}^1$ tiene el mismo grado y usaremos este hecho para demostrar que el grupo fundamental de la circunferencia es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}$.

En el Capítulo 3 demostraremos que la esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa para $n \geq 2$, y por tanto, su grupo fundamental será trivial. Probaremos para ello un famoso teorema, conocido como *Teorema de Van Kampem* (en su versión más sencilla) y obtendremos como corolario que si el espacio topológico se puede expresar como unión de dos conjuntos abiertos simplemente conexos cuya intersección es no vacía y conexa por caminos, entonces el espacio topológico es simplemente conexo. Posteriormente, haciendo uso de la conocida *proyección estereográfica*, demostraremos lo que buscamos.

En el Capítulo 4 daremos una serie de aplicaciones del hecho de que el grupo fundamental de la circunferencia es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}$. Veremos el conocido *Teorema de la no-retracción*, el cual nos dice que no existe una retracción del disco unidad en su frontera. También veremos el *Teorema del punto fijo de Brouwer para el disco*, el cual nos dice que toda aplicación continua del disco en el disco tiene un punto fijo. Estos teoremas del punto fijo son muy útiles en todos los campos de las matemáticas.

Incluso un teorema muy conocido en todas las áreas de las matemáticas, como es el *Teorema fundamental del álgebra,* puede ser demostrado usando que $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. También enunciaremos y demostraremos el *Teorema de Borsuk-Ulam*, que nos dice que dada una aplicación continua $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, existe un punto x de $\mathbb{S}^2$ tal que $f(x) = f(-x)$. Como aplicación de ello demostraremos el *Teorema de la bisección*, que nos dice que dadas dos regiones acotadas en $\mathbb{R}^2$, existe una recta en $\mathbb{R}^2$ que bisecciona a cada una de ellas, y finalmente, demostraremos el ya nombrado *Teorema de la bola peluda*, viendo que su generalización a dimensiones impares no es cierta.

En este capítulo también veremos cuál es el grupo fundamental de la recta proyectiva real $\mathbb{RP}^1$, lo que se obtendrá como consecuencia directa de que la recta proyectiva real $\mathbb{RP}^1$ es homeomorfa a la circunferencia $\mathbb{S}^1$.

Para finalizar el trabajo, en el Capítulo 5, veremos cuáles son los grupos fundamentales de algunas superficies: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{RP}^2$ y $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$. Los dos primeros grupos fundamentales serán triviales pues son espacios simplemente conexos, mientras que el del toro y la circunferencia se obtendrá como consecuencia de que el grupo fundamental del producto de dos espacios topológicos es isomorfo al producto de los grupos fundamentales de ambos espacios.

Abstract

Although it is difficult to make a summary of a mathematical text, in this chapter we will try to highlight the trascendental items in order to motivate the reader and also to have a general idea of the content.

As the title says, this project aims to be an introduction to the concept of fundamental group, and also to some of many of its important applications. We have not studied this concept very deeply before and because of this we will begin from zero in order to make it easier to the reader to understand it, although we will use many basic and known concepts from *Topology*, *Algebra*, *Analysis* and *Geometry*.

Next, I am going to explain, without giving details, chapter by chapter for having a clear idea of everything.

In Chapter 1, the key concept is explained. For that, I will firstly explain the concept of *Homotopy* between two continuous maps and I will pay special attention on the paths, and concretely, when the paths are closed, which is to say, paths which have the same starting and ending point.

Then, we will see that the homotopy relation is really an equivalence relation in the set of the continuous maps between two topological spaces, and similarly, when the continuous maps are paths.

Since we are looking for the creation of a group, we will define an operation over the homotopy classes. Given the fact that the operation we will introduce will not be always defined, it will be neccesary to focus on a subset where it will always be well defined, the *closed paths based at a point*. The set of the homotopy classes of the closed paths based at a point with the introduced operation, will be what we know as fundamental group of the topological space relative to a point.

We will ask ourselves about the dependance of the starting point choosen, and finally, we will introduce the concept of being *simply connected*.

In this chapter, we will also introduce the concept of *contractible space*, and a more general concept will be given for that.

In Chapter 2, we will calculate the fundamental group of the circle, which will have plenty of applications. For that, we will introduce the exponential map

$$e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

given by $e(x) = e^{i2\pi x} = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$, and we will prove that it is a covering map. Then, we will introduce the concept of lifting of a continuous map by the exponential map and we will give two technical results related to them.

We will define the degree of a closed path in the circle $\mathbb{S}^1$, and we will check that it is well defined and is integer. We will also see that two homotopic closed paths in the circle $\mathbb{S}^1$ have the same degree and we will use that to prove that the fundamental group of the circle $\mathbb{S}^1$ is isomorphic to the aditive group $\mathbb{Z}$.

In Chapter 3, we will prove that the sphere $\mathbb{S}^n$ is simply connected for $n \geq 2$, and therefore, its fundamental group will be trivial. For that, we will prove a famous theorem known as *Van Kampen Theorem* (in its simplest version).

In Chapter 4, a serie of applications of $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ will be given. We will see the known *Non-retraction theorem*, which says that there exists no retraction of the disk on its border. We will also see the *Brouwer fixed-point for the disk*, which says that every continuous map of the disk onto itself has a fixed point. This kind of theorems is very usefull in all the mathematical areas.

Even a very known theorem in all the mathematical areas as it is *The Fundamental Theorem of Algebra* can be proved using that $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. We will also talk about the *Borsuk-Ulam Theorem*, which says that given a continuous map $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, there exists a point $x \in \mathbb{S}^2$ such as $f(x) = f(-x)$. As an application of that, we will prove the *Bisection Theorem*, which says that given two bounded polygonal regions in $\mathbb{R}^2$ there exists a line in $\mathbb{R}^2$ that bisects each of them, and finally, we will prove the already named *Hairy Ball Theorem*, seeing that its generalization to odd dimension is not true.

In this chapter, we will also see which is the fundamental group of the projective line $\mathbb{RP}^1$, what we will get as a direct consequence of the fact that the projective line $\mathbb{RP}^1$ is homeomorphic to the circle $\mathbb{S}^1$.

To finish this project, in Chapter 5, we will compute the fundamental groups of some surfaces: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{RP}^2$ and $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$. The fundamental group of $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{S}^2$ will be trivial because they both are simply connected spaces, while the fundamental group of the torus and the circle will be got as consequence of the fact the fundamental group of the product of two topological spaces is isomorphic to the product of the fundamental groups of them.

Capítulo 1

Grupo fundamental

Para empezar, vamos a introducir el grupo fundamental de un espacio topológico, para lo cual necesitaremos primero de una serie de conceptos previos.

1.1. Homotopía de caminos

Antes de definir el grupo fundamental de un espacio X, vamos a considerar caminos sobre X y una relación de equivalencia entre ellos conocida como *homotopía de caminos*, y, posteriormente, definiremos cierta operación sobre la colección de las clases de equivalencia.

Definición 1.1. *Si f y g son aplicaciones continuas del espacio X en el espacio Y, decimos que f es homotópica a g si existe una aplicación continua*

$$F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

tal que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$ para cada $x \in X$. La aplicación F se conoce como ***homotopía*** *entre f y g. Si f es homotópica a g escribimos $f \simeq g$. Si f es homotópica a una aplicación constante, decimos que f es* ***homotópicamente nula****.*

Consideremos ahora el caso especial en el cual f es un camino. Recordemos que si $f : [0,1] \longrightarrow X$ es una aplicación continua tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$, decimos que f es un camino en X desde x_0 hasta x_1. También decimos que x_0 es el ***punto inical*** y x_1 es el ***punto final*** del camino f.

Definición 1.2. *Si f y g son dos caminos que aplican el intervalo $[0,1]$ en X, se dice que son* ***homotópicos por caminos*** *si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1, y si existe una aplicación continua*

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

tal que:

- $F(s,0) = f(s)$ *y* $F(s,1) = g(s)$,
- $F(0,t) = x_0$ *y* $F(1,t) = x_1$,

para cada $s \in [0,1]$ *y cada* $t \in [0,1]$. *La aplicación* F *recibe el nombre de* ***homotopía de caminos*** *entre* f *y* g. *Si* f *es homotópico por caminos a* g, *escribimos* $f \simeq_p g$

La primera condición dice simplemente que F es una homotopía entre f y g, mientras que la segunda dice que, para cada t, la aplicación $f_t : [0,1] \longrightarrow X$, definida por la ecuación $f_t(s) = F(s,t)$, es un camino desde x_0 hasta x_1.

Proposición 1.3. *Consideremos dos espacios topológicos* X *e* Y. *La relación de homotopía* $f \simeq g$ *es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas de* X *a* Y. *Además, si* f *y* g *son caminos en* X *con los mismos puntos inicial y final, la relación* $f \simeq_p g$ *también es una relación de equivalencia.*

Demostración. Veamos que se cumplen las propiedades de relación de equivalencia.

Dada $f : X \longrightarrow Y$, es claro que la aplicación dada por $F(x,t) = f(x)$ es una homotopía entre f y f, por lo que $f \simeq f$. Si $f : [0,1] \longrightarrow X$ es un camino en X, F es una homotopía de caminos.

Supongamos que $f \simeq g$ y veamos que $g \simeq f$. Sea F una homotopía entre f y g. Entonces $G(x,t) = F(x, 1-t)$ es una homotopía entre g y f. Si F es una homotopía de caminos, también lo es G.

Supongamos que $f \simeq g$ y $g \simeq h$. Probemos que $f \simeq h$. Sea F una homotopía entre f y g, y G una homotopía entre g y h. Definamos

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

por la ecuación

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & si \quad t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ G(x, 2t-1) & si \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La aplicación H está bien definida ya que para $t = \frac{1}{2}$, tenemos $F(x, 2t) = g(x) = G(x, 2t-1)$. Dado que H es continua en los dos subconjuntos cerrados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $X \times [0, 1]$, se tiene que H es continua en todo $X \times [0, 1]$, por el lema del pegamiento. Por lo tanto, H es una homotopía entre f y h.

Si F y G son homotopías de caminos, entonces también lo es H. Veamos:

Supongamos que x_0 y x_1 son los puntos inicial y final, respectivamente, de los caminos f, g y h. Entonces se tiene que:

- $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$,
- $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$.

Ahora, si $t \in [0, \frac{1}{2}]$:

- $H(0, t) = F(0, 2t) = x_0$,
- $H(1, t) = F(1, 2t) = x_1$.

Y si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$:

- $H(0, t) = G(0, 2t - 1) = x_0$,
- $H(1, t) = G(1, 2t - 1) = x_1$.

$\square$

Si f es un camino, denotaremos su clase de equivalencia de homotopía de caminos por $[f]$.

Veamos algunos ejemplos de homotopías entre aplicaciones continuas:

Ejemplo 1.4. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación inclusión de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^2$, es decir, $f(x, y) = (x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{S}^1$, y sea $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por $g(x, y) = (0, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{S}^1$. Entonces, se tiene que f y g son homotópicas, pues la función $F : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F((x, y), t) = (1 - t)f(x, y)$ es continua y tiene la propiedad de que $F((x, y), 0) = (1 - 0)f(x, y) = f(x, y)$ y $F((x, y), 1) = (1 - 1)f(x, y) = (0, 0) = g(x, y)$.*

Ejemplo 1.5. *Volviendo al hilo del ejemplo anterior, sean f y g dos aplicaciones cualesquiera de un espacio X en $\mathbb{R}^2$. Se tiene entonces que f y g son homotópicas pues la aplicación $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ es una homotopía entre ellas. Se conoce como* ***homotopía por rectas*** *pues lleva el punto $f(x)$ al punto $g(x)$ a lo largo del segmento de recta que los une.*

Si f y g son caminos de x_0 a x_1, entonces F será una homotopía de caminos.

Más en general: Sea A un subespacio convexo de $\mathbb{R}^n$ (es decir, para dos puntos cualesquiera a, b de A, el segmento de recta que los une está contenido en A). Entonces dos caminos cualesquiera f, g en A de x_0 a x_1 son homotópicos por caminos en A, ya que la homotopía por rectas F entre ellos mantiene su imagen en A.

Veamos ahora un lema que nos será de utilidad más adelante:

Lema 1.6. *Si $f \simeq g : X \longrightarrow Y$ y $h \simeq j : Y \longrightarrow Z$, entonces $(h \circ f) \simeq (j \circ g) : X \longrightarrow Z$.*

Demostración. Sea $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ una homotopía entre f y g, y sea $H : Y \times [0,1] \longrightarrow Z$ una homotopía entre h y j. Definamos una aplicación

$$G : X \times [0,1] \longrightarrow Z$$

por

$$G(x,t) = H(F(x,t),t),$$

y veamos que G es una homotopía entre $(h \circ f)$ y $(j \circ g)$.

G es continua por ser comoposición de aplicaciones continuas, y se tiene que

- $G(x,0) = H(F(x,0),0) = H(f(x),0) = h(f(x)) = (h \circ f)(x)$,
- $G(x,1) = H(F(x,1),1) = H(g(x),1) = j(g(x)) = (j \circ g)(x)$.

□

Como lo que buscamos en última instancia es la construcción de un *grupo*, pasamos ahora a definir cierta operación sobre las clases de equivalencia de homotopía de caminos como sigue:

Definición 1.7. *Si f es un camino en X de x_0 a x_1, y g es un camino en X de x_1 a x_2, definimos el **producto** $f * g$ de f y g como el camino h dado por las ecuaciones:*

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{1.1}$$

La aplicación h está bien definida pues para $s = \frac{1}{2}$ se obtiene $h(s) = f(2s) = f(1) = g(0) = g(2s-1)$, y es continua por el lema del pegamiento. Además, es un camino en X de x_0 a x_2. Intuitivamente pensamos en h como el camino cuya primera mitad es el camino f y cuya segunda mitad es el camino g.

La operación producto induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por la ecuación $[f] * [g] = [f * g]$. Veamos:

Supongamos que $[f] = [f']$ y $[g] = [g']$. Sea F una homotopía de caminos entre f y f' y sea G una homotopía de caminos entre g y g'. Definamos

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(2s-1,t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Dado que $F(1,t) = x_1 = G(0,t)$ para todo t, la aplicación H está bien definida, y es continua por el lema del pegamiento. Veamos que H es una homotopía de caminos entre $f * g$ y $f' * g'$:

Se tiene que:

- $H(0,t) = F(0,t) = x_0$,
- $H(1,t) = F(1,t) = x_1$.

