FACULTAD DE MATEMÁTICAS - UNIVERSIDAD DE MURCIA

TRABAJO FINAL DE GRADO:

EL TEOREMA DE COPSON SOBRE CONVERGENCIA DE SUCESIONES REALES Y SUS GENERALIZACIONES

Trabajo realizado por:
Daniel Nieves Roldán

Dirgido por:
Dr. Antonio Linero Bas

Índice general

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Daniel Nieves Roldán, autor del TFG “El teorema de Copson sobre convergencia de sucesiones reales y sus generalizaciones”, bajo la tutela del profesor Antonio Linero Bas, declara que el trabajo que se presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 29 de mayo de 2017.

Nota: En la secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

Introducción

Uno de los primeros resultados que aparecen en un curso inicial de Análisis Matemático es que toda sucesión monótona y acotada es convergente. De este modo, sabemos por ejemplo que la sucesión $a_n = \frac{n+1}{n}$ es convergente, pues cumple que $a_{n+1} \leq a_n$ y está acotada. Por otro lado, hay ejemplos de sucesiones acotadas como $a_n = 3 + (-\frac{1}{2})^n$ que son convergentes aunque no satisfagan la condición de monotonía. Sin embargo, dicha sucesión satisface la desigualdad $a_{n+2} \leq \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$. Esto nos motiva a plantearnos la convergencia de las sucesiones acotadas que verifiquen la desigualdad anterior.

El teorema de Copson sobre convergencia de sucesiones reales responde y generaliza la cuestión anterior, englobando, en particular, el resultado clásico de convergencia enunciado al principio.

Teorema 1. *[5] Si (a_n) es una sucesión acotada que satisface la desigualdad*

$$a_{n+r} \leq \sum_{s=1}^{r} k_s a_{n+r-s}, \tag{1}$$

donde los coeficientes k_s son estrictamente positivos y $k_1+k_2+\cdots+k_r = 1$, entonces (a_n) es una sucesión convergente. Sin embargo, si (a_n) no es acotada, entonces diverge a $-\infty$.

Figura 1: E.T. Copson

El presente trabajo cubre la demostración del Teorema de Copson y recoge una serie de generalizaciones que abarca el periodo comprendido entre la publicación original de Copson en 1970 y la actualidad. Se estructura en cuatro capítulos: En el Capítulo 1 se enuncia y demuestra el teorema, en los dos siguientes presentamos generalizaciones desarrollando varias líneas de trabajo y, en el Capítulo 4, concluimos extendiendo el teorema a otros objetos y campos matemáticos presentando un resultado propio.

En el Capítulo 1 vamos a dar dos demostraciones diferentes del teorema. Una debida al propio Copson, que nos vislumbrará la importancia del polinomio característico de la ecuación en diferencias asociada a la desigualdad (1), y otra, debida a R.A. Rankin, quien se la comunicó a Copson (y éste la incluyó en su artículo), sirviéndonos de base para nuevas extensiones y para nuestro resultado propio.

En el Capítulo 2 generalizamos el Teorema 5 caracterizando la convergencia de la sucesión mediante las propiedades de las raíces del polinomio característico. Con estos resultados se logra que las sucesiones acotadas sean convergentes sin la necesidad de que los coeficientes k_s sean positivos. Para ello desarrollaremos dos resultados principales, el primero de ellos debido a Kečkić [8] en el que exige que dichas raíces caigan en el disco unidad (véase el teorema 8) y, en segundo lugar, una generalización de dicho resultado, debido a Stević [13], que amplia el campo donde pueden caer las raíces (véase el teorema 13). De esta forma, veremos que por ejemplo, si una sucesión acotada verifica la desigualdad $a_{n+3} \leq -\frac{1}{2}a_{n+2} + \frac{3}{4}a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n$ entonces es convergente.

En el Capítulo 3 continuamos buscando condiciones que nos aseguren la convergencia de las sucesiones. Ahora la condición convexa de la segunda parte de la desigualdad (5) es sustituida por una función $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ de modo que $a_{n+r} \leq f(a_{n+r-1}, \ldots, a_{n+r-k})$. En este sentido, comenzamos con un resultado de Bibby [3] que asegura la convergencia de sucesiones acotadas g-monótonas (véase la definición 2). Stević [15] - [16] sustituye las inecuaciones lineales (1) por inecuaciones que involucran funciones continuas f que, por supuesto, no tienen por qué ser lineales y que verifican condiciones de monotonía en algunas de sus variables. A continuación estudiamos el caso particular de las ecuaciones en diferencias autónomas $x_n = f(x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$ con un resultado de Iričanin [7] y acabamos generalizando, más aún, al ampliar a dos el número de sucesiones que intervienen en inecuaciones en diferencias del tipo $a_{n+r} \leq \phi(a_{n+r-1}, \ldots, a_n) + b_n$ (ver 3.32).

Por último, el Capítulo 4 recoge extensiones del teorema de Copson a otros campos u objetos matemáticos. Este capítulo está dividido en tres secciones. En la primera de ellas nos centramos en generalizaciones del teorema de Copson en el plano complejo. Borwein presenta un primer resultado en los años 70 [4] a partir de una sucesión de números complejos (K_n) y la función analítica $K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n$ donde se exige que dicha función no se anule en la frontera del disco unidad:

Teorema 2. *[4] Si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |K_n| < \infty,$$

$$K(z) \neq 0 \text{ en } \partial D,$$

y si

$$(a_n) \text{ es acotada}$$

tal que, para algún entero positivo N,

$$\sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} \geq 0 \ (n = N, N+1, \ldots),$$

entonces (a_n) es convergente.

En la segunda sección, basándonos en el artículo de Vranceanu [19] presentamos la extensión a las sucesiones dobles y a las sucesiones de funciones. Concluimos finalmente, en la tercera sección, con un resultado propio que generaliza el Teorema de la Convergencia Monótona de Lebesgue, extendiendo así las técnicas desarrolladas por Copson en [5] al campo de la teoría de la medida:

Teorema 3. *Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles y positivas sobre X. Supongamos que*

$$f_{n+k}(x) \geq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{n+k-j}(x), \tag{2}$$

para todo $x \in X$ donde $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1, \quad 0 < \alpha_j < 1, \ j = 1, \ldots, k$ y, además,

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x), \tag{3}$$

para todo $x \in X$. Entonces f es medible y $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$ cuando $n \to \infty$.

El trabajo también contiene varios anexos que amplían algunos de los conceptos o técnicas desarrollados a lo largo de los capítulos anteriormente descritos. Estos anexos recogen el Teorema de Wiener-Lévy [20] y [21], el método de variación de las constantes [6], y un compendio de resultados de análisis complejo [1], [2] y [12].

Para acabar, destacamos que la literatura utilizada consiste, además de algunas referencias generales, en artículos de investigación que hemos ido recopilando y reorganizando apropiadamente sin seguir en algunos casos el orden cronológico. Destacamos también que, usando las técnicas que aparecen en dichos artículos, hemos conseguido un resultado novedoso que generaliza el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue.

Introduction

One of the first results that appear in an initial course of Mathematical Analysis is that every bounded and monotonic sequence is convergent. Hence, we know, for example, that the sequence $a_n = \frac{n+1}{n}$ is convergent, since verifies that $a_{n+1} \leq a_n$ and it is bounded. On the other hand, there are examples of bounded sequences, like $a_n = 3 + (-\frac{1}{2})^n$, that are convergent although they do not satisfy the condition of monotonicity. However, the sequence of the example satisfies the inequality $a_{n+2} \leq \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$. That motivate us to consider the convergence of bounded sequences that verify the previous inequality.

The Copson's theorem about convergence of real sequences answer and generalize the previous question, including, in particular, the classic result of convergence formulated at the beginning.

Theorem 1. *[5] If (a_n) is a bounded sequence which satisfies the inequality*

$$a_{n+r} \leq \sum_{s=1}^{r} k_s a_{n+r-s}, \qquad (1)$$

where the coefficients k_s are strictly positive and $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = 1$, then (a_n) is a convergent sequence. But if (a_n) is unbounded, it diverges to $-\infty$.

Figura 2: E.T. Copson

The present work includes the proof of the Copson's theorem and collects a set of generalizations that covers the period between the original publication of Copson in 1970 and nowadays. It is structured in four chapters: In Chapter 1 it is formulated and proved the theorem, in the two following chapters we will present generalization developing different work lines and, in Chapter 4, we conclude extending the theorem to other mathematical objects and fields presenting a proper result.

In Chapter 1 we are going to give two different proofs of the theorem. One due to Copson, that it will show us the importance of the characteristic polynomial of the difference equation associated to the inequality (1), and another, given by R.A. Rankin, who told Copson (and he included it in his own article), serving us a base for our own extensions and for our proper result.

In Chapter 2 we generalize the Theorem 5 characterizing the convergence of sequences through the properties of the roots of the characteristic polynomial. With this results we achieve that bounded sequences are convergent without the necessity of the coefficients k_s being positive. In order to do that, we will develop two main results, the first one is due to Kečkić [8] where he requires that those roots fall in the unit disk (look theorem 8) and, secondly, a generalization of that result, due to Stević [13], that increase the field where the roots can be (look theorem 13). In that way, we will see for example, that if a bounded sequence verifies the inequality $a_{n+3} \leq -\frac{1}{2}a_{n+2} + \frac{3}{4}a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n$ then it is convergent.

In Chapter 3 we continue looking for conditions that claim the convergence of those sequences. Now the convex condition of the second part of the inequality 1 is replaced by a function $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ so $a_{n+r} \leq f(a_{n+r-1}, \dots, a_{n+r-k})$. In this sense, we start with a result by Bibby [3] who claims the convergence of bounded g-monotonic sequences (see definition 2). Stević [15] and [16] substitute linear inequalities for inequalities involving continuous functions f which obviously do not have to be linear and that verify conditions of monotonicity in some of its variables. Then, we will study the particular case of autonomous difference equations with a result by Iričanin [7] and we will finish generalizing even more, by increasing by a factor of two the number of sequences that will take part in the corresponding difference inequality of the type $a_{n+r} \leq \phi(a_{n+r-1}, \dots, a_n) + b_n$ (See 3.32).

Finally, Chapter 4 collects extensions of the Copson Theorem to other fields or mathematical objects. This chapter is divided in three sections. The first one will focus on generalizations in the complex field. Borwein presents a first result in the seventies [4] from a sequence of complex numbers (K_n) and the analytic function $K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n$, where it is required that the function not be annulled at the boundary of the unit disk.

Theorem 2. *[4] If*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |K_n| < \infty,$$

$$K(z) \neq 0 \text{ on } \partial D,$$

and if

$$(a_n) \text{ is a bounded sequence}$$

such that, for some positive integer N,

$$\sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} \geq 0 \; (n = N, N+1, \dots),$$

then (a_n) is convergent.

The second section, based on an article by Vranceanu [19], will present the extension to double sequences and sequences of functions. We will conclude, in the third section, with a proper new finding which generalizes the Theorem of monotonic convergence of Lebesgue, thus extending the techniques developed by Copson [5] to the measurement theory.

Theorem 3. *Let (f_n) a sequence of measurable and positive functions over X. Assuming*

$$f_{n+k}(x) \geq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{n+k-j}(x), \tag{4}$$

for all $x \in X$, where $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1, \quad 0 < \alpha_j < 1, \; j = 1, \dots, k$, and

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x), \tag{5}$$

for all $x \in X$.

Then f is measurable and $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$ when $n \to \infty$.

This work also includes three appendixes which extend the concepts or techniques developed in the chapters previously described. These appendixes include the Wiener-Levy Theorem [20] and [21], the variation of constants method [6], and an abstract with complex analysis results [1], [2] and [12].

Finally, we emphasize that the literature that has been used consists, besides general references, in scientific articles that we have collected and organized appropriately without following sometimes the chronological order. We emphasize too that, using the techniques that appear in those articles, we have achieve an original result that generalize the monotone convergence theorem of Lebesgue.

Capítulo 1

El Teorema de Copson

La monotonía de sucesiones acotadas es una propiedad que nos proporciona un método muy útil para probar la convergencia de dichas sucesiones. La demostración de este resultado, básico en el análisis matemático, la podemos encontrar en numerosos manuales como por ejemplo [12].

Teorema 4. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente.*

En este capítulo se analiza el trabajo original de Copson (5) que generaliza dicho teorema. El resultado principal establece:

Teorema 5. *[5] Si (a_n) es una sucesión acotada que satisface la desigualdad*

$$a_{n+r} \leq \sum_{s=1}^{r} k_s a_{n+r-s}, \tag{1.1}$$

donde los coeficientes k_s son estrictamente positivos y $k_1+k_2+\cdots+k_r = 1$, entonces (a_n) es una sucesión convergente. Sin embargo, si (a_n) no es acotada, entonces diverge a $-\infty$.

Presentaremos las dos demostraciones que se recogen en el artículo [5]. Una de ellas, debida al propio Copson, utiliza las propiedades de las raíces de la ecuación en diferencias asociada a la desigualdad (1.1). Y la otra, propuesta por R. A. Rankin, proporciona una prueba alternativa muy interesante, y más sencilla, que no hace uso de ecuaciones en diferencias. Al tratarse de dos pruebas de distinta índole, que posteriormente dieron lugar a diversas generalizaciones, vamos a exponer ambas demostraciones. Es por ello que dividiremos el capítulo en dos secciones para analizar por separado cada una de las pruebas.

Cabe mencionar que, de acuerdo con lo expuesto por Copson en su propio artículo, J. M. Whittaker y J. B. Tatchell le presentaron previamente dos resultados que sustituían la condición de monotonía por una desigualdad entre los términos de la sucesión, cuyos enunciados son respectivamente:

Teorema 6. *[5] Si (a_n) es una sucesión acotada que satisface la desigualdad*

$$a_{n+2} \leq \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n),$$

entonces (a_n) es convergente.

Teorema 7. *[5] Si (a_n) es una sucesión acotada que satisface la desigualdad*

$$a_{n+2} \leq (1-k)a_{n+1} + k a_n,$$

donde $0 < k < 1$, entonces (a_n) es convergente.

Fueron estos resultados los que motivaron a E.T. Copson a enunciar y demostrar su teorema.

1.1. Demostración original de Copson

Empezamos analizando la demostración original de Copson, para ello necesitamos un lema previo del que haremos uso a posteriori [1]

[1] Para recordar la noción de ecuación en diferencias así como la resolución de las mismas en el caso lineal homogéneo con coeficientes constantes, véase el Anexo II.

Lema 1. *[5] Bajo las condiciones del teorema 5, toda solución A_n de la ecuación en diferencias*

$$A_{n+r} = \sum_{s=1}^{r} k_s A_{n+r-s}, \tag{1.2}$$

tiende a un límite finito cuando $n \to \infty$.

Demostración. Sean $z_1, \ldots, z_r$ las raíces de la ecuación característica

$$z^r = \sum_{s=1}^{r} k_s z^{r-s}, \tag{1.3}$$

Aplicando el Teorema de Rouché (ver anexo III) afirmamos que todas las raíces de (1.3) caen en el disco unidad. En efecto, sea $p(z) = z^r - k_1 z^{r-1} - \cdots - k_{r-1} z - k_r$. Tomamos los polinomios

$$f(z) = -\sum_{j=1}^{r} k_j z^{r-j}, \qquad g(z) = z^r.$$

Consideramos la circunferencia $|z| = 1 + \epsilon$ con $\epsilon > 0$. De ahí que

$$|f(z)| \leq \sum_{j=1}^{r} k_j |z|^{r-j} = \sum_{j=1}^{r} k_j (1+\epsilon)^{r-j} =$$
$$= k_1(1+\epsilon)^{r-1} + k_2(1+\epsilon)^{r-2} + \cdots + k_{r-1}(1+\epsilon) + k_r <$$
$$< k_1(1+\epsilon)^{r-1} + k_2(1+\epsilon)^{r-1} + \cdots + k_{r-1}(1+\epsilon)^{r-1} + k_r(1+\epsilon)^{r-1} =$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{r} k_j\right) \cdot (1+\epsilon)^{r-1} = (1+\epsilon)^{r-1} < |g(z)| = |z|^r = (1+\epsilon)^r.$$

Como $g(z) = z^r$ tiene r raíces, independientemente de las multiplicidades, se deduce por el Teorema de Rouché que $f(z) + g(z) = p(z)$ tiene r raíces en la bola abierta $(B(0, 1+\epsilon))$. Como este argumento es válido para cualquier $\epsilon > 0$ arbitrario, se concluye que las raíces de $p(z)$ están en el disco unidad $|z| \leq 1$ como habíamos señalado.

