UNIVERSIDAD DE MURCIA

Facultad de Matemáticas
Grado en Matemáticas

La Solución de Schwarzschild. Aplicación al GPS.

Tutor: José Antonio Pastor González

Mar del Río Egea

Declaración de originalidad

Mar del Río Egea, autora del trabajo de fin de Grado **"La Solución de Schwarzschild. Aplicación al GPS."**, bajo la tutela del profesor **José Antonio Pastor González**, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.[1].

En Murcia, a 11 de julio de 2017

[1]En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración

A mis padres, por quererme y apoyarme en este duro camino y
a mis abuelos, porque sin ellos no estaría donde estoy.

Índice general

Resumen

El cometido de este estudio es llegar a entender cómo la *Teoría de la Relatividad Especial* y la *Teoría de la Relatividad General* de **Albert Einstein** son cruciales para el buen funcionamiento del Sistema de Posicionamiento Global, también conocido como GPS.

Empezaremos hablando de cómo Einstein cuestionó la física clásica de Newton, postulando que ni el tiempo ni el espacio eran absolutos, pues entonces la velocidad de la luz no podría ser constante, como describía **Maxwell** en sus ecuaciones de ondas electromagnéticas.

Además, gracias al *experimento de Michelson-Morley*, que se consideró un fallo en su época, pudo concluir que la existencia del "éter luminífero" por el que se propagaba la luz era una simple creencia, y que realmente la luz se propagaba en el vacío.

Gracias a estas ideas, en 1905, Einstein escribió un artículo llamado *"Zur Elektrodynamik bewegter Körper"*, que se puede traducir como *"Sobre la Electrodinámica de los cuerpos en movimiento"*, en el que introdujo la Teoría de la Relatividad Especial, que, *grosso modo*, explica que el mundo no es un espacio "absoluto" donde para todos los observadores las leyes de la física son las mismas, sino que todo depende del observador.

Como el tiempo es relativo, habrá una dilatación temporal, y el tiempo del reloj en movimiento pasará más lento que el que está quieto. Además, también habrá una contracción de longitudes, pues $v = e/t$ y si uno se dilata, el otro se contrae para que la velocidad permanezca constante.

Esta idea tomó forma gracias a las **transformaciones de Lorentz**, pues éstas podían cuantificar, en función de un sistema de coordenadas espacio-temporal de cada sistema de referencia inercial y de la velocidad a la cuál un sistema se alejara del otro, la contracción de longitudes y la dilatación temporal.

Esta Teoría no fue del todo apoyada desde sus inicios, pues muchos científicos se negaban a aceptar que Newton, que a su vez se basaba en Galileo, estaba equivocado, pero finalmente tuvo su acogida entre la comunidad científica de la época para acabar siendo una de las teorías más importantes de la historia de la física.

Además de explicar y acoger las ecuaciones de las ondas electromagnéticas de Maxwell, esta teoría consiguió establecer una conexión entre masa y energía, la famosa fórmula de $\boldsymbol{E = mc^2}$, que no utilizaremos en nuestro cometido de explicar el funcionamiento del

GPS, pero que fue uno de los logros más valiosos del *Annus Mirabilis* (año milagroso) de Einstein.

Al acabar el año 1905, Einstein había publicado la increíble cifra de cuatro artículos, cada cuál más relevante para la física de la época.

En el primer capítulo de este estudio, vamos a explicar un poco más a fondo qué llevo a Einstein a postular la Teoría de la Relatividad Especial. Trabajaremos siempre en **unidades geométricas**, esto es, todo estará medido en metros, incluidos masa y tiempo. También explicaremos cómo de las transformaciones de Lorentz y gracias a un diagrama de espacio-tiempo de los dos sistemas de referencia inerciales podemos deducir las fórmulas de la **contracción de longitudes** y la **dilatación temporal**. Finalmente explicaremos una de las nociones más importantes de la Relatividad (tanto Especial como General): el **tiempo propio**, ya que como hemos explicado, el tiempo no es el mismo según el observador.

Para explicar este concepto, haremos uso de la geometría de Minkowski, pues la Relatividad Especial se basa en una geometría no euclídea; las distancias no se miden como siempre las hemos medido.

Aunaremos el concepto de tiempo propio con el de parámetro arco de la geometría de curvas y superficies, para tener entonces un cálculo preciso de éste. Además, para explicar el concepto a fondo, estudiaremos la *paradoja de los gemelos.*

Después de la revolucionaria Teoría de la Relatividad Especial, Einstein nos volvió a sorprender con la Teoría de la Relatividad General.

Einstein sabía que su primera teoría tenía algunas carencias, pues se necesitaba un sistema de referencia inercial, y eso era muy poco probable en el mundo real, por lo que 10 años más tarde postuló la Teoría de la Relatividad General, donde ya no existía un sistema de referencia inercial, pues se cambiaba totalmente la visión del mundo.

Esta teoría se basaba en que no había un espacio-tiempo sin curvatura, como en la métrica de Minkowski, sino que el espacio-tiempo era curvo, y debía su curvatura a una masa M, que se suponía centrada en el origen.

Einstein tardó 8 años en completar esta teoría (1907-1915), que culminó con la ***Ecuación de campo***, la cuál conseguía explicar cómo la densidad local de la materia y la energía determinan la curvatura del espacio-tiempo. En el segundo capítulo de este estudio se trabaja la Ecuación de campo de Einstein en el vacío, que es ligeramente distinta de la Ecuación de campo en sí, pues nuestro marco de referencia es una masa M esféricamente simétrica y estática.

La Teoría de la Relatividad General de Einstein tiene tres principios fundamentales

- El **principio general de covarianza**, que dice que las leyes de la Física no dependen del sistema de coordenadas elegido.
- El **principio de equivalencia**, que dice que la métrica de Minkowski se aplica localmente a todos los observadores inerciales, esto es que un sistema de referencia no inercial acelerado es indistinguible de uno que esté atravesando un campo gravitatorio.
- La ya nombrada **curvatura del espacio-tiempo**, que se debe a la presencia de una masa M, y que describe la trayectoria de *partículas libres* como geodésicas.

En el segundo capítulo de este trabajo, estudiaremos el movimiento de una partícula a velocidad baja en un campo débil, que nos ayudará a deducir la **métrica de Schwarzschild**, que a su vez se deduce de la Ecuación de campo en el vacío.

Gracias a esta métrica, conseguiremos relacionar los tiempos propios de dos partículas, una en la superficie terrestre y otra en la vertical a una altura h, que nos será de gran utilidad para relacionar los tiempos de un satélite y un dispositivo GPS en el tercer capítulo.

Primero estudiamos el movimiento de una partícula a velocidad baja en un campo débil porque la Tierra puede considerarse un campo débil, ya que la fuerza de la gravedad es realmente muy baja si la tomamos en unidades geométricas, y se puede considerar como partícula un satélite, por tanto está enfocado a aprovechar los cálculos para el tercer capítulo.

Después de hablar de las dos grandes Teorías de Einstein, vamos a ponerlas en práctica.

En el tercer capítulo hablamos de cómo estas dos Teorías influyen en el buen funcionamiento del GPS. Expliquemos un poco el por qué.

El GPS es un sistema que trata de averiguar las coordenadas exactas de un dispositivo GPS gracias a una red de 24 satélites situados a 20200 km de la Tierra y que orbitan circularmente con períodos de 12 horas, pero ¿el reloj atómico de un satélite está acompasado con el reloj de un dispositivo GPS situado en la superficie terrestre?

Aquí está el problema y el por qué de este estudio. El tiempo del satélite y el del dispositivo, aunque en su día fueran acompasados, una vez que el satélite entró en órbita a una cierta velocidad y a otra cierta altura, dejó de tener el mismo tic-tac que el reloj del dispositivo.

Esto se debe a las Teorías vistas anteriormente. Gracias a estos efectos relativistas, los relojes no marcan el mismo tic-tac, por lo tanto, si $c = e/t$, y los tiempos no van acompasados, habrá un desajuste en los espacios que marcan el satélite y el dispositivo, y por tanto el satélite no marcará la posición correcta del dispositivo.

Esto se arregla corrigiendo la dilatación temporal que tendrá el satélite, pero para ello, hay que saber cuantitativamente de cuántos segundos estamos hablando.

De esto trata el tercer capítulo, de averiguar cuantitativamente cuál es el desfase entre el reloj de un satélite y el de un dispositivo situado en la superficie terrestre.

Como hemos visto antes, la Teoría de la Relatividad Especial, explica cuál es el desfase entre un reloj quieto y otro con una cierta velocidad, y la Teoría de la Relatividad General explica cuál es el desfase entre un reloj quieto y otro a una cierta altura, aunque también quieto, por tanto, al combinar las dos Teorías, podemos calcular de manera precisa qué le ocurre a un reloj quieto con respecto a otro reloj a una cierta altura y moviéndose a una cierta velocidad, lo que se traduce en calcular el desfase de tiempo entre el reloj de un dispositivo GPS y el del reloj de un satélite.

Obviamente este estudio no es del todo preciso, pues la Tierra tiene una rotación y no es esféricamente simétrica, ya que está un poco más achatada en los polos, pero corrigiendo también estos efectos, el Sistema de Posicionamiento Global es capaz de averiguar la posición de un dispositivo GPS con una precisión de metros.

Resumiendo, en este estudio, vamos a ver cómo, con un poco de matemática abstracta como la geometría de Riemann o la de Minkowski, aplicada a la física, se puede inventar artilugios tan útiles como el GPS, que usamos día a día para no perdernos cuando vamos de viaje, o que puede usar un camionero, como lo era mi abuelo, para llegar antes a su destino y disfrutar más tiempo de su familia.

Summary

The aim of this study is to understand how the *Special Theory of Relativity* and the *General Theory of Relativity* of **Albert Einstein** are crucial for the good functioning of Global Positioning System, also known as GPS.

We will start talking of how Einstein questioned the clasic Physic of Newton, postulating that nor the time nor the space were absolute, as then the speed of light could not be constant, as **Maxwell** describes in his electromagnetic wave equations.

Furthermore, thanks to *Michelson-Morley experiment*, which was considered a fail at his time, could concludes that the existence of "luminiferous ether" by which the light propagated was a simple belief, and that the light actually spread in the vacuum.

Thanks to these ideas, in 1905, Einstein wrote an article called *"Zur Elektrodynamik bewegter Körper"*, which can be translated as *"On the Electrodynamics of moving bodies"*, in which he introduced the Special Theory of Relativity, that, *grosso modo*, explain that the world is not an "absolute" space where for all observers the laws of physics are the same, but everything depends on the observer.

Since time is relative, there will be a time dilation, and the time of the clock in motion will pass slower than that which is still. In addition, there will also be a lengths contraction, since $v = e/t$ and if one expands, the other contracts so that the speed remains constant.

This idea took shape thanks to the **Lorentz transformations**, because they could quantify, depending on a system of space-time coordinates of each inertial frame of reference and the speed at which one system moved away from the other, the contraction of lengths and the time dilation.

This Theory was not entirely supported from the outset, since many scientists refused to accept that Newton, who was based on Galileo, was wrong, but finally it was welcome to the scientific community of the time to end up being one of the most important theories of the history of physics.

In addition to explaining and accommodating Maxwell's electromagnetic wave equations, this theory succeeded in establishing a connection between mass and energy, the famous formula of $\boldsymbol{E = mc^2}$, which we will not use in our task of explaining GPS operation, but it was one of the most valuable achievements of the *Annus Mirabilis* (miraculous

year) of Einstein.

By the end of 1905, Einstein had published the incredible figure of four articles, each one more relevant to the physics of the time.

In the first chapter of this study, we will explain a little more thoroughly what led Einstein to postulate the Theory of Special Relativity. We will always work on **geometric units** , that is, everything will be measured in meters, including mass and time. We will also explain how from the Lorentz transformations and thanks to a space-time diagram of the two inertial frames of reference, we can deduce the formulas of the **length contraction** and the **time dilation** . Finally we will explain one of the most important notions of Relativity (both Special and General): the **proper time** , since as we have explained, the time is not the same according to the observer.

To explain this concept, we will make use of Minkowski's geometry, since the Special Relativity is based on a non-Euclidean geometry; the distances are not measured as we have always measured them.

We will combine the concept of proper time with the parameter of arc of the geometry of curves and surfaces, to have a precise calculation of this. Furthermore, to explain the concept thoroughly we study the *twin paradox* .

After the revolutionary Special Theory of Relativity, Einstein surprised us again with the General Theory of Relativity.

Einstein knew that his first theory had some shortcomings, because it needed an inertial frame of reference, that is, and that, was very unlikely in the real world, reason by which 10 years later he postulated the General Theory of Relativity, where there was already an inertial frame of reference, thus completely changed the world view.

This theory was based on the fact that there was no space-time without curvature, as in Minkowski's metric, but that space-time was curved, and its curvature was due to a mass M, which was assumed centered on the origin.

Einstein took 8 years to complete this theory (1907-1915), which culminated with the ***Field Equation*** , which managed to explain how the local density of matter and energy determine the curvature of space- time. In the second chapter of this study we work the Einstein field equation in the vacuum, which is slightly different from the field equation itself, since our frame of reference is a spherically symmetric and static mass M.

Einstein's General Theory of Relativity has three fundamental principles

- The **general principle of covariance** , which states that the laws of physics do not depend on the chosen coordinate system.

- The **principle of equivalence**, which says that Minkowski's metric applies locally to all inertial observers, that is, an accelerated non-inertial reference system is indistinguishable from one that is crossing a gravitational field.
- The already named **space-time curvature** , which is due to the presence of a mass M, and which describes the trajectory of *free particles* as geodesics.

In the second chapter of this work, we will study the motion of a particle at low speed in a weak field, which will help us to deduce the **Schwarzschild metric** , which in turn is deduced from the Field Equation in the Vacuum.

Thanks to this metric, we will be able to relate the proper times of two particles, one in the terrestrial surface and another in the vertical to a height h, that will be of great utility to us to relate the times of a satellite and a GPS device in the third chapter.

First we study the motion of a particle at low speed in a weak field because the Earth can be considered a weak field, since the force of gravity is really very low if we take it in geometric units, and a satellite can be considered as a particle, therefore it is aimed to seize the calculations for the third chapter.

After talking about the two great Einstein Theories, let's put them into practice.

In the third chapter we talk about how these two Theories influence the good functioning of GPS. Let's explain a little why.

The GPS is a system that tries to find the exact coordinates of a GPS device thanks to a network of 24 satellites located at 20200 km of Earth and orbiting circularly with periods of 12 hours, but the atomic clock of a satellite is matched with the clock of a GPS device located on the Earth's surface?

Here is the problem and why ths study. The time of the satellite and that of the device, although one day were rhythmic, once the satellite entered orbit at a certain speed and at diferent heaight, did not have the same tic-tac as the clock of the device.

This is due to the Theories previously seen. Thanks to these relativistic effects, the clocks do not tick the same tick, so if $c = e/t$, and the times are not rhythmic, there will be a mismatch in the spaces that mark the satellite and the device, and therefore the satellite will not mark the correct position of the device.

This is fixed by correcting the time dilation that the satellite will have, but for this, we must know quantitatively how many seconds we are talking.

This is the third chapter, to find out quantitatively what the gap between the clock of a satellite and that of a device on the Earth's surface.

As we have seen before, Special Theory of Relativity explains the time lag between a still clock and another at certain speed, and General Theory of Relativity explains the time lag between one clock and another at a certain height , although also still, therefore, when combining the two Theories, we can calculate in a precise way what happens to a still clock with respect to another clock to a certain height and moving at a certain speed, which is translated in calculating the lag of time between the clock of a GPS device and the clock of a satellite.

Obviously this study is not absolutely accurate, because the Earth has a rotation and is not spherically symmetrical, since it is a little flattened at the poles, but also correcting these effects, the Global Positioning System is able to find out the position of a GPS device with an accuracy of meters.

In summary, in this study, we will see how, with a bit of abstract mathematics such as Riemann's geometry or Minkowski's, applied to physics, we can devise gadgets as useful as GPS, which we use every day not to lose when we travel, or that can be used by a truck driver, as was my grandfather, to get to destination before and enjoy more time with the family.

Capítulo 1

Relatividad Especial

1.1. ¿El tiempo es relativo? Preliminares

Allá por el siglo XVII, se pensaba que el espacio y el tiempo eran medidas absolutas, es decir, que daba igual si se medían en reposo o en movimiento gracias a la física clásica de Isaac Newton, pero todo parecía desmoronarse cuando a mitad del siglo XIX aparecen las geometrías no euclídeas de la mano de Gauss, Bolyai y Lobachevski.