Y por otro lado, si $s \in [0, \frac{1}{2}]$:

- $H(s,0) = F(2s,0) = f(2s) = (f * g)(s)$,
- $H(s,1) = F(2s,1) = f'(2s) = (f' * g')(s)$.

Y si $s \in [\frac{1}{2}, 1]$:

- $H(s,0) = G(2s-1,0) = g(2s-1) = (f * g)(s)$,
- $H(s,1) = G(2s-1,1) = g'(2s-1) = (f' * g')(s)$.

Ahora bien, notemos que $[f] * [g]$ no está definida para cualquier par de clases, sino únicamente para aquellos pares $[f]$, $[g]$ para los que $f(1) = g(0)$.

Teorema 1.8. *La operación $*$ satisface las siguientes propiedades:*

1. ***Es asociativa**: Si $[f]*([g]*[h])$ está definida, también lo está $([f]*[g])*[h]$, y son iguales.*

2. ***Neutro a izquierda y derecha**: Dado $x \in X$, denotemos por e_x el camino constante $e_x : [0,1] \longrightarrow X$ que lleva todo punto del intervalo $[0,1]$ al punto x. Si f es un camino en X desde x_0 hasta x_1, entonces se cumple que*
$$[f] * [e_{x_1}] = [f]$$
y
$$[e_{x_0}] * [f] = [f].$$

3. ***Inverso**: Dado el camino f en X desde x_0 hasta x_1, sea $\bar{f}$ el camino definido por $\bar{f}(s) = f(1-s)$, el cual se conoce como **inverso** de f. Entonces se cumple que*
$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}]$$
y
$$[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

Demostración. Utilizaremos dos hechos elementales. El primero es el hecho de que si $k : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y F es una homotopía de caminos en X entre los caminos f y f', entonces $k \circ F$ es una homotopía de caminos en Y entre los caminos $k \circ f$ y $k \circ f'$. El segundo es el hecho de que si $k : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y f y g son caminos en X con $f(1) = g(0)$, entonces $k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$.

Veamos las tres propiedades:

Empezamos viendo la existencia de ***neutro a izquierda y derecha***. Sea e_0 el camino constantemente igual a cero en $[0,1]$, y sea $i : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la aplicación identidad, la cual es un camino en $[0,1]$ desde 0 hasta 1. Se tiene entonces que $e_0 * i$ es también un camino en $[0,1]$ de 0 a 1. Como $[0,1]$ es convexo, existe una homotopía de caminos G en $[0,1]$ entre i y $e_0 * i$. Usando los dos hechos anteriores, se tiene que $f \circ G$ es una homotopía de caminos en X entre los caminos $f \circ i = f$ y $f \circ (e_0 * i) = (f \circ e_0) * (f \circ i) = e_{x_0} * f$. Análogamente, se tiene que si e_1 es el camino constantemente igual a uno, entonces $i * e_1$ es homotópico por caminos en $[0,1]$ al camino i, y se cumple que $[f] * [e_{x_1}] = [f]$.

Veamos ahora la existencia de ***inverso***. Observemos en primer lugar que el inverso de i es $\overline{i}(s) = 1 - s$. De esta manera, $i * \overline{i}$ es un camino en $[0, 1]$ comenzando y acabando en 0, al igual que e_0. Como $[0, 1]$ es convexo, existe una homotopía de caminos H en $[0, 1]$ entre e_0 e $i * \overline{i}$. Usando los dos hechos anteriores, se tiene que $f \circ H$ es una homotopía de caminos entre $f \circ e_0 = e_{x_0}$ y $f \circ (i * \overline{i}) = (f \circ i) * (f \circ \overline{i}) = f * \bar{f}$. Análogamente, utilizando que $\overline{i} * i$ es homotópico por caminos en $[0, 1]$ a e_1, se tiene que $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$.

Por último, comprobemos la ***asociatividad***. Para demostrar esta parte, vamos a expresar el producto $f * g$ de una manera diferente. Sabemos que si $[a, b]$ y $[c, d]$ son dos intervalos de la recta real, existe una única aplicación $p : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ de la forma $p(x) = mx + k$ que lleva a a c y b a d, conocida como ***aplicación lineal positiva*** de $[a, b]$ a $[c, d]$. De esta manera, el producto $f * g$ puede expresarse de la siguiente manera: En el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[0, \frac{1}{2}]$ a $[0, 1]$ compuesta con la aplicación f, mientras que en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[\frac{1}{2}, 1]$ en $[0, 1]$ compuesta con g.

Consideremos los caminos f, g y h en X. Supongamos que $f(1) = g(0)$ y $g(1) = h(0)$, de tal manera que podemos definir los productos $f * (g * h)$ y $(f * g) * h$. Definamos un "triple producto"de estos tres caminos como sigue: Sean $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a < b < 1$ y definamos un camino $k_{a,b}$ en X así: en $[0, a]$ es igual a la aplicación lineal positiva de $[0, a]$ a $[0, 1]$ compuesta con f. En $[a, b]$ es igual a la aplicación lineal positiva de $[a, b]$ a $[0, 1]$ compuesta con g y en $[b, 1]$ es igual a la aplicación lineal positiva de $[b, 1]$ a $[0, 1]$ compuesta con h. Pues bien, veamos que la clase de homotopía de este camino no depende de la elección de a y b. Sean $0 < c < d < 1$ y veamos que $k_{c,d}$ es homotópico por caminos a $k_{a,b}$.

Sea $p : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ la aplicación tal que si la restringimos a los intervalos $[0, a]$, $[a, b]$ y $[b, 1]$, respectivamente, coincide con las aplicaciones lineales positivas de esos intervalos en $[0, c]$, $[c, d]$ y $[d, 1]$, respectivamente. Se tiene entonces que $k_{c,d} \circ p$ es igual a $k_{a,b}$. Por otro lado, como p es un camino en $[0, 1]$ de 0 a 1, al igual que la aplicación identidad $i : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, se tiene que existe una homotopía P de caminos en $[0, 1]$ entre p e i, por lo que $k_{c,d} \circ P$ es una homotopía de caminos en X entre $k_{a,b}$ y $k_{c,d}$.

Como $f * (g * h)$ coincide con el "triple producto"$k_{a,b}$ cuando $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{3}{4}$ y $(f * g) * h$ coincide con el "triple producto"$k_{c,d}$ cuando $c = \frac{1}{4}$ y $d = \frac{1}{2}$, se tiene el resultado que buscamos.

$\square$

El argumento que acabamos de utilizar para probar la asociatividad es válido para cualquier producto de un número finito de caminos. Lo formalizamos:

Teorema 1.9. *Sea f un camino en X y sean $a_0, \dots, a_n$ números tales que $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$. Sea $f_i : [0,1] \longrightarrow X$ el camino igual a la aplicación lineal positiva de $[0,1]$ en $[a_{i-1}, a_i]$ compuesta con f. Entonces*

$$[f] = [f_1] * \cdots * [f_n].$$

1.2. Espacios contráctiles

Vamos a ver ahora un tipo especial de espacios, los ***espacios contráctiles***, para lo cual daremos primero una definición general que luego particularizaremos.

Definición 1.10. *Se dice que dos espacios topológicos X e Y son **homotópicamente equivalentes**, y se representa por $X \simeq Y$, si existen dos aplicaciones continuas $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ tales que $g \circ f : X \longrightarrow X$ es homotópica a la identidad en X y $f \circ g : Y \longrightarrow Y$ es homotópica a la identidad en Y. En tal caso, se dice que las aplicaciones f y g son **equivalencias homotópicas**.*

Definición 1.11. *Se dice que un espacio topológico X es **contráctil** si es homotópicamente equivalente a un espacio unipuntual.*

Proposición 1.12. *Un espacio topológico X es contráctil si, y solo si, la aplicación identidad $id_X : X \longrightarrow X$ es homotópica a una aplicación constante de X en X.*

Demostración. Supongamos que X es contráctil. Entonces, existe un punto x_0 en X tal que X es homotópicamente equivalente a $\{x_0\}$, es decir, existen $f : X \longrightarrow \{x_0\}$ y $g : \{x_0\} \longrightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq id_X$. Como $g \circ f$ es una aplicación constante, se tiene lo que buscamos.

Recíprocamente, supongamos que la aplicación identidad $id_X : X \longrightarrow X$ es homotópica a una aplicación constante de X en X, es decir, $id_X \simeq c_{x_0}$ con $x_0 \in X$. Entonces, las aplicaciones

$$f : X \longrightarrow \{x_0\}$$

dada por $f(x) = x_0$ para todo $x \in X$ y

$$g : \{x_0\} \longrightarrow X$$

dada por $g(x_0) = x_0$ son equivalencias homotópicas pues $g \circ f = c_{x_0} \simeq id_X$ y $f \circ g = id_{\{x_0\}}$.

□

Corolario 1.13. *Sea X un espacio topológico. Si X es contráctil, entonces es conexo por caminos.*

Demostración. Como X es contráctil, por la Proposición 1.12, se tiene que la aplicación identidad $id_X : X \longrightarrow X$ es homotópica a una aplicación constante de X en X, digamos $c_{x_0} : X \longrightarrow X$, con $x_0 \in X$. Entonces, si $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$ es una homotopía entre id_X y c_{x_0}, para cada punto $x \in X$, la aplicación $H_x : [0,1] \longrightarrow X$, definida por $H_x(t) = H(x,t)$ para todo $t \in [0,1]$, es un camino en X que une x con x_0. En efecto:

- $H_x(0) = H(x,0) = id_X(x) = x$.
- $H_x(1) = H(x,1) = c_{x_0}(x) = x_0$.

□

Proposición 1.14. *Sean X e Y espacios topológicos. Si alguno de ellos es contráctil, entonces toda aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ es homotópica a una constante.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que X es contráctil, y sea

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow X$$

una homotopía entre id_X y una constante, que sabemos que existe por la Proposición 1.12. Es decir, $H(x,0) = x$ para todo $x \in X$ y $H(x,1) = x_0$ para todo $x \in X$. Entonces, para cualquier aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$, la aplicación $G = f \circ H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ dada por $G(x,t) = f(H(x,t))$ será una homotopía entre f y una constante, pues $G(x,0) = f(x)$ y $G(x,1) = f(x_0)$ para todo $x \in X$.

Supongamos ahora que Y es contráctil, y sea

$$K : Y \times [0,1] \longrightarrow Y$$

una homotopía entre id_Y y una constante, que sabemos que existe por la Proposición 1.12. Es decir, $K(y,0) = y$ para todo $y \in Y$ y $K(y,1) = y_0$ para todo $y \in Y$. Entonces, la aplicación $L : X \times [0,1] \longrightarrow Y$, definida por $L(x,t) = K(f(x),t)$ es una homotopía entre $f : X \longrightarrow Y$ y una aplicación constante, pues $L(x,0) = f(x)$ y $L(x,1) = y_0$ para todo $x \in X$.

□

Proposición 1.15. *Si Y es contráctil y X es cualquier otro espacio topológico, entonces cualquier par de aplicaciones continuas $f, g : X \longrightarrow Y$ son homotópicas.*

Demostración. Sabemos, por la Proposición 1.12, que Y es contráctil si, y solo si, existe $y_0 \in Y$ tal que $c_{y_0} \simeq id_Y$. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas.

Podemos escribir f de la siguiente manera: $f = id_Y \circ f$, de donde, usando que $id_Y \simeq c_{y_0}$, obtenemos que $f = id_Y \circ f \simeq c_{y_0} \circ f = c_{y_0}$, en virtud del Lema 1.6.

Análogamente, $g = id_Y \circ g \simeq c_{y_0} \circ g = c_{y_0}$.

Juntando ambas, obtenemos que $f \simeq g$, tal y como queríamos probar.

$\square$

Vamos a ver una serie de ejemplos de aplicación de estas ideas:

Ejemplo 1.16. *Un subconjunto X de un espacio normado E se dice que es* ***estrellado respecto de un punto p*** *si para todo $x \in X$, el segmento de recta que une p con x, $[p, x]$, está contenido en X.*

Si $X \subset E$ tiene esta propiedad, entonces es contráctil, pues la aplicación

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow X,$$

dada por $H(x, t) = (1 - t)x + tp$ es una homotopía entre id_X y la aplicación constante c_p, que lleva todo punto de x al punto p.

Ejemplo 1.17. *Un subconjunto X de un espacio normado E se dice que es* ***convexo*** *si para todo $x, y \in X$, el segmento de recta que une x con y, $[x, y]$, está contenido en X.*

Si $X \subset E$ tiene esta propiedad, entonces es contráctil, pues en particular es estrellado respecto de todo punto $x \in X$.

1.3. El grupo fundamental

Observemos que el conjunto de las clases de homotopía de caminos en un espacio X no es un grupo con la operación $*$ porque el producto de dos clases de homotopía de caminos no está siempre definido.

Para salvar esta situación, supongamos que cogemos un punto x_0 de X y nos restringimos a aquellos caminos que comienzan y acaban en x_0. Entonces, el conjunto de sus clases de homotopía de caminos sí es un grupo con la operación $*$. Este será denominado *grupo fundamental* de X.

En esta sección estudiaremos el grupo fundamental y algunas de sus propiedades más relevantes.

Definición 1.18. *Sea X un espacio topológico y sea x_0 un punto de X. Un camino en X que comienza y acaba en x_0 se denomina **lazo** basado en x_0. El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociados a lazos basados en x_0, con la operación $*$, se denomina **grupo fundamental** de X relativo al **punto base** x_0. Se denota por $\pi_1(X, x_0)$.*

Por el Teorema 1.8, tenemos que la operación $*$, restringida a este conjunto, satisface los axiomas de grupo. Dados dos lazos f y g basados en x_0, el producto $f * g$ siempre está definido y es a su vez un lazo basado en x_0.

Para un lazo f basado en x_0, se tiene que el elemento neutro para $*$ es $[e_{x_0}]$, mientras que el inverso de $[f]$ es $[\bar{f}]$.

Ejemplo 1.19. *Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo n-dimensional. Entonces $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ es el grupo trivial para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ya que si f es un lazo basado en x_0, la homotopía por rectas es una homotopía de caminos entre f y el camino constantemente igual a x_0. Más en general, si X es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial para todo $x_0 \in X$.*

Llegados a este punto, es natural preguntarse sobre la dependencia del punto base x_0 escogido. Tratemos esta cuestión.

Definición 1.20. *Sea α un camino en X de x_0 a x_1. Definimos la aplicación*

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

por la ecuación $\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]$.

La aplicación $\hat{\alpha}$ está bien definida ya que la operación $*$ está bien definida. Además, si f es un lazo basado en x_0, entonces $\bar{\alpha} * (f * \alpha)$ es un lazo basado en x_1, por lo que $\hat{\alpha}$ lleva elementos de $\pi_1(X, x_0)$ a elementos de $\pi_1(X, x_1)$, tal y como buscamos.