Por otro lado, afirmamos que la única raíz de (1.3) con $|z| = 1$ es la raíz simple $z = 1$. Para probarlo, sea $z = e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi)$, solución de $z^r = \sum_{j=1}^{r} k_j z^{r-j}$, luego

$$e^{ir\theta} = \sum_{j=1}^{r} k_j e^{i(r-j)\theta}.$$

Teniendo en cuenta que $e^{ir\theta} = \cos(r\theta) + i\mathrm{sen}(r\theta)$ y que por tanto

$$\cos(r\theta) = \sum_{j=1}^{r} k_j \cos((r-j)\theta)$$

$$\mathrm{sen}(r\theta) = \sum_{j=1}^{r} k_j \mathrm{sen}((r-j)\theta),$$

llegamos a

$$1 = \left(\sum_{j=1}^{r} k_j \cos((r-j)\theta)\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{r} k_j \mathrm{sen}((r-j)\theta)\right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} k_j^2 \cos^2((r-j)\theta) + 2 \sum_{1 \leq l \leq j \leq r} k_l k_j \cos((r-l)\theta)\cos((r-j)\theta) +$$

$$+\sum_{j=1}^{r} k_j^2 \mathrm{sen}^2((r-j)\theta) + 2 \sum_{1\leq l\leq j\leq r} k_l k_j \mathrm{sen}((r-l)\theta)\mathrm{sen}((r-j)\theta) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} k_j^2 + 2 \sum_{1\leq l<j\leq r} k_l k_j [\cos((r-l)\theta)\cos((r-j)\theta) + \mathrm{sen}((r-l)\theta)\mathrm{sen}((r-j)\theta)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} k_j^2 + 2 \sum_{1\leq l<j\leq r} k_l k_j \cos((r-l)\theta - (r-j)\theta) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} k_j^2 + 2 \sum_{1\leq l<j\leq r} k_l k_j \cos(\theta(j-l)).$$

Tomando valor absoluto y aplicando la desigualdad triangular

$$1 \leq \sum_{j=1}^{r} k_j^2 + 2 \sum_{1\leq l<j\leq r} k_l k_j |\cos(\theta(j-l))| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} k_j^2 + 2 \sum_{1\leq l<j\leq r} k_l k_j = (k_1 + \cdots + k_r)^2 = 1.$$

Por tanto, para que se verifique la relación, forzosamente

$$|\cos(\theta(j-l))| = 1, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad j, l \in \{1, \ldots, r\},\ j > l.$$

Entonces $\theta,\ 2\theta,\ 3\theta, \ldots,\ (r-1)\theta$ son múltiplos de π. Se deduce pues que o bien $\theta = 0$, o bien $\theta = \pi$.

- Si $\theta = 0$, tenemos $z = e^{i\theta} = 1$ que es raíz de la ecuación.
- Si $\theta = \pi$, tenemos $z = e^{i\theta} = -1$, pero obviamente no puede darse la igualdad ya que:

$$(-1)^r = k_1(-1)^{r-1} + \ldots k_{r-1}(-1) + k_r.$$

  - Si r es par: $1 = -k_1 + k_2 - k_3 + \cdots - k_{r-1} + k_r$ implica que

    $$1 + k_1 + k_3 + \cdots + k_{r-1} = k_2 + k_4 + \cdots + k_r < 1,$$

    que es imposible.
  - Si r es impar: $-1 = k_1 - k_2 + \cdots - k_{r-1} + k_r$ implica que

    $$1 < 1 + k_1 + k_3 + \cdots + k_r = k_2 + \ldots k_{r-1} < 1,$$

    que es de nuevo imposible.

Queda así probado que la única raíz de $z^r = \sum_{j=1}^{r} k_j z^{r-j}$ en $|z| = |1|$ es $z = 1$ como habíamos señalado.

Si todas las raíces de (1.3) son distintas, entonces la solución general de (1.2) viene dada por

$$A_n = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s z_s^n,$$

donde los coeficientes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ son arbitrarios. Por el estudio previo quedaría probado el lema ya que si todas las raíces caen en el interior del disco unidad, $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ y si $z_i = 1$ para algún i, al ser simple dicha raíz, tenemos que $\lim_{n\to\infty} A_n = \alpha_i$.

Si las raíces no son distintas, dicha solución (1.2) se modificaría. Por ejemplo, si $z_1 = z_2$, los dos primeros términos deben reemplazarse por $(\alpha_1 + \alpha_2 n)z_1^n$; si $z_1 = z_2 = z_3$, los tres primeros términos se reemplazarán por $(\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2)z_1^n$; y así sucesivamente. Pero en cualquier caso, de nuevo $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ si todas las raíces caen en el interior del disco unidad y $\lim_{n\to\infty} A_n = \alpha_i$ si $z_i = 1$ para algún $i = 1, \ldots, r$.

□

Una vez probado el lema, veamos la demostración realizada por Copson.

-Demostración original de Copson del teorema 5- La sucesión (a_n) satisface

$$a_{n+r} \leq \sum_{s=1}^{r} k_s a_{n+r-s}, \tag{1.4}$$

donde los coeficientes k_s son estrictamente positivos y tienen por suma la unidad. Si sustituimos a_{n+r-1} por su cota correspondiente

$$\sum_{s=1}^{r} k_s a_{n+r-1-s},$$

en la expresión del miembro derecho de la desigualdad (1.4), lo incrementaremos obteniendo

$$a_{n+r} \leq \sum_{s=1}^{r-1}(k_1 k_s + k_{s+1})a_{n+r-1-s} + k_1 k_r a_{n-1}.$$

de ahí que

$$a_{n+r} \leq k_1 k_r a_{n-1} + \sum_{s=1}^{r-1}(k_1 k_s + k_{s+1})a_{n+r-s-1} =$$

$$= \sum_{s=1}^{r} A_s(1) a_{n+r-1-s},$$

en donde $A_r(1) = k_1 k_r = k_r A_1(0)$ y $A_s(1) = k_1 k_s + k_{s+1}$ si $1 \leq s \leq r-1$.

Llamando $A_s(0) = k_s$ con $1 \leq s \leq r$, vemos que

$$A_r(1) = k_r A_1(0) = k_r k_1$$

$$A_s(1) = k_s A_1(0) + A_{s+1}(0),\ 1 \leq s \leq r-1.$$

Además, $\sum_{s=1}^{r} A_s(1) = \sum_{s=1}^{r} A_s(0) = \sum_{s=1}^{r} k_s = 1$ ya que

$$\sum_{s=1}^{r} A_s(1) = k_1 k_r + \sum_{s=1}^{r-1}(k_1 k_s + k_{s+1}) = k_1 k_r + k_1 \left(\sum_{s=1}^{r-1} k_s\right) + \sum_{s=1}^{r-1} k_{s+1} =$$

$$= k_1 \left(\sum_{s=1}^{r} k_s\right) + \sum_{j=2}^{r} k_j = k_1 + (k_2 + \cdots + k_r) = 1.$$

Continuamos, retomando la desigualdad

$$a_{n+r} \leq \sum_{s=1}^{r} A_s(1) a_{n+r-1-s},$$

válida para todo $n \geq 0$. Entonces, repitiendo el procedimiento que condujo a esta expresión,

$$a_{n+r} \leq A_1(1) a_{n+r-2} + \sum_{s=2}^{r} A_s(1) a_{n+r-1-s} \leq$$

$$\leq A_1(1)\left(\sum_{s=1}^{r} k_s a_{n+r-2-s}\right) + \sum_{s=2}^{r} A_s(1) a_{n+r-1-s} =$$

$$= k_r A_1(1) a_{n-2} + A_1(1)\sum_{s=1}^{r-1} k_s a_{n+r-2-s} + \sum s = 2^r A_s(1) a_{n+r-1-s} =$$

$$= k_r A_2(1) a_{n-2} + A_1(1)\sum_{s=1}^{r-1} k_s a_{n+r-2-s} + \sum_{s=1}^{r-1} A_{s+1}(1) a_{n+r-2-s} =$$

$$= k_r A_1(1) a_{n-2} + \sum_{s=1}^{r-1} (A_1(1)k_s + A_{s+1}(1)) a_{n+r-2-s}.$$

Definiendo $A_r(1) = k_r A_1(1),\ A_s(2) = k_s A_1(1) + A_{s+1}(1)$ se tiene que

$$a_{n+r} \leq \sum_{j=1}^{r} A_j(2) a_{n+r-2-j}.$$

Además, con $\sum_{j=1}^{r} A_j(2) = \sum_{j=1}^{r} A_j(1)$ (siendo la prueba análoga a la que se vio en el primer caso).

En general, repitiendo el razonamiento se llega a que para $l \leq n$ tenemos

$$a_{n+r} \leq \sum_{s=1}^{r} A_s(l) a_{n-l+r-s}, \tag{1.5}$$

para todo entero $l \leq n$. Aquí $A_s(0) = k_s$. Los coeficientes $A_s(l)$ vienen dados por las relaciones en recurrencias

$$A_s(l+1) = k_s A_1(l) + A_{s+1}(l), \tag{1.6}$$

para $s = 1, 2, \ldots, r-1$, y

$$A_r(l+1) = k_r A_1(l). \tag{1.7}$$

Razonando como antes se cumple

$$\sum_{s=1}^{r} A_s(l+1) = \sum_{s=1}^{r} A_s(l), \tag{1.8}$$

y, por lo tanto,

$$\sum_{s=1}^{r} A_s(l) = \sum_{s=1}^{r} A_s(0) = \sum_{s=1}^{r} k_s = 1. \tag{1.9}$$

De las ecuaciones (1.6) y (1.7) concluimos

$$A_1(l+r) = \sum_{s=1}^{r} k_s A_1(l+r-s).$$

En efecto, utilizando dichas ecuaciones

$$A_1(l+r) = k_1 A_1(l+r-1) + A_2(l+r-1) =$$

$$= k_1 A_1(l+r-1) + k_2 A_1(l+r-2) + A_3(l+r-2) =$$

$$= k_1 A_1(l+r-1) + k_2 A_1(l+r-2) + k_3 A_1(l+r-3) + A_4(l+r-3) =$$

$$= \cdots =$$

$$= k_1 A_1(l+r-1) + k_2 A_1(l+r-2) + k_3 A_1(l+r-1) + \cdots + k_{r-1} A_1(l+r-(r-1)) + A_r(l+r-(r+1)) =$$

$$= k_1A_1(l+r-1) + k_2A_1(l+r-2) + \cdots + k_{r-1}A_{r-1}A_1(l+1) + k_rA_1(l) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} k_jA_1(l+r-j).$$

luego estamos en condiciones de aplicar el lema **??**. De ahí que $A_1(l)$ tienda a un límite finito α_1 cuando $l \to \infty$. Haciendo tender l a infinito en (1.6) y (1.7) llegamos a

$$A_2(l) \to \alpha_2 = (1-k_1)\alpha_1,$$

$$A_3(l) \to \alpha_3 = (1-k_1-k_2)\alpha_1,$$

$$\ldots$$

y en general

$$A_s(l) \to \alpha_s = \alpha_1 \sum_{t=s}^{r} k_t,$$

para $2 \leq s \leq r$. Pero por (1.9),

$$\sum_{s=1}^{r} \alpha_s = 1,$$

de donde se sigue que

$$\alpha_1 = \frac{1}{k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + rk_r}.$$

Como los coeficientes k_s son estrictamente positivos y suman uno, es obvio que $0 < \alpha_1 < 1$.

Por otro lado, en la desigualdad (1.5), ponemos $l = n + r - m$. Entonces

$$a_{n+r} \leq \sum_{s=1}^{r} A_s(n+r-m)a_{m-s}.$$

Ahora hagamos $n \to \infty$. Esto nos lleva a [2]

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_{n+r} \leq \sum_{s=1}^{r} \alpha_s a_{m-s}.$$

Reescribámoslo como

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \sum_{s=2}^{r} (-\alpha_s)a_{m-s} \leq \alpha_1 a_{m-1}.$$

Como $\alpha_1 > 0$,

$$\alpha_1 \liminf_{m\to\infty} a_m = \alpha_1 \liminf_{m\to\infty} a_{m-1} \geq$$

$$\geq \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{m\to\infty} \sum_{s=2}^{r} (-\alpha_s)a_{m-s}.$$

[2]Por $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ($\liminf_{n\to\infty} a_n$) entendemos el límite superior (inferior) de la sucesión, es decir, el mayor (menor) de los límites de las subsucesiones convergentes de la sucesión.

Pero cada α_s es positivo. De ahí que

$$\begin{aligned}\alpha_1 \liminf_{n\to\infty} a_n &\geq \limsup_{n\to\infty} a_n - \sum_{s=2}^{r} \alpha_s \limsup_{n\to\infty} a_n = \\ &= \left(1 - \sum_{s=2}^{r} \alpha_s\right) \limsup_{n\to\infty} a_n = \\ &= \alpha_1 \limsup_{n\to\infty} a_n,\end{aligned}$$

por tanto

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \limsup_{n\to\infty} a_n. \tag{1.10}$$

Si (a_n) es una sucesión acotada, $\limsup a_n$ y $\liminf a_n$ son ambos finitos, y $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. De ahí, por (1.10), que $\limsup a_n$ y $\liminf a_n$ son iguales, y la sucesión converge.

Si (a_n) no está acotada, entonces $\limsup a_n = -\infty$ al igual que $\liminf a_n$, debido a (1.10). En este caso concluimos que la sucesión diverge a $-\infty$.

□

1.2. Demostración debida a Rankin

Demostración. Consideramos la sucesión

$$A_n = \max(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-r}).$$

Entonces, por (5)

$$a_{n+r} \leq \sum_{s=1}^{r} k_s a_{n+r-s} \leq \sum_{s=1}^{r} k_s A_{n+r} = A_{n+r} \sum_{s=1}^{r} k_s = A_{n+r}.$$

Luego

$$a_n \leq A_n, \tag{1.11}$$

pudiendo concluir, gracias a la definición de A_n, que $A_{n+1} \leq A_n$. De esta forma, A_n tiende a un límite finito A, o bien, diverge a $-\infty$.

Si $A_n \to -\infty$, entonces $a_n \to -\infty$ por (1.11). Veamos a continuación que si A es finito, entonces $a_n \to A$.

Por la definición de límite, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que

$$A \leq A_n \leq A + \epsilon,$$

para todo $n \geq N$. Si $1 \leq s \leq r$, tenemos

$$\begin{aligned}a_{m+s} \leq k_s a_m + \sum_{t\neq s} k_t a_{m+s-t} &\leq k_s a_m + \sum_{t\neq s} k_t A_{m+s} \\ = (1-k_s)A_{m+s} + k_s a_m &\leq (1-k_s)(A+\epsilon) + k_s a_m.\end{aligned}$$

Para cada $m \geq N$, podemos encontrar un entero s $(1 \leq s \leq r)$ tal que

$$a_{m+s} = A_{m+r+1}.$$

De ahí que

$$A \leq A_{m+r+1} = a_{m+s} \leq (1-k_s)(A+\epsilon) + k_s a_m = a_m + (1-k_s)(A+\epsilon-a_m).$$

Pero $a_m \leq A_m \leq A+\epsilon$. Por lo tanto, si k es el menor de los coeficientes k_s,

$$A \leq a_m + (1-k)(A+\epsilon-a_m) = ka_m + (1-k)(A+\epsilon),$$

de donde despejando se sigue

$$a_n \geq A - \frac{1-k}{k}\epsilon,$$

con $0 < k < 1$. En definitiva, hemos probado que para todo $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que si $m \geq N$,

$$A - \frac{1-k}{k}\epsilon \leq a_m \leq A + \epsilon,$$

de ahí que a_m tienda a A cuando m tiende a $+\infty$ como queríamos demostrar. □

Nótese, en primer lugar, que el teorema de Copson cubre los resultados de Whittaker y Tatchell (véanse los teoremas 6-7).

Se puede destacar que el sentido de la desigualdad es indiferente, ya que si tuviésemos

$$a_{n+r} \geq \sum_{s=1}^{r} k_s a_{n+r-s},$$

sería suficiente considerar la sucesión $\{-a_n\}$ y aplicar el teorema de Copson para obtener la convergencia. Sin embargo, el lector interesado en dicha prueba puede encontarla en el artículo de Vranceanu [19].

La conclusión no es necesariamente cierta si alguno de los coeficientes k_s es nulo. Por ejemplo, si (a_n) es una sucesión acotada que verifica

$$a_{n+4} \leq \frac{1}{2}(a_{n+2} + a_n)$$

entonces las sucesiones (a_{2n}) y (a_{2n+1}) son convergentes, pero (a_n) no tiene por qué serlo. Para ilustrarlo consideremos la sucesión $a_n = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$.

Por otro lado, los coeficientes k_s no tienen por qué ser todos positivos. Por ejemplo, si (a_n) es una sucesión acotada que satisface

$$a_{n+3} \leq -\frac{1}{2}a_{n+2} + \frac{3}{4}a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n,$$

veremos en el siguiente capítulo que es convergente. Este es el caso de la sucesión $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Estas observaciones nos permiten concluir que la condición del teorema de Copson es suficiente, pero no necesaria.

Capítulo 2

Caracterización de la convergencia en términos del polinomio característico

El objetivo principal de este capítulo es caracterizar la convergencia de sucesiones reales acotadas que verifican una desigualdad de tipo Copson en función de las raíces del polinomio característico de la ecuación en diferencias lineal asociada. En primer lugar, abordaremos un resultado de Kečkić [8] que proporciona una condición suficiente, basada en que las raíces del polinomio característico caigan en el disco unidad, que garantiza la convergencia de la sucesión. Además, justifica el hecho de que los coeficientes de la inecuación en diferencias no tienen por qué ser estrictamente positivos para que la sucesión converja, como se avanzó al final del capítulo anterior después de probar el teorema de Copson.

Teorema 8. *[8] Sea (a_n) una sucesión acotada, que satisface la desigualdad*

$$a_{n+r} \leq \sum_{s=1}^{r} k_s a_{n+r-s}, \tag{2.1}$$

con $k_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq r,\ y\ k_1 + \cdots + k_r = 1$. Sea $l_s = 1 - k_1 - \cdots - k_s\ (s = 1, 2, \ldots, r-1)$. Si todas las raíces de la ecuación

$$\lambda^{r-1} + l_1 \lambda^{r-2} + \cdots + l_{r-1} = 0, \tag{2.2}$$

son distintas y caen en el disco unidad, entonces (a_n) es una sucesión convergente.