También se sabía que la velocidad de la luz era una constante en relación al medio, es decir, que la velocidad de la luz, que llamaremos c a partir de ahora, daba igual que fuera medida en reposo o en movimiento. Si se enciende una linterna en un coche a 100 km/h, el rayo de luz va a la misma velocidad, c, que si enciende una linterna una persona que está quieta.

Maxwell, en 1865, publicó un artículo llamado *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, donde hablaba de las **ecuaciones del electromagnetismo**, que resultan ser una ecuación de onda con velocidad de propagación de la onda constante e igual a $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica en el vacío y μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío, todo esto suponiendo que estamos en un espacio absoluto[1]. ¡Y aquí viene lo sorprendente!, Maxwell no solo demostró la existencia de ondas electromagnéticas, sino que su velocidad de propagación, $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, es muy próxima a 300.000 km/s, que es la velocidad de la luz en el vacío, es decir, c; por lo que dedujo que **la luz era una onda electromagnética**. Maxwell también rescató la antigua idea de Huygens de que las ondas se propagan por una sustancia llamada ***éter***, y propuso un ***éter luminífero***, por el que la luz se propagaba.

Poco después de que Maxwell postulara que la luz es una onda que se propaga por éter luminífero, Michelson y Morley estudiaron este éter, y se dieron cuenta de que, dado que la Tierra gira, tendría que existir lo que denominaron "*viento de éter*" e hicieron un experimento para confirmar esta existencia, pero, como podrán observar, nada es lo que parece cuando hablamos de Relatividad Especial.

[1] Esto es el espacio de Newton, donde la longitud es una medida absoluta

El experimento consistía en lanzar un rayo de luz amarilla a un espejo semi-reflectante (el espejo de color azul claro en la Figura 1.1) que dividía el rayo en dos, donde una parte iba a parar al brazo de longitud L_1 y otra parte al brazo de longitud L_2. Estos rayos rebotaban en los espejos y llegaban otra vez al espejo semi-reflectante que los mandaba al receptor. Al llegar los rayos al interceptor, observaron una interferencia, es decir, las dos partes del primer rayo de luz, llegaban ligeramente desfasadas y esto sólo se podía deber a dos cosas; o bien el *viento de éter* efectivamente existía, o bien las longitudes de los brazos eran distintas, por lo que decidieron rotar el aparato 90°y volver a lanzar un rayo de luz, pero ahora el *viento de éter* vendría paralelo a L_2, por lo que la interferencia debía ser distinta. ¡Nada más lejos de la realidad! ¡Las interferencias eran exactamente iguales! y de aquí se dedujo que no existía *viento de éter* alguno (para más información acerca de este experimento, consultar [9, Capítulo I]). Pero entonces, ¿cómo se explicaba este fenómeno?

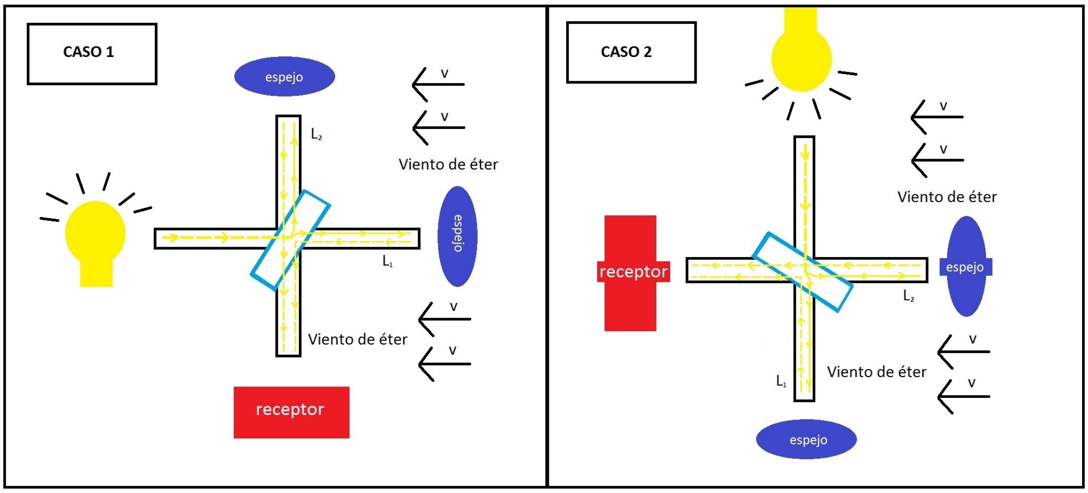

Figura 1.1: Experimento de Michelson-Morley

Aquí entran Lorentz y Fitzgerald, que formularon que las longitudes de los objetos se contraen en relación a la velocidad que lleven[2].

Inspirado en todas estas personas y sus experimentos y deducciones, Einstein postuló la Teoría de la Relatividad Especial:

Postulado 1: *En todos los sistemas de referencia inerciales se formulan igual las leyes de la física, es decir, no existe ningún sistema absoluto como el que decía Newton.*

Postulado 2: *La velocidad de la luz es la constante c y no depende del observador que la mida.*

Primero definamos algunos conceptos para que estos postulados se entiendan mejor.

[2]Veremos esto con más detalle en la Sección 1.2

Definición 1.1. *Un **sistema de referencia** $\mathcal{S}$ es aquel en el que un **observador** $\mathcal{O}$ mide distancias y tiempos, es decir magnitudes físicas, que están vinculadas a este sistema de referencia. Un sistema de referencia es un conjunto de coordenadas de modo que el observador puede situar un **suceso** $\mathcal{A}$ en tiempo y espacio, es decir, puede distinguir dos sucesos, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, gracias a sus coordenadas*

Definición 1.2. *Una **partícula libre** es aquella que no está afectada por ninguna fuerza*

Definición 1.3. *Un **sistema de referencia inercial** $\mathcal{S}$ es un sistema de referencia en el cuál toda partícula libre se mueve a lo largo de rectas.*

Después de estos conceptos, lo que Einstein quería decir con sus postulados es que da igual quién (qué observador $\mathcal{O}$) mida cualquier distancia o tiempo (suceso $\mathcal{A}$) siempre que se encuentre en un sistema inercial, es decir, la Teoría de la Relatividad Especial, no tiene en cuenta la gravedad, y por eso, unos cuantos años más tarde, el propio Einstein, postuló la Teoría de la Relatividad General, de la que hablaremos más adelante en el Capítulo 2.

1.2. Conceptos importantes: Tiempo propio y contracción de longitudes

Esta sección está dedicada a hablar de conceptos básicos en la Teoría de la Relatividad Especial, que también lo serán en la Teoría de la Relatividad General.

Antes de hablar de estos conceptos, vamos a definir las ***unidades geométricas***, ya que en esta teoría, y para hacer más fácil los cálculos, el tiempo, en vez de en segundos, lo medimos en metros, igual que la masa, que también la mediremos en metros. Así podremos combinar distancias con tiempos fácilmente.

En ***unidades geométricas***, la velocidad de la luz, c, es 1, es decir, $c_{ug} = 1 \text{ (m)} = 3 \times 10^8 \text{ (m/s)} = c_{si}$, donde c_{ug} es la velocidad de la luz en unidades geométricas y c_{si} es la velocidad de la luz medida teóricamente en las unidades del Sistema Internacional.

Para poder medir el tiempo en unidades geométricas simplemente tendremos que multiplicar nuestro tiempo medido en unidades del Sistema Internacional por la velocidad de la luz medida también en unidades del Sistema Internacional, es decir:

$$t_{ug} = t_{si} \cdot c_{si} \quad \text{(s)} \cdot \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = t_{si} \cdot 3 \times 10^8 \text{ (m)}$$

La velocidad entonces, al ser $v = e/t$ y estar éstos medidos en metros, será adimensional, y para la aceleración usaremos el factor de conversión $1/c^2$, así:

$$a_{ug} = \frac{a_{si}}{c^2} \left(\frac{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}\right) = \frac{a_{si}}{3 \times 10^8} \left(\frac{1}{\text{m}}\right)$$

También la masa se mide en metros y para ello usamos el factor de conversión G/c_{si}^2, donde G es la constante de gravitación universal

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}\right)$$

Este factor será entonces:

$$\frac{G}{{c_{si}}^2} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}\right)}{(3 \times 10^8)^2 \left(\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right)} = 7{,}41 \times 10^{-28} \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kg}}\right)$$

Luego

$$m_{ug} = m_{si} \cdot \frac{G}{{c_{si}}^2} \quad (\mathrm{kg}) \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kg}}\right) = m_{si} \cdot 7{,}41 \times 10^{-28}\,(\mathrm{m})$$

Al ser $F = m \cdot a$, gracias a la Segunda Ley de Newton, tendremos que la fuerza es adimensional, y que su factor de conversión será por tanto multiplicar el de la masa, G/c^2 por el de la aceleración $1/c^2$, luego será G/c^4.

Por tanto los factores de conversión para todas las magnitudes quedan resumidos en la siguiente tabla:

Magnitud	Factor de conversión	Unidad Geométrica
Tiempo (s)	c	m
Velocidad (m/s)	$1/c$	adimensional
Aceleración (m/s^2)	$1/c^2$	m^{-1}
Masa (kg)	G/c^2	m
Fuerza (N)	G/c^4	adimensional

A partir de ahora y en todo el escrito, siempre que no se diga lo contrario, estaremos trabajando con unidades geométricas.

La Relatividad Especial se encuentra dentro de una geometría distinta a la usual, es decir, no medimos distancias conforme a la geometría euclídea, sino que medimos distancias de "otra manera". Además, en la Teoría de la Relatividad Especial, y también en la General, en vez de las tres dimensiones usuales del espacio, también hacemos uso de una cuarta dimensión, el tiempo. Este concepto tetradimensional lo introdujo Minkowski en 1908, donde tenemos lo que ya hemos nombrado como *sucesos*.

Esta visión del mundo tiene varias ventajas, ya que podemos hacer resoluciones gráficas muy sencillas y prácticas de las transformaciones de Lorentz, como veremos más adelante en esta misma sección, dentro del llamado ***diagrama espacio-tiempo de Minkowski***.

Para hacer más fácil su escritura y poder hacer gráficas, primero hablamos de un *espacio-tiempo* bidimensional de coordenadas cartesianas (x, t), donde x será el espacio, y t será el tiempo.

Definición 1.4. *Una variedad* ***pseudo-riemanniana*** *es un par* $(\mathcal{M}, g)$ *formado por una variedad diferenciable* $\mathcal{M}$ *y una métrica* g *definida sobre* $\mathcal{M}$*.*

Definición 1.5. *Una* ***variedad Lorentziana*** *es una variedad pseudo-riemanniana donde su métrica tiene índice 1.*

Definición 1.6. *Sea* $\mathcal{M}$ *una variedad Lorentziana dos-dimensional, con métrica* $g(u, v) = \langle u, v\rangle_L = u_x v_x - u_t v_t$*, donde* $u = (u_x, u_t)$ *y* $v = (v_x, v_t)$*, entonces al par* $(\mathcal{M}, g)$ *o* $(\mathcal{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle_L)$ *se le denomina* ***espacio-tiempo de Minkowski****,* $\mathbb{M}^2$ *o* $\mathbb{L}^2$ *o* $\mathbb{R}^2_1$*.*

Definición 1.7. *Sean* A *y* B *dos sucesos, entonces se define el* ***intervalo espacio-temporal*** *como* $\Delta x^2 - \Delta t^2$*, que también se puede escribir como* $ds^2 = dt^2 - dx^2$ *en notación diferencial.*

Pasamos ahora a enunciar un teorema muy importante para la Relatividad Especial.

Teorema 1.1. *El intervalo espacio-temporal es invariante, es decir, no depende del observador inercial*

$$\Delta x^2 - \Delta t^2 = \Delta x'^2 - \Delta t'^2$$

Definición 1.8. *En el espacio-tiempo de Minkowski dos-dimensional con métrica* $g = dt^2 - dx^2$*, vamos a diferenciar varios tipos de vectores. Sea* $v \in \mathbb{M}^2$*.*

- *Si* $\langle v, v\rangle_L = 0$*, se denomina vector* ***luminoso*** *(color verde en Figura 1.2)*
- *Si* $\langle v, v\rangle_L < 0$*, se denomina vector* ***temporal*** *(color rojo en Figura 1.2))*
- *Si* $\langle v, v\rangle_L > 0$*, se denomina vector* ***espacial*** *(color azul en Figura 1.2))*

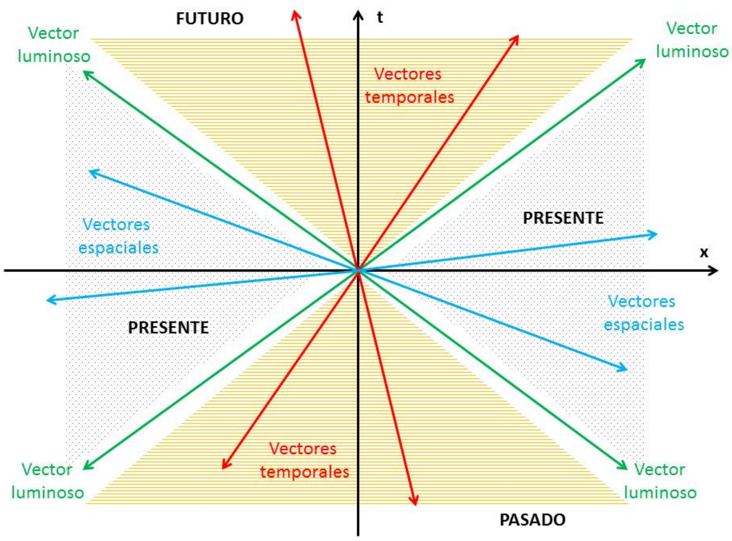

Figura 1.2: Carácter causal de los vectores del espacio-tiempo de Minkowski

Estos vectores además, pueden ***apuntar al futuro*** o no, esto es apuntar en el sentido positivo del eje t (ver Figura 1.2).

Definimos entonces una de las nociones más importantes de la Teoría de la Relatividad Especial, el **tiempo propio**, la cuál usaremos también en el Capítulo 2. Antes, unos conceptos previos.

Definición 1.9. *Consideramos el espacio $\mathbb{M}^4$, es decir, el par $(\mathcal{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle_L)$ donde $\mathcal{M}$ es una variedad Lorentziana y $\langle\cdot,\cdot\rangle_L$ es el producto escalar Lorentziano correspondiente a $-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, respecto de la base canónica $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$.*[3]
*Sea $\gamma : \mathcal{I} \to \mathbb{M}^4$ una curva diferenciable en $\mathbb{M}^4$ tal que $\gamma(u) = (x^0(u), x^1(u), x^2(u), x^3(u))$. Diremos que γ es una **partícula material** si:*

1) $\gamma'(u)$ es un vector temporal $\forall u \in \mathcal{I}$

2) $\gamma'(u)$ apunta al futuro, es decir, si $\langle\gamma'(u), e_0\rangle_L < 0$

Esta segunda condición se traduce en $0 > \langle\gamma'(u), (1,0,0,0)\rangle_L = -\dfrac{dx^0}{du}$.

Además, como $\gamma'(u)$ es temporal, entonces

$$\forall u,\ |\gamma'(u)| = \sqrt{-\langle\gamma'(u), \gamma'(u)\rangle_L} > 0 \tag{1.1}$$

y así se define entonces el **módulo**.

Definición 1.10. *Definimos así la siguiente función*

$$\tau(u) = \int_{u_0}^{u_1} |\gamma'(u)| du$$

Obviamente, $\frac{d\tau}{du} = |\gamma'(u)| > 0$, por lo que τ es un cambio de parámetro, que será lo que conocemos como "parámetro arco".
*A $\tau(u)$ se le conoce como **tiempo propio**.*
*La reparametrización $\alpha(\tau) = \gamma(u(\tau))$ se dice que es la **reparametrización por tiempo propio** de la curva γ.*

Físicamente hablando, podemos definir también el tiempo propio como sigue:

Definición 1.11. *El tiempo que mide un observador $\mathcal{O}$ en un sistema de referencia inercial $\mathcal{S}$ con respecto a ese mismo sistema de referencia inercial $\mathcal{S}$ se denomina **tiempo propio**.*

Es decir, es el tiempo que mide un reloj que esté en la Tierra, $\mathcal{O}$, con respecto a la Tierra, $\mathcal{S}$, que no será el mismo que el que mide un reloj que está en la Tierra desde la Luna, $\mathcal{O}'$, por ejemplo.