Teorema 1.21. *La aplicación $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Veamos en primer lugar que es un homomorfismo de grupos:

$$\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) = ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] = \hat{\alpha}([f] * [g])$$

Veamos ahora que es un isomorfismo: Sea $\beta := \bar{\alpha}$ el camino inverso de α y sea h un lazo basado en x_1. Se tiene entonces que:

$\hat{\beta}([h]) = [\bar{\beta}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]$, por lo que tenemos que $\hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) = [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [h]$

Análogamente, tenemos que $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [f]$ para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, por lo que hemos probado que $\hat{\beta}$ es el inverso de $\hat{\alpha}$, y por tanto, $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo de grupos.

□

De esto obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.22. *Si X es conexo por caminos, y x_0 y x_1 son dos puntos de X, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.*

Demostración. Como X es conexo por caminos, existe $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ camino en X uniendo x_0 y x_1. Entonces $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo de grupos por el teorema anterior.

□

Definición 1.23. *Un espacio X se dice que es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial para algún $x_0 \in X$, y por tanto, para todo $x_0 \in X$. En este caso escribiremos $\pi_1(X, x_0) = 0$.*

Lema 1.24. *En un espacio simplemente conexo X, dos caminos cualesquiera con los mismos puntos inicial y final son homotópicos por caminos.*

Demostración. Sean α y β dos caminos de x_0 a x_1. Entonces, el producto $\alpha * \bar{\beta}$ está definido y es un lazo en X basado en x_0. Como X es simplemente conexo, este lazo es homotópico por caminos al lazo constante en x_0, pues $\pi_1(X, x_0)$ consta de un solo elemento. Así, tenemos que $[\alpha] = [\alpha*(\bar{\beta}*\beta)] = [\alpha*\bar{\beta}]*[\beta] = [e_{x_0}]*[\beta] = [\beta]$, por lo que $[\alpha] = [\beta]$.

□

Nuestro objetivo es ahora probar que el grupo fundamental es un invariante topológico del espacio X. Para ello, introducimos el siguiente concepto:

Definición 1.25. *Sea $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ una aplicación continua (es decir, $h : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua que lleva el punto $x_0 \in X$ al punto $y_0 \in Y$). Definimos*

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

*por la ecuación $h_*([f]) = [h \circ f]$. La aplicación h_* se denomina **homomorfismo inducido por h**, relativo al punto base x_0.*

Veamos varias cosas acerca de esta definición:

- Si f es un lazo basado en x_0, entonces $h \circ f$ es un lazo basado en y_0 pues $h(f(0)) = h(x_0) = y_0$ y $h(f(1)) = h(x_0) = y_0$.
- La aplicación h_* está bien definida ya que si F es una homotopía de caminos entre los caminos f y g, entonces $h \circ F$ es una homotopía de caminos entre los caminos $h \circ f$ y $h \circ g$. Es decir, $h_*([f]) = h_*([g])$.
- Es un homomorfismo de grupos pues $(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g)$.

Observemos que el homomorfismo h_* depende, además de h, de la elección del punto base x_0. En el caso en el que queramos resaltar el punto base x_0 elegido, escribiremos $(h_{x_0})_*$.

Este homomorfismo inducido tiene dos propiedades muy importantes, llamadas "propiedades funtoriales". Veamos:

Teorema 1.26. *Si $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ y $k : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ son continuas, entonces $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Si $i : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ es la aplicación identidad, entonces i_* es el homomorfismo identidad.*

Demostración. Por definición, se tiene que $(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f]$ y, por otro lado, $(k_* \circ h_*)([f]) = k_*(h_*([f])) = k_*([h \circ f]) = [k \circ (h \circ f)]$, y ambos coinciden.

Por otro lado, $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$.

□

Corolario 1.27. *Si $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo entre X e Y, entonces h_* es un isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$.*

Demostración. Como $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo, existe $k : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ inversa de h. Entones se tiene que $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$, donde i es la aplicación identidad de (X, x_0), y por otro lado $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$, donde j es la aplicación identidad de (Y, y_0). Como i_* y j_* son los homomorfismos identidad de los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$, respectivamente, se tiene que k_* es la inversa de h_*, por lo que h_* es un isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$.

□

Capítulo 2

Grupo fundamental de la circunferencia

En este capítulo vamos a calcular el grupo fundamental de la circunferencia, lo cual tendrá posteriormente numerosas aplicaciones. Para ello, vamos a hacer uso de la aplicación exponencial $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $e(x) = e^{i2\pi x} = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$, que satisface las siguientes propiedades:

- Es ***continua***.
- Es ***sobreyectiva***.
- Es una ***aplicación recubridora***, es decir, para todo punto $p_0 \in \mathbb{S}^1$ existe $V = V(p_0)$ entorno de p_0 en $\mathbb{S}^1$ de tal manera que $e^{-1}(V) = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{Z}} I_n$, donde cada I_n es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ tal que $e|_{I_n} : I_n \longrightarrow V$ es un homeomorfismo y por $\dot{\bigcup}$ entendemos que es una unión disjunta. Veamos esto:

  Tomemos $p_0 \in \mathbb{S}^1$ y $V(p_0) = \mathbb{S}^1 \setminus \{-p_0\}$. Sea θ_0 la única antiimagen de p_0 en el intervalo $[0, 1)$ y sea $I_0 = (\theta_0 - \frac{1}{2}, \theta_0 + \frac{1}{2})$. Se cumple entonces que $e|_{I_0} : I_0 \longrightarrow V$ es una biyección continua y abierta, por lo que es un homeomorfismo.

  Por otro lado, si tomamos $\theta_k = \theta_0 + k$, con $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $e^{-1}(\{p_0\}) = \{\theta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, por lo que $e^{-1}(V) = \dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ con $I_k = (\theta_k - \frac{1}{2}, \theta_k + \frac{1}{2})$.

Introducimos ahora una serie de resultados interesantes para el cálculo del grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$.

Definición 2.1. *Sea $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $e(x) = e^{i2\pi x} = (cos(2\pi x), sen(2\pi x))$ y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{S}^1$, con X un espacio topológico, una aplicación continua. Un levantamiento de f vía e es una aplicación continua $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $e \circ \tilde{f} = f$.*

Lema 2.2. ***(Lema del número de Lebesgue)*** *Si (X, d) es un espacio métrico compacto y Ω es un cubrimiento abierto de X, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $A \subset X$ con $diam(A) < \delta$, existe $U \in \Omega$ tal que $A \subset U$.*

Lema 2.3. *Si $\alpha : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es una función continua y $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto tal que $e(x_0) = \alpha(0)$, entonces existe un único levantamiento $\tilde{\alpha} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $e(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t)$ para todo $t \in [0, 1]$ y $\tilde{\alpha}(0) = x_0$.*

Demostración. Veamos la existencia y unicidad de esta función continua:

-Unicidad: Supongamos que $\tilde{\alpha_1}$ y $\tilde{\alpha_2}$ son dos levantamientos que tienen la misma condición inicial $\tilde{\alpha_1}(0) = \tilde{\alpha_2}(0) = x_0$. Además, tendremos también que $e(\tilde{\alpha_1}(s)) = \alpha(s) = e(\tilde{\alpha_2}(s))$ para cualquier $s \in [0, 1]$, o lo que es lo mismo, $(\cos(2\pi\tilde{\alpha_1}(s)), \mathrm{sen}(2\pi\tilde{\alpha_1}(s))) = (\cos(2\pi\tilde{\alpha_2}(s)), \mathrm{sen}(2\pi\tilde{\alpha_2}(s)))$, luego existirá $n(s) \in \mathbb{Z}$ tal que $2\pi\tilde{\alpha_2}(s) - 2\pi\tilde{\alpha_1}(s) = 2\pi n(s)$. Así, la aplicación continua $n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $n(s) = \tilde{\alpha_2}(s) - \tilde{\alpha_1}(s)$ toma solo valores enteros, y $[0, 1]$ es conexo, por lo que es constante. Por lo tanto, como $n(0) = \tilde{\alpha_2}(0) - \tilde{\alpha_1}(0) = x_0 - x_0 = 0$, se tiene que $n(s) = 0$ para todo $s \in [0, 1]$, luego $\tilde{\alpha_1}(s) = \tilde{\alpha_2}(s)$ para todo $s \in [0, 1]$, por lo que $\tilde{\alpha_1} = \tilde{\alpha_2}$.

-Existencia: Distinguiremos dos casos:

- *Caso fácil:* Supongamos que $\mathrm{Im}(\alpha)$ omite al menos un punto de $\mathbb{S}^1$, es decir, α no es sobreyectiva, por lo que existe $p \in \mathbb{S}^1$ tal que $\alpha(s) \neq p$ para todo $s \in [0, 1]$. Tomamos entonces $\mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$, de modo que $e^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{p\}) = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{Z}} I_n$, siendo $I_n = (\varphi_n - \frac{1}{2}, \varphi_n + \frac{1}{2})$ con $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = e^{-1}(\{-p\})$.

  Dada entonces una condición inicial $\tilde{\alpha}(0) = x_0$, existe un único $n_0 \in \mathbb{Z}$ de manera que $x_0 \in I_{n_0}$. Definimos entonces $\tilde{\alpha} = (e|_{I_{n_0}})^{-1} \circ \alpha$, que cumple la condición inicial $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ y $e|_{I_{n_0}} \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, luego ese es el levantamiento buscado, lo que demuestra la existencia en este caso particular.

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\tilde{\alpha}"'] & \mathbb{S}^1 \setminus \{p\} \arrow[d, "(e|_{I_{n_0}})^{-1}"] \\ & I_{n_0} \end{tikzcd}$$

- *Caso general:* Si tomamos $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$ y $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}$, se tiene que $\mathbb{S}^1 = U \cup V$, por lo que $[0,1] = \alpha^{-1}(\mathbb{S}^1) = \alpha^{-1}(U \cup V) = \alpha^{-1}(U) \cup \alpha^{-1}(V)$. Utilizando ahora el Lema 2.2, si tomamos $X = [0,1] = \alpha^{-1}(U) \cup \alpha^{-1}(V)$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $J \subset [0,1]$ con $\mathrm{diam}(J) < \delta$, se tiene que $J \subset \alpha^{-1}(U)$ ó $J \subset \alpha^{-1}(V)$, o lo que es lo mismo, $\alpha(J) \subset U$ ó $\alpha(J) \subset V$.

  Tomamos ahora n tal que $0 < \frac{1}{n} < \delta$ y sea $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$ una partición de $[0,1]$, con $s_i = \frac{i}{n}$ $\forall i = 0, \ldots, n$.

  Como $\mathrm{diam}([s_0, s_1]) = \frac{1}{n} < \delta$, usando de nuevo el Lema 2.2, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha([s_0, s_1]) \subset U = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$.

  Ahora, como $e^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{Z}}(k, k+1)$ y $\alpha(0) = x_0 \in U$, existe un único $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0 \in J_0 := (k_0, k_0 + 1)$.

  Así, tomo $\tilde{\alpha}|_{[s_0,s_1]}$ como $\tilde{\alpha}|_{[s_0,s_1]} = (e|_{J_0})^{-1} \circ \alpha|_{[s_0,s_1]} : [s_0, s_1] \longrightarrow J_0$.

  Tomamos ahora $x_1 = \alpha(s_1)$ como valor inicial y podemos suponer que $\alpha([s_1, s_2]) \subset V$, pues si $\alpha([s_1, s_2]) \subset U$, usando el razonamiento anterior habríamos definido $\alpha|_{[s_0,s_2]}$.

  Como $e^{-1}(V) = \dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{Z}}(\dfrac{1}{2} + k, \dfrac{3}{2} + k)$, tenemos que existe un único $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 \in J_1 := (\frac{1}{2} + k_1, \frac{3}{2} + k_1)$.

  Así, tomo $\tilde{\alpha}|_{[s_1,s_2]}$ como $\tilde{\alpha}|_{[s_1,s_2]} = (e|_{J_1})^{-1} \circ \alpha|_{[s_1,s_2]} : [s_1, s_2] \longrightarrow J_1$.

  Continuando con este proceso, en un número finito de pasos tendremos definida $\tilde{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\square$

Lema 2.4. *Si $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua y $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto tal que $e(x_0) = F(0,0)$, entonces existe un único levantamiento de F a una aplicación continua $\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{F}(0,0) = x_0$. Si F es una homotopía de caminos, entonces $\tilde{F}$ también es una homotopía de caminos.*

Demostración. Distinguiremos dos casos:

- *Caso fácil:* Supongamos que $\mathrm{Im}(F)$ omite al menos un punto de $\mathbb{S}^1$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $F([0,1] \times [0,1]) \subset \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$.

  Se tiene que $e^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}) = \cup_{n\in\mathbb{Z}}(n, n+1)$. Como $F(0,0) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$ y x_0 es una antiimagen de $F(0,0)$, existe un único n_0 tal que $x_0 \in J_0 := (n_0, n_0 + 1)$.

  Tomamos entonces $\tilde{F} = (e|_{J_0})^{-1} \circ F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow J_0$, que cumple lo que buscamos.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]\times[0,1]} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\tilde{F}"'] & \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\} \arrow[d, "(e|_{J_0})^{-1}"] \\
& J_0
\end{tikzcd}$$

- *Caso general:* Supongamos que tenemos $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ una homotopía. Cubriendo $\mathbb{S}^1$ con los abiertos $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$ y $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}$, obtenemos un número $\delta > 0$ tal que cualquier subconjunto de $[0,1] \times [0,1]$ de diámetro menor que δ es llevado por F dentro de U o V.

Dividimos el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ en una cuadrícula $n \times n$, donde n es tal que $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, por lo que cada cuadrado tiene diámetro menor que δ. De esta manera, cada cuadrado es llevado por F dentro de U o V.