A continuación presentaremos un resultado de Stevic [13] que asegura la convergencia de sucesiones acotadas siempre y cuando las raíces del polinomio característico asociado a la inecuación en diferencias $a_{n+k} \leq \alpha_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 a_n$ no se encuentren en la circunferencia unidad excepto quizás la raíz $z = 1$. Lo probaremos de forma inductiva sobre el orden de la inecuación k haciendo sustituciones en la inecuación que nos reduzcan dicho orden.

Teorema 9. *[13] Sean $\alpha_i\ (i = 0, \ldots, k-1)$ reales, $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = 1,\ P_k(z) = z^k - \alpha_{k-1}z^{k-1} - \cdots - \alpha_0$ y sea la sucesión real (a_n) que satisface la desigualdad*

$$a_{n+k} \leq \alpha_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 a_n. \tag{2.3}$$

Entonces la acotación de (a_n) implica su convergencia si y sólo si los ceros del polinomio $P_k(z)$ pertenecen al conjunto $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1, z \neq 1\}$.

2.1. Una condición suficiente para la convergencia - Teorema de Kečkić

Para llegar a la demostración del resultado principal de esta sección, presentamos un lema previo.

Lema 2. *Sea (x_n) una sucesión convergente con límite x. Sea $|\alpha_l| < 1$. Entonces*

$$\frac{\sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_l^s} x_s}{\sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_l^s}},$$

converge a x cuando $n \to \infty$.

Demostración. Por ser (x_n) convergente, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que $|x_n - X| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$.

Por comodidad en la notación tomemos $p_j = \frac{1}{\alpha_l^j}$. Para ese valor de n_0, usamos que $\sum_n p_n \to \infty$ para afirmar que existe $n_1 > 0$ tal que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} p_j\right| \geq \frac{2n_0}{\epsilon} \max\{p_1|x_1 - \lambda|, p_2|x_2 - \lambda|, \ldots, p_{n_0}|x_{n_0} - \lambda|, \epsilon\}.$$

En dicho caso, tomando $n_2 = \max\{n_1, n_0\}$ y $n \geq n_2$:

$$\left|\frac{p_1(x_1 - x) + p_2(x_2 - x) + \cdots + p_{n-1}(x_{n-1} - x)}{\sum_{j=1}^{n-1} p_j}\right| \leq \frac{\sum_{j=1}^{n-1} |p_j||x_j - x|}{\left|\sum_{j=1}^{n-1} p_j\right|} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n_0} |p_j||x_j - x|}{\left|\sum_{j=1}^{n-1} p_j\right|} + \frac{\sum_{j=n_0+1}^{n-1} |p_j||x_j - x|}{\left|\sum_{j=1}^{n-1} p_j\right|}. \tag{2.4}$$

Observemos que

$$\left|\sum_{j=1}^{n-1} p_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_l^j}\right| = \left|\frac{\frac{1}{\alpha_l} - \frac{1}{\alpha_l^n}}{1 - \frac{1}{\alpha_l}}\right| \geq \frac{\frac{1}{|\alpha_l|^n} - \frac{1}{|\alpha_l|}}{\left|1 - \frac{1}{\alpha_l}\right|} \xrightarrow{n\to\infty} \infty,$$

por ser $|\alpha_l| < 1$, es decir, $\frac{1}{|\alpha_l|} > 1$. De esta forma, retomando (2.4)

$$\left|\frac{\sum_{j=1}^{n-1} p_j(x_j - x)}{\sum_{j=1}^{n-1} p_j}\right| \leq \frac{\sum_{j=1}^{n_0} |p_j||x_j - x|}{\frac{2n_0}{\epsilon} \max\{|p_1||x_1 - x|, \ldots, |p_{n_0}||x_{n_0} - x|, \epsilon\}} + \frac{\sum_{j=n_0+1}^{n-1} |p_j|}{\left|\sum_{j=1}^{n-1} p_j\right|} \cdot \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.5}$$

En general, no podemos afirmar que $\sum_{j=n_0+1}^{n-1} |p_j| \leq \left|\sum_{j=1}^{n-1} p_j\right|$, pero en este caso, al ser $p_j = \frac{1}{\alpha_l^j}$ sí que podemos seguir avanzando en la desigualdad de (2.5) ya que

$$\frac{\sum_{j=n_0+1}^{n-1} \frac{1}{|\alpha_l|^j}}{\left|\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_l^j}\right|} = \frac{\frac{1}{|\alpha_l|^{n_0+1}} - \frac{1}{|\alpha_l|^n}}{1 - \frac{1}{|\alpha_l|}} \cdot \frac{1}{\left|\frac{1}{\alpha_l} - \frac{1}{\alpha_l^n}\right|} \cdot \left|1 - \frac{1}{\alpha_l}\right| =$$

$$\frac{\left|1 - \frac{1}{\alpha_l}\right|}{-1 + \frac{1}{|\alpha_l|}} \cdot \frac{\frac{1}{|\alpha_l|^n} - \frac{1}{|\alpha_l|^{n_0+1}}}{\left|\frac{1}{\alpha_l^n} - \frac{1}{\alpha_l}\right|} = \frac{\left|1 - \frac{1}{\alpha_l}\right|}{\frac{1}{|\alpha_l|} - 1} \cdot \frac{\frac{1}{|\alpha_l|^n} - \frac{1}{|\alpha_l|^{n_0+1}}}{\left|\frac{1}{\alpha_l^n} - \frac{1}{\alpha_l}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{\left|1 - \frac{1}{\alpha_l}\right|}{\frac{1}{|\alpha_l|} - 1} \cdot 1 = K,$$

porque

$$\left|\frac{1}{\alpha_l^n} - \frac{1}{\alpha_l}\right| \geq \frac{1}{|\alpha_l^n|} - \frac{1}{|\alpha_l|} \geq \frac{1}{|\alpha_l|^n} - \frac{1}{|\alpha_l|^{n_0+1}}.$$

Entonces, retomando (2.5)

$$\left|\frac{\sum_{j=1}^{n-1} p_j(x_j - x)}{\sum_{j=1}^{n-1} p_j}\right| \leq \frac{n_0 \max_j\{|p_j||x_j - x|\}}{2\frac{n_0}{\epsilon} \max_j\{|p_j||x_j - x|, \epsilon\}} + K \cdot \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + K\frac{\epsilon}{2}$$

de modo que dado $\epsilon > 0$, conseguimos que

$$\left| \frac{\sum_{j=1}^{n-1} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n-1} p_j} - x \right| \leq (1+K)\frac{\epsilon}{2}.$$

De ahí que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j} = x$$

□

En la literatura aparece el resultado de convergencia para $\frac{\sum_{j=1}^{n-1} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n-1} p_j}$ cuando $p_j > 0$ y $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = \infty$. Nuestra demostración ha consistido en una adaptación técnica de dicha prueba.

El siguiente lema ilustra la aplicación para la resolución de ecuaciones en diferencias lineales no homogéneas del método de variación de las constantes (véase Anexo II).

Lema 3. *[8] Sea $(a_{n+p} + q_1 a_{n+p-1} + \cdots + q_p a_n)$ una sucesión convergente, y suppngamos que todas las raíces de la ecuación*

$$\lambda^p + q_1 \lambda^{p-1} + \cdots + q_p = 0, \tag{2.6}$$

son distintas y caen en el disco unidad $|\lambda| < 1$. Entonces (a_n) es una sucesión convergente de números reales.

Demostración. Consideramos la ecuación en diferencias lineal

$$z_{n+p} + q_1 z_{n+p-1} + \cdots + q_{p-1} z_{n+1} + q_p z_n = x_n. \tag{2.7}$$

Resolvemos la ecuación homogénea asociada

$$z_{n+p} + q_1 z_{n+p-1} + \cdots + q_{p-1} z_{n+1} + q_p z_n = 0. \tag{2.8}$$

Para ello consideramos la ecuación característica correspondiente

$$\lambda^p + q_1 \lambda^{p-1} + \cdots + q_{p-1}\lambda + q_p = 0, \tag{2.9}$$

cuyas raíces están en $|z| < 1$ por hipótesis.

Si se supone que las raíces son distintas, entonces la solución general de (2.9) es

$$z_n = \sum_{j=1}^{p} C_j \alpha_j^n, \tag{2.10}$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ son las p raíces distintas de la ecuación característica y $C_j,\ j = 1, \ldots, p$ constantes arbitrarias.

Ahora damos la expresión general de la solución de la ecuación en diferencias lineal no homogénea

$$z_{n+p} + q_1 z_{n+p-1} + \cdots + q_{p-1} z_{n+1} + q_p z_n = x_n, \tag{2.11}$$

donde x_n es el término de la sucesión convergente de partida, $x_n = a_{n+p} + \cdots + q_p a_n$.

Obviamente, (a_n) es solución de (2.11).

Aplicando el método de variación de las constantes (Anexo II), la solución (a_n) será del tipo

$$a_n = \sum_{j=1}^{p} c_j(n) \alpha_j^n. \tag{2.12}$$

El método afirma que $\{C_1(n),\ldots,C_p(n)\}$ debe satisfacer el sistema siguiente

$$\begin{cases} \alpha_1^{n+1}\Delta C_1(n)+\alpha_2^{n+1}\Delta C_2(n)+\cdots+\alpha_p^{n+1}\Delta C_p(n)=0 \\ \vdots \\ \alpha_1^{n+p-1}\Delta C_1(n)+\alpha_2^{n+p-1}\Delta C_2(n)+\cdots+\alpha_p^{n+p-1}\Delta C_p(n)=0 \\ \alpha_1^{n+p}\Delta C_1(n)+\alpha_2^{n+p}\Delta C_2(n)+\cdots+\alpha_p^{n+p}\Delta C_p(n)=x_n \end{cases}$$

donde $\Delta C_j(n)=C_j(n+1)-C_j(n)$ para $1\le j\le p$. Calcularemos $\Delta C_1(n)$, y por tanto $C_1(n)$, y para el resto de valores, $\Delta C_2(n),\ldots,\Delta C_p(n)$ se procederá de forma análoga.

Encontramos

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{n+1} & \alpha_2^{n+1} & \ldots & \alpha_p^{n+1} \\ \alpha_1^{n+2} & \alpha_2^{n+2} & \ldots & \alpha_p^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n+p} & \alpha_2^{n+p} & \ldots & \alpha_p^{n+p} \end{vmatrix} = \alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n+1}\ldots\alpha_p^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-1} & \ldots & \alpha_p^{p-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n+1}\ldots\alpha_p^{n+1}\prod_{1\le i<j\le p}(\alpha_j-\alpha_i)\neq 0,$$

teniendo en cuenta que se trata de un determinante de Vnadermonde ya que hemos supuesto que los α_i son distintos. De esta forma, aplicando la regla de Cramer

$$\Delta C_1(n)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_2^{n+1} & \ldots & \alpha_p^{n+1} \\ 0 & \alpha_2^{n+2} & \ldots & \alpha_p^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2^{n+p-1} & \ldots & \alpha_p^{n+p-1} \\ x_n & \alpha_2^{n+p} & \ldots & \alpha_p^{n+p} \end{vmatrix}}{\alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n+1}\ldots\alpha_p^{n+1}\prod_{1\le i<j\le p}(\alpha_j-\alpha_i)} =$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}x_n\begin{vmatrix} \alpha_2^{n+1} & \ldots & \alpha_p^{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2^{n+p-1} & \ldots & \alpha_p^{n+p-1} \end{vmatrix}}{\alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n+1}\ldots\alpha_p^{n+1}\prod_{1\le i<j\le p}(\alpha_j-\alpha_i)} = \frac{(-1)^{p+1}x_n\alpha_2^{n+1}\ldots\alpha_p^{n+1}\prod_{2\le i<j\le p}(\alpha_j-\alpha_1)}{\alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n+1}\ldots\alpha_p^{n+1}\prod_{1\le i<j\le p}(\alpha_j-\alpha_i)} =$$

$$=(-1)^{p+1}\frac{x_n}{\alpha_1^{n+1}}\frac{\prod_{2\le i<j\le p}(\alpha_j-\alpha_1)}{\prod_{1\le i<j\le p}(\alpha_j-\alpha_i)}=(-1)^{p+1}\frac{x_n}{\alpha_1^{n+1}}\frac{1}{\prod_{2\le j\le p}(\alpha_j-\alpha_1)},$$

donde hemos vuelto a hacer uso del determinante de Vandermonde.

$$\Delta C_1(n)=\frac{x_n}{\alpha_1^n}(-1)^{p+1}\frac{1}{\alpha_1\prod_{2\le j\le p}(\alpha_j-\alpha_1)}.$$

Por lo tanto, en general

$$C_1(n+1)-C_1(n)=\frac{x_n}{\alpha_1^n}(-1)^{p+1}\frac{1}{\alpha_1\prod_{2\le j\le p}(\alpha_j-\alpha_1)}.$$

De este modo,

$$C_1(2)=C_1(1)+\frac{x_1}{\alpha_1}(-1)^{p+1}\frac{1}{\alpha_1\prod_{2\le j\le p}(\alpha_j-\alpha_1)}=:C_1(1)+\frac{x_1}{\alpha_1}\delta_1,$$

donde $\delta_1=(-1)^{p+1}\frac{1}{\alpha_1\prod_{2\le j\le p}(\alpha_j-\alpha_1)}$. Similarmente,

$$C_1(3)=C_1(2)+\frac{x_2}{\alpha_1^2}\delta_1=C_1(1)+\delta_1\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+\frac{x_2}{\alpha_1^2}\right),$$

y en general

$$C_1(n) = C_1(1) + \delta_1 \left(\frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_1^2} + \dots \frac{x_{n-1}}{\alpha_j^{n-1}} \right).$$

De forma análoga podemos calcular el resto de funciones $C_l(n): \ 1 \leq l \leq p$ obteniendo

$$C_l(n) = C_l(1) + \delta_l \left(\frac{x_1}{\alpha_l} + \frac{x_2}{\alpha_l^2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{\alpha_l^{n-1}} \right),$$

donde $\delta_l = (-1)^{p+l} \frac{1}{\alpha_l} \prod_{1 \leq j \neq l \leq p} (\alpha_j - \alpha_l)$.

Conocidos los valores de $C_1(n), \cdots, C_l(n), \dots, C_p(n)$ sustituimos en (2.12):

$$a_n = \sum_{l=1}^{p} C_l(n) \alpha_l^n = \sum_{l=1}^{p} \left(C_l(1) + \delta_l \sum_{s=1}^{n-1} \frac{x_s}{\alpha_l^s} \right) \alpha_l^n$$

$$a_n = \sum_{l=1}^{p} C_l(1) \alpha_l^n + \sum_{l=1}^{p} \alpha_l^n \left(\delta_l \sum_{s=1}^{n-1} \frac{x_s}{\alpha_l^s} \right)$$

$$a_n = \sum_{l=1}^{p} \alpha_l^n \left(C_l(1) + \delta_l \sum_{s=1}^{n-1} \frac{x_s}{\alpha_l^s} \right), \tag{2.13}$$

con $C_l(1)$ constante para $1 \leq l \leq p$, así como δ_l.

Para acabar, ya sólo nos queda probar que (a_n) definida por (2.13), es convergente. Para ello veamos que lo es

$$\alpha_l^n \left(\sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_l^s} x_s \right),$$

ya que suponemos que $|\alpha_l| < 1$ para $l = 1, \dots, p$. Tenemos

$$\alpha_l^n \left(\sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_l^s} x_s \right) = \frac{\sum_{s=1}^{n-1} \frac{x_s}{\alpha_l^s}}{\sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_l^s}} \left(\sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_l^s} \right) \alpha_l^n \longrightarrow x \cdot \frac{\alpha_l}{1 - \alpha_l},$$

en donde hemos utilizado el lema 2 y el hecho de que tenemos una serie geométrica.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_l^s} \alpha_l^n = \lim_{n \to \infty} (\alpha_l^{n-1} + \alpha_l^{n-2} + \dots + \alpha_l^2 + \alpha_l) = \lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_l - \alpha_l^n}{1 - \alpha_l} = \frac{\alpha_l}{1 - \alpha_l}.$$

Por lo tanto, (a_n) es convergente con límite

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 + \sum_{l=1}^{p} \delta_l x \cdot \frac{\alpha_l}{1 - \alpha_l}.$$

□

Cabe destacar que si $|q_1| + |q_2| + \dots + |q_p| < 1$, por una aplicación directa del Teorema de Rouché se prueba que todas las raíces de (2.6) caen en el disco unidad. La prueba de esta afirmación se vio en la demostración del teorema de Copson.

Enunciamos y probamos ya el resultado principal de esta sección.