Entonces nos preguntamos; entre estos dos tiempos, o entre dos espacios, ¿hay una relación? ¿Existe una fórmula matemática que relacione el tiempo propio, T_0, medido por el observador $\mathcal{O}$ y el tiempo T, medido por el observador $\mathcal{O}'$? ¿Y la longitud L_0 con la longitud L, medidas por los mismos observadores?

[3] Podemos tomar $dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ ó $-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, pues las dos métricas inducen la misma geometría.

La respuesta es **sí**, hay una fórmula que relaciona los tiempos y los espacios. En la Sección 1.1 nombramos la contracción de longitudes de Lorentz y aquí es donde entran en juego sus famosas **transformaciones**:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(x-\beta t) \tag{1.2}$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(t-\beta x) \tag{1.3}$$

Donde $\beta = v/c$ y v es una velocidad cualquiera, es decir, β está en unidades geométricas, y el tiempo t también está en unidades geométricas, luego todo está en metros. Al factor $1/\sqrt{1-\beta^2}$, se le suele llamar γ para hacer más sencilla su escritura.

Las coordenadas (x', t') pertenecen al sistema de referencia $\mathcal{S}'$, y las coordenadas (x, t) al $\mathcal{S}$. También podemos pasar del sistema $\mathcal{S}'$ al $\mathcal{S}$ por medio de las ecuaciones:

$$x = \gamma\,(x' + \beta t') \tag{1.4}$$

$$t = \gamma\,(t' + \beta x') \tag{1.5}$$

A partir de estas transformaciones y con un poco de geometría básica, podemos deducir dos fórmulas muy importantes que utilizaremos a lo largo de este escrito.

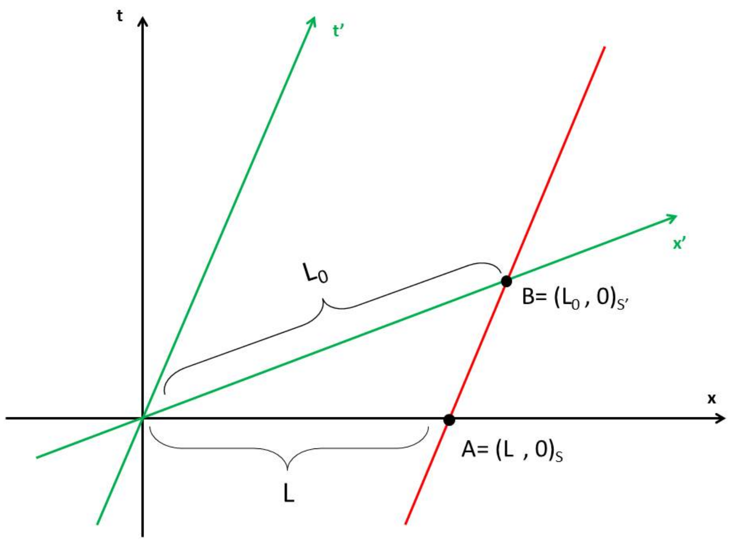

Figura 1.3: Diagrama espacio-temporal para el cálculo de **contracción de longitudes**

En el diagrama presentado en la Figura 1.3, sabemos que el suceso B tiene coordenadas $(L_0, 0)_{\mathcal{S}'}$ y gracias a las ecuaciones 1.4 y 1.5, podemos hallar sus coordenadas en el sistema referencial $\mathcal{S}$.

$$x = \gamma\,(x' + \beta t') = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(L_0 + \beta \cdot 0) = \frac{L_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t = \gamma\left(t' + \beta x'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(0 + \beta \cdot L_0\right) = \frac{L_0 \cdot \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$B = \left(L_0, 0\right)_{\mathcal{S}'} = \left(\frac{L_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{L_0 \cdot \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)_{\mathcal{S}} \tag{1.6}$$

Además, sabemos que los ejes de coordenadas del sistema $\mathcal{S}'$, también se pueden expresar con coordenadas de $\mathcal{S}$ si usamos las ecuaciones 1.2 y 1.3, y sabiendo que el eje t' cumple la ecuación $x' = 0$ y el eje x' cumple $t' = 0$.

$$\text{Eje } t' \ \rightarrow x' = 0 \Leftrightarrow \gamma\left(x - \beta t\right) = 0 \Leftrightarrow x - \beta t = 0 \Leftrightarrow x = \beta t \tag{1.7}$$

$$\text{Eje } x' \ \rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow \gamma\left(t - \beta x\right) = 0 \Leftrightarrow t - \beta x = 0 \Leftrightarrow t = \beta x \tag{1.8}$$

Como observamos en la Figura 1.3, la recta en color rojo, es paralela al eje t' y está a una longitud L del mismo, por tanto su ecuación será de la forma:

$$x - L = \beta t \tag{1.9}$$

El punto B será entonces la intersección de la recta roja, Ecuación 1.9 con el eje x', Ecuación 1.8, es decir, tendremos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x - L = \beta t \\ t = \beta x \end{array}\right. \Leftrightarrow x - L = \beta \cdot \beta x \Leftrightarrow x - \beta^2 x = L \Leftrightarrow x\left(1-\beta^2\right) = L \Leftrightarrow x = \frac{L}{1-\beta^2}$$

Gracias a la Ecuación 1.6 y sustituyendo nos queda:

$$\frac{L_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L}{1-\beta^2} \Leftrightarrow L = \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} L_0 \Leftrightarrow L = L_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Y así obtenemos la ecuación de la ***contracción de longitudes***

$$\boxed{L = L_0\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.10}$$

donde L_0 es la longitud en reposo y L es la longitud en movimiento.

Otra fórmula muy importante que vamos a utilizar en capítulos posteriores es la que deducimos a continuación.

Procedemos igual que en la deducción de la contracción de longitudes. En el diagrama presentado en la Figura 1.4, sabemos que el suceso B tiene coordenadas $\left(0, T_0\right)_{\mathcal{S}'}$ y gracias a las ecuaciones 1.4 y 1.5, podemos hallar sus coordenadas en el sistema referencial $\mathcal{S}$.

$$x = \gamma\left(x' + \beta t'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(0 + \beta \cdot T_0\right) = \frac{T_0 \cdot \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t = \gamma\left(t' + \beta x'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(T_0 + \beta \cdot 0\right) = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

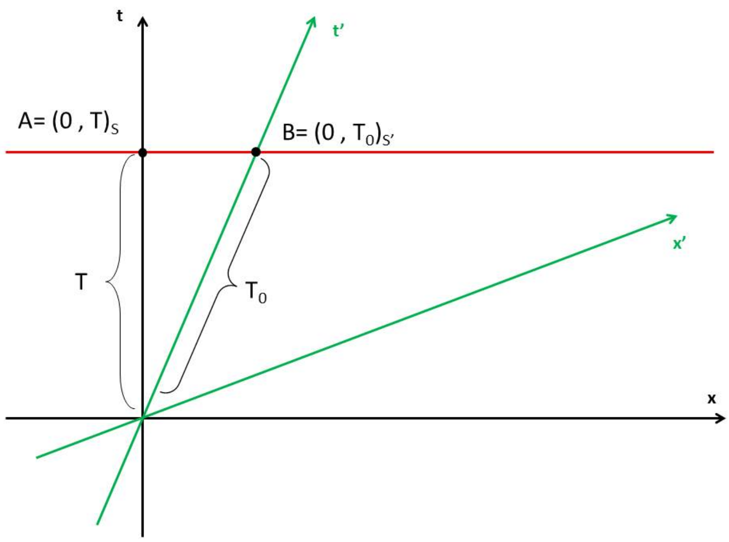

Figura 1.4: Diagrama espacio-temporal para el cálculo de la **dilatación temporal**

Por lo tanto, tenemos que

$$B = (0, T_0)_{\mathcal{S}'} = \left(\frac{T_0 \cdot \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)_{\mathcal{S}} \tag{1.11}$$

Como podemos observar en la Figura 1.4, la recta en color rojo, es paralela al eje x y está a una longitud T del mismo, por tanto su ecuación será de la forma:

$$t - T = 0 \Leftrightarrow t = T \tag{1.12}$$

El punto B será entonces la intersección de la recta roja, Ecuación 1.12 con el eje t', Ecuación 1.7, es decir, tendremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} t = T \\ x = \beta t \end{cases} \Leftrightarrow x = \beta T$$

Gracias a la Ecuación 1.11 y sustituyendo nos queda:

$$\frac{T_0 \cdot \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta T \Leftrightarrow \frac{T_0 \cdot \cancel{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cancel{\beta} T \Leftrightarrow T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Obtenemos así la ecuación de la ***dilatación temporal***

$$\boxed{T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} \tag{1.13}$$

donde T_0 es el tiempo en reposo y T es el tiempo en movimiento.

Para concluir esta sección, recapitulemos: El tiempo y el espacio no son absolutos, son relativos y su medida depende de quién lo mida y de en qué sistema de referencia esté. Esto en su día fue una idea muy novedosa y muy poco acogida entre la comunidad científica de la época, ya que en su momento las Leyes de Newton eran una realidad absoluta, y la Teoría de Einstein hacía que esta realidad ya no fuera tan categórica, pero gracias a ella se iban a poder explicar cosas que en su día nadie podía.

1.2.1. Explicando el tiempo propio: Paradoja de los gemelos

En esta sección intentaré explicar un poco mejor el concepto de **tiempo propio** con una historia que no les dejará indiferentes. Se trata de la paradoja de los gemelos o mellizos.

Supongamos la existencia de dos mellizos, Estrella y Saturno. Ellos nacieron el mismo día y a la misma hora, por tanto podemos asegurar que tienen el mismo reloj biológico, es decir, el tic-tac de su reloj va a la misma velocidad en Estrella que en Saturno.

Supongamos también que Estrella es astronauta, y digamos que a Saturno le dan miedo las alturas, no digamos ya los aviones o cualquier cosa parecida.

Estrella se decide a viajar a α-Centauro, la estrella más próxima a la Tierra, que está a 4 años luz, pero su hermano Saturno no es tan aventurero, y decide quedarse en casa.

Estrella tiene una nave muy rápida, muy muy rápida, que viaja a $0{,}8c$; es decir, a unos 240.000 km/s, y ahora nos preguntamos, ¿cuánto tardará Estrella en llegar a α-Centauro?

Aquí es donde está la paradoja, ya que como veremos a continuación, depende de quién lo mida, como hemos adelantado en alguna ocasión en este primer capítulo.

Ya sabemos que el tiempo es relativo, y que el espacio también, luego tendremos que definir dos sistemas de referencia, uno para Estrella, y otro para Saturno. Sea $\mathcal{S}$ el sistema de Saturno, que será nuestro observador $\mathcal{O}$, y sea $\mathcal{S}'$, el sistema de Estrella, que será la observadora $\mathcal{O}'$.

Veamos los dos puntos de vista. Empecemos por **Saturno**:

- Saturno observa desde la Tierra (sistema referencial $\mathcal{S}$) que su hermana viaja en su nave (sistema referencial $\mathcal{S}'$) a una velocidad de $0{,}8c$, $\beta = 0{,}8$ en unidades geométricas, y que tarda 5 años ($4/0{,}8 = 5$ de $t = e/v$) en ir y 5 años en volver, es decir, el tiempo que tarda Estrella en el viaje de ida y vuelta a α-Centauro, para Saturno, son 10 años, luego $T = 10$, donde este tiempo está medido por el observador $\mathcal{O}$, con respecto al sistema referencial $\mathcal{S}$. Es decir, para Saturno, en la Tierra, han pasado 10 años.

- Ahora bien, si usamos la Ecuación 1.13 con $T = 5$, para la ida y $T = 5$ para la vuelta, tenemos

  Ida:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow 5 = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow T_0 = 5\sqrt{1-\beta^2} = 5\sqrt{1-0{,}8^2} =$$
$$5\sqrt{1-0{,}64} = 5\sqrt{0{,}36} = 5 \cdot 0{,}6 = 3$$

Vuelta:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow 5 = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow T_0 = 5\sqrt{1-\beta^2} = 5\sqrt{1-(-0{,}8)^2} =$$

$$5\sqrt{1-0{,}64} = 5\sqrt{0{,}36} = 5 \cdot 0{,}6 = 3$$

Luego el tiempo que ha transcurrido para Estrella, medido en su sistema de referencia, es decir en $\mathcal{S}'$, son $3+3=6$ años, y no 10. Por tanto, ahora mismo, ¡Estrella es 4 años más joven que su hermano mellizo Saturno! Pero la cosa no acaba aquí.

Ahora vamos a desarrollar el punto de vista de **Estrella**:

- Supongamos ahora que estamos en la nave de Estrella, nosotros no sentimos la velocidad, luego lo que vemos es que la Tierra se aleja, y por tanto, nosotros nos sentimos "quietos".Usando la fórmula de la Ecuación 1.10, observamos que $L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = 4\sqrt{1-0{,}8^2} = 4\sqrt{1-0{,}64} = 4\sqrt{0{,}36} = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$, es decir, para Estrella, la distancia que tiene que recorrer hasta α-Centauro son 2.4 años luz, luego el tiempo que tardará en la ida será $2{,}4/0{,}8 = 3$ ($t = e/v$), por tanto tardará 6 años en ir y volver, luego $T = 6$.

- Ahora bien, volvemos a repetir el razonamiento anterior, si usamos la Ecuación 1.13, con $T = 3$ para la ida y $T = 3$ para la vuelta, tenemos

  Ida:

  $$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow 3 = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow T_0 = 3\sqrt{1-\beta^2} = 3\sqrt{1-0{,}8^2} =$$

  $$3\sqrt{1-0{,}64} = 3\sqrt{0{,}36} = 3 \cdot 0{,}6 = 1{,}8$$

  Vuelta:

  $$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow 3 = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow T_0 = 3\sqrt{1-\beta^2} = 6\sqrt{1-(-0{,}8)^2} =$$

  $$3\sqrt{1-0{,}64} = 3\sqrt{0{,}36} = 3 \cdot 0{,}6 = 1{,}8$$

  Luego el tiempo que ha transcurrido para Saturno, medido en su sistema de referencia, es decir en $\mathcal{S}$, son $1{,}8 + 1{,}8 = 3{,}6$ años, y no 6. Por tanto, ahora mismo, ¡Saturno es 2,4 años más joven que su hermana melliza Estrella!

Es decir, para Estrella, Saturno es más joven, y para Saturno, Estrella es más joven. ¡Vaya paradoja!

He de decir que todo tiene truco, ya que todas estas fórmulas son correctas cuando hablamos de dos sistemas de referencia <u>inerciales</u>, pero ¿la nave de Estrella es un sistema de referencia inercial?

Efectivamente, la respuesta es **no**, ya que la nave de Estrella para poder dar la vuelta sufre una cambio de aceleración, luego su sistema de referencia cambia, no es un sistema de referencia inercial, por tanto, hasta la ida, todo es cierto, pero a la vuelta, el punto de vista de Estrella carece de sentido. Así que sólo tenemos en cuenta el punto de vista de Saturno, es decir, Estrella es 4 años más joven que él.

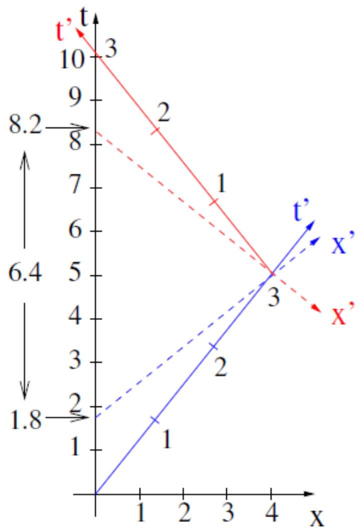

Figura 1.5: Espacio-tiempo de Estrella desde el punto de vista de Saturno [4]

En la Figura 1.5 podemos observar el diagrama espacio-temporal del viaje que hace Estrella desde el punto de vista de Saturno, es decir, desde la Tierra, donde los ejes (x, t) son los correspondientes al sistema $\mathcal{S}$ y los ejes (x', t') son los correspondientes al sistema $\mathcal{S}'$. Como podemos observar y como ya hemos dicho antes, el sistema de referencia de Estrella cambia según sea la ida o la vuelta.

Vemos que cuando para Saturno han transcurrido 10 años (eje t vertical), para Estrella han transcurrido tan solo 6 años (ejes t' azul y t' rojo), por lo tanto parece que el tiempo para Estrella va más despacio que para Saturno, como hemos dicho antes.