Si $\tilde{F}(0,0) = x_0$, entonces esto determina una componente de $e^{-1}(U)$ o $e^{-1}(V)$, y de esta manera, un homeomorfismo entre la componente y U o V. Por este homeomorfismo, definimos $\tilde{F}$ en el cuadrado $[0, \frac{1}{n}] \times [0, \frac{1}{n}]$. En particular, esto define $\tilde{F}(0, \frac{1}{n})$ y, por el mismo proceso, podemos definir $\tilde{F}$ en el cuadrado $[0, \frac{1}{n}] \times [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$. Sin embargo, esto significa definir $\tilde{F}$ sobre el camino $[0, \frac{1}{n}] \times \frac{1}{n}$, basado en su valor en $(0, \frac{1}{n})$. El problema es que ya habíamos definido $\tilde{F}$ en $[0, \frac{1}{n}] \times \frac{1}{n}$ cuando la definimos en el cuadrado $[0, \frac{1}{n}] \times [0, \frac{1}{n}]$, por lo que tenemos dos definiciones que pueden estar en contradicción. Afortunadamente, la unicidad en el levantamiento de caminos asegura que esto no puede ocurrir, pues si estos dos caminos coinciden en $(0, \frac{1}{n})$, entonces coinciden en todo punto. De esta manera, podemos definir $\tilde{F}$ en $[0, \frac{1}{n}] \times [0, \frac{2}{n}]$ sin problema.

De forma análoga, podemos definir $\tilde{F}$ en $[0, \frac{1}{n}] \times [0, \frac{3}{n}]$, y sucesivamente, en $[0, \frac{1}{n}] \times [0,1]$. Ahora usamos la definición de $\tilde{F}(\frac{1}{n}, 0)$ para definir $\tilde{F}$ en el cuadrado $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \times [0, \frac{1}{n}]$. Esto implica redefinir $\tilde{F}$ en el borde $\frac{1}{n} \times [0, \frac{1}{n}]$ pero, de nuevo, la unicidad del levantamiento de caminos asegura que está definición es compatible con la anterior. Después definimos $\tilde{F}$ en el cuadrado $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \times [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, basado en su valor en $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Esto implica redefinir $\tilde{F}$ en los bordes $\frac{1}{n} \times [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ y $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \times \frac{1}{n}$. Sin embargo, la unicidad del levantamiento de caminos puede ser usada en ambos casos para demostrar que la nueva definición es compatible con la anterior. Así, de una manera similar, podemos definir $\tilde{F}$ en todo el cuadrado $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \times [0,1]$ y, continuando de manera similar, en $[0,1] \times [0,1]$.

Como antes, este levantamiento es único, ya que si $\bar{F}$ es un levantamiento diferente, entonces $\bar{F}(x) - \tilde{F}(x)$ es un número entero para todo $x \in [0,1] \times [0,1]$. Como $\tilde{F}$ y $\bar{F}$ son ambas continuas, este entero debería ser constante, o lo que es lo mismo, independiente de x. Si $\bar{F}(0,0) = \tilde{F}(0,0)$, entonces este entero debe ser 0, y equivalentemente, $\bar{F} = \tilde{F}$.

Supongamos ahora que F es una homotopía de caminos y veamos que $\tilde{F}$ es también una homotopía de caminos. La aplicación F lleva todo el lado izquierdo $0 \times [0,1]$ de $[0,1] \times [0,1]$ al punto $F(0,0)$. Como $\tilde{F}$ es un levantamiento de F, lleva todo este lado sobre el conjunto $e^{-1}(F(0,0))$. Pero este conjunto tiene la topología discreta como subespacio de $\mathbb{R}$. Dado que $0 \times [0,1]$ es conexo y $\tilde{F}$ es continua, $\tilde{F}(0 \times [0,1])$ es conexo y, por lo tanto, debe ser igual a un conjunto unipuntual. Análogamente, $\tilde{F}(1 \times [0,1])$ debe ser también un conjunto unipuntual. Así, $\tilde{F}$ es una homotopía de caminos.

$\square$

Observación 2.5. *El levantamiento de un lazo en $\mathbb{S}^1$ **no** tiene por qué ser un lazo en $\mathbb{R}$. Veamos:*

Sea $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ un lazo basado en $(1,0) \in \mathbb{S}^1$, es decir, $\alpha(0) = \alpha(1) = (1,0)$. Sea $x_0 = 0$, que cumple $e(x_0) = e(0) = (1,0) = \alpha(0)$. Entonces, fijo $0 \in \mathbb{R}$ como antiimagen de $(1,0) = 1 \in \mathbb{S}^1$, existe un único $\tilde{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = 0$ y $e(\tilde{\alpha}(s)) = e^{i2\pi\tilde{\alpha}(s)} = \alpha(s)$. Pero, ¿cuánto vale $\tilde{\alpha}(1)$?

Se tiene que $e^{i2\pi\tilde{\alpha}(1)} = \alpha(1) = \alpha(0) = 1 \in \mathbb{S}^1$, por lo que $\tilde{\alpha}(1)$ es una antiimagen de $1 \in \mathbb{S}^1$, y así, $\tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$. De esta manera:

- *Si $\tilde{\alpha}(1) = 0$, entonces $\tilde{\alpha}$ será un lazo en $\mathbb{R}$.*
- *Si $\tilde{\alpha}(1) \neq 0$, entonces $\tilde{\alpha}$ **no** será un lazo en $\mathbb{R}$.*

Definición 2.6. *Sea $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ un lazo en $\mathbb{S}^1$. Se define el grado de α como $deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)$, siendo $\tilde{\alpha}$ cualquier levantamiento de α a través de la aplicación exponencial $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, dada por $e(x) = e^{i2\pi x} = (cos(2\pi x), sen(2\pi x))$.*

Propiedades 2.7. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

- ***Bien definido**, es decir, no depende del levantamiento $\tilde{\alpha}$ elegido. Veamos:*

  Sean θ_0, $\theta_1 \in e^{-1}(\alpha(0))$. Sea $\tilde{\alpha}$ el único levantamiento de α a través de la aplicación exponencial con condición inicial θ_0 y $\hat{\alpha}$ el único levantamiento de α a través de la aplicación exponencial con condición inicial θ_1.

Se tiene que $e(\tilde{\alpha}(s)) = \alpha(s) = e(\hat{\alpha}(s))$ *para todo* $s \in [0,1]$*, y además,* $\tilde{\alpha}(0) = \theta_0$ *y* $\hat{\alpha}(0) = \theta_1$.

De esto deducimos que $\tilde{\alpha}(s) - \hat{\alpha}(s) \in \mathbb{Z}$ *para todo* $s \in [0,1]$*. Consideremos la función continua* $\tilde{\alpha} - \hat{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$*, dada por* $(\tilde{\alpha} - \hat{\alpha})(s) = \tilde{\alpha}(s) - \hat{\alpha}(s) \in \mathbb{Z}$*, por lo que esta función solo toma valores enteros, y además,* $[0,1]$ *es conexo, por lo que esta función es contante.*

Así, $\tilde{\alpha}(s) - \hat{\alpha}(s) = m \in \mathbb{Z}$ *para todo* $s \in [0,1]$*. Ahora tenemos que* $\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = (\hat{\alpha}(1) + m) - (\hat{\alpha}(0) + m) = \hat{\alpha}(1) - \hat{\alpha}(0)$*, tal y como queríamos probar.*

- ***Es un número entero***. *Veamos:*

  Fijemos $x_0 \in e^{-1}(\alpha(0))$ *y consideremos* $\tilde{\alpha}$ *el levantamiento de* α *a través de la aplicación exponencial determinado por* x_0*. Se tiene entonces que* $e(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = \alpha(0) = e(\tilde{\alpha}(0)) = e(x_0)$*. Por lo tanto,* $\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.8. *Si* $\alpha \simeq \beta$ *como lazos en* $\mathbb{S}^1$*, entonces* $deg(\alpha) = deg(\beta)$*.*

Demostración. Si $\alpha \simeq \beta$ como lazos en $\mathbb{S}^1$, existe $H : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ aplicación continua tal que $H(s,0) = \alpha(s)$, $H(s,1) = \beta(s)$ para todo $s \in [0,1]$ y $H(0,t) = H(1,t)$ para todo $t \in [0,1]$, es decir, la función $H_t : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $H_t(s) := H(s,t)$ es un lazo para todo $t \in [0,1]$.

Sea $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de H a través de la aplicación exponencial, por lo que se tiene que $H(s,t) = e(\tilde{H}(s,t))$, y sean $\tilde{\alpha}(s) := \tilde{H}(s,0)$, $\tilde{\beta}(s) := \tilde{H}(s,1)$ levantamientos de $H(s,0) = \alpha(s)$ y $H(s,1) = \beta(s)$ respectivamente. Se tiene entonces que:

- $\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = \tilde{H}(1,0) - \tilde{H}(0,0) = D(0)$
- $\deg(\beta) = \tilde{\beta}(1) - \tilde{\beta}(0) = \tilde{H}(1,1) - \tilde{H}(0,1) = D(1)$

donde $D : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por $D(t) = \tilde{H}(1,t) - \tilde{H}(0,t)$, que es continua.

Por otro lado se tiene que $e(\tilde{H}(1,t)) = H(1,t) = H(0,t) = e(\tilde{H}(0,t))$, por lo que $\tilde{H}(1,t) - \tilde{H}(0,t) \in \mathbb{Z}$ para todo $t \in [0,1]$, y así D es constante, pues $[0,1]$ es conexo.

Finalmente, $\deg(\alpha) = D(0) = D(1) = \deg(\beta)$.

$\square$

Así, podemos definir $\deg([\alpha]) = \deg(\alpha)$ para todo $[\alpha] \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$, pues si $[\alpha] = [\beta]$ se tiene que $\deg([\alpha]) = \deg(\alpha) = \deg(\beta) = \deg([\beta])$, por lo que es una buena definición.

Podemos dar ya el resultado deseado.

Teorema 2.9. *El grupo fundamental de la circunferencia es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Consideremos la aplicación $deg : \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $deg([\alpha]) = deg(\alpha)$. Veamos que es un isomorfismo de grupos:

- ***Homomorfismo:*** Tenemos que ver que $deg([\alpha] * [\beta]) = deg([\alpha * \beta]) = deg([\alpha]) + deg([\beta])$, o lo que es lo mismo, $deg(\alpha * \beta) = deg(\alpha) + deg(\beta)$.

  Sean $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ levantamientos para α y β respectivamente, con $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$. Entonces se tiene que $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede definir, y es un levantamiento para $\alpha * \beta$. Así, $deg(\alpha * \beta) = (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta})(1) - (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta})(0) = \tilde{\beta}(1) - \tilde{\alpha}(0) = (\tilde{\beta}(1) - \tilde{\beta}(0)) + (\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)) = deg(\alpha) + deg(\beta)$.

- ***Inyectivo:*** Para ello, tenemos que ver que si $deg(\alpha) = deg(\beta)$ entonces $\alpha \simeq \beta$.

  Sea $n = deg(\alpha) = deg(\beta)$. Consideremos los levantamientos $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ para α y β respectivamente. Por hipótesis, se tiene que $deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(1) - \tilde{\beta}(0) = deg(\beta)$. Definimos una homotopía $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ entre $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ por $H(s,t) = (1-t)\tilde{\alpha}(s) + t\tilde{\beta}(s)$. Entonces, para todo $t \in [0,1]$, se tiene que $H(1,t) - H(0,t) = (1-t)(\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)) + t(\tilde{\beta}(1) - \tilde{\beta}(0)) = (1-t)deg(\alpha) + tdeg(\beta) = (1-t)n + tn = n$. Tomando $K = e \circ H$, donde $e : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación exponencial, obtenemos una aplicación continua $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ con $K(s,0) = e(H(s,0)) = e(\tilde{\alpha}(s)) = \alpha(s)$, $K(s,1) = e(H(s,1)) = e(\tilde{\beta}(s)) = \beta(s)$ y $K(0,t) = K(1,t)$ para todo s, t $\in [0,1]$. Se sigue que K es una homotopía entre α y β.

  Más aún, tenemos que $\alpha \simeq \beta$ cuando α y β tienen el mismo punto base, pues si esto se cumple, tomamos $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$, por lo que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$, y entonces $\alpha \simeq \beta$. Así, deg es inyectivo.

- ***Suprayectivo:*** Sean $n \in \mathbb{Z}$ y veamos que existe $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ lazo en $\mathbb{S}^1$ tal que $deg([\alpha]) = deg(\alpha) = n$.

  Tomemos $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dado por $\alpha(s) = (\cos(2\pi ns), \operatorname{sen}(2\pi ns))$ y veamos que se cumple lo anterior: Sea $\tilde{\alpha}$ un levantamiento cualquiera de α a través de la aplicación exponencial, el cual ha de ser de la forma $\tilde{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}_k(s) = ns + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, pues ha de verificarse que $\alpha(s) = e(\tilde{\alpha}(s))$, o lo que es lo mismo, $(\cos(2\pi ns), \mathrm{sen}(2\pi ns)) = (\cos(2\pi\tilde{\alpha}(s)), \mathrm{sen}(2\pi\tilde{\alpha}(s)))$, de donde se deduce que $2\pi\tilde{\alpha}(s) - 2\pi ns = 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$, por lo que $\tilde{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}_k(s) = ns+k$. Así, tenemos que $deg([\alpha]) = deg(\alpha) = \tilde{\alpha}_k(1)-\tilde{\alpha}_k(0) = (n+k)-k = n$, tal y como se quería probar.

$\square$

Capítulo 3

Grupo fundamental de las esferas n-dimensionales

Vamos a demostrar en este capítulo que la esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa para $n \geq 2$. El resultado clave que necesitamos lo da el siguiente teorema, conocido como el *Teorema de Van Kampen* (en su versión más sencilla).

Teorema 3.1. *Supongamos que $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos de X. Supongamos que $U \cap V$ es conexo por caminos y que $x_0 \in U \cap V$. Sean i y j las aplicaciones inclusión de U y V, respectivamente, en X. Entonces las imágenes de los homomorfismos inducidos*

$$i_* : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

y

$$j_* : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

generan $\pi_1(X, x_0)$.

Observación 3.2. *Las aplicaciones $i_* : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ y $j_* : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ vienen dadas por $i_*([\alpha]_U) = [i \circ \alpha] = [\alpha]$ y $j_*([\alpha]_V) = [i \circ \alpha] = [\alpha]$, donde $[\alpha]_U$ y $[\alpha]_V$ denotan la clase de equivalencia de α en U y en V respectivamente, pues esta **no** tiene por qué coincidir con la clase de equivalencia de α visto como lazo en X. Es decir, $[\alpha]_U = \{\beta : [0,1] \longrightarrow U : \beta(0) = \beta(1) = x_0 \text{ y } \beta \simeq \alpha \text{ en } U\}$. Análogamente, $[\alpha]_V = \{\beta : [0,1] \longrightarrow V : \beta(0) = \beta(1) = x_0 \text{ y } \beta \simeq \alpha \text{ en } V\}$.*

Este teorema establece que, dado un lazo α en X basado en x_0, este es homotópico por caminos a un producto de la forma $(g_1 * (g_2 * (\cdots * g_n)))$, donde cada g_i es un lazo en X basado en x_0 enteramente contenido en U o en V.