Teorema 10. *[8] Sea (a_n) una sucesión acotada que satisface la desigualdad*

$$a_{n+r} \leq \sum_{s=1}^{r} k_s a_{n+r-s}, \tag{2.14}$$

con $k_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq r,$ *y* $k_1 + \cdots + k_r = 1$. *Sea* $l_s = 1 - k_1 - \cdots - k_s$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$. *Supongamos que todas las raíces de la ecuación*

$$\lambda^{r-1} + l_1\lambda^{r-2} + \cdots + l_{r-1} = 0, \tag{2.15}$$

son distintas y caen en el disco unidad. Entonces (a_n) *es una sucesión convergente.*

Demostración. Reescribamos la desigualdad (2.14) como sigue

$$a_{n+r} + l_1 a_{n+r-1} + \cdots + l_{r-1}a_{n+1} \leq k_1 a_{n+r-1} + k_2 a_{n+r-2} + \cdots + k_r a_n + l_1 a_{n+r-1} + \cdots + l_{r-1}a_{n+1} =$$

$$= (k_1 + l_1)a_{n+r-1} + (k_2 + l_2)a_{n+r-2} + \cdots + (k_{r-1} + l_{r-1})a_{n+1} + k_r a_n = a_{n+r-1} + l_1 a_{n+r-2} + \cdots + l_{r-1}a_n.$$

De esta forma tenemos que la sucesión $(a_{n+r} + l_1 a_{n+r-2} + \cdots + l_{r-1}a_n)$ es acotada, por serlo (a_n), y monótona, en concreto decreciente, y por lo tanto, será convergente. Así, se verifican las condiciones del lema anterior (con $q_j = l_j$ para $1 \leq j \leq r$) y podemos concluir que la sucesión (a_n) es convergente como queríamos probar. □

De forma análoga a lo destacado tras el lema, se sigue que todas las raíces de $\lambda^{r-1} + l_1\lambda^{r-2} + \cdots + l_{r-1} = 0$ caen en $|\lambda| < 1$ si se verifica $|l_1| + \cdots + |l_{r-1}| < 1$.

Ilustremos con un ejemplo la aplicación del teorema.

Ejemplo 1. *Sea* (a_n) *una sucesión acotada que satisface la desigualdad*

$$a_{n+3} \leq -\frac{1}{2}a_{n+2} + \frac{3}{4}a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n.$$

En primer lugar, se verifica que la suma de los coeficientes es uno

$$\frac{-1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Calculamos los coeficientes

$$l_1 = 1 - k_1 = \frac{3}{2},$$

$$l_2 = 1 - k_1 - k_2 = \frac{3}{4}.$$

Por lo tanto consideramos el polinomio

$$\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{4} = 0.$$

Resolviendo la ecuación obtenemos las raíces

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{4},$$

cuyo módulo $|\lambda| = \sqrt{\frac{12}{16}} < 1$. *De esta forma tenemos raíces distintas que caen en el disco unidad. Así podemos concluir que la sucesión es convergente.*

2.2. Una caracterización de la convergencia de sucesiones acotadas - Teorema de Stević

En esta sección el resultado principal es el Teorema 13 que nos presenta una caracterización de la convergencia de las sucesiones acotadas. En su demostración aplicaremos un proceso inductivo sobre el orden de la inecuación en diferencias. Por este motivo, daremos de forma independiente la caracterización de los casos $k = 2$ y $k = 3$. Se puede mencionar que la forma de proceder es hacer uso de sustituciones adecuadas del tipo $b_n = a_{n+1} + \alpha a_n$ que reducen el orden de la pertinente inecuación en diferencias.

Lema 4. *[13] Sea (a_n) una sucesión acotada de números complejos tal que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+\alpha a_n)$ existe y es finito para algún $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces*

1. *Si $|\alpha| \neq 1$, la sucesión (a_n) es convergente.*
2. *Para cada $|\alpha| = 1$, la sucesión (a_n) puede ser divergente.*

Demostración. Consideramos la sucesión $b_n = a_{n+1} + \alpha a_n$ que tiene límite por hipótesis. Llamemos $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Resolviendo la ecuación en diferencias lineal no homogénea $a_{n+1} + \alpha a_n = b_n$ obtenemos la solución siguiente

$$a_n = a_0(-\alpha)^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j(-\alpha)^{n-(j+1)}. \tag{2.16}$$

Para resolverla podemos utilizar simplemente inducción o si se prefiere utilizar el método de variación de las constantes (véase Anexo II), al igual que en el lema 3.

Vamos a sustituir $b_n = b + c_n$, donde debe ser $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ para no contradecir el hecho de que b es el límite de (b_n). Como $\lim_{j\to\infty} c_j = 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|c_j| < \epsilon$, para todo $j \geq n_1$. Obtenemos así

$$a_n = (-\alpha)^n a_0 + b\sum_{j=0}^{n-1}(-\alpha)^j + \sum_{j=0}^{n-1} c_j(-\alpha)^{n-(j+1)}. \tag{2.17}$$

A continuación distingamos casos.

CASO $|\alpha| < 1$.

Como hemos supuesto que $|\alpha| < 1$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$ es absolutamente convergente.

Además $\sum_{j=0}^{n-1} c_j(-\alpha)^{n-(j+1)} = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Veámoslo:

Como $\lim_{m\to\infty}(-\alpha)^m = 0$, implica que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|(-\alpha)^m| < \epsilon$, para todo $m \geq n_2$.

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Como (c_j) está acotada se tiene que $|c_j| \leq M$ para todo j. Tomamos $n > 2n_0 + 1$, entonces

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j(-\alpha)^{n-(j+1)} = \sum_{j=0}^{n_0} c_j(-\alpha)^{n-(j+1)} + \sum_{j=n_0+1}^{n-1} c_j(-\alpha)^{n-(j+1)}.$$

Estudiando cada uno de los sumatorios por separado

$$\sum_{j=0}^{n_0} |c_j||(-\alpha)^{n-(j+1)}| \leq M\sum_{j=0}^{n_0}(-\alpha)^{n-(j+1)} = M\sum_{m=n-(n_0+1)}^{n-1}|(-\alpha)|^m \leq$$

$$\leq M\sum_{m=n-(n_0+1)}^{\infty}|(-\alpha)|^m \leq M\frac{|(-\alpha)^{n-(n_0+1)}|}{1-|-\alpha|} \leq M\frac{\epsilon}{1-|-\alpha|},$$

y

$$\sum_{j=n_0+1}^{n-1} |c_j||(-\alpha)|^{n-j+1} < \epsilon\sum_{j=n_0+1}^{\infty}|(-\alpha)^{n-(j+1)} \leq \frac{\epsilon}{1-|-\alpha|}.$$

Queda así probado que $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} c_j(-\alpha)^{n-(j+1)} = 0$. De esta forma, se sigue de (2.22) que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b\sum_{j=0}^{\infty}(-\alpha)^j = b\frac{1}{1-(-\alpha)} = \frac{b}{1+\alpha}.$$

CASO $|\alpha| > 1$

Reescribamos la expresión de a_n dada en (2.16) como sigue

$$a_n = (-\alpha)^n \left(a_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{(-\alpha)^{j+1}} \right). \tag{2.18}$$

Como (a_n) es acotada por hipótesis, existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Aplicando esto en (2.18)

$$|(-\alpha)^n| \left| a_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{(-\alpha)^{j+1}} \right| \leq M,$$

por lo tanto,

$$\left| a_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{(-\alpha)^{j+1}} \right| \leq \frac{M}{|\alpha|^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De ahí, haciendo $n \to \infty$, como $\frac{M}{|\alpha|^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ por ser $|\alpha| > 1$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{(-\alpha)^{j+1}} \right) = 0,$$

por tanto,

$$a_0 = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{(-\alpha)^{j+1}}.$$

Sustituyendo a_0 en (2.18) y teniendo en cuenta el cambio $b_n = b + c_n$

$$a_n = (-\alpha)^n \left(-\sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{(-\alpha)^{j+1}} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{(-\alpha)^{j+1}} \right) = (-\alpha)^n \left(-\sum_{j=n}^{\infty} \frac{b_j}{(-\alpha)^{j+1}} \right) =$$

$$= (-\alpha)^n \left(-\sum_{j=n}^{\infty} \frac{b}{(-\alpha)^{j+1}} - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{c_j}{(-\alpha)^{j+1}} \right) = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=n}^{\infty} \frac{b}{(-\alpha)^{j-n}} + \frac{1}{\alpha}\sum_{j=n}^{\infty} \frac{c_j}{(-\alpha)^{j-n}} =$$

$$= \frac{b}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(-\alpha)^j} + \frac{1}{\alpha}\sum_{j=n}^{\infty} \frac{c_j}{(-\alpha)^{j-n}} = \frac{b}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha}\sum_{j=n}^{\infty} \frac{c_j}{(-\alpha)^{j-n}} = \frac{b}{1+\alpha} + \frac{1}{\alpha}\sum_{j=n}^{\infty} \frac{c_j}{(-\alpha)^{j-n}}. \tag{2.19}$$

Debemos ahora estimar el valor de $\sum_{j=n}^{\infty} \frac{c_j}{(-\alpha)^{j-n}}$.

Como $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, tenemos que $|c_n| < \epsilon$ para $n \geq n_1$, y por lo tanto

$$\left| \sum_{j=n}^{\infty} \frac{c_j}{(-\alpha)^{j-n}} \right| \leq \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|c_{n+r}|}{|\alpha|^r} < \epsilon \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|^r} = \epsilon \frac{1}{1-\frac{1}{|\alpha|}} = \frac{\epsilon|\alpha|}{|\alpha|-1}.$$

De donde se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{c_k}{(-\alpha)^{k-n}} = 0,$$

y por (2.19) la sucesión (a_n) es convergente con

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{b}{1+\alpha}.$$

Demostremos ahora el segundo apartado.

Si $|\alpha| = 1,\ \alpha \neq -1$, entonces podemos expresarlos de la forma $\alpha = e^{i\theta},\ \theta \in (-\pi, \pi)$. Entonces la sucesión

$$a_n = (-1)^n e^{in\theta}$$

es divergente (véase Anexo III), está acotada

$$|a_n| = |(-1)^n e^{in\theta}| \leq |-1|^n |e^{in\theta}| = |\alpha|^n = 1$$

y satisface la condición

$$a_{n+1} + \alpha a_n = 0,$$

lo que implica que $b = 0$.

Si $\alpha = -1$, podemos tomar la siguiente sucesión

$$(a_n) = \left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \dots\right)$$

que es divergente, acotada por 1 y verifica que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

$\square$

Teorema 11. *[13] Sea la sucesión real (a_n) que satisface la desigualdad*

$$a_{n+2} \leq (1-\alpha)a_{n+1} + \alpha a_n, \tag{2.20}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces la acotación de (a_n) implica su convergencia si y sólo si $\alpha \neq 1$.

Demostración. Consideramos $b_n = a_{n+1} + \alpha a_n$. Entonces por (2.20) tenemos garantizada la monotonía:

$$b_{n+1} = a_{n+2} + \alpha a_{n+1} \leq (1-\alpha)a_{n+1} + \alpha a_n + \alpha a_{n+1} = a_{n+1} + \alpha a_n = b_n,$$

es decir, $b_{n+1} \leq b_n$.

Por otro lado, la acotación de (a_n) implica la acotación de (b_n)

$$|b_n| \leq |a_{n+1}| + |\alpha||a_n| \leq M + |\alpha|M,$$

siendo M la cota de (a_n). De esta forma, al ser acotada y decreciente tenemos que (b_n) es convergente. Sea $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Por el lema anterior, si $|\alpha| \neq 1$, la sucesión (a_n) es convergente.

Sea $\alpha = -1$. Sabemos que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = b$ y que (a_n) una sucesión acotada. Probemos que $b = 0$. Supongamos por reducción al absurdo, que fuese $b > 0$. Para $\epsilon > 0$ con $b - \epsilon > 0$ por la definición de límite existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|(a_{n+1} - a_n) - b| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, lo que equivale a

$$0 < b - \epsilon < a_{n+1} - a_n < b + \epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$, así que

$$a_n + (b - \epsilon) < a_{n+1},$$

para todo $n \geq n_0$. Tomamos $n = n_0$ y $n = n_0 + 1$ en la desigualdad anterior:

$$a_{n_0} + (b - \epsilon) < a_{n_0+1}$$

y

$$a_{n_0+1} + (b - \epsilon) < a_{n_0+2}.$$

Juntando ambas expresiones

$$a_{n_0} + 2(b - \epsilon) < a_{n_0+2}.$$

De forma inductiva llegamos a

$$a_{n_0} + k(b - \epsilon) < a_{n_0+k},$$

y al hacer tender k a infinito contradecimos el hecho de que (a_n) sea acotada. De ahí que concluyamos que $b \leq 0$.

Si suponemos que $b < 0$, con un razonamiento similar se llegará a que a_n tampoco es acotada. Por tanto, concluimos que $\lim b_n = b = 0$.

Como (b_n) es decreciente, se deduce que $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $a_{n+1} - a_n \geq 0$ lo que implica que (a_n) es una sucesión creciente, que junto a la acotación da la convergencia de a_n.

Finalmente, la sucesión $a_n = (-1)^n$ está acotada, es divergente y satisface $a_{n+1} + a_n = 0$. Luego la implicación no se verifica para $\alpha = 1$. □

Lema 5. *[13] Sean α_i $(i = 0, \cdots, n-1)$ números reales con $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = 1$; sea $P_n(z) = z^n - \alpha_{n-1}z_{n-1} - \cdots - \alpha_1 z - \alpha_0$ y supongamos que $P_n(q) = 0$ para algún $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Entonces $P_n(z) = (z-q)P_{n-1}(z)$, donde $P_{n-1}(z) = z^{n-1} - \beta_{n-2}z^{n-2} - \cdots - \beta_1 z - \beta_0$ es tal que $\sum_{i=0}^{n-2} \beta_i = 1$.*

Demostración. Al ser q un cero del polinomio $P_n(z)$, es evidente que podemos expresarlo como

$$P_n(z) = (z - q)P_{n-1}(z),$$

donde $P_{n-1}(z) = z^{n-1} - \beta_{n-2}z^{n-2} - \cdots - \beta_1 z - \beta_0$ con β_i $i = 0, \ldots, n-2$, números complejos.

Ahora bien, al ser $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = 1$ se tiene que

$$P(1) = 1 - \alpha_{n-1} - \cdots - \alpha_0 = 1 - 1 = 0.$$

Luego $0 = P_n(1) = (1 - q)P_{n-1}(1)$, por lo que $P_{n-1}(1) = 0$, ya que $q \neq 1$ por hipótesis. Por lo tanto

$$P_{n-1}(1) = 0 = 1 - \beta_{n-2} - \cdots - \beta_1 - \beta_0 = 0,$$

es decir, $\sum_{i=0}^{n-2} \beta_i = 1$.

□

Teorema 12. *[13] Sea la sucesión de números reales (a_n) que satisface la desigualdad*

$$a_{n+3} \leq \alpha_2 a_{n+2} + \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_0 a_n, \tag{2.21}$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Si (a_n) está acotada, entonces será convergente si y sólo si todos los ceros del polinomio $P_3(z) = z^3 - \alpha_2 z^2 - \alpha_1 z - \alpha_0$ pertenecen al conjunto

$$\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1, z \neq 1\}.$$

Demostración. " $\Rightarrow$ " Sea $re^{i\theta}$ un cero de $P_3(z)$. Si $r = 1$ y $\theta \neq 0$, la implicación no se verifica, ya que de hecho, las sucesiones $\cos(n\theta)$ y $\operatorname{sen}(n\theta)$ con $\theta \neq \pi$, son acotadas, satisfacen la relación

$$a_{n+3} - (2\cos\theta + 1)a_{n+2} + (2\cos\theta + 1)a_{n+1} - a_n = 0,$$

y son divergentes. La comprobación de la relación es rutinaria pero extensa, de ahí que no la desarrollemos.

" $\Leftarrow$ " Observemos que $q = 1$ es siempre raíz de $P_3(z)$ porque $1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$.

CASO I Supongamos que los tres ceros de $P_3(z)$ son reales, uno de ellos igual a 1, y los dos restantes q_1 y q_2 con $q_1 \neq -1 \neq q_2$.

Introducimos el cambio $b_n = a_{n+1} - q_1 a_n$. Entonces la desigualdad (2.21) se convierte en

$$\begin{aligned} b_{n+2} &\leq (\alpha_2 - q_1)a_{n+2} + \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_0 a_n = \\ &= (\alpha_2 - q_1)b_{n+1} + (\alpha_2 - q_1)q_1 a_{n+1} + \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_0 a_n = \\ &= (\alpha_2 - q_1)b_{n+1} + (\alpha_1 + q_1\alpha_2 - q_1^2)a_{n+1} + \alpha_0 a_n = \\ &= (\alpha_2 - q_1)b_{n+1} + (\alpha_1 + q_1\alpha_2 - q_1^2)b_n + (\alpha_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_1^2 - q_1^3)a_n. \end{aligned}$$

Al ser q_1 raíz de $P_3(z)$,

$$b_{n+2} \leq (\alpha_2 - q_1)b_{n+1} + (\alpha_1 + q_1\alpha_2 - q_1^2)b_n,$$

donde $\alpha_2 - q_1 = \beta_1$ y $\alpha_1 + q_1\alpha_2 - q_1^2 = \beta_0$ son los coeficientes de la representación de $P_2(z)$ del lema 5. Dentro de este caso distinguimos:

I a) Sea $|q_1| \neq 1$ (por tanto la raíz $q = 1$ solo puede tener multiplicidad 1 o 2). Por el mismo lema 5 tenemos que $\beta_1 = 1 - \alpha$ y $\beta_0 = \alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, ya que han de sumar 1.

Como por hipótesis (a_n) es una sucesión acotada, entonces (b_n) también lo será ya que

$$|b_n| \leq |a_{n+1}| - |q_1||a_n| = M - |q_1|M,$$

donde M es la cota de (a_n).