Fijándonos en el diagrama y marcando el instante de tiempo en el que Estrella llega a α- Centauro, realmente para Saturno sólo han pasado 1,8 años, pero en lo que Estrella tarda en dar la vuelta, que para ella serán milésimas de segundo, para Saturno son 6,4 años, por lo tanto, efectivamente, al llegar a la Tierra de nuevo, Estrella es 4 años más joven que Saturno.

Por tanto podemos deducir que realmente no hay paradoja alguna, pues se trata de un simple truco de cambio de sistema inercial, pero estos quebraderos de cabeza, hicieron a muchos replantearse que la Relatividad Especial era un simple bulo y que no estaba fundamentada en nada.

A raíz de la Figura 1.5, también debemos observar que, aunque parezca "anti-intuitivo" la línea recta, es decir, el tiempo de Saturno, es más larga que si recorremos el tiempo de Estrella, que sería ir por el eje t' azul y luego por el rojo. Definamos entonces qué es la longitud de una curva y veremos un teorema que nos recordará a las geodésicas.

Definición 1.12. *Se define la* ***longitud de una curva*** $\boldsymbol{\gamma}$ *entre a y b como*

$$L_a^b(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(u)| du$$

Lema 1.1. *La longitud de una curva* $\boldsymbol{\gamma}$ *parametrizada por su tiempo propio (p.p.a) coincide con el tiempo propio,*

$$L_{\tau_0}^{\tau_1}(\gamma) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} |\gamma'(u)|\, du = \tau_1 - \tau_0$$

[4]Esta imagen está tomada de [6], donde está explicada esta paradoja.

Teorema 1.2 (Propiedad **maximizante** del Tiempo Propio)**.** *Sean A y B dos eventos en el espacio de Minkowski tales que B está en el futuro de A, es decir, el vector $\overrightarrow{AB}$ es temporal y futuro. Entonces*

$$|\overrightarrow{AB}| \geq L(\gamma)$$

donde γ es cualquier curva temporal uniendo A con B. Además, se da la igualdad si, y sólo si, γ es el segmento que une A con B

Demostración.

Dados A, $B \in \mathbb{M}^4$ con el vector $\overrightarrow{AB}$ temporal y futuro. Definimos

$$\overrightarrow{e}_0 := \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}$$

como el vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AB}$.

A continuación, completamos una base ortonormal $\{\overrightarrow{e}_0, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$, donde los tres restantes vectores son espaciales. Elegimos ésta como nuestra base

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $A = (0,0,0,0)$, ya que si fuera cualquier otro punto del espacio-tiempo existiría una traslación que lo llevara a $(0,0,0,0)$. Entonces, tomamos el otro punto B como $B = (t_B, 0, 0, 0)$ donde $t_B > 0$ y donde el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es $|\overrightarrow{AB}| = |(t_B, 0, 0, 0) - (0,0,0,0)| = \sqrt{t_B^2 - 0 - 0 - 0} = t_B$.

Tomamos α un curva temporal cuyas coordenadas son

$$\gamma(u) = (x^0(u),\, x^1(u),\, x^2(u),\, x^3(u))$$

y que además pasa por A y B, esto es, con $\gamma(0) = A$ y $\gamma(u_B) = B$, para algún $u_B \in \mathbb{M}^4$.

La longitud de esta curva es

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_0^{u_B} |\gamma'(u)|\, du = \int_0^{u_B} \sqrt{-\langle \gamma'(u), \gamma'(u) \rangle}\, du \\
&= \int_0^{u_B} \sqrt{\left(\frac{dx^0}{du}\right)^2 - \left(\frac{dx^1}{du}\right)^2 - \left(\frac{dx^2}{du}\right)^2 - \left(\frac{dx^3}{du}\right)^2}\, du \\
&\leq \int_0^{u_B} \sqrt{\left(\frac{dx^0}{du}\right)^2}\, du = \int_0^{u_B} |\frac{dx^0}{du}|\, du \\
&= \int_0^{u_B} \frac{dx^0}{du}\, du = x^0(u_B) - x^0(0) = t_B - 0 = t_B
\end{aligned}$$

ya que

$$\frac{dx^0}{du} > 0 \text{ porque } x^0(u) \text{ es estrictamente creciente respecto de u.}$$

Por tanto,

$$L(\gamma) \leq t_B = |\overrightarrow{AB}|$$

dándose la igualdad si, y solo si,

$$\frac{dx^i}{du} \equiv 0 \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

□

También podemos calcular el ***tiempo propio*** como aquella integral que definíamos en la Definición 1.10, simplificando a dos dimensiones.

Sea $\gamma(u) = (0,0) + u(4,5)$ con $u \in [0,1]$, que será la recta que va desde el punto $(0,0)$ hasta el $(4,5)$, que es donde Estrella da la vuelta (el eje t' azul en la Figura 1.5).

Entonces $|\gamma'(u)| = \sqrt{-\langle \gamma'(u), \gamma'(u) \rangle_L} = \sqrt{-(4^2 - 5^2)} = \sqrt{-(16-25)} = \sqrt{-(-9)} = \sqrt{9} = 3$, por lo que:

$$\tau(u) = \int_0^1 |\gamma'(u)| du = \int_0^1 3du = [3u]_0^1 = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 3$$

Por tanto el **tiempo propio** $\tau = 3$. Es decir, el tiempo que recorre Estrella es de 3 años, cuando para Saturno han pasado 5.

Tomamos ahora $\gamma(u) = (4,5) - u(4,-5)$ con $u \in [0,1]$, que será la recta que va desde el punto $(4,5)$,que es donde Estrella da la vuelta, hasta el $(0,10)$ (el eje t' rojo en la Figura 1.5).

Entonces $|\gamma'(u)| = \sqrt{-\langle \gamma'(u), \gamma'(u) \rangle_L} = \sqrt{-(4^2 - (-5)^2)} = \sqrt{-(16-25)} = \sqrt{-(-9)} = \sqrt{9} = 3$, por lo que:

$$\tau(u) = \int_0^1 |\gamma'(u)| du = \int_0^1 3du = [3u]_0^1 = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 3$$

Por tanto el **tiempo propio** $\tau = 3$. Es decir, el tiempo que recorre Estrella es de 3 años, cuando para Saturno han pasado 5, pero ahora en el otro sentido.

Luego, para Estrella han pasado $3+3 = 6$ años, y para Saturno han pasado $5+5 = 10$, así que estamos en las mismas condiciones que antes y llegamos a la misma conclusión, en la Teoría de la Relatividad Especial, las líneas rectas son más largas que las curvas (Teorema 1.2), que como ya he dicho antes, es una idea algo "anti-intuitiva", por lo que no todo el mundo tomaba esta Teoría como cierta.

Einstein postuló esta Teoría para intentar explicar el comportamiento de la luz, pero para ello, necesitaba que el sistema de referencia fuera inercial, luego realmente, en la Tierra no se podría aplicar, pues la Tierra experimenta la fuerza de la gravedad, por lo que años más tarde, tuvo la que él mismo llama *la idea más feliz de mi vida*. Esta idea fue lo que posteriormente se conoció como el **principio de equivalencia**, que anunciaba que un sistema de referencia no inercial acelerado es indistinguible de uno que esté atravesando un campo gravitatorio.

Formuló entonces la Ecuación de Campo, la cuál pretendía explicar el comportamiento de la luz, pues ésta se curvaba al experimentar una fuerza externa.

Las resoluciones de esta ecuación fueron varias, pero para nuestro cometido, explicar el funcionamiento del GPS, nos interesa la resolución que dio Karl Schwarzschild, pues dentro de que es una solución "simple", calcula con precisión el desfase de tiempos. Otra de las métricas usadas para medir el desfase de tiempos en el GPS es la métrica de Kerr, que será un poco más precisa, ya que ésta sí tiene en cuenta la rotación terrestre, cosa que, como veremos más adelante, Schwarzschild no tiene en cuenta.

Cuando Schwarzschild resolvió la Ecuación de Campo de Einstein, nadie le dio importancia, pues para que su métrica distara de la de Minkowski, el factor $2M/r$, con M la masa de un astro que curva el espacio-tiempo y r el radio que nos separa del centro de este astro, tendría que tener un valor significativo[5].

Por ejemplo para el Sol, con un radio $r = 7 \times 10^8$ m y con una masa $M_{si}^{Sol} = 2 \times 10^{30}$ kg y , que si pasamos a unidades geométricas quedaría:

$$M_{ug}^{Sol} = \frac{G}{c^2} \cdot 2 \times 10^{30} = 7{,}41 \times 10^{-28} \cdot 2 \times 10^{30} = 1482 \text{ m}$$

El factor quedaría:

$$\frac{2M}{r} = \frac{2 \cdot 1482}{7 \times 10^8} = 4{,}23 \times 10^{-6} \approx 0$$

que no es en absoluto significativo.

[5] En el Capítulo 2 veremos por qué este factor es tan importante.

Capítulo 2

Relatividad General

Vamos a deducir una métrica que nos será muy útil en este nuevo capítulo. Esta es la métrica de Schwarzschild, que proviene de la resolución de la *Ecuación de Campo de Einstein*. Decir que ahora, suponemos un espacio-tiempo curvo, donde la curvatura depende de una masa M, que será estática y esféricamente simétrica. Recordar que siempre estaremos trabajando en unidades geométricas. Previo a esto, vemos algunos conceptos.

2.1. Movimiento de una partícula a velocidad baja en un campo débil

Antes de empezar con la solución de Schwarzschild, tenemos que estudiar el movimiento de una partícula a velocidad baja (en comparación con la luz) en un campo débil. La Tierra se considera un campo débil, pues la fuerza de la gravedad $g_{si} = 9{,}8$ m/s^2 es en unidades geométricas

$$g_{ug} = \frac{9{,}8}{c^2} = \frac{9{,}8}{3 \times 10^8} = 1{,}0\widehat{8} \times 10^{-16} \approx 0 \text{ m}^{-1}$$

Consideramos entonces una masa puntual M en el origen de un sistema de coordenadas cartesiano 3-dimensional (x, y, z) o (x^1, x^2, x^3) con la métrica euclídea, donde M es esféricamente simétrica y estática. Sea $\overrightarrow{X} = (x,\, y,\, z)$ con

$$r = ||\overrightarrow{X}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

es decir, r es la distancia euclídea desde el vector $\overrightarrow{X}$ hasta la masa M, y sea

$$\overrightarrow{u}_r = \frac{1}{r}\overrightarrow{X}$$

vector unitario en la coordenada r. Por la ley de Gravitación Universal de Newton, la fuerza $\overrightarrow{F}$ sobre una partícula de masa m localizada en $\overrightarrow{X}$ viene dada por

$$\overrightarrow{F} = -\frac{Mm}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

en unidades geométricas. Combinándola con la Segunda Ley de Newton $F = m \cdot a$, y sabiendo que a es la aceleración, que es la segunda derivada del tiempo, obtenemos que

$$\overrightarrow{F} = m\frac{d^2\overrightarrow{X}}{dt^2} \Longrightarrow -\frac{Mm}{r^2}\overrightarrow{u_r} = m\frac{d^2\overrightarrow{X}}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\overrightarrow{X}}{dt^2} = -\frac{M}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Definimos entonces la **función potencial** Φ como

$$\Phi(r) = -\frac{M}{r}, \qquad \text{donde } r > 0.$$

Realmente, $\Phi \equiv \Phi(x, y, z)$, pero depende únicamente de r por la simetría esférica de la masa M con la que estamos trabajando. Recordamos que Φ se define así en unidades geométricas.

El gradiente de Φ será entonces:

$$\nabla\Phi(x, y, z) = (\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}),$$

y como

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{M}{r^2}\frac{x^i}{r} = \frac{Mx^i}{r^3}$$

para cada $i = 1$, 2, 3, ya que

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}||\overrightarrow{X}|| = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{X}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2x^i}{2\left(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{X}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^i}{r}$$

Por lo tanto el gradiente queda:

$$\nabla\Phi(x, y, z) = (\frac{Mx}{r^3}, \frac{My}{r^3}, \frac{Mz}{r^3}) = \frac{M}{r^3}(x, y, z) = \frac{M}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\frac{d^2\overrightarrow{X}}{dt^2}.$$

de donde se deduce el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$$

Cambiamos la notación de las coordenadas (x, y, z) por (x^1, x^2, x^3), y entonces el sistema queda

$$\frac{d^2x^1}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}$$

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2x^3}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}$$

Añadimos la cuarta dimensión: el tiempo, es decir, tomamos el espacio $\mathbb{R}^4$ con coordenadas $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, siendo $x_0 = t$. Además, tomamos la métrica de Minkowski, es decir, la del producto Lorentziano y nos situamos en el espacio $\mathbb{M}^4$ con la métrica

$$g = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

o con la nueva notación

$$g = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

donde M, recordemos, está situada en el origen, es esféricamente simétrica y estática, luego cualquier derivada con respecto al tiempo, $t = x_0$, va a ser nula.

Sea entonces $\alpha(\tau) = (x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau))$ la trayectoria de una partícula (suponemos que la trayectoria es geodésica) en el espacio-tiempo, donde τ será el tiempo propio de la partícula. Entonces, la trayectoria de la partícula vendrá dada por la expresión

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} + \sum_{i,j=0}^{3} \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}\Gamma_{ij}^k = 0 \text{ para } k = 0, 1, 2, 3$$

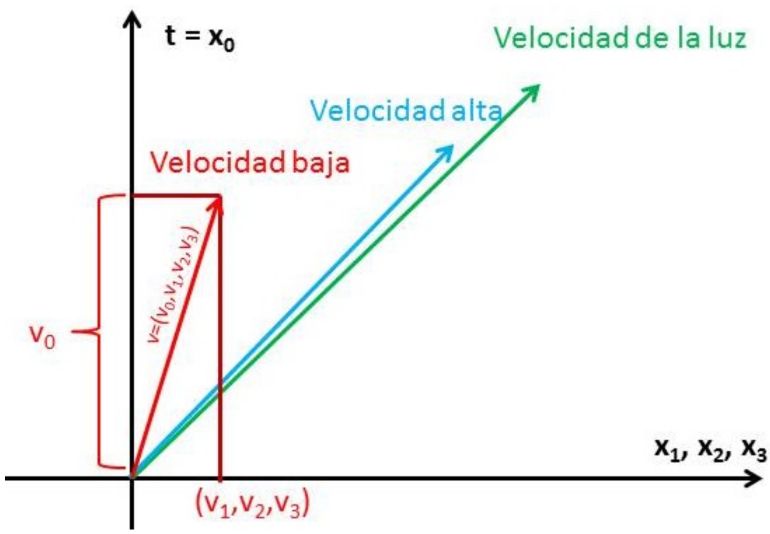

Figura 2.1: Velocidad de la partícula

Observando la Figura 2.1, que representa los vectores de la velocidad de curvas a altas y bajas velocidades, vemos que

$$v = \alpha'(\tau) = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau}\right)$$

tiene mucha pendiente, es decir, que las componentes correspondientes a (x^1, x^2, x^3), son muy pequeñas, y por supuesto mucho más pequeñas que 1, pues si la pendiente fuera 1, se trataría de un vector luminoso, es decir, sería la velocidad de la luz.

Por lo tanto,

$$|\frac{dx^i}{d\tau}| \approx 0, \text{ con } i = 1, 2, 3$$

por lo que podemos deducir que la trayectoria de la partícula será no nula cuando $i = j = 0$.

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} + \left(\frac{dx_0}{d\tau}\right)^2 \Gamma^k_{00} = \frac{d^2x^k}{d\tau^2} + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \Gamma^k_{00} = 0 \tag{2.2}$$

Ahora tenemos que calcular por tanto cada elemento de esta ecuación. Empezamos con Γ^k_{00} y para ello usaremos la fórmula de los ***símbolos de Christoffel*** dada por

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) = \Gamma^k_{ji}$$

En nuestro caso, como el campo es **estático**,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = 0 \,\forall i, j$$

luego

$$\Gamma^k_{00} = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{3} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{0l}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{3} g^{kl}\left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^l}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{3} g^{kl}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^l}$$

Como hemos comentado, nuestro marco de referencia es un campo **débil**, asemejándose nuestra métrica a la de Minkowski, pero con una ligera perturbación: en ella no hay fuerzas externas, pues estaríamos en un sistema inercial, y en nuestro caso sí las hay. No obstante, como hemos visto anteriormente, la gravedad era prácticamente nula en unidades geométricas, por lo que la fuerza que ejerce es débil.