Demostración. Veamos en primer lugar que existe una subdivisión $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ del intervalo $[0,1]$ tal que $\alpha(a_i) \in U \cap V$ y $\alpha([a_{i-1}, a_i])$ está contenido en U o V para cada i.

Utilizando el Lema 2.2, podemos elegir una subdivisión $b_0 < b_1 < \cdots < b_m$ del intervalo $[0,1]$ tal que, para cada i, el conjunto $\alpha([b_{i-1}, b_i])$ esté contenido en U o V. Si $\alpha(b_i) \in U \cap V$ para cada i, entonces ya está. Si no, sea i tal que $\alpha(b_i) \notin U \cap V$. Como cada uno de los conjuntos $\alpha([b_{i-1}, b_i])$ y $\alpha([b_i, b_{i+1}])$ está contenido en U o en V, se tiene que si $\alpha(b_i) \in U$, entonces ambos conjuntos están en U, y si $\alpha(b_i) \in V$, entonces ambos conjuntos están en V, por lo que podemos sustituir b_i y obtener una nueva subdivisión $c_0, \ldots, c_{m-1}$ que sigue satisfaciendo la condición de que $\alpha([c_{i-1}, c_i])$ esté contenido en U o en V para cada i. Así, un número finito de repeticiones de este proceso nos permite conseguir la subdivisión deseada.

Probemos entonces el teorema. Dado $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ un lazo en X basado en x_0, sea $a_0, \ldots, a_n$ la subdivisión construida anteriormente y definamos α_i como $\alpha_i = \alpha|_{[a_{i-1}, a_i]}$ reparametrizado en $[0,1]$. Entonces se tiene que α_i es un camino que está contenido en U o en V, por lo que usando el Teorema 1.9 se tiene que $[\alpha] = [\alpha_1] * [\alpha_2] * \cdots * [\alpha_n]$.

Como $U \cap V$ es conexo por caminos, podemos elegir un camino β_i en $U \cap V$ de x_0 a $\alpha(a_i)$, y además, como $\alpha(a_0) = \alpha(a_n) = x_0$, podemos escoger que β_0 y β_n sean ambos el camino constante en x_0.

Definamos g_i como $g_i = (\beta_{i-1} * \alpha_i) * \bar{\beta}_i$ para cada i. Se tiene que g_i es un lazo en X basado en x_0 cuya imagen está contenida en U o en V, y se cumple que $[g_1] * [g_2] * \cdots * [g_n] = [(\beta_0 * \alpha_1) * \bar{\beta}_1] * [(\beta_1 * \alpha_2) * \bar{\beta}_2] * \cdots * [(\beta_{n-1} * \alpha_n) * \bar{\beta}_n] = [\beta_0] * [\alpha_1] * [\bar{\beta}_1 * \beta_1] * [\alpha_2] * [\bar{\beta}_2 * \beta_2] * \cdots * [\alpha_n] * [\bar{\beta}_n] = [\alpha_1] * [\alpha_2] * \cdots [\alpha_n]$.

□

De esto obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.3. *Supongamos que $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos de X, y que $U \cap V$ es conexo por caminos y no vacío. Si U y V son simplemente conexos entonces X es simplemente conexo.*

Teorema 3.4. *Si $n \geq 2$, $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa.*

Demostración. Si $N = (0, 0, \ldots, 1)$ es el "polo norte"de $\mathbb{S}^n$, sabemos que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ mediante la ***proyección estereográfica***. Análogamente, se tiene que si $S = (0, 0, \ldots, -1)$ es el "polo sur"de $\mathbb{S}^n$, entonces $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ es también homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Sean U y V los conjuntos abiertos $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ y $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Se tiene que $\mathbb{S}^n = U \cup V$, donde U y V son conexos por caminos (pues son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, que lo es) y $U \cap V \neq \emptyset$, por lo que $\mathbb{S}^n$ es conexa por caminos para todo $n \geq 1$.

Sea ahora $n \geq 2$. Los espacios U y V son simplemente conexos, pues son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, que lo es. Se tiene que $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$, que es conexo por caminos, pues es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bajo la proyección estereográfica, y sabemos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo por caminos si $n \geq 2$. Aplicando ahora el corolario anterior se tiene el resultado.

$\square$

Así, hemos demostrado que $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$ para todo $n \geq 2$.

Capítulo 4

Aplicaciones del grupo fundamental de la circunferencia

En este capítulo vamos a dar una serie de aplicaciones del hecho de que $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$.

4.1. Retracciones y puntos fijos

Definición 4.1. *Sea $A \subset X$. Una **retracción** de X en A es una aplicación continua $r : X \longrightarrow A$ tal que $r|_A$ es la aplicación identidad de A. Si existe tal aplicación r, decimos que A es un **retracto** de X.*

Lema 4.2. *Si A es un retracto de X, entonces el homomorfismo de grupos fundamentales inducido por la inclusión $j : A \longrightarrow X$ es inyectivo.*

Demostración. Si $r : X \longrightarrow A$ es una retracción de X en A, se tiene que $r \circ j = 1_A$, por lo que $(r \circ j)_* = r_* \circ j_*$ es la aplicación identidad de $\pi_1(A, a)$, de manera que j_* debe ser inyectiva.

□

Teorema 4.3. ***(Teorema de la no-retracción)*** *No existe una retracción de $\mathbb{B}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ en $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{B}^2$.*

Demostración. Si $\mathbb{S}^1$ fuera un retracto de $\mathbb{B}^2$, entonces el homomorfismo inducido por la inclusión $j : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{B}^2$ debería ser inyectivo por el lema anterior. Pero el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es no trivial (pues es isomorfo a $\mathbb{Z}$), y el grupo fundamental de $\mathbb{B}^2$ es trivial (pues es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^2$), por lo que no puede existir un homomorfismo inyectivo de $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ en $\pi_1(\mathbb{B}^2) = 0$.

□

Lema 4.4. *Sea* $h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ *una aplicación continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *h es homotópicamente nula.*

2. *h se extiende a una aplicación continua $k : \mathbb{B}^2 \longrightarrow X$.*

3. *h_* es el homomorfismo trivial de grupos fundamentales.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Por ser h homotópicamente nula, existe $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \longrightarrow X$ homotopía entre h y una aplicación constante. Sea $\pi : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{B}^2$ la aplicación dada por $\pi(x,t) = (1-t)x$. Se tiene que π es continua, cerrada y sobreyectiva, por lo que es una aplicación cociente, es decir, un subconjunto U de $\mathbb{B}^2$ es abierto en $\mathbb{B}^2$ si, y solo si, $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$. Se tiene que $\pi(\mathbb{S}^1 \times 1) = \{0\}$, y en el resto de puntos es inyectiva. Por otro lado, como H es constante sobre $\mathbb{S}^1 \times 1$, induce, vía la aplicación cociente π, una aplicación continua $k : \mathbb{B}^2 \longrightarrow X$, que es una extensión de h.

(2) $\Rightarrow$ (3). Si $j : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{B}^2$ es la aplicación inclusión, entonces se tiene que $h = k \circ j$. Por tanto, $h_* = (k \circ j)_* = k_* \circ j_*$, donde $j_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{B}^2, b_0)$ es trivial, pues el grupo fundamental de $\mathbb{B}^2$ es trivial. De esto se sigue que h_* es trivial.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación exponencial y sea $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ su restricción al intervalo unidad, es decir, $\alpha(s) = (\cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s))$ para todo $s \in [0,1]$.

Se tiene que $\alpha(0) = \alpha(1) = (1,0)$, por lo que $[\alpha]$ genera $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$, ya que $\deg(\alpha) = 1$ y la aplicación $deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $deg([\alpha]) = \deg(\alpha)$ es un isomorfismo de grupos.

Sea $b_0 = (1,0)$ y sea $x_0 = h(b_0)$. Como h_* es trivial por hipótesis, se tiene que $h_*([\alpha]) = [h \circ \alpha] = 0 = [c_{x_0}]$, donde c_{x_0} es el camino constante en x_0. Por tanto, $f := h \circ \alpha \simeq c_{x_0}$, es decir, f y c_{x_0} son homotópicos como lazos en X. Así, existe $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ aplicación continua tal que $F(s,0) = c_{x_0}(s) = x_0$, $F(s,1) = f(s) = h(\alpha(s))$ y $F_t(s)$ es un lazo basado en x_0 para todo $t \in [0,1]$.

Por otro lado, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]\times[0,1]} \arrow[r, "\alpha\times id"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbb{S}^1\times[0,1] \arrow[d, "H"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

donde podemos identificar $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ con $[0,1]\times[0,1]/\sim$, con $\sim$ la relación de equivalencia en $[0,1]\times[0,1]$ que lleva los puntos de la forma $(0,t)$ a los puntos de la forma $(1,t)$, y los demás los identifica consigo mismos, y $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \longrightarrow X$ es la aplicación continua inducida por F, pues se verifica que si $(s,t) \sim (s',t')$, entonces $F(s,t) = F(s',t')$, pues $F(0,t) = F(1,t)$ para todo $t \in [0,1]$ al ser F homotopía de lazos.

Tenemos pues que H es una homotopía entre h y una aplicación constante, lo que demuestra que h es homotópicamente nula.

□

Corolario 4.5. *Las aplicaciones $j : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ e $i : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, donde j es la inclusión e i es la identidad no son homotópicamente nulas.*

Demostración. La aplicación $r : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $r(x) = \frac{x}{||x||}$ es una retracción de $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ a $\mathbb{S}^1$ pues si $x \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow r(x) = \frac{x}{1} = x$, y r es continua. Así, j_* es inyectiva por el Lema 4.2, y por tanto, no trivial, por lo que j no puede ser homotópicamente nula por el Lema 4.4. Análogamente, i_* es el homomorfismo identidad y, por tanto, no trivial.

□

Definición 4.6. *Un **campo de vectores** sobre una superficie $X \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $x \in X$ un vector $v(x) \in \mathbb{R}^n$. Se dice que v es un campo de vectores tangente a X si, para cada $x \in X$, el vector $v(x)$ es tangente a X en el punto x. A menudo denotaremos el campo de vectores por $(x, v(x))$.*

Teorema 4.7. *Dado un campo de vectores sobre $\mathbb{B}^2$ que no se anule en ningún punto, existe un punto de $\mathbb{S}^1$ donde el campo de vectores apunta directamente hacia el interior y un punto de $\mathbb{S}^1$ donde apunta directamente hacia el exterior.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que no existe ningún punto $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $v(x)$ apunta directamente hacia el interior. Como el campo v no se anula, consideremos la aplicación $v : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ y sea $w = v|_{\mathbb{S}^1}$. Dado que la aplicación w se extiende a una aplicación de $\mathbb{B}^2$ en $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, por el Lema 4.4 se tiene que es homotópicamente nula.

Por otro lado, la aplicación $F : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por

$$F(x,t) = tx + (1-t)w(x)$$

define una homotopía entre la aplicación inclusión $j : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y w, pues $F(x,0) = w(x)$ y $F(x,1) = x = j(x)$. Veamos que efectivamente $F(x,t) \neq 0$. Si $t = 0$ o $t = 1$, es claro que $F(x,t) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Si $F(x,t) = 0$ para algún $t \in (0,1)$, entonces $tx + (1-t)w(x) = 0 \Rightarrow w(x) = -\frac{t}{1-t}x$, o lo que es lo mismo, $w(x)$ es un múltiplo escalar negativo de x, lo que significa que $w(x)$ apunta directamente hacia el interior en x, lo cual es imposible por hipótesis. Por lo tanto, F no se anula en ningún punto (x,t) de $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

De esto deducimos que j es homotópicamente nula, pues w lo es, lo cual entra en contradicción con el lema precedente.

Aplicando ahora este resultado al campo de vectores $(x, -v(x))$, se tiene que v apunta directamente hacia el exterior en algún punto de $\mathbb{S}^1$.

□

Veamos ahora una aplicación muy importante de esto que acabamos de demostrar, pues los teoremas del punto fijo son muy útiles en todos los campos de las matemáticas, pues, por ejemplo, problemas relativos a la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales pueden ser formulados como teoremas del punto fijo.

Teorema 4.8. ***(Teorema del punto fijo de Brouwer para el disco)*** *Si $f : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{B}^2$ es continua, entonces existe un punto $x \in \mathbb{B}^2$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que no existe $x \in \mathbb{B}^2$ tal que $f(x) = x$, y sea $v : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función dada por $v(x) = f(x) - x$. Tenemos pues un campo de vectores $(x, v(x))$ en $\mathbb{B}^2$ que no se anula en ningún punto. Aplicando el teorema anterior, se tiene que existe un punto $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $v(x)$ apunta directamente hacia el exterior. Ahora bien, esto significa que existe un número real positivo a tal que $v(x) = f(x) - x = ax$, de manera que $f(x) = (1+a)x$ se encuentra fuera de $\mathbb{B}^2$, lo cual es imposible.

□

4.2. El teorema fundamental del álgebra

En esta sección vamos a usar el hecho de que $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ para demostrar el famoso *Teorema fundamental del álgebra*. Lo enunciamos a continuación:

Teorema 4.9. ***(Teorema fundamental del álgebra)*** *Una ecuación polinómica*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grado $n > 0$ con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz (real o compleja).

Demostración. Veamos en primer lugar que f_* es inyectivo, donde $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es la aplicación dada por $f(z) = z^n$, con z un número complejo (es decir, consideramos la circunferencia como un subconjunto de los números complejos). Para ello, sea $e_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ el lazo en $\mathbb{S}^1$ dado por $e_0(s) = e^{2\pi is} = (\cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s))$. Se tiene entonces que $f(e_0(s)) = (e^{2\pi is})^n = (\cos(2\pi ns), \operatorname{sen}(2\pi ns))$, que claramente es a su vez un lazo. Este lazo se levanta a los caminos $s \longrightarrow ns$ en el espacio recubridor $\mathbb{R}$, pues $e(ns) = (\cos(2\pi ns), \operatorname{sen}(2\pi ns)) = f(e_0(s))$. Por lo tanto, el lazo $f \circ e_0$ se corresponde con el entero n bajo el isomorfismo $deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$, pues $deg(f \circ e_0) = n1 - n0 = n$, mientras que e_0 se corresponde con el 1, pues $deg(e_0) = 1$. Así, f_* es multiplicar por n en el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$, de manera que, en particular, f_* es inyectiva.