Por el Teorema 11, la acotación de (b_n) implica la convergencia de dicha sucesión si y sólo si $\alpha \neq 1$. En nuestro caso, α no puede ser igual a 1. De hecho, si $\alpha = 1$, implicaría que $\beta_1 = 0$ y $\beta_0 = 1$, y consecuentemente $P_3(z) = (z^2 - 1)(z - q_1)$, ya que $P_3(-1) = 0$, lo que es imposible porque hemos elegido q_1 y q_2 distintos de -1.

Por el lema 4 junto a que $|q_1| \neq 1$, tenemos garantizada la convergencia de (a_n). El razonamiento es análogo al que hicimos en el Teorema 11.

I b) Si $q_1 = q_2 = 1$ (es decir, la raíz $q = 1$ tiene multiplicidad 3), la desigualdad (2.21) se queda como

$$a_{n+3} \leq 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n, \tag{2.22}$$

ya que

$$P_3(z) = z^3 - \alpha_2 z^2 - \alpha_1 z - \alpha_0 = (z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z + 1.$$

Si hacemos el cambio $b_n = a_{n+1} - a_n$,

$$a_{n+3} = b_{n+2} + a_{n+2} = b_{n+2} + b_{n+1} + a_{n+1} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n + a_n,$$

luego la desigualdad 2.22 nos lleva a

$$b_{n+2}+b_{n+1}+b_n+a_n \leq 3(b_{n+1}+b_n+a_n)-3(b_n+a_n)+a_n = 3b_{n+1}+a_n,$$

lo que implica que

$$b_{n+2} \leq 2b_{n+1}-b_n.$$

Es más, tomando $c_n = b_{n+1}-b_n$,

$$c_{n+1}+b_{n+1} \leq 2b_n+2c_n-b_n \Rightarrow c_{n+1}+c_n+b_n \leq 2b_n+2c_n-b_n \Rightarrow c_{n+1} \leq c_n.$$

Como hemos visto anteriormente, la acotación de (a_n) implica la acotación de (b_n) y de (c_n). De esta forma, al ser (c_n) monótona y acotada, será convergente. Si llamamos $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, al ser $c_n = b_{n+1}-b_n$ y ser (b_n) acotado, de igual forma que razonamos en el Teorema 11 obtenemos que $c = 0$. Esto implica que $c_n \geq 0$ y, por ende, $b_{n+1} \geq b_n$. De ahí, que al ser acotada y creciente se tenga la convergencia de (b_n).

Como $b_n = a_{n+1}-a_n$ y (a_n) está acotada, se tiene que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Esto implica que $b_n \geq 0$ (la prueba se puede consultar en la demostración del teorema 12) que es equivalente a $a_{n+1}-a_n \geq 0$, teniendo así la monotonía de (a_n) que junto a la acotación nos da su convergencia.

CASO II Sean q_1 y q_2 ceros complejos conjugados con módulo diferente de 1. De esta forma, podemos expresarlos como sigue

$$q_1 = re^{i\theta}\ , \quad q_2 = re^{-i\theta}.$$

En este caso, el polinomio $P_3(z)$ se puede representar por la fórmula siguiente

$$P_3(z) = (z-1)(z^2-2r\cos(\theta)z+r^2),$$

ya que

$$P_3(z) = (z_1)(z-q_1)(z-q_2) = (z-1)(z-re^{i\theta})(z-re^{-i\theta}) = (z-1)(z^2-r(e^{-i\theta}+e^{i\theta})z+r^2) =$$

$$= (z-1)(z^2-2r\cos(\theta)z+r^2).$$

Poniendo $c_n = a_{n+2}-2r\cos(\theta)a_{n+1}+r^2a_n$, por (2.21)

$$a_{n+3} \leq \alpha_2 a_{n+2}+\alpha_1 a_{n+1}+\alpha_0 a_n.$$

Teniendo esto en cuenta

$$a_{n+3} = c_{n+1}+2r\cos(\theta)a_{n+2}-r^2a_{n+1} \leq$$

$$\leq (2r\cos\theta+1)(c_n+2r\cos\theta a_{n+1}-r^2a_n)-(2r\cos\theta+r^2)a_{n+1}+r^2a_n,$$

y desarrollando las expresiones a ambos lados de la desigualdad obtenemos que $c_{n+1} \leq c_n$.

Como (c_n) está acotada por estarlo (a_n) y tenemos la monotonía garantizada, podemos concluir que (c_n) es convergente. Sea $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Consideremos la sucesión dada por $d_n = a_{n+1}-re^{i\theta}a_n$. Está claro que

$$c_n = a_{n+2}-2r\cos(\theta)a_{n+1}+r^2a_n = d_{n+1}-re^{-i\theta}d_n.$$

Si (a_n) está acotada, entonces (d_n) también lo estará porque

$$|d_n| \leq |a_{n+1}|+|r||e^{i\theta}||a_n| \leq M+rM,$$

siendo M la cota de (a_n).

Entonces, por el lema 4, concluimos que (d_n) es convergente. Y por el lema 11 existe $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - re^{i\theta}a_n$.

Como $|re^{i\theta}| \neq 1$, por el primer apartado del mismo lema, si (d_n) es acotada, entonces será convergente. $\square$

Teorema 13. *[13] Sean α_i $(i = 0, \dots, k-1)$ números reales con $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = 1$; sea $P_k(z) = z^k - \alpha_{k-1}z^{k-1} - \dots - \alpha_1 z - \alpha_0$ y supongamos que la sucesión real (a_n) satisface la desigualdad*

$$a_{n+k} \leq \alpha_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 a_n \tag{2.23}$$

Entonces la acotación de (a_n) implica su convergencia si y sólo si los ceros del polinomio $P_k(z)$ pertenecen al conjunto $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1, z \neq 1\}$.

Demostración. " $\Rightarrow$ " Si $q = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$ es un cero de $P_{m_0}(z)$, $m_0 \in \mathbb{N}$, la implicación no se verifica, ya que $a_n = \cos(n\theta)$ es una sucesión acotada, divergente y que satisface (2.23).

" $\Leftarrow$ " Para $k = 1$ el resultado es más que conocido. Los casos $k = 2$ y $k = 3$ se han cubierto y probado en los teoremas 11 y 12. Para $k \geq 3$ vamos a proceder por inducción.

Supongamos que el resultado es cierto para $k \leq m_0 - 1$.

CASO I En primer lugar, supongamos que existe un cero real q del polinomio tal que $|q| \neq 1$.

Aplicando la sustitución $b_n = a_{n+1} - qa_n$ podemos reescribir (2.23) como

$$b_{n+m_0-1} \leq \beta_{m_0-2}b_{n+m_0-2} + \dots + \beta_0 b_n,$$

donde $\sum_{i=0}^{m_0-2} \beta_i = 1$, $\beta_i \in \mathbb{R}$ siendo los β_i $(i = 1, \dots, m_0 - 2)$ los coeficientes del polinomio $P_{m_0-1}(z)$ del lema 5, es decir, $P_{m_0-1}(z) = z^{m_0-1} - \beta_{m_0-2}z^{m_0-2} - \dots - \beta_1 z \beta_0$.

Si (a_n) está acotada, también lo estará (b_n). Por la hipótesis de inducción, la acotación de (b_n) es equivalente a la convergencia de (b_n) si y sólo si los ceros del polinomio $P_{m_0-1}(z)$ caen en $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1, z \neq 1\}$.

Por el lema 4, si (a_n) está acotado y (b_n) es convergente, entonces (a_n) es convergente.

CASO II Si $P_{m_0}(z)$ tiene ceros complejos conjugados con módulo diferente de 1, como por ejemplo $re^{\pm i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$, entonces $z^2 - 2\cos(\theta)z + r^2$ es factor de $P_{m_0}(z)$.

Utilizando dos veces consecutivas el lema 5 podemos concluir que

$$P_{m_0}(z) = (z^2 - 2r\cos(\theta)z + r^2)P_{m_0-2}(z),$$

donde $P_{m_0-2}(z) = z^{m_0-2} - \gamma_{m_0-3}z^{m_0-3} - \dots - \gamma_1 z - \gamma_0$ y $\sum_{i=0}^{m_0-3} \gamma_i = 1$.

Haciendo ahora la sustitución $b_n = a_{n+2} - 2r\cos(\theta)a_{n+1} + r^2 a_n$, la desigualdad (2.23) se convierte en

$$b_{n+m_0-2} \leq \gamma_{m_0-3}b_{n+m_0-3} + \dots + \gamma_0 b_n.$$

La hipótesis de inducción junto al lema 4 prueban el resultado para este caso.

CASO III Finalmente, supongamos que todos los ceros de $P_{m_0}(z)$ son iguales a 1.

La desigualdad (2.23) implica

$$\Delta^{m_0} a_n \leq 0 \tag{2.24}$$

para ello hemos utilizado la siguiente propiedad del operador en diferencias cuya prueba se puede ver en [9]

$$\Delta^k x_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x_{n+k-1}.$$

Al ser todos los ceros de $P_{m_0}(z)$ iguales a 1

$$P_{m_0}(z) = (z-1)^{m_0} = \sum_{i=0}^{m_0} \binom{m_0}{i} (-1)^i z^{m_0-i},$$

luego $\alpha_i = \binom{m_0}{i} (-1)^i$. Aplicando entonces (2.23) obtenemos la desigualdad (2.24).

Haciendo la sustitución $b_n = \Delta^{(m_0-1)} a_n$ podemos reescribir (2.24) como

$$b_{n+1} \leq b_n.$$

En efecto, basta usar la propiedad

$$\binom{p}{q} + \binom{p}{q-1} = \binom{p+1}{q},$$

entonces

$$0 \geq a_{n+m_0} - \left[\binom{m_0-1}{1} + \binom{m_0-1}{0} \right] a_{n+m_0-1} + \left[\binom{m_0-1}{2} + \binom{m_0-1}{1} \right] a_{n+m_0-2}$$
$$- \cdots + (-1)^{m_0-1} \left[\binom{m_0-1}{m_0-1} + \binom{m_0-1}{m_0-2} \right] a_{n-1} + (-1)^{m_0} \binom{m_0-1}{m_0-1} a_n.$$

Luego

$$a_{n+m_0} - \binom{m_0-1}{1} + \binom{m_0-2}{2} a_{n+m_0-2} - \cdots + (-1)^{m_0-1} \binom{m_0-1}{m_0-1} a_{n+1} \leq$$
$$\leq \binom{m_0-1}{0} a_{n+m_0-1} + \binom{m_0-1}{1} a_{n+m_0-2} + \cdots + (-1)^{m_0-1} \binom{m_0-1}{m_0-2} a_{n+1} + (-1)^{m_0-1} a_n.$$

Lo que implica que

$$\Delta^{(m_0-1)}(a_{n+1}) \leq \Delta^{(m_0-1)}(a_n),$$

es decir,

$$b_{n+1} \leq b_n.$$

Si (a_n) está acotada, entonces (b_n) lo estará. De la acotación de (b_n) junto a la monotonía, concluímos su convergencia. Llamemos $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Consideramos $c_n = \Delta^{(m_0-2)} a_n$. Como (c_n) está acotada, por estarlo (a_n), y el $\lim_{n\to\infty}(c_{n+1} - c_n) = b$, podemos concluir, de forma análoga a como razonamos en 12, que $b = 0$. De ahí se sigue que $b_n \geq 0$, es decir, $\Delta^{(m_0-1)}(-a_n) \leq 0$. Por la hipótesis de inducción, concluimos que la sucesión $(-a_n)$ converge, y por lo tanto, también lo hará (a_n). □

Ejemplo 2. *Sea (a_n) es una sucesión acotada que verifica la desigualdad*

$$a_{n+3} \leq \frac{7}{4} a_{n+2} + \frac{5}{8} a_{n+1} - \frac{1}{4} a_n.$$

Consideramos el polinomio

$$z^3 - \frac{7}{4}z^2 - \frac{5}{8}z + \frac{1}{4}.$$

Calculamos sus raíces por Ruffini

$$z = -\frac{1}{2}, \quad z = 2, \quad z = -\frac{1}{4}.$$

Al no caer en $\{z : |z| = 1, z \neq 1\}$ *podemos concluir que la sucesión es convergente.*

Capítulo 3

Condiciones suficientes de monotonía

En el presente capítulo, dividido en dos secciones, vamos a desarrollar otra línea de estudio que condiciona la convergencia de sucesiones de números reales mediante criterios de monotonía. De esta forma, presentamos condiciones suficientes y necesarias de convergencia limitándonos a las propiedades de monotonía de las funciones, no necesariamente lineales, que determinan las desigualdades de tipo Copson que verifican las sucesiones acotadas. En la primera sección presentamos un resultado de Bibby [3] que garantiza la convergencia de sucesiones acotadas g-monótonas. Seguidamente nos centraremos en funciones de varias variables no decrecientes que son estrictamente crecientes en alguna de sus variables. En concreto, estudiaremos el caso en el que sean estrictamente creciente respecto a la primera variable o respecto a dos que sean primos relativos ([15], [16]). A continuación, en la segunda sección, estudiaremos un teorema de Iričanin [7] basado en ecuaciones en diferencias autónomas y finalizaremos con otro resultado de Stević [17] que se centra en inecuaciones en diferencias no lineales.

3.1. Condiciones de convergencia para sucesiones acotadas que verifican desigualdades de tipo Copson

Para nuestro primer resultado principal, el teorema 14, introduzcamos dos definiciones que generalizan la noción de "promedio" y el concepto de monotonía respectivamente.

Definición 1. *Se dice que $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ es una función promedio si es continua, estrictamente creciente en cada variable y satisface*

$$x = f(x, x, \ldots, x), \tag{3.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición 2. *Una sucesión (a_n) se dice g-decreciente si existe una función promedio tal que*

$$a_n \leq f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-r}), \tag{3.2}$$

para todo $n > r$.

Si la desigualdad anterior se cumple en la otra dirección, diremos que la sucesión es g-creciente. Una sucesión es g-monótona si es g-decreciente o g-creciente.

Teorema 14. *[3] Si una sucesión real está acotada y es g-monótona, entonces es convergente.*

Demostración. Comencemos viendo la demostración para el caso de sucesiones g-decrecientes. Sea

$$A_n = \text{máx}\{a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-r}\}.$$

Claramente, para todo n,

$$A_{n+1} \leq \text{máx}\{a_n, A_n\}, \tag{3.3}$$

y

$$A_n = a_{n-t(n)}, \ \textit{con } t(n) \textit{ entre } 1 \textit{ y } r. \tag{3.4}$$

Por las propiedades de f

$$a_n \leq f(a_{n-1}, \ldots, a_{n-r}) \leq f(A_n, \ldots, A_n) = A_n,$$

donde hemos utilizado que es g-decreciente en la primera desigualdad, estrictamente creciente en la segunda desigualdad y que se trata de una función promedio en la última igualdad.

Por lo tanto

$$a_n \leq A_n, \tag{3.5}$$

y así, por (3.3),

$$A_{n+1} \leq A_n.$$

De esta forma A_n tiende a un límite finito A o diverge a $-\infty$ por ser decreciente. Pero si lo último fuese cierto, (a_n) también divergería a $-\infty$, lo que contradice la hipótesis de que sea una sucesión acotada. Así que $A_n \to A$.

Por (3.5), $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq A$. Tomamos $n = m + r + 1$ y $t(n) = r + 1 - s$, obteniendo así en (3.4)

$$a_{m+s} = A_{m+r+1} \geq A, \tag{3.6}$$

ya que la sucesión converge a A de forma decreciente. Ahora, por ser f función promedio y monótona en todas sus variables

$$A \leq a_{m+s} \leq f(a_{m+s-1}, \ldots, a_m, \ldots, a_{m+s-r}) \leq f(A_{m+s}, \ldots, A_{m+s}, a_m, A_{m+s}, \ldots, A_{m+s}), \tag{3.7}$$

donde A_{m+s} está en todas las variables excepto en la s-ésima, que está a_m. Aquí podríamos interpretar s como una función que puede tomar los valores $1, 2, \ldots, r$.

Veamos a continuación que $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq A$, ya que así concluiremos que $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Procedamos ahora por reducción al absurdo. Supongamos que

$$\liminf_{n\to\infty} a_m = A - 2\delta < A.$$

Entonces, por la definición de límite inferior, existe una subsucesión (m_k) estrictamente creciente de enteros positivos tal que

$$a_{m_k} < A - \delta; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Además, debemos elegir la subsucesión de forma que cada m_k corresponda con el mismo valor que s en (3.7). Entonces por (3.6) y (3.7)

$$A \leq f(A_{m_k+s}, \ldots, A - \delta, \ldots, A_{m_k+s}),$$

donde $A - \delta$ ocupa la posición s-ésima. Haciendo $k \to \infty$, gracias a la continuidad de f

$$A \leq f(A, \ldots, A, A - \delta, A, \ldots, A),$$

pero esto contradice que f sea estrictamente creciente en todas sus variables, en concreto en la s-ésima. Por lo que concluimos que

$$A \leq \liminf_{n\to\infty} a_n,$$

que junto a $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq A$ nos implica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Para completar la prueba, observemos que si (a_n) es g-creciente con respecto a la función promedio f, entonces $(-a_n)$ es g-decreciente con respecto a la función promedio $\bar{f}$, donde

$$\bar{f}(a_1, \ldots, a_r) = -f(-a_1, \ldots, -a_r).$$

Luego si (a_n) es g-creciente, $(-a_n)$ converge y, por ende, convergerá (a_n).

□

Como ejemplo de funciones que satisfacen las propiedades que se le exigen a la función promedio f tenemos la media aritmética ponderada y no ponderada, la media geométrica o la media armónica.