Sea entonces

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\eta^{ij})$$

la matriz de la métrica de Minkowski, que es su propia inversa. Entonces definimos nuestra métrica de un campo débil como $\boxed{g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}}$, donde h_{ij} es una leve perturbación, y que tendrá inversa $\boxed{g^{ij} = \eta^{ij} + p^{ij}}$ donde p^{ij} es otra leve perturbación, casi despreciable.

Tomamos entonces la métrica definida por g, y sustituimos en Γ^k_{00}

$$\Gamma^k_{00} = -\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{3} g^{kl}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^l} \approx -\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{3} \eta^{kl}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^l}$$

ya que

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^l} = \frac{\partial(\eta_{00} + h_{00})}{\partial x^l} = \frac{\partial \eta_{00}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{00}}{\partial x^l} = \frac{\partial\, 1}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{00}}{\partial x^l} = \frac{\partial h_{00}}{\partial x^l}$$

y despreciamos $p^{kl} \quad \forall k, l$.

Además, como $\eta^{kl} = 0\,\forall k \neq l$, tenemos

$$\Gamma^k_{00} \approx -\frac{1}{2}\eta^{kk}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k}$$

Sustituimos Γ^k_{00} en la Ecuación 2.2 y nos queda

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \eta^{kk}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^k}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \eta^{kk}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k}$$

Diferenciamos ahora entre dos casos

- Si $\boxed{k = 0}$

  $$\frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} = \frac{\partial h_{00}}{\partial t} = 0$$

  ya que el campo es estático, luego

  $$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$$

  Integrando esta expresión llegamos a

  $$\frac{dt}{d\tau} = \lambda \text{ con } \lambda \text{ constante} \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\lambda}$$

- Si $\boxed{k = 1, 2, 3}$, sabemos que

  $$\frac{dx^k}{dt} = \frac{dx^k}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\lambda}\frac{dx^k}{d\tau}$$

  Derivamos ahora esta expresión con respecto de t otra vez.

  $$\frac{d^2x^k}{dt^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{d^2x^k}{d\tau^2}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = \frac{\frac{d^2x^k}{d\tau^2}}{(\frac{dt}{d\tau})^2} \tag{2.3}$$

  Como

  $$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \eta^{kk}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \quad \text{y} \quad \eta^{kk} = -1 \quad \text{para } k = 1, 2, 3$$

entonces, por la Ecuación 2.3

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k}$$

Y por el sistema de ecuaciones 2.1, podemos deducir que

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \Rightarrow \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} = 2\frac{\partial \Phi}{\partial x^k}$$

Integrando esta expresión $\forall k$ obtenemos

$$h_{00} = 2\Phi + L$$

Calculamos L, sabiendo que $\Phi(r) = -M/r$

$$\text{Si } r \to \infty \begin{cases} \Phi(r) \to 0 \text{ por la definición de potencial gravitatorio} \\ h_{00}(r) \to 0 \text{ porque la perturbación se hace cada vez más pequeña} \end{cases}$$

Luego si sustituimos $h_{00} = 2\Phi + L \Rightarrow 0 = 2 \cdot 0 + L \Rightarrow L = 0$. Por tanto

$$h_{00} = 2\Phi$$

De donde, sabiendo que $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$ y que $\eta_{00} = 1$, se deduce que

$$g_{00} = 1 + 2\Phi \Rightarrow g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} \tag{2.4}$$

Luego tenemos el primer coeficiente de la métrica de un campo débil centrado en una masa M que está situada en el origen, estática y esféricamente simétrica.

Una vez repasados los conceptos previos y puestos en situación, pasamos a calcular la métrica de Schwarzschild, teniendo en cuenta que nuestro marco de referencia es también un campo débil y por tanto el coeficiente g_{00} de la métrica de Schwarzschild va a ser el mismo que el g_{00} que acabamos de deducir.

2.2. La Solución de Schwarzschild

La ***Solución de Schwarzschild***, parte de la Ecuación de Campo de Einstein $Ric_{ij} = 0\ \forall i, j$, en el vacío (la deducción de esta ecuación se encuentra en [4]). Al resolver esta ecuación, introdujo la métrica gracias a la cuál podemos hoy día calcular todo lo necesario para que nuestro GPS funcione correctamente. Para más información acerca de la deducción de Schwarzschild, consultar [3].

Partiendo de la métrica Minkowski

$$g = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Ya que nuestro marco es un campo estático y con una masa M centrada en el origen esféricamente simétrica y estática, será conveniente reemplazar las coordenadas espaciales cartesianas (x, y, z) por las coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ)

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta,$$
$$y = \rho \sin \phi \sin \theta,$$
$$z = \rho \cos \phi.$$

Definimos $\overrightarrow{X} = (x, y, z)$, como el mostrado en la Figura 2.2,

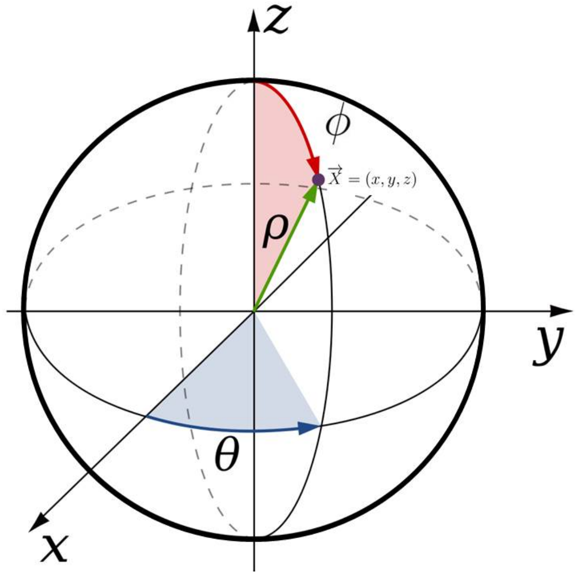

Figura 2.2: Coordenadas esféricas

Entonces, se tiene que $\rho = ||\overrightarrow{X}||$, ϕ es el ángulo entre $\overrightarrow{X}$ y el eje positivo z, a lo que llamaremos colatitud, y θ es el ángulo entre el plano $z = 0$ y el eje positivo x, lo que se llamará longitud.

Derivando las ecuaciones del cambio de coordenadas anterior, obtenemos

$$dx = \sin \phi \cos \theta \, d\rho + \rho \cos \phi \cos \theta \, d\phi - \rho \cos \phi \sin \theta \, d\theta,$$
$$dy = \sin \phi \sin \theta \, d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta \, d\phi + \rho \cos \phi \cos \theta \, d\theta,$$
$$dz = \cos \phi \, d\rho - \rho \sin \phi \, d\phi,$$

y sustituyendo en la métrica de Minkowski, ésta se puede reescribir como

$$g = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 \, d\phi^2 - \rho^2 \sin^2 \phi \, d\theta^2.$$

Entonces g sólo dependerá de ρ, es decir, del radio de la esfera, ya que el campo es estático y M sólo depende del radio, pues es esféricamente simétrica, por lo que podemos modificar la métrica para que quede:

$$g = U(\rho)dt^2 - V(\rho)d\rho^2 - W(\rho) \left(\rho^2 d\phi^2 + \rho^2 \sin^2 \phi d\theta^2 \right)$$

donde U, V y W son funciones positivas que dependen de ρ. Son positivas para que el índice de la métrica se mantenga en 1. Hacemos el cambio de variable

$$r = \rho\sqrt{W(\rho)}$$

y defino entonces

$$A(r) = U(\rho(r))$$

y

$$B(r) = \frac{V(\rho(r))}{\left(\frac{dr}{d\rho}\right)^2} = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 V(\rho(r))$$

y teniendo en cuenta que

$$dr^2 = \left(\frac{dr}{d\rho}\right)^2 d\rho^2 \Rightarrow d\rho^2 = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 dr^2$$

y que $r \approx \rho$, sustituyendo en la métrica g, tenemos

$$\begin{aligned} g &= U(\rho(r))dt^2 - V(\rho(r))d\rho^2 - W(\rho)\left(\rho^2 d\phi^2 + \rho^2 \sin^2\phi d\theta^2\right) \\ &= A(r)dt^2 - B(r)\left(\frac{dr}{d\rho}\right)^2\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 dr^2 - \left(r^2 d\phi^2 + r^2\sin^2\phi d\theta^2\right) \\ &= A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\phi^2 - r^2\sin^2\phi d\theta^2 \end{aligned}$$

donde A y B son funciones positivas, pues U,V y W lo son, por lo tanto las podemos expresar como una exponencial de la forma

$$A(r) = e^{2m(r)} \qquad \text{y} \qquad B(r) = e^{2n(r)}$$

Ahora tenemos que calcular $A(r)$ y $B(r)$ en función de la base (t, r, ϕ, θ), y para ello nos ayudaremos de los cálculos de la Sección 2.1. En estos cálculos, llegábamos a la conclusión de que

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r}$$

donde M es constante, luego vamos a intentar calcular qué es $g_{00} = A(r)$ en este nuevo marco, para concluir obteniendo los coeficientes de la ***métrica de Schwarzschild***.

La matriz de la métrica queda finalmente así

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e^{2m(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2n(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\phi \end{pmatrix}$$

con inversa

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^{2m(r)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e^{2n(r)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\sin^2\phi} \end{pmatrix}$$

Por tanto los coeficientes no nulos que nos interesan para calcular $Ric_{ij} = 0$, identificando (t, r, ϕ, θ) con (x^0, x^1, x^2, x^3) son

$$g_{00} = e^{2m(r)} \qquad g_{11} = -e^{2n(r)} \qquad g_{22} = -r^2 \qquad g_{33} = -r^2 \sin^2\phi$$

$$g^{00} = \frac{1}{e^{2m(r)}} \qquad g^{11} = -\frac{1}{e^{2n(r)}} \qquad g^{22} = -\frac{1}{r^2} \qquad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2\phi}$$

Es decir, en esta métrica no existen coeficientes mixtos.

Procedemos ahora a calcular los ***símbolos de Christoffel*** con la fórmula

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) = \Gamma^k_{ji}$$

Como $g^{ij} = 0\, \forall i \neq j$, es claro que los símbolos de Christoffel sólo van a existir cuando $l = k$, luego podemos eliminar el sumatorio y hacer $l = k$.

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

Además, como $g_{ij} = 0\, \forall i \neq j$, también podemos distinguir tres casos:

1) Si i, j, k distintos entre sí, entonces $\Gamma^k_{ij} = 0$

2) Si $i = k \neq j$ o $i = k = j$

$$\Gamma^k_{kj} = \frac{1}{2}g^{kk}\left(\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{kk}\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^j} = \Gamma^k_{jk} \tag{2.5}$$

3) Si $i = j$, con $i \neq k$,

$$\Gamma^k_{ii} = \frac{1}{2}g^{kk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\right) = -\frac{1}{2}g^{kk}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \tag{2.6}$$

Procedemos a calcular los símbolos de Christoffel del tipo 2):

$$\Gamma^0_{0j} = \Gamma^0_{j0}\begin{cases} \text{si } j = 0 \quad \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = 0 \\[2ex] \text{si } j = 1 \quad \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \frac{1}{2e^{2m(r)}}\frac{\partial e^{2m(r)}}{\partial r} = \frac{1}{2e^{2m(r)}}2m'(r)e^{2m(r)} = m'(r) = \Gamma^0_{10} \\[2ex] \text{si } j = 2 \quad \Gamma^0_{02} = \frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} = 0 = \Gamma^0_{20} \\[2ex] \text{si } j = 3 \quad \Gamma^0_{03} = \frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} = 0 = \Gamma^0_{30} \end{cases}$$

$$\Gamma^1_{1j} = \Gamma^1_{j1}\begin{cases} \text{si } j = 0 \quad \Gamma^1_{10} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = 0 = \Gamma^1_{01} \\[2ex] \text{si } j = 1 \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{1}{2(-e^{2n(r)})}\frac{\partial(-e^{2n(r)})}{\partial r} = \frac{1}{2(-e^{2n(r)})}2n'(r)(-e^{2n(r)}) = n'(r) \\[2ex] \text{si } j = 2 \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 0 = \Gamma^1_{21} \\[2ex] \text{si } j = 3 \quad \Gamma^1_{13} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = 0 = \Gamma^1_{31} \end{cases}$$

$$\Gamma^2_{2j}=\Gamma^2_{j2}\begin{cases} \text{si } j=0 \quad \Gamma^2_{20}=\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^0}=0=\Gamma^2_{02} \\ \\ \text{si } j=1 \quad \Gamma^2_{21}=\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=\frac{1}{2(-r^2)}\frac{\partial(-r^2)}{\partial r}=\frac{1}{2(-r^2)}(-2r)=\frac{1}{r}=\Gamma^2_{12} \\ \\ \text{si } j=2 \quad \Gamma^2_{22}=\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}=0 \\ \\ \text{si } j=3 \quad \Gamma^2_{23}=\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}=0=\Gamma^2_{32} \\ \end{cases}$$

$$\Gamma^3_{3j}=\Gamma^3_{j3}\begin{cases} \text{si } j=0 \quad \Gamma^3_{30} & =\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^0}=0=\Gamma^3_{03} \\ \\ \text{si } j=1 \quad \Gamma^3_{31} & =\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}=\frac{1}{2(-r^2\sin^2\phi)}\frac{\partial(-r^2\sin^2\phi)}{\partial r}=\frac{1}{2(-r^2\sin^2\phi)}(-2r\sin^2\phi)=\frac{1}{r}=\Gamma^3_{13} \\ \\ \text{si } j=2 \quad \Gamma^3_{32} & =\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=\frac{1}{2(-r^2\sin^2\phi)}\frac{\partial(-r^2\sin^2\phi)}{\partial \phi}=\frac{1}{2(-r^2\sin^2\phi)}(-2r^2\sin\phi\cos\phi)= \\ & =\frac{\cos\phi}{\sin\phi}=\cot\phi=\Gamma^3_{23} \\ \\ \text{si } j=3 \quad \Gamma^3_{33} & =\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}=0 \\ \end{cases}$$

Procedemos a calcular los símbolos de Christoffel del tipo 3):

$$\Gamma^k_{00}=\begin{cases} \text{si } k=1 \quad \Gamma^1_{00}=-\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}=-\frac{1}{2(-e^{2n(r)})}\frac{\partial e^{2m(r)}}{\partial r}=\frac{1}{2(-e^{2n(r)})}2m'(r)e^{2m(r)}=e^{2(m(r)-n(r))}m'(r) \\ \\ \text{si } k=2 \quad \Gamma^2_{00}=-\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^2}=0 \\ \\ \text{si } k=3 \quad \Gamma^3_{00}=-\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^3}=0 \\ \end{cases}$$

$$\Gamma^k_{11}=\begin{cases} \text{si } k=0 \quad \Gamma^0_{11}=-\frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}=0 \\ \\ \text{si } k=2 \quad \Gamma^2_{11}=-\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=0 \\ \\ \text{si } k=3 \quad \Gamma^3_{11}=-\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}=0 \\ \end{cases}$$

$$\Gamma^k_{22}=\begin{cases} \text{si } k=0 \quad \Gamma^0_{22}=-\frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^0}=0 \\ \\ \text{si } k=1 \quad \Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-\frac{1}{2(-e^{2n(r)})}\frac{\partial(-r^2)}{\partial r}=\frac{1}{2(-e^{2n(r)})}(-2r)=-\frac{r}{e^{2n(r)}} \\ \\ \text{si } k=3 \quad \Gamma^3_{22}=-\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}=0 \\ \end{cases}$$

$$\Gamma^k_{33} = \begin{cases} \text{si } k=0 \quad \Gamma^0_{33} = -\frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} = 0 \\ \\ \text{si } k=1 \quad \Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2(-e^{2n(r)})} \frac{\partial(-r^2 \sin^2\phi)}{\partial r} = \frac{1}{2(-e^{2n(r)})}(-2r\sin^2\phi) = -\frac{r\sin^2\phi}{e^{2n(r)}} \\ \\ \text{si } k=2 \quad \Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} = -\frac{1}{2(-r^2)} \frac{\partial(-r^2 \sin^2\phi)}{\partial \phi} = \frac{1}{2(-r^2)}(-2r^2\sin\phi\cos\phi) = -\sin\phi\cos\phi \\ \end{cases}$$

Por lo tanto los únicos símbolos de Christoffel no nulos, teniendo en cuenta que $m(r) = m$ y $n(r) = n$, son:

$$\begin{array}{ll} \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = m' & \Gamma^1_{00} = e^{2(m-n)}m' \\ \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} & \Gamma^1_{11} = n' \\ \\ \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} & \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{e^{2n}} = -re^{-2n} \\ \\ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\phi = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} & \Gamma^1_{33} = -\frac{r\sin^2\phi}{e^{2n}} = -re^{-2n}\sin^2\phi \\ \\ & \Gamma^2_{33} = -\sin\phi\cos\phi \end{array}$$