Veamos ahora que la aplicación $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por $g(z) = z^n$ no es homotópicamente nula. Claramente, $g = j \circ f$, donde $j : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es la aplicación inclusión y f es la función definida anteriormente. Así, $g_* = (j \circ f)_* = j_* \circ f_*$, donde f_* es inyectiva y j_* también, pues $\mathbb{S}^1$ es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Por lo tanto, g_* es inyectiva y g no puede ser homotópicamente nula.

Vamos a probar primero un caso particular del teorema, que posteriormente utilizaremos para demostrar el caso general. Supongamos que la ecuación polinómica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

satisface que

$$|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1$$

y veamos que tiene una raíz en $\mathbb{B}^2$.

Supongamos que no tiene tal raíz, y sea $k : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la aplicación dada por $k(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Sea h la restricción de k a $\mathbb{S}^1$. Dado que h se extiende a una aplicación de la bola unidad en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la aplicación h es homotópicamente nula por el Lema 4.4.

Vamos a definir ahora una homotopía F entre h y g, de donde obtendremos una contradicción, pues g no es homotópicamente nula y h sí lo es. Definimos $F : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ por la ecuación $F(z,t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)$. Falta ver que $F(z,t) \neq (0,0)$ para todo $(z,t) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$, pero esto se deduce de que $|F(z,t)| \geq |z^n| - |t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)| \geq 1 - t(|a_{n-1}z^{n-1}| + \cdots + |a_0|) = 1 - t(|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|) > 0$.

Probemos ya el caso general. Dada la ecuación polinómica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

elijamos un número real $c > 0$ y pongamos $x = cy$. Obtenemos entonces la ecuación

$$(cy)^n + a_{n-1}(cy)^{n-1} + \cdots + a_1(cy) + a_0 = 0,$$

y dividiendo por c^n, obtenemos

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{c}y^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{c^{n-1}}x + \frac{a_0}{c^n} = 0.$$

Si esta ecuación tiene la raíz $y = y_0$, entonces la ecuación original tiene una raíz $x_0 = cy_0$. Así, solamente necesitamos tomar c lo suficientemente grande para que

$$|\frac{a_{n-1}}{c}| + |\frac{a_{n-2}}{c^2}| + \cdots + |\frac{a_1}{c^{n-1}}| + |\frac{a_0}{c^n}| < 1$$

y de esta manera poder reducir el caso general al caso particular visto anteriormente.

□

4.3. El teorema de Borsuk-Ulam

Pasamos ahora a enunciar y demostrar el *Teorema de Borsuk-Ulam* para, posteriormente, obtener una bonita y sorprendente consecuencia de este. Para ello, necesitamos antes de una serie de herramientas.

Definición 4.10. *Si x es un punto de $\mathbb{S}^n$, su* ***antípoda*** *es el punto $-x$. Una aplicación $h : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ se dice que* ***conserva antípodas*** *si $h(-x) = -h(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$.*

Teorema 4.11. *Si $h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es continua y conserva antípodas, entonces h no es homotópicamente nula.*

Demostración. Sea $b_0 = (1,0) \in \mathbb{S}^1$ y sea $\rho : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ una rotación de $\mathbb{S}^1$ tal que $\rho(h(b_0)) = b_0$. Dado que ρ conserva antípodas, también lo hará la composición $\rho \circ h$, pues $(\rho \circ h)(-x) = \rho(h(-x)) = \rho(-h(x)) = -\rho(h(x)) = -(\rho \circ h)(x)$. Además, si H fuera una homotopía entre h y una aplicación constante, entonces $\rho \circ H$ sería una homotopía entre $\rho \circ h$ y una aplicación constante. Por lo tanto, es suficiente probar el teorema bajo la hipótesis adicional de que $h(b_0) = b_0$.

Sea $q : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación dada por $q(z) = z^2$, donde z es un número complejo, o lo que es lo mismo, $q(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = (\cos(2\theta), \operatorname{sen}(2\theta))$, donde $z = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$ son sus coordenadas polares. La aplicación q es una aplicación cociente, pues es continua, cerrada y sobreyectiva. La imagen inversa bajo q de cualquier punto de $\mathbb{S}^1$ consiste en dos puntos antípodas z y $-z$ de $\mathbb{S}^1$. Así, como $h(-z) = -h(z)$, se tiene que $q(h(-z)) = q(-h(z)) = q(h(z))$. Por lo tanto, como q es una aplicación cociente, la aplicación $q \circ h$ induce una aplicación continua $k : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $k \circ q = q \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "k"'] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

Observemos que $q(b_0) = h(b_0) = b_0$, por lo que $k(b_0) = b_0$. Además, $h(-b_0) = -b_0$.

Veamos ahora que el homomorfismo k_* de $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$ en sí mismo es no trivial.

Para ello, vamos a ver en primer lugar que la aplicación q es una aplicación recubridora. Sea $w = e^{i2\pi\theta}$ con $\theta \in [0, 1)$ un punto de $\mathbb{S}^1$. Buscamos $z = e^{i2\pi\alpha} \in \mathbb{S}^1$ tal que $q(z) = w$. Para ello ha de verificarse que $q(z) = z^2 = e^{i4\pi\alpha} = e^{i2\pi\theta}$, por lo que $2\alpha = \theta$, de donde obtenemos que $\alpha = \frac{\theta}{2} \in [0, \frac{1}{2})$ ó $\alpha = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$. De esto se sigue que $z_1 = e^{i\pi\theta}$ y $z_2 = e^{i\pi(1+\theta)}$ son las antiimágenes de w por la aplicación q. Así, si $w = e^{i2\pi\theta}$ con $\theta \in [0, 1)$ es un punto de $\mathbb{S}^1$, y si tomamos los conjuntos $U_1 = \{e^{i\pi(\theta+t)} : -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\}$, $U_2 = \{e^{i\pi(\theta+t)} : \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}\}$ y $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{-w\}$, se tiene que $q(U_1) = q(U_2) = V$ y las aplicaciones $q|_{U_1} : U_1 \longrightarrow V$ y $q|_{U_2} : U_2 \longrightarrow V$ son homeomorfismos, por lo que la aplicación q es una aplicación recubridora de dos hojas.

En segundo lugar, tenemos que si $\tilde{f}$ es un camino en $\mathbb{S}^1$ de b_0 a $-b_0$, entonces el lazo $f = q \circ \tilde{f}$ representa un elemento no trivial de $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$, pues $\tilde{f}$ es un levantamiento de f a $\mathbb{S}^1$ que comienza en b_0 y no acaba en b_0.

Sea entonces $\tilde{f}$ un camino en $\mathbb{S}^1$ de b_0 a $-b_0$ y sea f el lazo $q \circ \tilde{f}$. Entonces $k_*[f] = k_*[q \circ \tilde{f}] = [k \circ (q \circ \tilde{f})] = [q \circ (h \circ \tilde{f})]$, que es no trivial pues $h \circ \tilde{f}$ es un camino en $\mathbb{S}^1$ de b_0 a $-b_0$.

Veamos que el homomorfismo h_* es no trivial, de donde se seguirá, por el Lema 4.4, que h no puede ser homotópicamente nula.

Se tiene que el homomorfismo k_* es inyectivo por ser un homomorfismo no trivial de un grupo cíclico infinito en sí mismo. Además, el homomorfismo q_* también es inyectivo, pues este se corresponde con la multiplicación por dos en el grupo de los enteros. Así, $k_* \circ q_*$ es inyectivo, y como $q_* \circ h_* = k_* \circ q_*$, se tiene que h_* debe ser inyectivo.

□

Teorema 4.12. *No existe ninguna aplicación continua $g : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ que conserve antípodas.*

Demostración. Supongamos que existe $g : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ continua y que conserva antípodas. Tomemos $\mathbb{S}^1$ como el ecuador de $\mathbb{S}^2$ y sea h la restricción de g a $\mathbb{S}^1$, que es continua y conserva antípodas. Por el lema precedente, h no es homotópicamente nula. Ahora bien, el hemisferio superior E de $\mathbb{S}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{B}^2$, y g es una extensión continua de h a E, por lo que h es homotópicamente nula debido al Lema 4.4. Contradicción.

□

Teorema 4.13. ***(Teorema de Borsuk-Ulam para** $\mathbb{S}^2$**)*** *Dada una aplicación continua $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, existe un punto x de $\mathbb{S}^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \neq f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$, y sea $g : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación dada por $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$. Se tiene que g es continua y además, $g(-x) = -g(x)$, es decir, g conserva antípodas, lo cual es imposible por el teorema anterior.

□

El teorema de Borsuk-Ulam implica, en particular, que la esfera $\mathbb{S}^2$ no es homeomorfa a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Una curiosa interpretación de este teorema es el hecho de que, en cada momento, existen dos puntos antipodales en la superficie de la Tierra donde la temperatura y la presión atmosférica son iguales.

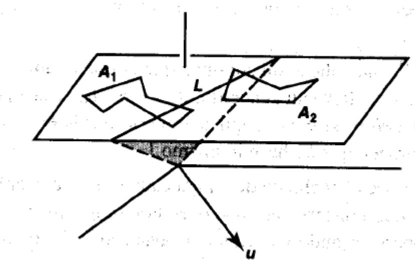
Podemos ya enunciar y demostrar la consecuencia comentada al principio de esta sección.

Teorema 4.14. ***(Teorema de la bisección)*** *Dadas dos regiones poligonales acotadas en $\mathbb{R}^2$, existe una recta en $\mathbb{R}^2$ que bisecciona cada una de ellas.*

Demostración. Tomemos dos regiones poligonales acotadas A_1 y A_2 en el plano $\mathbb{R}^2 \times 1$, y veamos que existe una recta L en este plano que bisecciona cada una de ellas.

Dado un punto $u \in \mathbb{S}^2$, consideremos el plano P en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y tiene a u como vector unitario, que divide a $\mathbb{R}^3$ en dos semiespacios, y sea $f_i(u)$ el área de la porción de A_i que está en el mismo lado de P que el vector u.

Si u es el vector unitario $\mathbf{k}$, es claro que $f_i(u) =$ área A_i, y si $u = -\mathbf{k}$, entonces $f_i(u) = 0$. En otro caso, el plano P interseca al plano $\mathbb{R}^2 \times 1$ en una recta L que divide $\mathbb{R}^2 \times 1$ en dos semiplanos y $f_i(u)$ es el área de la parte de A_i que está en un lado de esta recta.



Si cambiamos u por $-u$, obtenemos el mismo plano P pero los semiespacios cambiados, de manera que $f_i(-u)$ es el área de la parte de A_i que está en el semiespacio determinado por P opuesto al que contiene el vector u. De esto deducimos que $f_i(u) + f_i(-u) =$ área A_i.

Sea ahora la aplicación $F : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(u) = (f_1(u), f_2(u))$. Aplicando el teorema de Borsuk-Ulam, obtenemos un punto u de $\mathbb{S}^2$ para el cual se verifica $F(u) = F(-u)$. Así, $f_i(u) = f_i(-u)$ para $i = 1, 2$, de donde se tiene que $f_i(u) = \frac{1}{2}$área A_i, tal y como queríamos probar.

$\square$

Como podemos observar, la existencia de esta recta no es tan obvia a simple vista, y hemos necesitado usar el teorema de Borsuk-Ulam para poder afirmar que existe.

En el caso en que solo tenemos una región poligonal acotada A en el plano $\mathbb{R}^2$, la existencia de la recta que bisecciona A es inmediata. Para ello, tomemos la recta horizontal $y = c$, y sea $f(c)$ el área de la parte de A que está por debajo de esta recta. Claramente f es una función continua en c, por lo que usando el teorema de los valores intermedios, encontramos un valor c_0 tal que $f(c_0)$ es exactamente igual a la mitad del área de A.

4.4. El teorema de la bola peluda

El teorema que da nombre a esta sección nos dice que ningún campo de vectores tangente sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ puede ser distinto de cero en todo punto. Este teorema se debe a Poincaré y es válido para cualquier esfera de dimensión par, aunque aquí solo veremos este caso particular.

Teorema 4.15. *Todo campo de vectores $v : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tangente sobre la esfera tiene un punto sobre el que se anula.*

Demostración. Supongamos que $v : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de vectores tangente sobre $\mathbb{S}^2$ que no se anula en ningún punto. Que el campo v sea tangente a $\mathbb{S}^2$ significa que $v(p)$ es tangente a $\mathbb{S}^2$ en p para todo punto p de $\mathbb{S}^2$, o lo que es lo mismo, $\langle v(p), p\rangle = 0$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$. Expresamos v en componentes como

$$v(p) = (v_1(p), v_2(p), v_3(p)).$$

En lo que sigue, identificaremos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ en $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{B}^2$ con $\mathbb{B}^2 \times \{0\}$ y el ecuador $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ con la circunferencia $\mathbb{S}^1$.

Sea $\pi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección estereográfica desde $N = (0, 0, 1)$, que explícitamente viene dada por

$$\pi_N(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Esta aplicación lleva $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ en $\mathbb{R}^2$ y lleva el hemisferio sur

$$\mathbb{S}^2_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z \leq 0\}$$

homeomórficamente en $\mathbb{B}^2$. Sea $\phi : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2_-$ el homeomorfismo inverso, es decir,

$$\phi(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\right)$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{B}^2$.

Consideremos la aplicación $w : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$w(u, v) = (v_1(\phi(u, v)) + v_3(\phi(u, v))u, v_2(\phi(u, v)) + v_3(\phi(u, v))v)$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{B}^2$. Claramente, w es continua y se tiene que w no se anula en ningún punto. Veamos:

Sea $(u, v) \in \mathbb{B}^2$ tal que $w(u, v) = 0$. Como v es tangente, se tiene que $\langle \phi(u, v), v(\phi(u, v)) \rangle = 0$. Sea $p = \phi(u, v)$.

Como $w(u, v) = 0$, entonces $\left.\begin{array}{rcl} v_1(p) + v_3(p)u & = & 0 \\ v_2(p) + v_3(p)v & = & 0 \end{array}\right\}$, por lo que tenemos lo siguiente :

$$0 = \langle p, v(p) \rangle$$

si, y solo si,

$$\frac{2uv_1(p)}{u^2 + v^2 + 1} + \frac{2vv_2(p)}{u^2 + v^2 + 1} + \frac{(u^2 + v^2 - 1)v_3(p)}{u^2 + v^2 + 1} = 0$$

si, y solo si,

$$2uv_1(p) + 2vv_2(p) + (u^2 + v^2 - 1)v_3(p) = 0$$

si, y solo si,

$$-2u^2v_3(p) - 2v^2v_3(p) + (u^2 + v^2 - 1)v_3(p) = 0$$

si, y solo si

$$-(u^2 + v^2 + 1)v_3(p) = 0,$$

por lo que

$$v_3(p) = 0,$$

y así,

$$v_1(p) = v_2(p) = v_3(p) = 0,$$

en contra de nuestra hipótesis.