Ejemplo 3. *Ilustremos el caso de la media aritmética. Consideremos*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

Es sencillo darse cuenta que se trata de una función continua y estrictamente creciente. Por otro lado, se verifica la igualdad $f(x, \ldots, x) = x$ ya que

$$f(x, \ldots, x) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = x\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = x.$$

De ahí que, aplicando el teorema anterior, si (a_n) es una sucesión acotada que satisface la desigualdad

$$a_n \leq \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i a_{n-i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i},$$

entonces es convergente.

Además, las condiciones exigidas a la función f no son necesarias como se pudo ver en el Teorema de Copson [5]. Esto hace aumentar nuestro interés por encontrar condiciones suficientes y necesarias que nos garanticen la convergencia haciendo uso de condiciones de monotonía de las funciones.

En este sentido presentamos nuestro segundo resultado principal de esta sección.

Teorema 15. *[15] Sea $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ una función real continua en $\mathbb{R}^k$ que es no decreciente en cada variable y creciente en la primera y $\phi(x, \ldots, x) \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Si (a_n) es una sucesión acotada que satisface la desigualdad*

$$a_{n+k} \leq \phi(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots, a_n), \tag{3.8}$$

para todo $n \geq 1$, entonces debe ser convergente.

Demostración. Para evitar demasiados cálculos daremos la demostación para el caso $k = 3$. Todos los pasos se pueden generalizar sin dificultades.

Como (a_n) está acotada, entonces tenemos garantizada la existencia de los límites superior e inferior de la sucesión, que deben ser finitos. Sean

$$\liminf a_n = l \quad y \quad \limsup a_n = L.$$

Nuestro objetivo es probar que $L = l$ para tener así la convergencia. Procedamos por reducción al absurdo.

Supongamos lo contrario, que $L > l$. Por la definición de límite superior y de límite inferior sabemos que existen subsucesiones (a_{n_k}) y (a_{m_k}) de (a_n) que convergen a l y L, respectivamente.

Por definición, al ser $L = \limsup a_n$ tenemos

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ a_n < L + \epsilon\ \forall n \geq n_0. \tag{3.9}$$

Por otro lado, al ser $l = \liminf a_n$ tenemos

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}: l - \epsilon < a_n\ \forall n \geq n_1. \tag{3.10}$$

Sea $\epsilon \in \left(0, \frac{L-l}{2}\right)$ fijo, $L_1 = \phi(L-\epsilon, L, L)$ y $L_{2,k} = \phi\left(L - \frac{\epsilon}{k}, L, L\right),\ k \in \mathbb{N}$.

Como ϕ es creciente respecto a la primera variable, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi\left(L - \frac{\epsilon}{k_0}, L, L\right) > \phi(L_1, l, L).$$

También podemos elegir $\delta_0 > 0$ tal que

$$\delta_0 < \min\{L_1 - \phi(l, L, L), L_2 - \phi(L_1, l, L)\},$$

donde L_2 es la abreviación para L_{2,k_0}.

Por otro lado, por la continuidad de ϕ tenemos que $\forall \delta > 0$ existe $\epsilon_1 \in (0, \epsilon)$ tal que

$$|\phi(l + \epsilon_1, L + \epsilon_1, L + \epsilon_1) - \phi(l, L, L)| < \delta,$$

y

$$|\phi(L_1, l + \epsilon_1, L + \epsilon_1) - \phi(L_1, l, L)| < \delta.$$

Finalmente, para dicho ϵ_1 en lugar de ϵ y para todo $n \geq n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, ambas desigualdades (3.9) y (3.10) se verifican. Es más, escogiendo m_{k_0} de forma que $m_{k_0} > n_2 + 1$ y $l - \epsilon_1 < a_{m_{k_0}} < l + \epsilon_1$, por (3.8) tenemos

$$a_{m_{k_0}+1} \leq \phi(a_{m_{k_0}}, a_{m_{k_0}-1}, a_{m_{k_0}-2}) \leq \phi(l + \epsilon_1, L + \epsilon_1, L + \epsilon_1) < \phi(l, L, L) + \delta_0 < L_1 < L_2.$$

Consecuentemente

$$a_{m_{k_0}+2} \leq \phi(a_{m_{k_0}+1}, a_{m_{k_0}}, a_{m_{k_0}-1}) \leq \phi(L_1, l + \epsilon_1, L + \epsilon_1) < \phi(L_1, l, L) + \delta_0 < L_2.$$

De forma análoga

$$a_{m_{k_0}+3} \leq \phi(L_2, L_1, l + \epsilon_1) \leq \phi(L_2, L_2, L_2) \leq L_2.$$

De esta forma, se ve fácilmente que para todo $p \in \mathbb{N}$

$$a_{m_{k_0}+p} \leq L_2.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$L = \limsup a_n \leq L_2 = \phi\left(L - \frac{\epsilon}{k_0}, L, L\right) < \phi(L, L, L) \leq L,$$

de ahí que

$$L < L.$$

Llegando así a una contradicción, lo que implica que $L = l$ como deseábamos.

□

La condición de la existencia de una variable de forma que $\phi(x_1, \dots, x_k)$ sea creciente en ella es necesaria. De hecho, si consideramos

$$\phi(x_1, \dots, x_k) = \text{máx}\{x_1, \dots, x_k\},$$

se trata de una función continua real en $\mathbb{R}^k$, que es no decreciente en cada variable y se verifica trivialmente la condición $\phi(x, \dots, x) \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (en realidad se cumple la igualdad). Ahora tomamos la sucesión

$$(a_n) = (1, 2, \dots, k, 1, 2, \dots, k, 1, 2, \dots, k, \dots),$$

que satisface la desigualdad $a_{n+k} \leq \text{máx}\{a_{n+k-1}, \dots, a_n\}$, pero no es convergente.

Por otro lado, la condición de que la función $\phi(x_1, \dots, x_k)$ es creciente en la primera variable es necesaria. Ilustrémoslo con el siguiente ejemplo. Consideremos

$$\phi(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k}(x_s + \text{máx}\{x_1, x_s\} + \text{máx}\{x_1, x_2, x_s\} + \dots + \text{máx}\{x_1, \dots, x_s, \dots, x_k\})$$

donde s toma valores entre $\{2, \dots, k\}$. Se trata de una función real y continua en $\mathbb{R}^k$, creciente en la variable x_s, no decreciente en el resto de variables y $\phi(x, \dots, x) \leq x$ se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$. La sucesión

$$(a_n) = \begin{pmatrix} 0\dots0 & 1 & 0\dots0 & 1 & 0\dots0 & 1 & \dots \\ k-s & & s-1 & & s-1 & & \end{pmatrix}$$

satisface la desigualdad (3.8) pero no es convergente.

A continuación presentamos un sencillo resultado que, bajo condiciones de monotonía, asegura la convergencia a cero de sucesiones acotadas.

Teorema 16. *[15] Sea la función $\phi : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ que satisface*

$$\phi(x_1, \dots, x_k) \leq A\,\text{máx}\{x_1, \dots, x_k\}, \tag{3.11}$$

para algún $A \in (0, 1)$ y sean sucesiones no negativas (a_n) y (b_n) satisfaciendo la desigualdad

$$a_{n+k} \leq \phi(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \dots, a_n) + b_n, \tag{3.12}$$

donde (a_n) está acotado y (b_n) es una sucesión que converge a cero. Entonces la sucesión (a_n) también converge a cero.

Demostración. Al ser (a_n) una sucesión acotada, se tiene que existe $\text{lím sup}\, a_n = L$. Entonces

$$\begin{aligned} L &\leq \text{lím sup}(\phi(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \dots, a_n) + b_n) \leq \\ &\leq \text{lím sup}(A\,\text{máx}\{a_{n+k-1}, \dots, a_n\} + b_n) \leq \\ &\leq A\,\text{máx}\{\text{lím sup}\, a_{n+k-1}, \dots, \text{lím sup}\, a_n\} + \text{lím sup}\, b_n \leq AL. \end{aligned}$$

Luego $L \leq AL$ con $A \in (0, 1)$, de donde se deduce que $L = 0$.

Por lo tanto, si el límite superior de una sucesión positiva es cero, la sucesión converge a 0. □

Sea $\phi(x_1, \dots, x_k)$ una función real continua sobre $\mathbb{R}^k$ que es no decreciente en cada variable y creciente en la primera, $\phi(x, \dots, x) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y sea (b_n) una sucesión convergente a cero. Si (a_n) es una sucesión acotada que satisface la desigualdad

$$a_{n+k} \leq \phi(a_{n+k-1}, \dots, a_n) + b_n,$$

no tiene por qué ser necesariamente convergente. De hecho, consideremos

$$(a_n) = \left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1, \frac{15}{16}, \frac{14}{16}, \dots\right),$$

y $b_n = a_{n+1} - a_n$. Entonces las sucesión (a_n) y (b_n) satisfacen todas las condiciones exigidas para $\phi(x) = x$, y la sucesión (a_n) no es convergente.

Para estudiar el siguiente teorema de esta sección, el teorema 17, haremos uso del siguiente lema, el cual no demostraremos. Está relacionado con el llamado problema de Frobenius, el cual, para $n = 2$ y dados dos números enteros positivos a, b primos entre sí, es decir con $mcd(a, b) = 1$, pide averiguar a partir de qué número N (llamado número de Frobenius) se cumple que si $m > N$, entonces m se puede expresar como combinación lineal (con coeficientes no negativos) de a y b. En este caso, el número de Frobenius es $N = ab - a - b$. Todos estos extremos se pueden consultar en [11, Theorem 2.1.1]. Por tanto, el siguiente resultado es consecuencia del desarrollo anterior. En nuestro caso, por conveniencia en futuras pruebas, tomamos $s >= ij + 1 > ij - i - j$.

Lema 6. *[11] Si i y j son primos relativos, entonces*

$$p_s i + q_s j = s, \tag{3.13}$$

para todo $s \geq ij + 1$, para algún $p_s, q_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Teorema 17. *[16] Sea $\phi(x_1, \dots, x_k)$ una función real continua sobre $\mathbb{R}^k$ donde*

1. *$\phi(x, \dots, x) \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*
2. *$\phi \in C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ es no decreciente en cada una de sus variables.*
3. *$\phi(x_1, \dots, x_k)$ es estrictamente creciente en al menos dos de sus argumentos x_i y x_j, donde i y j son primos relativos.*

Si (a_n) es una sucesión que satisface la desigualdad

$$a_{n+k} \leq \phi(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \dots, a_n), \tag{3.14}$$

entonces es convergente o tiende a menos infinito.

Demostración. En primer lugar, nótese que las condiciones 1 y 2 y la desigualdad (3.14) implican la acotación superior de la sucesión (a_n), ya que si llamamos $M = \max\{a_1, \dots, a_k\}$ entonces

$$a_{k+1} \leq \phi(a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0) \leq \phi(M, \dots, M) \leq M.$$

Ahora procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que la sucesión no tiende a un límite, ya sea finito o infinito.

Como está acotada superiormente, podemos considerar el límite superior de la sucesión

$$\limsup a_n = L.$$

Entonces $L \leq M < \infty$. Supongamos que $L > -\infty$ y $i < j$. Ahora consideramos l un número finito satisfaciendo que

$$\liminf a_n \leq l < L.$$

Entonces, por la definición de límite superior

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ a_n < L + \epsilon \forall n \geq n_0, \tag{3.15}$$

y por cumplirse que $\liminf a_n \leq l$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N} :\ a_{n-1} < l + \epsilon \forall n \geq n_1. \tag{3.16}$$

Comenzamos ahora un proceso inductivo. Como ϕ es estrictamente creciente en las variables i-ésima y j-ésima, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\phi(L,\dots,L,l,L,\dots,L) + \delta_1 < \phi(L,\dots,L) - \delta_1 \tag{3.17}$$

cuando l ocupe las posiciones i-ésima o j-ésima.

Al ser ϕ continua en $\mathbb{R}^k$, para todo $\delta > 0$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ se cumple:

$$\phi(L+\epsilon,\dots,L+\epsilon,l+\epsilon,L+\epsilon,\dots,L+\epsilon) < \phi(L,\dots,L,l,L,\dots,L) + \delta, \tag{3.18}$$

donde $l+\epsilon$ ocupan la posición i-ésima o j-ésima. Esta desigualdad se debe a que gracias a la continuidad se verifica

$$|\phi(L+\epsilon,\dots,L+\epsilon,l+\epsilon,L+\epsilon,\dots,L+\epsilon) - \phi(L,\dots,L,l,L,\dots,L)| < \delta.$$

Por lo tanto, si

$$a_{n_1} < l+\epsilon,$$

y si elegimos $\delta = \delta_1$ en (3.18), obtenemos

$$\begin{aligned} a_{n_1+i} &\leq \phi(a_{n_1+i-1},\dots,a_{n_1+1},a_{n_1},a_{n_1-1},\dots,a_{n_1+i-k}) \leq \\ &\leq \phi(L+\epsilon,\dots,L+\epsilon,l+\epsilon,L+\epsilon,\dots,L+\epsilon) < \\ &< \phi(L,\dots,L,l,L,\dots,L) + \delta_1 < \phi(L,\dots,L) - \delta_1 \leq L - \delta_1. \end{aligned}$$

De forma completamente análoga se obtiene que

$$a_{n_1+j} \leq L - \delta_1.$$

Ahora repetimos el mismo proceso, pero en lugar de utilizar $l+\epsilon$ en las posiciones i, j, usaremos $L-\delta_1$. Finalmente, por inducción llegamos a que

$$a_{n_{m+1}+pi+qj} \leq L - \delta_r \ \ si\ p+q = r,\ \ r \in \{1,\cdots,m+1\}.$$

En realidad, si $p+q = m+1$, entonces la hipótesis de inducción nos lleva a

$$\begin{aligned} a_{n_{m_1}+pi+qj} &\leq \phi(a_{n_{m+1}+pi+qj-1},\cdots,a_{n_{m+1}+(p-1)i+qj},\dots,a_{n_{m+1}+pi+qj-k}) \leq \\ &\leq \phi(L+\epsilon,\dots,L+\epsilon,L-\delta_m,L+\epsilon,\dots,L+\epsilon) < \\ &< \phi(L,\dots,L,L-\delta_m,L,\dots,L) + \delta_{m+1} < \phi(L,\dots,L) + \delta_{m+1} \leq L - \delta_{m+1}, \end{aligned}$$

y obtenemos el mismo resultado independientemente de que lo hagamos para la posición i-ésima o la j-ésima.

Para $m_0 = j+k$, elegimos $\epsilon \in (0,\hat{\epsilon})$, donde $\hat{\epsilon} = \text{mín}\{\epsilon_0,\epsilon_1,\dots,\epsilon_{m_0}\}$ y $n(m_0) \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_{n(m_0)} < l+\epsilon.$$

Por lo anterior obtenemos

$$a_{n(m_0)+pi+qj} \leq L - \delta_s \ \ con\ p+q = s, \ \ p,q \geq 0,$$

y $s \in \{1,2,\dots,m_0\}$.

Sea $l_s = n(m_0) + ij + 1 + s;\ s = 0,1,\dots,k-1$. Entonces por el lema 6 y por la desigualdad anterior llegamos a que

$$\max_{s\in\{0,\dots,k-1\}} a_{l_s} \leq L - \delta_{m_0}. \tag{3.19}$$

Luego por (3.14) y (3.19) y usando la primera y segunda condición del teorema

$$a_n \leq \phi(a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}) \leq \phi(\text{máx}\, a_{l_s}, \cdots, \text{máx}\, a_{l_s}) \leq \text{máx}\, a_{l_s} \leq L - \delta_{m_0},$$

para todo $n \geq l_0$. Así obtenemos que $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq L - \delta_{m_0}$. Lo que contradice el hecho de que $\limsup_{n\to\infty} a_n = L$. De esta forma, (a_n) converge o a un número finito o diverge a $-\infty$.

□

Como consecuencia directa del teorema tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1. *[16] Sea $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ una función real continua sobre $\mathbb{R}^k$ donde*

1. *$\phi(x, \ldots, x) \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*
2. *$\phi \in C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ es no decreciente en cada uno de sus argumentos.*
3. *$\phi(x_1, \ldots, x_k)$ es estrictamente creciente en al menos dos de sus argumentos x_i y x_j, donde i y j son primos relativos.*

Si (a_n) es una sucesión acotada inferiormente que satisface la desigualdad (3.14), entonces es convergente.

3.2. Convergencia en ecuaciones autónomas y desigualdades con varias sucesiones

En esta sección comenzamos mejorando los resultados anteriores en el sentido de que presentamos un resultado global de convergencia donde no vamos a exigir la monotonía en cada variable y la condición $f(x, \ldots, x) \leq x$ se puede omitir como irrelevante.

Consideremos una ecuación en diferencias autónoma de orden k

$$x_n = f(x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}), \tag{3.20}$$

donde $f : I^k \to I$, I es un intervalo de la recta real $\mathbb{R}$, y f es una función que satisface la condición $f(x, \ldots, x) \leq x$, para todo $x \in I$.

Teorema 18. *[7] Sea $f(z_1, \ldots, z_k) \in C(I^k, I)$ una función dada, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$, que satisface las siguientes condiciones:*

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_k) \geq f(y_2, \ldots, y_k, y_1), \tag{3.21}$$

si $y_1 \geq \text{máx}\{y_2, \ldots, y_k\}$;

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_k) \leq f(y_2, \ldots, y_k, y_1), \tag{3.22}$$

si $y_1 \leq \text{mín}\{y_2, \ldots, y_k\}$. Supongamos que f es no decreciente en la última variable z_k. Entonces toda solución acotada (3.20) con valores iniciales $x_{-k}, \ldots, x_{-1} \in I$ converge, y toda solución no acotada tiende a $\pm\infty$.