Calculamos ahora los tensores Ric_{ij}, que según la Ecuación de Campo de Einstein tienen que ser cero $\forall i, j$. Usamos la fórmula

$$Ric_{ij} = \sum_{l,k} \left(\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{kj}}{\partial x^i} + \Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{kl} - \Gamma^l_{kj}\Gamma^k_{il} \right)$$

Nos interesa calcular los $Ric_{ii} = 0$, es decir, Ric_{00}, Ric_{11}, Ric_{22} y Ric_{33}. Para ello, fijaremos k, y después l, y sumaremos el total:

Empezamos por $\boxed{Ric_{00}}$

$$Ric_{00} = \sum_{l,k} \left(\frac{\partial \Gamma^k_{00}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{k0}}{\partial x^0} + \Gamma^l_{00}\Gamma^k_{kl} - \Gamma^l_{k0}\Gamma^k_{0l} \right)$$

- Fijamos $\boxed{k=0}$.

$$\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial x^0} + \Gamma^l_{00}\Gamma^0_{0l} - \Gamma^l_{00}\Gamma^0_{0l} \right) = 0 \quad \forall l$$

- Fijamos $\boxed{k=1}$.

$$\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{10}}{\partial x^0} + \Gamma^l_{00}\Gamma^1_{1l} - \Gamma^l_{10}\Gamma^1_{0l} \right)$$

de donde

$$\frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial x^1} = \frac{\partial e^{2(m-n)}m'}{\partial r} = m''e^{2(m-n)} + 2e^{2(m-n)}(m'-n')m' = e^{2(m-n)}\left(m'' + 2(m')^2 - 2n'm'\right)$$

- Si $l = 0$
$$\Gamma^0_{00}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} = 0 - m'e^{2(m-n)}m' = -(m')^2 e^{2(m-n)}$$
- Si $l = 1$
$$\Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{01} = e^{2(m-n)}m'n' - 0 = n'm'e^{2(m-n)}$$
- Si $l = 2$
$$\Gamma^2_{00}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{10}\Gamma^1_{02} = 0 - 0 = 0$$
- Si $l = 3$
$$\Gamma^3_{00}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{10}\Gamma^1_{03} = 0 - 0 = 0$$

Luego sumando todo para $k = 1$ tenemos
$$e^{2(m-n)}\left(m'' - m'n' + (m')^2\right) \tag{2.7}$$

- Fijamos $\boxed{k = 2}$.
$$\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^2_{00}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{20}}{\partial x^0} + \Gamma^l_{00}\Gamma^2_{2l} - \Gamma^l_{20}\Gamma^2_{0l} \right)$$

- Si $l = 0$
$$\Gamma^0_{00}\Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{00} = 0 - 0 = 0$$
- Si $l = 1$
$$\Gamma^1_{00}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{20}\Gamma^2_{01} = e^{2(m-n)}m'\frac{1}{r} - 0 = e^{2(m-n)}\frac{m'}{r}$$
- Si $l = 2$
$$\Gamma^2_{00}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{02} = 0 - 0 = 0$$
- Si $l = 3$
$$\Gamma^3_{00}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{20}\Gamma^2_{03} = 0 - 0 = 0$$

Luego sumando todo para $k = 2$, tenemos
$$e^{2(m-n)}\frac{m'}{r} \tag{2.8}$$

- Fijamos $\boxed{k = 3}$.
$$\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^3_{00}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^3_{30}}{\partial x^0} + \Gamma^l_{00}\Gamma^3_{3l} - \Gamma^l_{30}\Gamma^3_{0l} \right)$$

- Si $l = 0$
$$\Gamma^0_{00}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{00} = 0 - 0 = 0$$
- Si $l = 1$
$$\Gamma^1_{00}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{30}\Gamma^3_{01} = e^{2(m-n)}m'\frac{1}{r} - 0 = e^{2(m-n)}\frac{m'}{r}$$
- Si $l = 2$
$$\Gamma^2_{00}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{30}\Gamma^3_{02} = 0 - 0 = 0$$

- Si $l = 3$

$$\Gamma^3_{00}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{03} = 0 - 0 = 0$$

Luego sumando todo para $k = 3$, tenemos

$$e^{2(m-n)}\frac{m'}{r} \tag{2.9}$$

Por tanto, sumando las ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9, obtenemos

$$Ric_{00} = e^{2(m-n)}\left(m'' - m'n' + (m')^2 + \frac{2m'}{r}\right)$$

Continuamos por $\boxed{Ric_{11}}$

$$Ric_{11} = \sum_{l,k}\left(\frac{\partial\Gamma^k_{11}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^k_{k1}}{\partial x^1} + \Gamma^l_{11}\Gamma^k_{kl} - \Gamma^l_{k1}\Gamma^k_{1l}\right)$$

- Fijamos $\boxed{k = 0}$.

$$\sum_l\left(\frac{\partial\Gamma^0_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial\Gamma^0_{01}}{\partial x^1} + \Gamma^l_{11}\Gamma^0_{0l} - \Gamma^l_{01}\Gamma^0_{1l}\right)$$

de donde

$$-\frac{\partial\Gamma^0_{01}}{\partial x^1} = -\frac{\partial m'}{\partial r} = -m''$$

- Si $l = 0$

$$\Gamma^0_{11}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{01}\Gamma^0_{10} = 0 - m'm' = -(m')^2$$

- Si $l = 1$

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{11} = n'm' - 0 = n'm'$$

- Si $l = 2$

$$\Gamma^2_{11}\Gamma^0_{02} - \Gamma^2_{01}\Gamma^0_{12} = 0 - 0 = 0$$

- Si $l = 3$

$$\Gamma^3_{11}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{01}\Gamma^0_{13} = 0 - 0 = 0$$

Luego sumando todo para $k = 0$ tenemos

$$-m'' + m'n' - (m')^2 \tag{2.10}$$

- Fijamos $\boxed{k = 1}$.

$$\sum_l\left(\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial x^1} + \Gamma^l_{11}\Gamma^1_{1l} - \Gamma^l_{11}\Gamma^1_{1l}\right) = 0 \quad \forall l$$

- Fijamos $\boxed{k=2}$.

$$\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial x^1} + \Gamma^l_{11}\Gamma^2_{2l} - \Gamma^l_{21}\Gamma^2_{1l} \right)$$

de donde

$$-\frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial x^1} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} = \frac{1}{r^2}$$

  - Si $l=0$

$$\Gamma^0_{11}\Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{21}\Gamma^2_{10} = 0 - 0 = 0$$

  - Si $l=1$

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{11} = n'\frac{1}{r} - 0 = \frac{n'}{r}$$

  - Si $l=2$

$$\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12} = 0 - \frac{1}{r}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}$$

  - Si $l=3$

$$\Gamma^3_{11}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{21}\Gamma^2_{13} = 0 - 0 = 0$$

Luego sumando todo para $k=2$, tenemos

$$\frac{n'}{r} \tag{2.11}$$

- Fijamos $\boxed{k=3}$.

$$\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^3_{11}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^3_{31}}{\partial x^1} + \Gamma^l_{11}\Gamma^3_{3l} - \Gamma^l_{31}\Gamma^3_{1l} \right)$$

de donde

$$-\frac{\partial \Gamma^3_{31}}{\partial x^1} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} = \frac{1}{r^2}$$

  - Si $l=0$

$$\Gamma^0_{11}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{31}\Gamma^3_{10} = 0 - 0 = 0$$

  - Si $l=1$

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{11} = n'\frac{1}{r} - 0 = \frac{n'}{r}$$

  - Si $l=2$

$$\Gamma^2_{11}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{31}\Gamma^3_{12} = 0 - 0 = 0$$

  - Si $l=3$

$$\Gamma^3_{11}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{31}\Gamma^3_{13} = 0 - \frac{1}{r}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}$$

Luego sumando todo para $k=3$, tenemos

$$\frac{n'}{r} \tag{2.12}$$

Por tanto, sumando las ecuaciones 2.10, 2.11 y 2.12, obtenemos

$$Ric_{11} = -m'' + m'n' - (m')^2 - \frac{2n'}{r}$$

Seguimos por $\boxed{Ric_{22}}$

$$Ric_{22} = \sum_{l,k} \left(\frac{\partial \Gamma^k_{22}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{k2}}{\partial x^2} + \Gamma^l_{22}\Gamma^k_{kl} - \Gamma^l_{k2}\Gamma^k_{2l} \right)$$

- Fijamos $\boxed{k=0}$.

$$\sum_{l} \left(\frac{\partial \Gamma^0_{22}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^0_{02}}{\partial x^2} + \Gamma^l_{22}\Gamma^0_{0l} - \Gamma^l_{02}\Gamma^0_{2l} \right)$$

  - Si $l=0$
$$\Gamma^0_{22}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{02}\Gamma^0_{20} = 0 - 0 = 0$$
  - Si $l=1$
$$\Gamma^1_{22}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{02}\Gamma^0_{21} = -re^{-2n}m' - 0 = -m're^{-2n}$$
  - Si $l=2$
$$\Gamma^2_{22}\Gamma^0_{02} - \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{22} = 0 - 0 = 0$$
  - Si $l=3$
$$\Gamma^3_{22}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{02}\Gamma^0_{23} = 0 - 0 = 0$$

  Luego sumando todo para $k=0$ tenemos

$$-\,m're^{-2n} \tag{2.13}$$

- Fijamos $\boxed{k=1}$.

$$\sum_{l} \left(\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x^2} + \Gamma^l_{22}\Gamma^1_{1l} - \Gamma^l_{12}\Gamma^1_{2l} \right)$$

  de donde

$$\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial(-re^{-2n})}{\partial r} = -e^{-2n} + 2n'e^{-2n}r = e^{-2n}\left(-1 + 2n'r\right)$$

  - Si $l=0$
$$\Gamma^0_{22}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{12}\Gamma^1_{20} = 0 - 0 = 0$$
  - Si $l=1$
$$\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{21} = -re^{-2n}n' - 0 = -n're^{-2n}$$
  - Si $l=2$
$$\Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} = 0 - \frac{1}{r}\cdot\left(-re^{-2n}\right) = e^{-2n}$$
  - Si $l=3$
$$\Gamma^3_{22}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{12}\Gamma^1_{23} = 0 - 0 = 0$$

  Luego sumando todo para $k=1$, tenemos

$$n're^{-2n} \tag{2.14}$$

- Fijamos $\boxed{k=2}$.

$$\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x^2} + \Gamma^l_{22}\Gamma^2_{2l} - \Gamma^l_{22}\Gamma^2_{2l} \right) = 0 \quad \forall l$$

- Fijamos $\boxed{k=3}$.

$$\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^3_{22}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^3_{32}}{\partial x^2} + \Gamma^l_{22}\Gamma^3_{3l} - \Gamma^l_{32}\Gamma^3_{2l} \right)$$

de donde

$$-\frac{\partial \Gamma^3_{32}}{\partial x^2} = -\frac{\partial \frac{\cos\phi}{\sin\phi}}{\partial \phi} = \frac{1}{\sin^2\phi}$$

  - Si $l=0$

$$\Gamma^0_{22}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{32}\Gamma^3_{20} = 0 - 0 = 0$$

  - Si $l=1$

$$\Gamma^1_{22}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{32}\Gamma^3_{21} = -re^{-2n}\frac{1}{r} - 0 = -e^{-2n}$$

  - Si $l=2$

$$\Gamma^2_{22}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{22} = 0 - 0 = 0$$

  - Si $l=3$

$$\Gamma^3_{22}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{32}\Gamma^3_{23} = 0 - \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\frac{\cos\phi}{\sin\phi} = -\frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi}$$

Luego sumando todo para $k=3$, tenemos

$$-e^{-2n} + \frac{1}{\sin^2\phi} - \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} = -e^{-2n} + \frac{1-\cos^2\phi}{\sin^2\phi} = -e^{-2n} + \frac{\sin^2\phi}{\sin^2\phi} = -e^{-2n} + 1 \quad (2.15)$$

Por tanto, sumando las ecuaciones 2.13, 2.14 y 2.15, obtenemos

$$Ric_{22} = e^{-2n}\left(-m'r + n'r - 1\right) + 1$$

Seguimos por $\boxed{Ric_{33}}$

$$Ric_{33} = \sum_{l,k} \left(\frac{\partial \Gamma^k_{33}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{k3}}{\partial x^3} + \Gamma^l_{33}\Gamma^k_{kl} - \Gamma^l_{k3}\Gamma^k_{3l} \right)$$

- Fijamos $\boxed{k=0}$.

$$\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^0_{33}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^0_{03}}{\partial x^3} + \Gamma^l_{33}\Gamma^0_{0l} - \Gamma^l_{03}\Gamma^0_{3l} \right)$$

  - Si $l=0$

$$\Gamma^0_{33}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{03}\Gamma^0_{30} = 0 - 0 = 0$$

- Si $l = 1$

$$\Gamma^1_{33}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{03}\Gamma^0_{31} = -re^{-2n}\sin^2\phi m' - 0 = - = -m're^{-2n}\sin^2\phi$$

- Si $l = 2$

$$\Gamma^2_{33}\Gamma^0_{02} - \Gamma^2_{03}\Gamma^0_{32} = 0 - 0 = 0$$

- Si $l = 3$

$$\Gamma^3_{33}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{33} = 0 - 0 = 0$$

Luego sumando todo para $k = 0$ tenemos

$$-m're^{-2n}\sin^2\phi \tag{2.16}$$

- Fijamos $\boxed{k = 1}$.

$$\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^3} + \Gamma^l_{33}\Gamma^1_{1l} - \Gamma^l_{13}\Gamma^1_{3l} \right)$$

de donde

$$\frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial(-re^{-2n}\sin^2\phi)}{\partial r} = -\sin^2\phi e^{-2n} + 2n'e^{-2n}r\sin^2\phi = e^{-2n}\sin^2\phi\,(-1 + 2n'r)$$

- Si $l = 0$

$$\Gamma^0_{33}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{13}\Gamma^1_{30} = 0 - 0 = 0$$

- Si $l = 1$

$$\Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{13}\Gamma^1_{31} = -re^{-2n}\sin^2\phi n' - 0 = -n're^{-2n}\sin^2\phi$$

- Si $l = 2$

$$\Gamma^2_{33}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{13}\Gamma^1_{32} = 0 - 0 = 0$$

- Si $l = 3$

$$\Gamma^3_{33}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{33} = 0 - \frac{1}{r}(-re^{-2n}\sin^2\phi) = e^{-2n}\sin^2\phi$$

Luego sumando todo para $k = 1$, tenemos

$$n're^{-2n}\sin^2\phi \tag{2.17}$$

- Fijamos $\boxed{k = 2}$.

$$\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial x^3} + \Gamma^l_{33}\Gamma^2_{2l} - \Gamma^l_{23}\Gamma^2_{3l} \right)$$

de donde

$$-\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^2} = -\frac{\partial(-\sin\phi\cos\phi)}{\partial\phi} = -\cos^2\phi + \sin^2\phi = \sin^2\phi - \cos^2\phi$$

- Si $l = 0$

$$\Gamma^0_{33}\Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{23}\Gamma^2_{30} = 0 - 0 = 0$$

- Si $l = 1$

$$\Gamma^1_{33}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{23}\Gamma^2_{31} = -re^{-2n}\sin^2\phi\frac{1}{r} - 0 = -\sin^2\phi e^{-2n}$$

- Si $l = 2$

$$\Gamma^2_{33}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{23}\Gamma^2_{32} = 0 - 0 = 0$$

- Si $l = 3$

$$\Gamma^3_{33}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{33} = 0 - \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\cdot(-\sin\phi\cos\phi) = cos^2\phi$$

Luego sumando todo para $k = 2$, tenemos

$$\sin^2\phi\left(1 - e^{-2n}\right) \tag{2.18}$$

- Fijamos $\boxed{k = 3}$.

$$\sum_l\left(\frac{\partial\Gamma^3_{33}}{\partial x^3} - \frac{\partial\Gamma^3_{33}}{\partial x^3} + \Gamma^l_{33}\Gamma^3_{3l} - \Gamma^l_{33}\Gamma^3_{3l}\right) = 0 \quad \forall l$$

Por tanto, sumando las ecuaciones 2.16, 2.17 y 2.18, obtenemos

$$Ric_{33} = \left(e^{-2n}\left(-m'r + n'r - 1\right) + 1\right)\sin^2\phi = Ric_{22}\sin^2\phi$$