Por lo tanto, $w : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cumple $w(u, v) \neq 0$ para todo $(u, v) \in \mathbb{B}^2$.

Sea (u, v) un punto de la frontera de $\mathbb{B}^2$, es decir, que cumple $u^2 + v^2 = 1$. Se tiene que $\phi(u, v) = (u, v, 0)$, por lo que

$$w(u, v) = (v_1(u, v, 0) + v_3(u, v, 0)u, v_2(u, v, 0) + v_3(u, v, 0)v).$$

Así, $\langle (u, v), w(u, v) \rangle = u(v_1(u, v, 0) + v_3(u, v, 0)u) + v(v_2(u, v, 0) + v_3(u, v, 0)v) = uv_1(u, v, 0) + u^2v_3(u, v, 0) + vv_2(u, v, 0) + v^2v_3(u, v, 0)$.

Por otro lado, como v es tangente, se tiene que $0 = \langle \phi(u, v), v(\phi(u, v)) \rangle = \langle (u, v, 0), v(u, v, 0) \rangle = uv_1(u, v, 0) + vv_2(u, v, 0)$, por lo que la fórmula anterior queda de la siguiente manera:

$$\langle (u, v), w(u, v) \rangle = (u^2 + v^2)v_3(u, v, 0) = v_3(u, v, 0).$$

Ahora, como w es un campo de vectores sobre $\mathbb{B}^2$ que no se anula en ningún punto, aplicando el Teorema 4.7, y teniendo en cuenta que $\langle (u,v), w(u,v)\rangle = v_3(u,v)$, se tiene que existen puntos $(u_1,v_1,0)$ y $(u_2,v_2,0)$ donde $v_3(u_1,v_1,0) > 0$ y $v_3(u_2,v_2,0) < 0$.

Como la restricción $v_3 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación continua, se tiene que existe un punto $q = (u_3,v_3,0)$ tal que $v_3(q) = 0$, por lo que $v_1(q) = 0 = v_2(q)$, lo cual implica que $v(q) = 0$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

□

Veamos ahora que esto no ocurre en las esferas de dimensión impar.

Lema 4.16. *Todas las esferas de dimensión impar admiten un campo tangente v tal que $v(x) \neq 0$ para todo punto x de la esfera.*

Demostración. Sea n un número natural impar cualquiera y consideremos la esfera $\mathbb{S}^n$. Este número n será de la forma $n = 2m+1$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. Por tanto, tenemos que $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^{2m+1} \subset \mathbb{R}^{2m+2}$.

Entonces, defino el campo de vectores $v : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+2}$ sobre la esfera por

$$v(x) = v(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_{2m+1},x_{2m+2}) = (-x_2,x_1,-x_4,x_3,...,-x_{2m+2},x_{2m+1}),$$

que cumple $\langle v(x), x\rangle = 0$ y $\|v(x)\|^2 = \|x\|^2 = 1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$.

□

4.5. Grupo fundamental de la recta proyectiva real

Veamos finalmente una última aplicación del hecho de que $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$: el grupo fundamental de la recta proyectiva real $\mathbb{RP}^1$.

En primer lugar, recordemos que podemos considerar la ***recta proyectiva real*** $\mathbb{RP}^1$ como el espacio cociente $\mathbb{S}^1/\{\pm\}$, donde $\pm$ es la relación de equivalencia en $\mathbb{S}^1$ que relaciona un punto (x,y) de $\mathbb{S}^1$ consigo mismo y con su punto antípoda. Además, $\mathbb{RP}^1$ es compacta, pues $\mathbb{S}^1$ es compacta y la aplicación $\pi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^1$ que lleva un punto x de $\mathbb{S}^1$ a su clase de equivalencia es continua y sobreyectiva.

A continuación, demostraremos que $\mathbb{RP}^1$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^1$, de donde obtendremos como corolario que $\pi_1(\mathbb{RP}^1)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Proposición 4.17. *La recta proyectiva* $\mathbb{RP}^1$ *es homeomorfa a* $\mathbb{S}^1$.

Demostración. La aplicación $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $g(x, y) = (-x^2 + y^2, 2xy)$, o lo que es lo mismo, $g(z) = z^2$ con $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y $\|z\| = 1$, es continua, y claramente se verifica $g(z) = g(w)$ si, y solo si, $w = \pm z$. De esta manera, se tiene que g induce una biyección continua $f : \mathbb{RP}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $f \circ \pi = g$. Ahora, como $\mathbb{RP}^1$ es compacta y $\mathbb{S}^1$ es Hausdorff, se sique que la biyección continua $f : \mathbb{RP}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es un homeomorfismo entre $\mathbb{RP}^1$ y $\mathbb{S}^1$.

□

Corolario 4.18. $\pi_1(\mathbb{RP}^1)$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}$.

Demostración. Por la Proposición 4.17, se tiene que $\pi_1(\mathbb{RP}^1)$ es isomorfo a $\pi_1(\mathbb{S}^1)$, que sabemos que es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

□

Capítulo 5

Grupos fundamentales de algunas superficies

En este capítulo vamos a ver cuáles son los grupos fundamentales de algunas superficies, como por ejemplo, el toro y el doble toro, y comparando sus grupos fundamentales, veremos que no son homeomorfas.

Antes de nada, recordemos que una *superficie* es un espacio de Hausdorff con una base numerable y tal que cada punto tiene un entorno que es homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

En capítulos anteriores ya hemos hablado de los grupos fundamentales de algunas superficies, como lo son $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{R}^2$, y hemos visto en ambos casos que su grupo fundamental es trivial.

Recordemos también que si A y B son grupos con operación $\cdot$, entonces el producto cartesiano $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ tiene estructura de grupo con la operación

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a \cdot a', b \cdot b').$$

Usaremos también el hecho de que si $f : C \longrightarrow A$ y $g : C \longrightarrow B$ son homomorfismos de grupos, entonces la aplicación $h : C \longrightarrow A \times B$ definida por $h(c) = (f(c), g(c))$ es un homomorfismo de grupos.

5.1. El toro y el cilindro

Pasamos ya a estudiar el grupo fundamental del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, para lo cual va a ser muy útil el siguiente teorema.

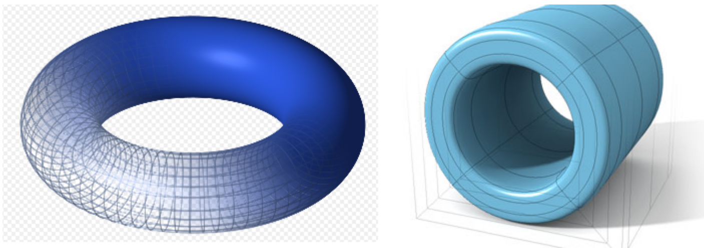


Figura 5.1: Toro (izquierda) y Cilindro (derecha)

Teorema 5.1. *Sean X e Y espacios topológicos y sean x_0 e y_0 puntos de X e Y respectivamente. Entonces, $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

Demostración. Sean $p : X \times Y \longrightarrow X$ y $q : X \times Y \longrightarrow Y$ las aplicaciones proyección en X e Y respectivamente, es decir, $p(x, y) = x$ y $q(x, y) = y$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Consideremos los homomorfismo inducidos

$$p_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$q_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0),$$

que vienen dados por $p_*([f]) = [p \circ f]$ y $q_*([f]) = [q \circ f]$ para todo lazo f en $X \times Y$ basado en (x_0, y_0).

Sea

$$\phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

el homomorfismo dado por la ecuación

$$\phi([f]) = (p_*([f]), q_*([f])) = ([p \circ f], [q \circ f]).$$

Veamos que ϕ es un isomorfismo, y así, tendremos lo que buscamos.

- *La aplicación ϕ es sobreyectiva:* Sea $g : [0, 1] \longrightarrow X$ un lazo basado en x_0 y sea $h : [0, 1] \longrightarrow Y$ un lazo basado en y_0, y veamos que el elemento $([g], [h])$ está en la imagen de ϕ.

  Sea
  $$f : [0, 1] \longrightarrow X \times Y$$
  el lazo en $X \times Y$ basado en (x_0, y_0) dado por la ecuación $f(s) = (g(s), h(s))$. Se tiene que
  $$\phi([f]) = ([p \circ f], [q \circ f]) = ([g], [h]),$$
  por lo que ϕ es sobreyectiva.

- *La aplicación ϕ es inyectiva:* Para ello, vamos a ver que el núcleo de ϕ es cero. Supongamos que $f : [0,1] \longrightarrow X \times Y$ es un lazo en $X \times Y$ basado en (x_0, y_0) y tal que $\phi([f]) = ([p \circ f], [q \circ f]) = ([g], [h])$ es el elemento neutro de $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Esto quiere decir que $p \circ f \simeq_p e_{x_0}$ y $q \circ f \simeq_p e_{y_0}$. Sean

$$G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

y

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow Y$$

las respectivas homotopías de caminos. Entones, la aplicación

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X \times Y$$

definida por

$$F(s,t) = (G(s,t), H(s,t))$$

es una homotopía de caminos entre f y el lazo constante basado en (x_0, y_0), $e_{(x_0,y_0)}$. Veamos:

  - $F(s,0) = (G(s,0), H(s,0)) = ((p \circ f)(s), (q \circ f)(s)) = f(s)$.
  - $F(s,1) = (G(s,1), H(s,1)) = (e_{x_0}(s), e_{y_0}(s)) = (x_0, y_0) = e_{(x_0,y_0)}(s)$.

□

De este teorema se deduce inmediatamente cuál es el grupo fundamental del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y el del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Corolario 5.2. *El grupo fundamental del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y el grupo fundamental del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Por el teorema anterior, tenemos que $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ es isomorfo a $\pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1)$, que es a su vez isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Análogamente, tenemos que $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ es isomorfo a $\pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{R})$, que es a su vez isomorfo a $\mathbb{Z}$.

□

Del mismo teorema, también obtenemos el siguiente resultado interesante.

Corolario 5.3. *Sean X e Y espacios topológicos. Si X e Y son simplemente conexos, entonces el producto cartesiano $X \times Y$ también es simplemente conexo.*

5.2. El plano proyectivo real

En el capítulo anterior hemos estudiado cuál es el grupo fundamental de la recta proyectiva real $\mathbb{RP}^1$. Vamos a estudiar ahora el del plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$.

En primer lugar, recordemos que podemos considerar el ***plano proyectivo real*** $\mathbb{RP}^2$ como el espacio cociente $\mathbb{S}^2/\{\pm\}$, donde $\pm$ es la relación de equivalencia en $\mathbb{S}^2$ que relaciona un punto (x, y, z) de $\mathbb{S}^2$ consigo mismo y con su punto antípoda. Además, $\mathbb{RP}^2$ es compacta, pues $\mathbb{S}^2$ es compacta y la aplicación $\pi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ que lleva un punto x de $\mathbb{S}^2$ a su clase de equivalencia es continua y sobreyectiva.

Teorema 5.4. *La aplicación cociente $\pi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ es una aplicación recubridora.*

Demostración. Veamos en primer lugar que $\pi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ es una aplicación abierta, es decir, para todo U abierto de $\mathbb{S}^2$ se tiene que $\pi(U)$ es abierto en $\mathbb{RP}^2$, lo que quiere decir por definición que $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto en $\mathbb{S}^2$.

Sea $a : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $a(x) = -x$ la aplicación antípoda y sea U un abierto de $\mathbb{S}^2$. Como la aplicación a es un homeomorfismo, se tiene que $a(U)$ es abierto en $\mathbb{S}^2$. Dado que $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup a(U)$, este conjunto es abierto en $\mathbb{S}^2$, por lo que π es una aplicación abierta

El hecho de que π es cerrada se deduce de que $\mathbb{S}^2$ es compacta y $\mathbb{RP}^2$ es Hausdorff. Veamos esto último:

Sean $y_1, y_2 \in \mathbb{RP}^2$ con $y_1 \neq y_2$, es decir; $y_1 = \bar{P}$, $y_2 = \bar{Q}$, con $P, Q \in \mathbb{S}^2$, $P \neq \pm Q$. Entonces, se tiene que existen U_1, U_2 entornos de P y Q en $\mathbb{S}^2$ respectivamente tales que los conjuntos $U_1 \cup a(U_1)$ y $U_2 \cup a(U_2)$ son disjuntos. De esta manera, $\pi(U_1)$ y $\pi(U_2)$ son entornos de y_1 e y_2 en $\mathbb{RP}^2$ que no se cortan, por lo que $\mathbb{RP}^2$ es Hausdorff.

Probemos ya que π es una aplicación recubridora. Dado un punto $y = \bar{P}$ de $\mathbb{RP}^2$, elijamos $x \in \pi^{-1}(y) = \{P, -P\}$ y sea $U = \mathbb{S}^2_+(x) = \{Q \in \mathbb{S}^2 : \langle x, Q \rangle > 0\}$. Se tiene entonces que U no contiene ningún par $\{z, a(z)\}$ de puntos antípodas de $\mathbb{S}^2$. En consecuencia, la aplicación

$$\pi : U \longrightarrow \pi(U)$$

es biyectiva. Como es continua y abierta, es un homeomorfismo. Análogamente,

$$\pi : a(U) \longrightarrow \pi(a(U) = \pi(U)$$

es un homeomorfismo. Por tanto, el conjunto $\pi^{-1}(\pi(U))$ es la unión de dos conjuntos abiertos y disjuntos, U y $a(U)$, cada uno de los cuales se aplica homeomórficamente mediante π sobre $\pi(U)$. Así, $\pi(U)$ es un entorno de $\pi(x) = y$ que está regularmente cubierto por π.

□

Observación 5.5. *Al ser $\pi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ una aplicación recubridora, se tiene que también se pueden levantar caminos y homotopías, al igual que ocurría con la aplicación exponencial $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$.*

Veamos ahora una proposición que nos será útil para estudiar el grupo fundamental de $\mathbb{RP}^2$.