Probemos un lema previo antes de proceder a la demostración.

Lema 7. *[7] Supongamos que (x_n) es solución de (3.20) para la que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$x_{n_0-1} \leq \text{mín}\{x_{n_0-2}, \ldots, x_{n_0-k-1}\}, \tag{3.23}$$

o

$$x_{n_0-1} \geq \text{mín}\{x_{n_0-2}, \ldots, x_{n_0-k-1}\}. \tag{3.24}$$

Entonces, bajo las condiciones del Teorema (18), la solución (x_n) es finalmente monótona.

Demostración. Supongamos que se verifica (3.24). El caso en el que se verifique (3.23) es completamente análogo.

Tenemos

$$x_{n_0} = f(x_{n_0-1}, \dots, x_{n_0-k}) \geq f(x_{n_0-2}, \dots, x_{n_0-1}) \geq$$
$$\geq f(x_{n_0-2}, \dots, x_{n_0-k}, x_{n_0-k-1}) = x_{n_0-1},$$

lo que implica que

$$x_{n_0} \geq \max\{x_{n_0-1}, \dots, x_{n_0-k}\}.$$

Por inducción, se sigue que $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \geq n_0 - 1$, lo que significa que la solución (x_n) de (3.20) es finalmente no decreciente. □

Veamos ahora la demostración del teorema 18.

Demostración. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\min\{x_{n-1}, \dots, x_{n-k}\} < x_n < \max\{x_{n-1}, \dots, x_{n-k}\}, \tag{3.25}$$

ya que en caso contrario nos encontraríamos bajo las condiciones del lema anterior y tendríamos garantizado que se trata de una sucesión finalmente monótona que implica o la convergencia a un límite finito o la divergencia a $+\infty$ o $-\infty$.

Como $\min\{x_{n-1}, \dots, x_{n-k}\} \leq \min\{x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}\}$, junto a (3.25), tenemos que

$$\min\{x_{n-1}, \dots, x_{n-k}\} < x_n.$$

Teniendo esto en cuenta es fácil ver que la sucesión

$$m_n = \min\{x_n, \dots, x_{n-k+1}\},$$

es no decreciente y, de forma análoga, la sucesión

$$M_n = \max\{x_n, \dots, x_{n-k+1}\},$$

es no creciente.

Nuestro objetivo es probar que

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n.$$

Como (m_n) y (M_n) son acotadas, la igualdad anterior es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} (\max\{x_n, \dots, x_{n-k+1}\} - \min\{x_n, \dots, x_{n-k+1}\}) = 0.$$

Definimos la función $h : I^k \to [0, +\infty)$ dada por

$$h(z_1, \dots, z_k) = \max\{z_1, \dots, z_k\} - \min\{z_1, \dots, z_k\}.$$

Introducimos la sucesión $X_n = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1})$ y $\mathbb{A}$ la clausura de $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Nótese que $\mathbb{A}$ es compacto, ya que es acotado por serlo las soluciones de (3.20) por hipótesis, y un conjunto cerrado al ser clausura de un conjunto de $\mathbb{R}^k$.

Gracias a la ecuación en diferencias autónoma $x_n = f(x_{n-1}, \dots, x_{n-k})$ podemos reescribir X_n como sigue

$$X_n = (f(x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}).$$

También tenemos que el conjunto $\mathbb{A}$ es invariante bajo la función vectorial

$$F(z_1,\ldots,z_k)=(f(z_1,\ldots,z_k),z_1,\ldots,z_{k-1}),$$

debido a que

$$F(X_n)=F(x_n,x_{n-1},\ldots,x_{n-k+1})=(f(x_n,\ldots,x_{n-k+1}),x_n,\ldots,x_{n-k+2})=X_{n+1},$$

de donde se sigue que para todo $X_n\in\mathbb{A}$,

$$F(X_n)=X_{n+1}\in\mathbb{A}.$$

Por otro lado, la función h, al ser continua, alcanzará su mínimo en $\mathbb{A}$ en algún $c_0\in\mathbb{A}$.

Recordemos que $h(c_0)\geq 0$. Sea (y_n) solución de (3.20) con valores iniciales igual a $c_0=(y_{-1},\ldots,y_{-k})$. Afirmamos que para esta solución hay un número $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$y_{n_0-1}\leq \text{mín}\{y_{n_0-2},\ldots,y_{n_0-k-1}\}\ \ o\ \ y_{n_0-1}\geq \text{máx}\{y_{n_0-2},\ldots,y_{n_0-k-1}\}.$$

Veámoslo. Al ser $\mathbb{A}$ invariante bajo F

$$h(y_{k-1},\ldots,y_0)\geq h(y_{-1},\ldots,y_{-k})=h(c_0). \tag{3.26}$$

Tenemos que hay un índice $i_0\in\{0,1,\ldots,k-1\}$ tal que

$$y_{i_0}=\text{máx}\{y_{k-1},\ldots,y_0\}\geq \text{máx}\{y_{-1},\ldots,y_{-k}\}, \tag{3.27}$$

o

$$y_{i_0}=\text{mín}\{y_{k-1},\ldots,y_0\}\leq \text{mín}\{y_{-1},\ldots,y_{-k}\}.$$

De hecho, si se verifica (3.27) ya lo tenemos probado, ya que en caso contrario, por (3.26):

$$h(y_{k-1},\ldots,y_0)=\text{máx}\{y_{k-1},\ldots,y_0\}-\text{mín}\{y_{k-1},\ldots,y_0\}\geq$$
$$\geq \text{máx}\{y_{-1},\ldots,y_{-k}\}-\text{mín}\{y_{-1},\ldots,y_{-k}\}=h(c_0)\geq 0,$$

por lo tanto

$$\text{mín}\{y_{-1},\ldots,y_{-k}\}-\text{mín}\{y_{k-1},\ldots,y_0\}\geq \text{máx}\{y_{-1},\ldots,y_{-k}\}-\text{máx}\{y_{k-1},\ldots,y_0\}>0,$$

y, consecuentemente,

$$\text{mín}\{y_{k-1},\ldots,y_0\}\leq \text{mín}\{y_{-1},\ldots,y_{-k}\}.$$

De esta forma queda probada la afirmación anterior.

Nótese que son las condiciones del lema 7, por lo que aplicándolo podemos concluir que (y_n) es finalmente no decreciento o no creciente. Ahora bien, (y_n) no puede se no acotada, ya que $c_0\in\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}$ es invariante bajo F.

Por consiguiente, $Y_n=(y_n,\ldots,y_{n-k+1})$ converge a un punto que debe ser de la forma $c_0=(x^*,\ldots,x^*)\in I^k$ y para el cual $h(c_0)=0$, ya que $\text{máx}\{x^*,\ldots,x^*\}-\text{mín}\{x^*,\ldots,x^*\}=x^*-x^*=0$.

En particular, considerando $(\mathbb{R}^k,||\cdot||_1)$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k-1}|y_{n-j}-x^*|=0. \tag{3.28}$$

Por otro lado, como $Y_n\in\mathbb{A}$ es cerrado, se tiene que para todo $\epsilon>0$ y $n\in\mathbb{N}$, existe X_m tal que

$$\sum_{j=0}^{k-1} |y_{n-j} - x_{m-j}|. \tag{3.29}$$

Entonces, por (3.28) y (3.29) tenemos

$$\sum_{j=0}^{k-1} |x_{m-j} - x^*| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |x_{m-j} - y_{n-j}| + \sum_{j=0}^{k-1} |y_{n-j} - x^*| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \tag{3.30}$$

Luego por (3.25) y (3.30)

$$x^* - 2\epsilon < \min\{x_m, \dots, x_{m-k+1}\} < x_{m+1} < \max\{x_m, \dots, x_{m-k+1}\} < x^* + 2\epsilon.$$

Además, al ser (m_n) y (M_n) no decreciente y no creciente respectivamente, obtenemos que $|x_n - x^*| < 2\epsilon$ para $n \geq m+1$.

Como ϵ es un número real positivo arbritario

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

□

Como ejemplo de una función f que verifica las condiciones del teorema tenemos las funciones del tipo

$$f(z_1, z_2) = \alpha z_1 + \beta z_2,$$

con $\alpha \geq \beta \geq 0$. Luego cualquier sucesión acotada que sea solución de la ecuación autónoma

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta x_{n-2},$$

será convergente.

Ejemplo 4. *Consideremos la función*

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y.$$

En este caso, cualquier sucesión acotada que sea solución de la ecuación en diferencias autónoma:

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{4}x_{n-2}, \tag{3.31}$$

será convergente. En particular, lo será la sucesión siguiente:

$$x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n,$$

ya que es acotada por ser $\left|\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\right| < 1$ *y es solución de la ecuación autónoma (3.31), la cual verifica las condiciones del teorema 18 como hemos destacado anteriormente.*

También se verifican para las funciones que son combinaciones lineales de funciones monótonas no decrecientes

$$f(z_1, \dots, z_k) = a_1 g(z_1) + \cdots + a_k g(z_k), \quad a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 0.$$

En el caso de que todas las constantes a_i fuesen iguales, las condiciones del teorema se verifican trivialmente. Así que supongamos que $a_1 > a_k$. Ahora, supongamos que $z_1 \geq z_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Es bien conocido que para cualquier función monótona no decreciente g, se verifica la desigualdad $g(z_1) \geq$

$g(z_i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Multiplicando todas estas desigualdades por $\frac{a_{i-1}-a_i}{a_1-a_k}$ respectivamente, y sumándolas de $i = 2$ hasta $i = k$ para algún $\eta \leq z_1$, obtenemos

$$g(z_1) \geq g(\eta) = \frac{1}{a_1 - a_k} \left(\sum_{i=2}^{k} a_{i-1} g(z_i) - \sum_{i=2}^{k} a_i g(z_i) \right),$$

que es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{k} a_i g(z_i) \geq \sum_{i=2}^{k} a_{i-1} g(z_i) + a_k g(z_1),$$

que constituye la condición (3.21) del Teorema 18. De forma completamente análoga llegamos a la correspondiente condición (3.22). Así tenemos que las funciones f de este tipo verifican las condiciones del Teorema 18 y, por ende, podemos apliar el resultado a su correspondiente ecuación en diferencias autónoma (3.20).

Recordemos que una de las consecuencias que destacamos del teorema 16 era la siguiente:

Sea $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ una función continua real en $\mathbb{R}^k$ que es no decreciente en cada variable y creciente en la primera, $\phi(x, \ldots, x) \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y sea (b_n) una sucesión convergente a cero. Si (a_n) es una sucesión acotada que satisface la desigualdad

$$a_{n+k} \leq \phi(a_{n+k-1}, \ldots, a_n) + b_n, \tag{3.32}$$

entonces no tiene por qué ser convergente.

Esa consecuencia junto a los teoremas previos motivan el estudio de sucesiones que satisfagan desigualdades del tipo (3.32). Veamos un lema previo.

Lema 8. *[18] Supongamos que (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de números no negativos tales que $a_{n+1} \leq a_n + b_n$, para todo $n \geq 1$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, entonces la sucesión (a_n) converge.*

Demostración. Para $n, m \geq 1$, tenemos

$$a_{n+m+1} \leq a_{n+m} + b_{n+m} \leq \cdots \leq a_n + \sum_{j=n}^{n+m} b_j.$$

De ahí que

$$\limsup_{m\to\infty} a_m \leq a_n + \sum_{j=n}^{\infty} b_j,$$

lo que implica que

$$\limsup_{m\to\infty} a_m \leq \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Queda así completada la prueba. $\square$

Dicho lema lo utilizaremos en la prueba del siguiente teorema principal de este capítulo.

Teorema 19. *[17] Sea $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ una función real continua sobre $\mathbb{R}^k$ que sea no decreciente en cada variable, creciente en la primera y que satisfaga $\phi(x, \ldots, x) \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Si (a_n) es una sucesión acotada inferiormente y satisface (3.32), donde (b_n) es una sucesión de números reales tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$. Entonces es convergente.*

Demostración. En primer lugar, se prueba por inducción que

$$a_{n+k} \leq \text{máx}\{a_0, \ldots, a_{k-1}\} + \sum_{i=0}^{n} |b_i|.$$

Veámoslo

$$\begin{aligned} a_{n+k} &\leq \phi(a_{n+k-1}, \ldots, a_n) + b_n \leq \phi(a_{n+k-1}, \ldots, a_{n+k-1}) + b_n \leq a_{n+k-1} + b_n \leq \\ &\leq \phi(a_{n+k-2}, \ldots, a_{n-1}) + b_{n-1} + b_n \leq \phi(a_{n+k-2}, \ldots, a_{n+k-2}) + b_{n-1} + b_n \leq \\ &\leq a_{n+k-2} + b_{n-1} + b_n \leq \cdots \leq a_{k-1} + b_0 + b_1 + \cdots + b_n \leq \\ &\leq \text{máx}\{a_0, \ldots, a_{k-1}\} + \sum_{i=0}^{n} |b_i|. \end{aligned}$$

Esta desigualdad, junto a la condición $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$, implica que (a_n) está acotada superiormente, y al ser acotada inferiormente por hipótesis, se sigue que (a_n) está acotada. Luego

$$a_{n+k} \leq \text{máx}\{a_0, \ldots, a_{k-1}\} + \sum_{i=0}^{n} |b_i| \leq M + \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| < \infty.$$

Con el objetivo de evitar demasiados cálculos, la prueba vendrá dada para el caso particular $k = 3$. Pudiendo extender los razonamientos al caso general sin dificultades.

Como (a_n) está acotada, entonces existen los límites inferior y superior:

$$\text{lím inf}\, a_n = l \quad y \quad \text{lím sup}\, a_n = L.$$

Probemos que $l = L$. Por definición de límite superior

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ a_n < L + \epsilon\ \forall n \geq n_0. \tag{3.33}$$

Por definición de límite inferior

$$\forall \epsilon > 0,\ y\ \forall n_1 \in \mathbb{N}\ \exists m_{k_0} \neq n_1 :\ a_{m_{k_0}} < l + \epsilon. \tag{3.34}$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$, tenemos que

$$\forall \delta > 0\ \exists n_2(\delta) \in \mathbb{N} : \sum_{i=n}^{\infty} |b_i| < \delta,\ n \geq n_2. \tag{3.35}$$

Como ϕ es continua y creciente en la primera variable existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\phi(l, L, L) + 2\delta_0 < \phi(L, L, L) + 2\delta_0 = L + 2\delta_0,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \phi(l, L, L) + 2\delta_0 &= L_1 < L - 2\delta_0 \\ \phi(L_1, L, L) + 2\delta_0 &= L_2 < L - 2\delta_0 \\ \phi(L_2, L, L) + 2\delta_0 &= L_3 < L - 2\delta_0. \end{aligned}$$

Sea $\epsilon \in \left(0, \frac{L-l}{2}\right)$ fijo. Por la continuidad de ϕ tenemos que para cada $\delta > 0$, existe $\epsilon_1 \in (0, \epsilon)$ tal que

$$|\phi(l + \epsilon_1, L + \epsilon_1, L + \epsilon_1) - \phi(l, L, L)| < \delta,$$

y

$$|\phi(L_1, l + \epsilon_1, L + \epsilon_1) - \phi(L_1, l, L)| < \delta,$$

en particular para $\delta = \delta_0$.

Tomamos $\delta = \delta_0$ en $\sum_{i=n}^{\infty} |b_i| < \delta$ y $\epsilon = \epsilon_1$ en $a_n < L + \epsilon$ y $a_{m_{k_0}} < l + \epsilon$. Para dicho ϵ, δ y para todo $n \geq n_3 = \max\{n_0, n_2\}$ las desigualdades anteriores se verifican.

Elijamos m_{k_0} tal que $m_{k_0} > n_3 + 2$. Luego por todo lo anterior y la desigualdad (3.32) obtenemos:

$$a_{m_{k_0}+1} \leq \phi(a_{m_{k_0}}, a_{m_{k_0}-1}, a_{m_{k_0}-2}) + |b_{m_{k_0}-2}| \leq$$
$$\leq \phi(l + \epsilon_1, L + \epsilon_1, L + \epsilon_1) + |b_{m_{k_0}-2}| < \phi(l, L, L) + \delta_0 + |b_{m_{k_0}-2}| <$$
$$< \phi(l, L, L) + 2\delta_0 = L_1 < L - 2\delta_0.$$

Por lo tanto,

$$a_{m_{k_0}+2} < L - 2\delta_0; \quad a_{m_{k_0}+3} < L - 2\delta_0.$$

De forma general tenemos,

$$a_{m_{k_0}+p} \leq \max\{L_1, L_2, L_3\} + \sum_{i=m_{k_0}+1}^{m_{k_0}+p-3} |b_i| \leq L - 2\delta_0 + \sum_{i=m_{k_0}+1}^{m_{k_0}+p-3} |b_i| \leq L - \delta_0,$$

para todo $p \in \mathbb{N}$. En definitiva, $\limsup a_n \leq L - \delta_0$. Lo que supone una contradición, pudiendo concluir así que $L = l$ como queríamos ver.