Con lo que al final nos queda

$$Ric_{00} = e^{2(m-n)}\left(m'' - m'n' + (m')^2 + \frac{2m'}{r}\right) \Rightarrow \frac{Ric_{00}}{e^{2(m-n)}} = m'' - m'n' + (m')^2 + \frac{2m'}{r} \tag{2.19}$$

$$Ric_{11} = -m'' + m'n' - (m')^2 - \frac{2n'}{r} \tag{2.20}$$

$$Ric_{22} = e^{-2n}\left(-m'r + n'r - 1\right) + 1 \tag{2.21}$$

$$Ric_{33} = \left(e^{-2n}\left(-m'r + n'r - 1\right) + 1\right)\sin^2\phi = Ric_{22}\sin^2\phi \tag{2.22}$$

Sumando entonces las ecuaciones 2.19 y 2.20 tenemos que $m' + n' = 0$ de donde, integrando, se deduce $m + n = k$, con k una constante

Si $r \to \infty$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} e^{2m(r)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 1 \text{ ya que tiende a la métrica de Minkowski} \\ e^{2n(r)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 1 \text{ ya que tiende a la métrica de Minkowski} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m \to 0 \\ n \to 0 \end{array}\right.$$

Luego $m + n = 0 = k \;\Rightarrow\; k = 0$, por lo tanto $\boxed{m = -n}$. Luego una vez que tengamos cuánto vale $A(r)$ en función de la base, podremos calcular $B(r)$, ya que, recordemos,

$$A(r) = e^{2m} \quad \text{y} \quad B(r) = e^{2n}$$

Dado que $Ric_{22} = 0 \Rightarrow -Ric_{22} = 0$ y tomando la Ecuación 2.21

$$-Ric_{22} = e^{-2n}(1 + rm' - rn') - 1 = e^{2m}(1 + 2rm') - 1 = 0$$

luego

$$1 = e^{2m}(1 + 2rm') = (re^{2m})'$$

Integrando esta expresión a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$r + C = re^{2m} \Rightarrow e^{2m} = A(r) = 1 + \frac{C}{r}$$

y de aquí se deduce

$$g_{00} = A(r) = 1 + \frac{C}{r}$$

Ademas, como $\boxed{m = -n}$, tenemos que

$$-g_{11} = B(r) = e^{2n} = e^{-2m} = A^{-1}(r) = \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} \Rightarrow g_{11} = -\left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1}$$

Por otro lado, gracias a la Ecuación 2.4, tenemos que

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r}$$

de donde

$$1 - \frac{2M}{r} = 1 + \frac{C}{r} \Rightarrow \frac{-2M}{r} = \frac{C}{r} \Rightarrow C = -2M$$

Luego los coeficientes de la métrica quedan

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} \qquad g_{11} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \qquad g_{22} = -r^2 \qquad g_{33} = -r^2 \sin^2\phi$$

Deduciéndose así la ***métrica de Schwarzschild***

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2 - r^2 \sin^2\phi d\theta^2$$

2.3. Relación entre el tiempo propio de partículas a diferentes alturas

Ahora que ya tenemos una métrica del espacio-tiempo curvo, podemos calcular el tiempo propio de distintas partículas con respecto a esta métrica. Vamos a suponer dos partículas separadas por una distancia h, una en la superficie de la Tierra, y otra a distancia h de la vertical como se expone en la Figura 2.3.

Sea

$$\alpha(u) = (u, r_0, \theta_0, \phi_0)$$

la trayectoria de la partícula que está en la superficie de la Tierra y sea

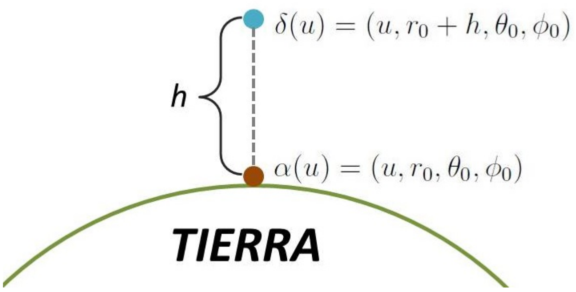

Figura 2.3: Dos partículas separadas por una distancia h

$$\delta(u) = (u, r_0 + h, \theta_0, \phi_0)$$

la trayectoria de la que está a una altura h.

Calculemos el tiempo propio de cada partícula, con la Definición 1.10

$$\begin{aligned} \tau_\alpha(u) &= \int |\alpha'(u)| du = \int |(1,0,0,0)| du = \int \sqrt{1 - \tfrac{2M}{r_0}} du = \sqrt{1 - \tfrac{2M}{r_0}} \int du \\ &= \sqrt{1 - \tfrac{2M}{r_0}} u = u \left(1 - \tfrac{2M}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_\delta(u) &= \int |\delta'(u)| du = \int |(1,0,0,0)| du = \int \sqrt{1 - \tfrac{2M}{r_0+h}} du = \sqrt{1 - \tfrac{2M}{r_0+h}} \int du \\ &= \sqrt{1 - \tfrac{2M}{r_0+h}} u = u \left(1 - \tfrac{2M}{r_0+h}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, despejando u en ambas ecuaciones, podemos relacionar el tiempo propio de una partícula con la otra, despejando u e igualando

$$\left.\begin{array}{l} \tau_\alpha(u) = u \left(1 - \tfrac{2M}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \tau_\delta(u) = u \left(1 - \tfrac{2M}{r_0+h}\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \tau_\alpha(u) \left(1 - \tfrac{2M}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ u = \tau_\delta(u) \left(1 - \tfrac{2M}{r_0+h}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\tau_\alpha(u) \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}} = \tau_\delta(u) \left(1 - \frac{2M}{r_0 + h}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \tau_\alpha(u) \left(1 - \frac{2M}{r_0 + h}\right)^{\frac{1}{2}} = \tau_\delta(u) \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\tau_\alpha(u) = \tau_\delta(u) \left(\frac{1 - \frac{2M}{r_0}}{1 - \frac{2M}{r_0+h}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.23}$$

De manera que, gracias a la métrica de Schwarzschild podemos relacionar el tiempo propio de dos partículas a distintas alturas, cosa que nos será muy útil en el Capítulo 3.

Capítulo 3

El GPS

3.1. Funcionamiento del GPS

Para empezar este nuevo capítulo, primero vamos a hablar de cómo funciona un GPS y en qué consiste realmente el **Sistema de Posicionamiento Global** *(Global Positioning System)*. Tenemos que discernir entre el Sistema de Posicionamiento Global (GPS) como un todo y entre el aparato al que estamos acostumbrados a llamar GPS.

De ahora en adelante, cuando hablemos de GPS será el Sistema de Posicionamiento Global en sí, y para referirnos al aparato que usa el GPS como sistema, usaremos el término *dispositivo GPS*.

El Sistema de Posicionamiento Global *(GPS)* está formado por un conjunto de 24 satélites a 20.200 km sobre la superficie de la Tierra que orbitan alrededor de ella. Este sistema permite determinar en qué posición está un objeto situado en la Tierra con una precisión de unos pocos metros.

La determinación de la posición de un objeto viene dada por tres satélites que se localizan automáticamente desde el dispositivo GPS. Estos satélites envían unas señales indicando la identificación del propio satélite y la hora del reloj de cada uno de ellos para que el dispositivo GPS se sincronice con la hora de los satélites y así calcular el tiempo que le tardan en llegar las señales. Gracias a esto, puede medir la distancia de cada satélite al punto de medición.

Una vez conocidas las distancias del dispositivo GPS a cada uno de los satélites, se puede conocer la posición en coordenadas reales del punto de medición, además de conseguirse una gran exactitud en el reloj del dispositivo, similar a la de los relojes atómicos de los satélites.

El problema que aquí se presenta es que, según como hemos visto en los capítulos anteriores, no es el mismo tiempo el de una partícula (que ahora será nuestro satélite) en la superficie de la Tierra o fuera de ella (habrá un efecto gravitatorio), ni el de una partícula que lleva una velocidad o una que no la lleva (habrá una dilatación del tiempo).

Para que la medición de las coordenadas espacio-temporales del objeto sean correctas, es necesario tener en cuenta, entre otros, estos tres efectos.

- El efecto de la Relatividad Especial, es decir, la dilatación temporal que sufre el reloj del satélite con respecto al reloj del dispositivo GPS situado en la superficie terrestre (Ecuación 1.13).

- El efecto de la Relatividad General en la métrica de Schwarzschild, es decir, la dilatación temporal que sufren los tiempos propios del dispositivo GPS y del satélite (Ecuación 2.23)

- El efecto Sagnac[1], que no entrará dentro de nuestro estudio, pues este efecto es debido a la rotación terrestre, y nosotros nos basamos en la métrica de Schwarzschild, que se encuentra dentro de un marco con una masa M simétricamente esférica y estática, luego no tenemos en cuenta la rotación terrestre. Además, este efecto es mínimo para las mediciones de a pie.

3.2. Relatividad Especial y GPS

Antes de abordar el problema del tiempo desde la Teoría de la Relatividad Especial, supongamos que estamos en un espacio euclídeo dos-dimensional con coordenadas (x, y), y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos satélites a una altura h que se mueven a una velocidad v sobre la superficie terrestre, como se muestra en la Figura 3.1. Sea entonces $\mathcal{C}$ un dispositivo GPS situado en la superficie terrestre.

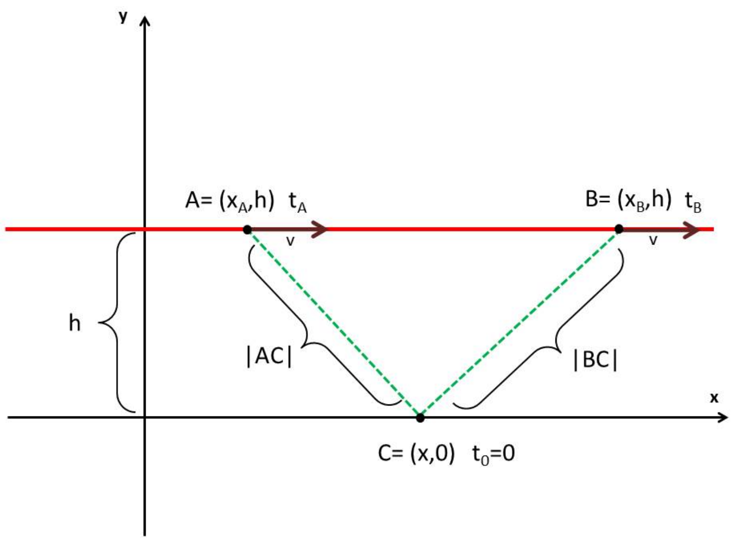

Figura 3.1: Satélites en 2D

[1] Para más información acerca de este efecto, visitar http://mathpages.com/rr/s2-07/2-07.htm

Las coordenadas de cada uno de estos objetos son

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (x_A, h)\\ \mathcal{B} &= (x_B, h)\\ \mathcal{C} &= (x, 0)\end{aligned}$$

Calculamos entonces el espacio que hay entre los objetos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ y entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathcal{AC}}| &= |(x,0)-(x_A,h)| = \sqrt{(x-x_A)^2+(0-h)^2} = \sqrt{(x-x_A)^2+h^2}\\ |\overrightarrow{\mathcal{BC}}| &= |(x,0)-(x_B,h)| = \sqrt{(x-x_B)^2+(0-h)^2} = \sqrt{(x-x_B)^2+h^2}\end{aligned}$$

Esto es el espacio, y como $e = v \cdot t$, tenemos que $e = c \cdot t$, ya que c es la velocidad de propagación de la onda, luego

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-x_A)^2+h^2} &= c \cdot t_A\\ \sqrt{(x-x_B)^2+h^2} &= c \cdot t_B\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned}(x-x_A)^2+h^2 &= c^2 \cdot t_A^2\\ (x-x_B)^2+h^2 &= c^2 \cdot t_B^2\end{aligned}$$

Si igualamos ahora el tiempo en el que los satélites $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ envían la señal, es decir, $t_A = t_B$, entonces podríamos obtener la posición del objeto $\mathcal{C}$, es decir, del dispositivo GPS gracias a un sistema de ecuaciones simple

$$\left\{\begin{array}{l}(x-x_A)^2+h^2 = c^2 \cdot t_A^2\\ (x-x_B)^2+h^2 = c^2 \cdot t_B^2\\ t_A = t_B\end{array}\right. \overset{\text{sustituyendo}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}(x-x_A)^2+h^2 = c^2 \cdot t_A^2\\ (x-x_B)^2+h^2 = c^2 \cdot t_A^2\end{array}\right\} \overset{\text{restando 2) -1)}}{\Rightarrow}$$

$$(x-x_A)^2-(x-x_B)^2 = 0 \Rightarrow (x-x_A)^2 = (x-x_B)^2 \overset{x_A \neq x_B}{\Rightarrow}$$

$$x - x_A = -x + x_B \Rightarrow 2x = x_A + x_B \Rightarrow x = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Luego para la física clásica, si los satélites lanzan la señal al mismo tiempo, el receptor debería estar justo en el punto medio de los satélites.

Vamos ahora al mundo de la Relatividad Especial. Para calcular la posición del dispositivo GPS, utilizaremos las transformaciones de Lorentz (ecuaciones 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5) que describimos en el Capítulo 1 (Sección 1.2).

En el diagrama presentado en la Figura 3.2, sabemos que el satélite A tiene coordenadas $(0,0)_{\mathcal{S}'} = (0,0)_{\mathcal{S}}$ y del satélite B sólo sabemos las coordenadas en el sistema de

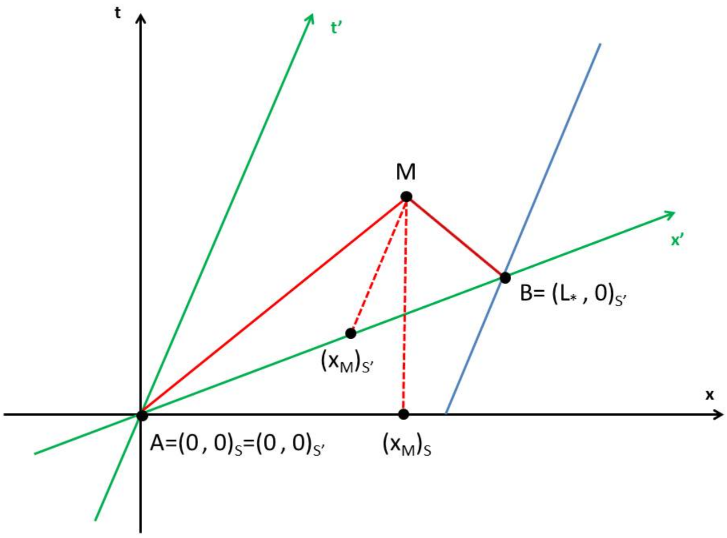

Figura 3.2: Diagrama espacio-tiempo de dos satélites

referencia $\mathcal{S}'$, que son $(L_*, 0)_{\mathcal{S}'}$, pero gracias a las transformaciones de Lorentz inversas, podemos hallar sus coordenadas en el sistema referencial $\mathcal{S}$.

$$x = \gamma\,(x' + \beta t') = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(L_* + \beta \cdot 0) = \frac{L_*}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t = \gamma\,(t' + \beta x') = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(0 + \beta \cdot L_*) = \frac{L_* \cdot \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$B = (L_*, 0)_{\mathcal{S}'} = \left(\frac{L_*}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{L_* \cdot \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)_{\mathcal{S}}$$

La recta que une A con M viene dada por $x = t$, ya que la señal GPS se transmite por una onda cuya velocidad de propagación es c, y la recta que une M con B es perpendicular a $x = t$ por lo que tendrá pendiente -1, y además pasa por B del cuál sabemos sus coordenadas en el sistema $\mathcal{S}$, por tanto la recta será

$$t - \frac{L_* \cdot \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = -1\left(x - \frac{L_*}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \Rightarrow t - \frac{L_* \cdot \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = -x + \frac{L_*}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow$$

$$t = -x + \frac{L_*}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{L_* \cdot \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = -x + \frac{L_* + L_* \cdot \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = -x + \frac{L_*\,(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} =$$

$$= -x + \frac{L_*\,(1+\beta)}{\sqrt{(1+\beta)\cdot(1-\beta)}} = -x + \frac{L_*\sqrt{(1+\beta)^2}}{\sqrt{(1+\beta)\cdot(1-\beta)}} = -x + \frac{L_*\sqrt{(1+\beta)}}{\sqrt{(1-\beta)}} \Rightarrow$$

$$t = -x + L_*\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Por tanto ya podemos obtener la coordenada espacial de M, haciendo la intersección de las dos rectas halladas.