Proposición 5.6. *Sean $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ dos lazos con el mismo punto base $y_0 \in \mathbb{RP}^2$, y sean $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ los correspondientes levantamientos con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = p_0 \in \pi^{-1}(y_0)$. Entonces, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ si, y solo si, α y β son homotópicos como lazos en $\mathbb{RP}^2$.*

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Como $\mathbb{S}^2$ es conexa por caminos y $\pi_1(\mathbb{S}^2) = 0$, se tiene que $\mathbb{S}^2$ es simplemente conexa, por lo que aplicando el Lema 1.24, se tiene que $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son homotópicos por caminos en $\mathbb{S}^2$. Así pues, existe una aplicación continua

$$G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

tal que $G(s,0) = \tilde{\alpha}(s)$ y $G(s,1) = \tilde{\beta}(s)$ para todo $s \in [0,1]$, con $G(0,t)$ y $G(1,t)$ constantes para todo $t \in [0,1]$.

Sea

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{RP}^2$$

la aplicación definida por $F := \pi \circ G$, y veamos que es una homotopía de lazos entre α y β.

- $F(s,0) = \pi(G(s,0)) = \pi(\tilde{\alpha}(s)) = \alpha(s)$.
- $F(s,1) = \pi(G(s,1)) = \pi(\tilde{\beta}(s)) = \beta(s)$.
- $F(0,t) = \pi(G(0,t)) = \pi(G(0,1)) = \pi(\tilde{\beta}(1)) = \beta(1)$ para todo $t \in [0,1]$.
- $F(1,t) = \pi(G(1,t)) = \pi(G(1,0)) = \pi(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = \beta(1)$ para todo $t \in [0,1]$.

Supongamos ahora que α y β son homotópicos como lazos en $\mathbb{RP}^2$. Entonces, existe una aplicación continua

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{RP}^2$$

tal que $F(s,0) = \alpha(s)$ y $F(s,1) = \beta(s)$ para todo $s \in [0,1]$, con $F(0,t) = F(1,t) = y_0$ para todo $t \in [0,1]$.

Sea $\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ el levantamiento de F con condición inicial $\tilde{F}(0,0) = p_0$.

Como F es una homotopía de lazos (en particular, de caminos), se tiene que $\tilde{F}$ es una homotopía de caminos. De esta manera, se tiene que $\tilde{F}(0,t) = cte = \tilde{F}(0,0) = p_0$ y $\tilde{F}(1,t) = cte = \tilde{F}(1,0) = p_1$ para todo $t \in [0,1]$.

La aplicación $\tilde{F}_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $\tilde{F}_0(s) = \tilde{F}(s,0)$ es un levantamiento de $\alpha(s)$ con $\tilde{F}_0(0) = \tilde{F}(0,0) = p_0$, pues $\pi(\tilde{F}(s,0)) = F(s,0) = \alpha(s)$. Por la unicidad del levantamiento, $\tilde{F}_0(s) = \tilde{F}(s,0) = \tilde{\alpha}(s)$.

Análogamente, la aplicación $\tilde{F}_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $\tilde{F}_1(s) = \tilde{F}(s,1)$ es un levantamiento de $\beta(s)$ con $\tilde{F}_1(0) = \tilde{F}(0,1) = p_0$, pues $\pi(\tilde{F}(s,1)) = F(s,1) = \beta(s)$. Por la unicidad del levantamiento, $\tilde{F}_1(s) = \tilde{F}(s,1) = \tilde{\beta}(s)$.

Tenemos entonces que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{F}(1,0) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{\beta}(1)$, tal y como queríamos probar.

$\square$

Llegados a este punto, podemos definir entonces la aplicación

$$\phi : \pi_1(\mathbb{RP}^2, y_0) \longrightarrow \pi^{-1}(\{y_0\}),$$

con $y_0 \in \mathbb{RP}^2$, dada por $\phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1)$ siendo $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ un lazo basado en y_0, y donde $\pi^{-1}(\{y_0\}) = \{p_0, -p_0\}$ es un conjunto formado por dos elementos.

Gracias a la proposición anterior, esta aplicación está bien definida.

Teorema 5.7. *La aplicación*

$$\phi : \pi_1(\mathbb{RP}^2, y_0) \longrightarrow \pi^{-1}(\{y_0\})$$

definida anteriormente es biyectiva.

Demostración. Como $\mathbb{S}^2$ es conexa por caminos, existe un camino $\tilde{f} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ en $\mathbb{S}^2$ uniendo p_0 y $-p_0$, de manera que $f = \pi \circ \tilde{f} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ es un lazo en $\mathbb{RP}^2$ con base y_0 y $\phi([f]) = \tilde{f}(1) = -p_0$, por lo que $-p_0 \in \mathrm{Im}(\phi)$.

Definiendo $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ por $g(s) = f(1-s)$, se tiene que $\phi([g]) = p_0$, por lo que $p_0 \in \mathrm{Im}(\phi)$.

Así, hemos demostrado que ϕ es sobreyectiva. Veamos que es inyectiva:

Sean $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ dos lazos en $\mathbb{RP}^2$ basados en y_0 tales que $\phi([f]) = \phi([g])$. Sean $\tilde{f}, \tilde{g} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ los levantamientos de f y g, respectivamente, a caminos en $\mathbb{S}^2$ comenzando en p_0. Entonces, se tiene que $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Como $\mathbb{S}^2$ es simplemente conexa, existe una homotopía de caminos $\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ en $\mathbb{S}^2$ entre $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$. Entonces, $\pi \circ \tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ es una homotopía de caminos en $\mathbb{RP}^2$ entre f y g, por lo que $[f] = [g]$, y por tanto, ϕ es inyectiva.

$\square$

Podemos dar ya el resultado deseado:

Corolario 5.8. $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}_2$.

Demostración. Usando la biyección del teorema anterior y teniendo en cuenta que $|\pi^{-1}(\{y_0\})| = 2$ se tiene el resultado.

$\square$

5.3. El doble toro

Vamos a estudiar ahora el grupo fundamental del doble toro, para lo cual necesitaremos de un lema acerca del grupo fundamental de la figura ocho. Este último espacio topológico, con la topología inducida de $\mathbb{R}^2$, puede escribirse como la unión de los conjuntos A y B, donde

$$A = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$

y

$$B = \{(x,y) : (x+1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Recordemos que el doble toro, que denotaremos con $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$, es la superficie obtenida tomando dos copias del toro, quitando un pequeño disco abierto a cada uno de ellos, y uniendo los objetos resultantes a lo largo de sus bordes.

Lema 5.9. *Sea* $X = A \cup B$ *la figura ocho. Se tiene que* $\pi_1(X)$ *es no abeliano.*

Figura 5.2: Doble toro

Demostración. Definamos en primer lugar un espacio recubridor E de X. Este espacio E va a ser el subespacio del plano consistente en el eje OX, el eje OY y pequeñas circunferencias tangentes de radio $\frac{1}{4}$ a lo largo de estos ejes: una circunferencia tangente al eje OX en cada punto entero no nulo y una circunferencia tangente al eje OY en cada punto entero no nulo. Es decir,

$$E = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \cup_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} A_n \cup_{m\in\mathbb{Z},m\neq 0} A_m,$$

donde A_n es una circunferencia de centro $(\frac{1}{4}, n)$ y radio $\frac{1}{4}$, y B_m es una circunferencia de centro $(m, \frac{1}{4})$ y radio $\frac{1}{4}$.

La aplicación recubridora $p : E \longrightarrow X$ va a consistir en lo siguiente: p va a enrollar el eje OX alrededor del círculo A y el eje OY alrededor del círculo B, de manera que los puntos enteros serán aplicados por p en el punto $(0,0)$. Cada circunferencia tangente en un punto entero del eje OX se aplicará homeomórficamente mediante p sobre B, mientras que cada circunferencia tangente en un punto entero del eje OY se aplicará homeomórficamente mediante p sobre A; en cada caso, el punto de tangencia se aplicará en el punto $(0,0)$.

Explícitamente, sobre los ejes OX y OY, la aplicación p viene dada de la siguiente manera:

$$p(x,0) = (1,0) + (\cos(2\pi(x+\frac{1}{2})), \mathrm{sen}(2\pi(x+\frac{1}{2})))$$

y

$$p(0,y) = (-1,0) + (\cos(2\pi(y+\frac{1}{2})), \mathrm{sen}(2\pi(y+\frac{1}{2}))),$$

respectivamente.

Sea ahora

$$\tilde{\alpha} : [0,1] \longrightarrow E$$

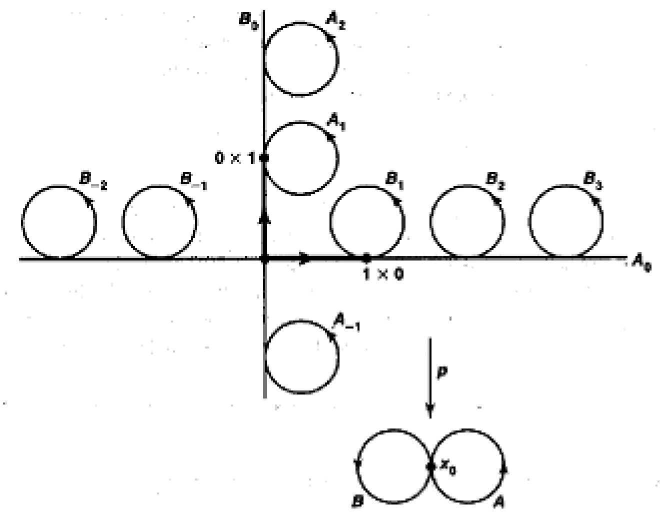
el camino en E dado por $\tilde{\alpha}(s) = (s, 0)$ y sea

$$\tilde{\beta} : [0, 1] \longrightarrow E$$

el camino en E dado por $\tilde{\beta}(s) = (0, s)$. Sean $f = p \circ \tilde{\alpha}$ y $g = p \circ \tilde{\beta}$. Se tiene que f y g son lazos en la figura ocho basados en $(0, 0)$ y dispuestos alrededor de las circunferencias A y B, respectivamente.

Se cumple también que $f * g$ y $g * f$ no son homotópicos por caminos. Para ver esto, levantemos cada uno de estos caminos en E comenzando en el origen. El camino $f * g$ se levanta a un camino que va desde el origen al punto $(1, 0)$ a lo largo del eje OX, y entonces, da una vuelta alrededor de la circunferencia tangente al eje OX en el punto $(1, 0)$. Por otro lado, el camino $g * f$ se levanta a un camino en E que va desde el origen al punto $(0, 1)$ a lo largo del eje OY, y entonces, da una vuelta alrededor de la circunferencia tangente al eje OY en el punto $(0, 1)$. Dado que los levantamientos no acaban en el mismo punto, $f * g$ y $g * f$ no pueden ser homotópicos por caminos, en virtud de la Proposición 5.6, que aunque aquí demostramos para lazos en el espacio $\mathbb{RP}^2$ y la aplicación proyección $\pi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$, en realidad vale para cualquier espacio topológico X con aplicación recubridora $p : E \longrightarrow X$.

Así, tenemos que $[f] * [g] = [f * g] \neq [g * f] = [g] * [f]$, por lo que $\pi_1(X)$ es no abeliano, tal y como queríamos probar.



□

Podemos ya probar el siguiente resultado:

Teorema 5.10. *El grupo fundamental del doble toro $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ es no abeliano.*

Demostración. Todo lo que necesitamos ver es que la figura ocho X es un retracto del doble toro $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$, pues en este caso existirá una aplicación $r : \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \longrightarrow X$ continua tal que $1_X = r \circ i$, donde $i : X \longrightarrow \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ es la aplicación inclusión y $1_X : X \longrightarrow X$ es la aplicación identidad de X.

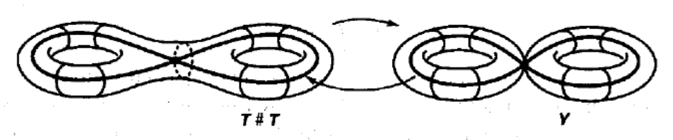
De esto se seguirá que

$$(r \circ i)_* = r_* \circ i_* = (1_X)_*,$$

donde este último término es la aplicación identidad del grupo fundamental de X, que es biyectiva. Por tanto, la aplicación $i_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2)$ será inyectiva, de donde se obtendrá que $\pi_1(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2)$ es no abeliano, pues contendrá un subgrupo isomorfo a $\pi_1(X)$, que es no abeliano por el Lema 5.9.

Veamos pues que la figura ocho es un retracto del doble toro, aunque no daremos la ecuación explícita de la retracción $r : \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \longrightarrow X$, sino que la explicaremos con palabras:

Sea Y la unión de dos toros teniendo un punto en común. Llevamos primero $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ sobre Y mediante una aplicación que colapsa la circunferencia por donde se unen los toros del doble toro en un punto, pero que es inyectiva en el resto. Esta aplicación define un homeomorfismo h entre la figura ocho en $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ y la figura ocho en Y. Entonces, hacemos un retracto de Y sobre su figura ocho aplicando cada círculo transversal en el punto donde este interseca a la figura ocho. Finalmente, aplicamos la figura ocho en Y sobre la figura ocho en $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ mediante la aplicación h^{-1}.



□

De todo lo anterior, obtenemos el siguiente corolario, el cual nos dice que el plano, la 2-esfera, el toro, la recta proyectiva real, el plano proyectivo real y el doble toro son topológicamente distintos.

Corolario 5.11. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}^2$, $\mathbb{RP}^1$, $\mathbb{RP}^2$ *y* $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ *no son homeomorfos.*

Demostración. Es evidente pues sus grupos fundamentales no son isomorfos, excepto en el caso de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{S}^2$, que es claro pues $\mathbb{R}^2$ no es compacto y $\mathbb{S}^2$ sí lo es. $\square$

Bibliografía

[1] Glen E. Bredon, *Topology and geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 139. Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] Martin D. Crossley, *Essential topology.* Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.

[3] M. Eisenberg y R. Guy, *A proof of the hairy ball theorem.* Amer. Math. Monthly 86 (1979), no. 7, 572–574.

[4] W. Fulton, *Algebraic topology. A first course.* Graduate Texts in Mathematics, 153. Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] V. Guillemin y A. Pollack, *Differential topology.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[6] A. Hatcher, *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[7] Elon L. Lima, Fundamental groups and covering spaces. A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2003.

[8] M. Macho, *Un Paseo por la geometría* 1997/1998, UPV/EHU 1999, págs. 25-42.

[9] William S. Massey, *Algebraic topology: an introduction.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[10] William S. Massey, *A basic course in algebraic topology.* Graduate Texts in Mathematics, 127. Springer-Verlag, New York, 1991.

[11] James R. Munkres, *Topología.* Prentice-Hall, Inc., Madrid, 2002.

[12] James R. Munkres, *Elements of algebraic topology.* Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[13] Edwin H. Spanier, *Algebraic topology.* Corrected reprint. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.

[14] Stephen Willard, *General topology.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1970.