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ t = -x + L_*\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} \end{array}\right. \Rightarrow x = -x + L_*\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow 2x = L_*\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow x = \frac{L_*}{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

luego

$$(x_M)_S = \frac{L_*}{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{3.1}$$

Además,

$$(x_M)_{S'} = \frac{L_*}{2}$$

ya que estaríamos en la situación anterior.

Una vez que tenemos halladas todas las coordenadas que necesitamos, vamos a ver cuánto vale L_* y β en el caso de la Tierra, para poder estimar cuantitativamente cuánto nos equivocaríamos al calcular las coordenadas reales (que serían las correspondientes al sistema referencial $\mathcal{S}$), si no tuviéramos en cuenta la Relatividad Especial (que sería lo hallado en el sistema $\mathcal{S}'$).

Para calcular estas magnitudes, tenemos que saber que, ya que el satélite está *orbitando* alrededor de la Tierra, la fuerza que ejerce la Tierra sobre él, que será la fuerza de la gravedad, tiene que ser igual a la fuerza centrífuga que tiene el propio satélite, ya que si alguna fuera mayor que la otra, el satélite o bien escaparía de su órbita, o bien se estrellaría contra la Tierra.

Luego

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \tag{3.2}$$

donde la primera es la fuerza que ejerce la gravedad de una masa M sobre una masa m que están a distancia r y la segunda es la fuerza centrífuga que experimenta una masa

m que está a un radio r.

En nuestro caso, la masa M será la masa de la Tierra (de ahora en adelante utilizaremos la notación $M_\oplus$) y la masa m será la del satélite, cuya notación será m_{sat}. El radio r_{sat} será entonces la distancia que hay desde el centro de la Tierra al satélite.

Datos	Medidas
Masa Tierra $M_\oplus$	$5{,}9736 \times 10^{24}$ kg
Radio Tierra $R_\oplus$	6.378.137 m
Constante Gravitacional G	$6{,}674 \times 10^{-11}$ m^3/kg^{2}s^2
Radio satélite r_{sat}	$20.200.000 + 6.378.137 = 26.578.137$ m
Velocidad de la luz c	299.792.458 m/s

Por tanto la Ecuación 3.2 quedaría:

$$\frac{GM_\oplus m}{r_{sat}^2} = m\frac{v_{sat}^2}{r_{sat}}$$

y despejando la velocidad v_{sat} a la que debe ir la masa m, tenemos que

$$\frac{GM_\oplus}{r_{sat}^2} = \frac{v_{sat}^2}{r_{sat}} \Rightarrow v_{sat}^2 = \frac{GM_\oplus}{r_{sat}^2} \Rightarrow v_{sat} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_{sat}}}$$

y teniendo en cuenta la tabla

$$v_{sat} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_{sat}}} = \sqrt{\frac{6{,}674 \times 10^{-11} \cdot 5{,}9736 \times 10^{24}}{26.578.137}} = \sqrt{15.000.226{,}09} =$$
$$= 3.873{,}012534\, m/s \approx 3{,}9\, km/s \Rightarrow \boxed{v_{sat} \approx 3{,}9\, km/s}$$

Entonces , como las transformaciones de Lorentz están en unidades geométricas, tomando kilómetros en vez de metros, tenemos que

$$\beta = \frac{v_{sat}}{c} = \frac{3{,}9}{299.792{,}458} = 0{,}00001300899 \approx 1{,}3 \times 10^{-5}$$

Nos queda por calcular entonces L_* que será la distancia a la que se encuentra un satélite de otro.

Sabemos que los satélites se encuentran en una órbita circular, luego la longitud de dicha órbita será $2\pi r_{sat} = 166.995.359{,}9 \approx 166.995.360$ m, además también sabemos que el GPS consta de una red de 24 satélites, luego la distancia entre cada satélite vendrá dada por la expresión

$$\frac{2\pi r_{sat}}{24} \approx \frac{166.995.360}{24} = 6.958.140 \text{ m}$$

Es decir, cada par de satélites están separados por $L_* = 6.958.140$ m $= 6.958{,}140$ km.

Luego la Ecuación 3.1 queda así

$$(x_M)_S = \frac{L_*}{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{6.958{,}140}{2}\sqrt{\frac{1+1{,}3\times 10^{-5}}{1-1{,}3\times 10^{-5}}} =$$
$$\frac{6.958{,}140}{2}\sqrt{1{,}000026} = 1{,}000013\cdot\frac{6.958{,}140}{2} = 3.479{,}115228 \text{ km}$$

y teniendo en cuenta que

$$(x_M)_{S'} = \frac{L_*}{2} = \frac{6.958{,}140}{2} = 3.479{,}07 \text{ m}$$

entonces la diferencia entre si tenemos en cuenta la Relatividad Especial o no, son $3.479{,}115228 - 3.479{,}07 = 0{,}045228$ km, es decir, unos 45 m.

Además, otra curiosidad de la Relatividad Especial, es que para el sistema $\mathcal{S}'$ los dos satélites envían la señal al mismo tiempo, es decir, cuando $(t_A)_{S'} = (t_B)_{S'} = 0$, pero para $\mathcal{S}$, la señal de los satélites no es simultánea. El satélite A envía la señal en tiempo $(t_A)_S = 0$, pero el satélite B tiene un tiempo de

$$(t_B)_S = \frac{L_*\cdot\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{6.958{,}140\cdot 1{,}3\times 10^{-5}}{\sqrt{1-(1{,}3\times 10^{-5})^2}} =$$
$$\frac{0{,}09045582}{0{,}9999999998} = 0{,}09045582002 \text{ km} = 90{,}45582002 \text{ m}$$

Con el factor de conversión $1/c$ convertimos el tiempo en unidades geométricas en tiempo en unidades del Sistema Internacional, luego

$$(t_B)_S = \frac{1}{299.732.458}\cdot 90{,}45582002 = 0{,}00000030178 \approx 3\times 10^{-7} \text{ segundos}$$

Por tanto podemos afirmar que si el GPS no tuviera en cuenta la Teoría de la Relatividad Especial, erraría en cada señal unos 45 metros, y que el satélite A envía antes la señal que el satélite B en nuestro sistema de referencia.

Ahora bien, vamos a calcular los tiempos de un satélite y de un dispositivo GPS. Llamemos al satélite δ y al dispositivo GPS α, entonces, gracias a la fórmula de la dilatación temporal (Ecuación 1.13) y pasando a unidades del Sistema Internacional, tenemos que:

$$t_\alpha = \frac{t_\delta}{\sqrt{1-\frac{v_{sat}^2}{c^2}}}$$

Para facilitar la escritura, vamos hacer un desarrollo de Taylor en $x=0$ para quitar las raíces de la expresión que cohesiona los tiempos del satélite y el dispositivo.

Sea $f(x) = \sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$, entonces, por Taylor

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + ...$$

Despreciamos los términos de mayor orden, pues si $x = v_{sat}^2/c^2$

$$x = \left(\frac{v_{sat}}{c}\right) = \beta^2 = (1{,}3\times 10^{-5})^2 = 1{,}69\times 10^{-10} \Rightarrow x^2 = (1{,}69\times 10^{-10})^2 = 2{,}8561\times 10^{-20} \approx 0$$

Luego realmente aproximamos $f(x) \approx f(0) + f'(0)$.

Veamos cuánto vale esta expresión.

$$\begin{aligned} f(0) &= \sqrt{1-0} = \sqrt{1} = 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \Rightarrow \\ f'(0) &= -\frac{1}{2\sqrt{1-0}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto la expresión queda

$$f(x) = \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

Tomando $x = v_{sat}^2/c^2$, tenemos que:

$$t_\alpha = \frac{t_\delta}{\sqrt{1-\frac{v_{sat}^2}{c^2}}} \approx \left(1 - \frac{v_{sat}^2}{2c^2}\right) t_\delta \approx \left(1 - \frac{3.900^2}{2 \cdot (299.792.458)^2}\right) t_\delta \Rightarrow \frac{t_\alpha}{t_\delta} \approx 1 - 8{,}461703676 \times 10^{-11}$$

Luego el tiempo del satélite y el del dispositivo GPS difieren en $0{,}8461703676 \times 10^{-10}$ segundos, si suponemos la Tierra estática y el satélite en órbita.

3.3. Relatividad General y GPS

Pasamos a estudiar ahora el efecto de la Teoría de la Relatividad General en el GPS.

Hemos visto que el Sistema de Posicionamiento Global tiene que ser corregido en cada señal unos $0{,}8461703676 \times 10^{-10}$ segundos gracias a la Relatividad Especial, y es de esperar que también haya un desfase de tiempo y por tanto de distancia si tenemos en cuenta el efecto de esta Teoría General.

En el Capítulo 2 (Sección 2.3), vimos la relación entre los tiempos de dos partículas, una en la superficie terrestre y otra a una altura h de esta.

Esta fórmula (Ecuación 2.23) nos va a servir para calcular el tiempo de un dispositivo GPS situado en la superficie de la Tierra frente al tiempo propio del satélite, situado a una altura h, que será 20200 km.

Identificamos α con el dispositivo GPS y δ con el satélite y utilizando la aproximación por Taylor vista en la sección anterior y tomando $x = 2M/r$, tenemos que

$$f\left(\frac{2M}{r}\right) = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2M}{r} = 1 - \frac{M}{r}$$

Por tanto, la Ecuación 2.23 quedaría

$$\tau_\alpha = \tau_\delta \left(\frac{1 - \frac{2M}{R_\oplus}}{1 - \frac{2M}{r_{sat}}}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1 - \frac{M}{R_\oplus}}{1 - \frac{M}{r_{sat}}} \tau_\delta \Rightarrow \frac{\tau_\alpha}{\tau_\delta} \approx \frac{1 - \frac{M}{R_\oplus}}{1 - \frac{M}{r_{sat}}} = \left(1 - \frac{M}{R_\oplus}\right) \frac{1}{1 - \frac{M}{r_{sat}}} \tag{3.3}$$

ya que $r_{sat} = R_\oplus + h$.

Ayudándonos otra vez de Taylor, sea $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, entonces $f(x) = f(0) + f'(0)x$. Volvemos a despreciar los términos de mayor grado ya que vuelven a ser próximos a cero.

Veamos cuánto vale esta expresión.

$$\begin{aligned}
&f(0) = 1 \\
&f'(x) = -(1-x)^{-2} \cdot (-1) = (1-x)^{-2} \Rightarrow \\
&f'(0) = 1
\end{aligned}$$

Por tanto la expresión queda

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \approx 1 + x$$

Luego tomando $x = M/r_{sat}$, la Ecuación 3.3 quedaría

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau_\alpha}{\tau_\delta} \approx \left(1 - \frac{M}{R_\oplus}\right) \frac{1}{1 - \frac{M}{r_{sat}}} \approx \left(1 - \frac{M}{R_\oplus}\right)\left(1 + \frac{M}{r_{sat}}\right) = \\
&1 - \frac{M}{R_\oplus} + \frac{M}{r_{sat}} - \frac{M^2}{R_\oplus r_{sat}} \approx 1 - \frac{M}{R_\oplus} + \frac{M}{r_{sat}}
\end{aligned}$$

ya que despreciamos el término de grado dos es ≈ 0, y por definición de función potencial

$$\frac{\tau_\alpha}{\tau_\delta} = 1 - \Phi_\alpha + \Phi_\delta$$

Para que los tiempos fueran iguales, entonces el factor $-\Phi_\alpha + \Phi_\delta$ tendría que ser 0, cosa que no ocurre, por tanto vamos a calcular este factor y veremos cuánto distan los tiempos del satélite y del dispositivo GPS.

Esta función potencial está en unidades geométricas, luego para calcular el potencial en unidades del Sistema Internacional, debemos multiplicar por el factor de conversión G/c^2 para convertir la masa M, ya que el radio ya está en unidades del Sistema Internacional.

Calculemos esta diferencia

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_\alpha &= -\frac{M}{R_\oplus} = -\frac{GM_\oplus}{c^2 R_\oplus} = -\frac{6{,}674 \times 10^{-11} \cdot 5{,}9736 \times 10^{24}}{(299.792.458)^2 \;\; 6.378.137} = -6{,}954740713 \times 10^{-10} \\
\Phi_\delta &= -\frac{M}{r_{sat}} = -\frac{GM_\oplus}{c^2 r_{sat}} = -\frac{6{,}674 \times 10^{-11} \cdot 5{,}9736 \times 10^{24}}{(299.792.458)^2 \;\; 26.578.137} = -1{,}668976613 \times 10^{-10}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&-\Phi_\alpha + \Phi_\delta = -(-6{,}954740713 \times 10^{-10}) + (-1{,}668976613 \times 10^{-10}) = \\
&6{,}954740713 \times 10^{-10} - 1{,}668976613 \times 10^{-10} = 5{,}257641 \times 10^{-10}
\end{aligned}$$

Por tanto los tiempo de un satélite y un dispositivo GPS situado en la superficie de la Tierra suponiendo los dos estáticos, difieren en $5{,}257641 \times 10^{-10}$ segundos.

Luego podemos concluir que la Teoría de la Relatividad General pesa más a la hora de calibrar los relojes que la Teoría de la Relatividad Especial.

3.4. Conclusiones

En las secciones anteriores hemos visto cómo afecta la Relatividad Especial y General al cálculo de los tiempos propios de cada satélite y del dispositivo GPS.

Realmente, al calcular la posición del dispositivo, tenemos que tener en cuenta cada uno de estos desfases, pues los dos son de suma importancia, ya que un desfase de nanosegundos puede afectar en varios metros.

Por tanto finalmente podemos concluir que el desfase de tiempos entre el satélite y el dispositivo GPS es

$$\frac{\tau_\alpha}{\tau_\delta} = 1 - \Phi_\alpha + \Phi_\delta - \frac{v_{sat}^2}{2c^2} = 1 + 5{,}257641 \times 10^{-10} - 0{,}8461703676 \times 10^{-10} = 1 + 4{,}411470632 \times 10^{-10}$$

Por tanto habrá un desfase de tiempo de $4{,}411470632 \times 10^{-10}$ segundos. Pero, ¿cuántos metros afectaría este desfase si no se corrigiese durante un día?

Por cada segundo "terrestre", el satélite tiene un desfase de $4{,}411470632 \times 10^{-10}$, luego en un día "terrestre", el satélite habrá acumulado un descase de $24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 4{,}411470632 \times 10^{-10} = 86400 \cdot 4{,}411470632 \times 10^{-10} = 3{,}81151626 \times 10^{-5}$ segundos, que esto se traduce en medida espacial por:

$$\begin{aligned} e = v \cdot t \Rightarrow e = c \cdot 3{,}81151626 \times 10^{-5} &= 299792458 \cdot 3{,}81151626 \times 10^{-5} \\ &= 11426{,}62139 \text{ m} = 11{,}42662139 \text{ km} \end{aligned}$$

Luego por cada día se acumularían aproximadamente 11,4 km de desfase, que si no fuera corregido, al final de un año llegaría a ser de 4161 km, es decir, si nuestro dispositivo estuviera realmente en Murcia, ¡ el Sistema de Posicionamiento Global marcaría Moscú!

Por tanto es muy importante corregir estos pequeños desfases, pues aunque sean diferencias de unos pocos nanosegundos, si se acumulan, harían del Sistema GPS algo inservible.

Bibliografía

[1] Ashby, Neil, *Relativistic Effects in the Global Positioning System*, https://www.aapt.org/doorway/TGRU/articles/Ashbyarticle.pdf, 2006.

[2] Einstein, Albert, *Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General*, Alianza Editorial, 2008.

[3] Faber, Richard L., *Differential Geometry and Relativity Theory*, Marcel Dekker, 1983.

[4] Hartle, James B., *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*, Pearson, 2014.

[5] Hawking, Stephen, *El universo en una cáscara de nuez*, Círculo de Lectores, 2001.

[6] Illana, José Ignacio, *Descubre la Relatividad*, http://www.ugr.es/~jillana/SR/sr.pdf, 2017.

[7] Meroño Bayo, Miguel Ángel, *Apuntes de clase de la asignatura Geometría de Riemann*, curso 2015-2016.

[8] Pastor González, José Antonio, *Apuntes de clase de la asignatura Geometría y Relatividad*, curso 2015-2016.

[9] Resnick, Robert, *Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad*, Limusa, 1995.