□

Si en lugar de considerar la desigualdad (3.32) consideramos el caso particular en el que se verifica la igualdad tenemos como consecuencia directa el siguiente corolario:

Corolario 2. *[17] Sea $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ una función real continua sobre $\mathbb{R}^k$ que es no decreciente en cada variable y creciente en la primera, con $\phi(x, \ldots, x) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si (a_n) es una sucesión acotada inferiormente que satisface*

$$a_{n+k} = \phi(a_{n+k-1}, \ldots, a_n) + b_n,$$

donde (b_n) es una sucesión de números reales tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$, entonces es convergente.

Terminamos el capítulo con el siguiente teorema de Stević que generaliza el resultado anterior al caso donde las variables que son estrictamente crecientes ocupan posiciones que son primos relativos.

Teorema 20. *[17] Sea $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ una función real continua en $\mathbb{R}^k$ donde*

1. *$\phi(x, \ldots, x) \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*
2. *$\phi \in C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ es no decreciente en cada uno de sus argumentos.*
3. *$\phi(x_1, \ldots, x_k)$ es estrictamente creciente en al menos dos de sus argumentos x_i y x_j, donde i y j son primos relativos.*

Si (a_n) es una sucesión acotada inferiormente que satisface la desigualdad (3.32), donde (b_n) es una sucesión de números reales tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$, entonces es convergente.

Demostración. En primer lugar, como vimos en el teorema anterior, la desigualdad (3.32) junto al hecho de que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sea una serie absolutamente convergente, implica que (a_n) es una sucesión acotada.

Como (a_n) es acotada, existen los límites superior e inferior

$$\liminf a_n = l \quad y \quad \limsup a_n = L.$$

Nuestro objetivo es probar que $L = l$. Para ello procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que $L > l$. Por definición de límite superior

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \ \textit{tal que} \ \forall n \geq n_0 \ a_n < L + \epsilon.$$

Por definición de límite inferior

$$\forall \epsilon > 0 \ y \ \forall n_1 \in \mathbb{N}, \ \exists m_{k_0} \geq n_1 \ tal \ que \ a_{m_{k_0}} < l + \epsilon.$$

Como ϕ es estrictamente creciente en la i-ésima y j-ésima variables, existe $\delta > 0$ tal que

$$\phi(L, \dots, L, l, L, \dots, L) + 2\delta_1 < \phi(L, \dots, L) - 2\delta_1 \leq L - 2\delta_1$$

cuando l ocupa las posiciones i-ésima o j-ésima.

Como ϕ es continua en $\mathbb{R}^k$, para todo $\delta > 0$ existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ se tiene que

$$|\phi(L + \epsilon, \dots, L + \epsilon, l + \epsilon, L + \epsilon, \dots, L + \epsilon) - \phi(L, \dots, L, l, L, \dots, L)| < \delta,$$

por lo que

$$\phi(L + \epsilon, \dots, L + \epsilon, l + \epsilon, L + \epsilon, \dots, L + \epsilon) < \phi(L, \dots, L, l, L, \dots, L) + \delta,$$

estando l en la posición i-ésima o j-ésima.

Ahora elegimos $\delta = \delta_0$ en $\sum_{i=n}^{\infty} |b_i| < \delta$ (debido a la convergencia absoluta) y $\epsilon = \epsilon_1$ en $a_n < L + \epsilon$ y $a_{m_{k_0}} < l + \epsilon$.

Para tales ϵ, δ y para todo $n \geq n_3 = \max\{n_0, n_2\}$, las desigualdades anteriores se verifican. Es más, podemos elegir m_{k_0} de forma que $m_{k_0} > n_3 + 2$.

Teniendo en cuenta todo lo expuesto anteriormente y el hecho de que (a_n) satisface la desigualdad (3.32) tenemos

$$\begin{gathered} a_{m_{k_0}+i} \leq \phi(a_{m_{k_0}}, \dots, a_{m_{k_0}+i-k}) + |b_{m_{k_0}+i-k}| \leq \\ \leq \phi(L + \epsilon, \dots, L + \epsilon, l + \epsilon, L + \epsilon, \dots, L + \epsilon) + |b_{m_{k_0}+i-k}| < \\ < \phi(L, \dots, L, l, L, \dots, L) + \delta_0 + |b_{m_0+i-k}| = \phi(L, \dots, L) + \delta_0 + \delta_0 = \\ \phi(L, \dots, L) + 2\delta_0 = L_1 < L - 2\delta_0. \end{gathered}$$

De forma análoga lo obtenemos para j

$$a_{m_{k_0}+j} < L - 2\delta_0.$$

De esta forma, a través de un proceso inductivo, llegamos a que

$$a_n < L - 2\delta_0 \ \forall n \geq l,$$

y, por consiguiente

$$\limsup_{n \to \infty} a_n \leq L - 2\delta_0.$$

Llegamos así a una contradicción y podemos concluir que $L = l$. $\square$

Cabe destacar que los dos últimos resultados, que involucran otra sucesión (b_n), son de los pocos que se conocen en esta línea. Es por ello que consideramos interesante continuar el estudio en ese sentido pudiendo llegar a desarrollar resultados más generales con aplicaciones útiles a las ecuaciones en diferencias.

Capítulo 4

Extensiones del Teorema de Copson

Como hemos visto en los capítulos anteriores, el Teorema de Copson dio pie a toda una línea de estudio que ha desarrollado numerosas generalizaciones que nos permiten garantizar la convergencia o divergencia de una sucesión en término de distintas propiedades y condiciones.

Ahora bien, hasta el momento nos hemos limitado a estudiar sucesiones de números reales. En este capítulo estudiaremos la extensión del teorema de Copson al plano complejo, así como a sucesiones dobles de números reales y a sucesiones de funciones y presentaremos un resultado propio que generaliza el conocido teorema de la convergencia monótona de Lebesgue, ya que sustituimos la cadena natural de desigualdades de dicho teorema por desigualdades convexas de tipo Copson.

Este capítulo se divide en tres secciones. En la primera abordamos el problema de la convergencia de sucesiones desde el ámbito de los números complejos. Los resultados que presentamos fueron expuestos por Borwein [4]. En la segunda sección presentamos nuevas extensiones del teorema de Copson, recogidas por Vranceanu [19], para otros objetos matemáticos. Finalmente, en la última sección recogemos un resultado propio que generaliza el Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue.

4.1. Criterios de convergencia en el plano complejo

En primer lugar, daremos un teorema que garantiza la convergencia de sucesiones acotadas en el plano complejo cuando se verifica una desigualdad de tipo Copson. Seguidamente, veremos que si se suprime alguna de las condiciones del primer resultado siempre podremos encontrar sucesiones divergentes, aunque estas sean acotadas y verifiquen desigualdad de tipo Copson.

Empezamos introduciendo la siguiente notación para el primer resultado.

Sea (K_n) una sucesión de números complejos.

Sea $K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n$ y sea $k_0 = K_0$ y $k_n = K_n - K_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$

Consideremos el disco unidad $D = \{z : |z| < 1\}$. Sea $\bar{D}$ su clausura y $\partial D = \bar{D} - D$.

Teorema 21. *[4] Si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |K_n| < \infty, \tag{4.1}$$

$$K(z) \neq 0 \text{ en } \partial D, \tag{4.2}$$

y si

$$(a_n) \text{ es acotada} \tag{4.3}$$

tal que, para algún entero positivo N,

$$\sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} \geq 0 \ (n = N, N+1, \ldots), \tag{4.4}$$

entonces (a_n) *es convergente.*

Demostración. La condición (4.1) nos indica que $\sum_{n=0}^{\infty} K_n$ es absolutamente convergente, lo que implica la convergencia en $\mathbb{C}$ y por lo tanto $K(z)$ es analítica en D. Además, por el Teorema del Límite de Abel (véase Anexo III), es continua en $\bar{D}$.

Por otro lado, $K(z)$ únicamente puede tener a lo sumo una cantidad finita de ceros en D, ya que si ésta fuese infinita habría un punto de acumulación, el cual, por (4.2), no puede estar en la frontera. Esto implicaría que está en el interior y por el teorema de la unicidad [10, págs. 316-317] concluiríamos que la función K es nula. Llegando así a una contradicción.

Como consecuencia, podemos expresar

$$K(z) = p(z)q(z)$$

donde $p(z)$ es un polinomio sin ceros en el complementario de D y $q(z)$ una función no nula analítica en D y continua en $\bar{D}$.

Sea

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

y sean

$$u(z) = q(z)a(z),$$

$$v(z) = p(z)u(z).$$

Al ser (a_n) una sucesión acotada, tenemos garantizado que $a(z)$ sea analítica en D (porque $\sum_{n=0}^{\infty} M z^n$ lo es para cualquier constante M, en particular, para la cota), y al ser analítico el producto de funciones analíticas, $u(z)$ y $v(z)$ también lo serán.

Sean (q_n), (u_n) y (v_n) sucesiones tales que

$$q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n, \quad u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \quad v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$$

para todo $z \in D$. Nótese que podemos considerar las expresiones en serie de potencias por ser todas analíticas en D.

Al ser $v(z) = K(z)a(z)$, por el producto de Cauchy tenemos

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} K_r a_{n-r}\right) z^n.$$

Por lo tanto

$$v_n = \sum_{r=0}^{n} K_r a_{n-r}.$$

Entonces, por (4.1) y (4.3),

$$|v_n| \leq \sum_{r=0}^{\infty} |K_r||a_{n-r}| \leq M \sum_{r=0}^{\infty} |K_r| < \infty,$$

luego (v_n) es una sucesión acotada. Es más, por (4.4),

$$v_n - v_{n-1} = \sum_{r=0}^{n} K_r a_{n-r} - \sum_{r=0}^{n-1} K_r a_{n-1-r} = K_0 a_n + \sum_{r=1}^{n} (K_r - K_{r-1}) a_{n-r} =$$

$$= k_0 a_n + \sum_{r=1}^{n} k_r a_{n-r} = \sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} \geq 0.$$

Nótese que a pesar de ser $\{v_n\}$ una sucesión de números complejos, v_n y v_{n-1} tienen la misma parte imaginaria, ya que acabamos de probar que $v_n - v_{n-1} \geq 0$, por lo que $v_n - v_{n-1} \in \mathbb{R}$.

De esta forma, tenemos que $\{\mathrm{Re}(v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona, la parte imaginaria de los v_n es constante y $\{v_n\}$ acotada. De ahí que podamos concluir que exista un $v \in \mathbb{C}$ tal que $v_n \to v$.

A continuación vamos a probar que $\{q_n\}$ es absolutamente convergente, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q_n| < \infty \tag{4.5}$$

y que $u_n \to u$ para algún u complejo.

Por el Teorema Fundamental del Álgebra , al ser $p(z)$ un polinomio sin ceros en el complementario de D, podemos factorizarlo como sigue

$$p(z) = cz^m(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)\ldots(\alpha_j - z),\ 0 < |\alpha_1| < 1, \ldots, 0 < |\alpha_j| < 1.$$

Teniendo en cuenta dicha descomposición vamos a estudiar distintos casos.

Caso 1 $p(z) = cz^m \quad (m = 0, 1, \ldots)$.

Sabemos que $K(z) = p(z)q(z)$, eso implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n = cz^m \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \Rightarrow \sum_{n=m}^{\infty} \frac{K_{n-m}}{c} z^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n. \tag{4.6}$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} |K_n| < \infty$, la igualdad anterior nos lleva a que $\sum_{n=0}^{\infty} |q_n| < \infty$ (4.9).

Por otro lado, al ser $u(z) = q(z)a(z)$, procediendo de forma completamente análoga al caso de la convergencia de (v_n) (considerando que (q_n) se relaciona con (K_n) a través de (4.6)), obtenemos que $u_n \to u$ con $u \in \mathbb{C}$.

Caso 2 $p(z) = \alpha - z,\ 0 < |\alpha| < 1$.

Al ser $K(z) = p(z)q(z)$, resulta que $K(\alpha) = 0$ y $q(z) = p(z)^{-1}K(z) = (\alpha - z)^{-1}K(z)$.

Además, para $|z| < |\alpha|$ se cumple

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 - \frac{z}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-n} z^n,$$

de ahí que

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-n} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n\right),$$

y, por consiguiente

$$\alpha q_n = \sum_{r=0}^{n} \alpha^{r-n} K_r.$$

Como $K(\alpha) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} K_n\alpha^n$, se tiene $\sum_{r=0}^{n} K_n\alpha^n = -\sum_{r=n+1}^{\infty} \alpha^n$, luego

$$\alpha q_n = -\sum_{r=n+1}^{\infty} \alpha^{r-n} K_r$$

A partir de dicha igualdad, despejando q_n, tomando valor absoluto, aplicando la desigualdad triangular, agrupando mediante los términos K_r y sumando los términos llegamos a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=n+1}^{\infty} |\alpha|^{r-n-1} |K_r| \right) \leq \sum_{r=1}^{\infty} |K_r| \sum_{n=0}^{r-1} |\alpha|^{r-1-n} \leq \frac{1}{1-|\alpha|} \sum_{r=1}^{\infty} |K_r| < \infty,$$

donde en la segunda desigualdad hemos aplicado que se trataba de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón α. Así obtenemos la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q_n$.

Por otro lado, al ser $v(z) = p(z)u(z)$, tenemos que $v(\alpha) = 0$ y $u(z) = (\alpha - z)^{-1} v(z)$.

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \frac{1}{\alpha - z} \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n = \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 - \frac{z}{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-n} z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \right) =$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-n-1} z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} v_r \alpha^{r-n-1} \right) z^n.$$

Por lo tanto, utilizando que $v(\alpha) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} v_n\alpha^n$, y la convergencia de (v_n)

$$u_n = \sum_{r=0}^{n} v_r \alpha^{r-n-1} = -\sum_{r=n+1}^{\infty} v_r \alpha^{r-n-1} = -\sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r v_{n+1+r} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{v}{1-\alpha}.$$

Para calcular el límite hemos utilizado que $|\alpha| < 1$ para hacer la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica. Así queda también probada la convergencia de (u_n) para el Caso 2. Ahora, aplicando el Caso 1 seguido de la repetición del Caso 2 tantas veces como raíces no nulas distintas haya, conseguimos la prueba general de que $\sum_{n=0}^{\infty} |q_n| < \infty$ y $u_n \to u$ para el polinomio $p(z)$.

Finalmente, como $q(z)$ no tiene ceros en $\bar{D}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} q_n$ es absolutamente convergente, por el teorema de Wiener-Lévy (véase Anexo I), existe una sucesión (c_n) tal que $\frac{1}{q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (z \in \bar{D})$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$.

Además, por ser $u(z) = q(z)a(z)$ se sigue que $a(z) = \frac{u(z)}{q(z)}$ y por el producto de Cauchy, de foma análoga a como hemos hecho anteriormente, obtenemos

$$a_n = \sum_{r=0}^{n} c_r u_{n-r}.$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} c_r u_{n-r} = u \sum_{r=0}^{\infty} c_r,$$

que es finito por ser $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$. De esta forma queda probada la convergencia de (a_n).

□

Nótese que si sustituimos las condiciones (4.1) y (4.2) por

$$-1 = K_0 < K_1 < \ldots < K_{n-1} < K_n = K_{n+r} = 0 \ (r = 1, 2, \ldots) \tag{4.7}$$

obtenemos como caso particular el teorema de Copson, ya que $K_0 = k_0 = -1$ y al ser $-1 < K_n < K_{n-1} < 0$ llegamos a que $0 < k_n = K_n - K_{n-1} < 1$ para $n = 1, \ldots, N$ y $K_{N+r} = 0$.

De esta forma, (4.4) se convierte en

$$\sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} \geq 0 \Rightarrow k_0 a_n + \sum_{r=1}^{n} k_r a_{n-r} \geq 0 \Rightarrow -a_n + \sum_{r=1}^{n} k_r a_{n-r} \geq 0 \Rightarrow a_n \leq \sum_{r=1}^{n} k_r a_{n-r}, \tag{4.8}$$

que es la condición de Copson.

Además, si se verifica (4.7), la condición (4.1) se verifica trivialmente, ya que solo hay una cantidad finita no nula de K_n, y el polinomio $K(z)$ satisface (4.2) debido a que

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n = \sum_{n=0}^{N-1} K_n z^n,$$

y $K(1) = \sum_{n=0}^{N-1} K_n < 0$. Luego para $z = e^{i\theta},\ 0 < \theta < 2\pi$,

$$(1-z)K(z) = \sum_{n=0}^{N-1} K_n z^n - \sum_{n=0}^{N-1} K_n z^{n-1} =$$

$$= K_0 + (K_1 - K_0)z + \cdots + (K_{N-1} - K_{N-2})z^{N-1} - K_{N-1}z^N =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} k_n z^n = \sum_{n=0}^{N} k_n e^{i\theta n} = \sum_{n=0}^{N} k_n(\cos(\theta n) + i\mathrm{sen}(\theta n));$$

tomando la parte real

$$\mathrm{Re}((1-z)K(z)) = \sum_{n=0}^{N} k_n \cos(n\theta) = k_0 + \sum_{n=1}^{N} k_n \cos(n\theta) = -\sum_{n=1}^{N} k_n + \sum_{n=1}^{N} k_n \cos(n\theta) =$$

$$-\sum_{n=1}^{N} k_n(1 - \cos(n\theta)) < 0,$$

lo que nos lleva a poder concluir $K(z) \neq 0$ en ∂D (4.2).

Ejemplo 5. *Consideremos la sucesión* $K_n = \frac{1}{2^n}$*, que verifica* $\sum_{n=0}^{\infty} |K_n| = 2 < \infty$*.*

De ahí que $k_0 = 1$ *y* $k_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^n}$*.*

Entonces, aplicando el teorema de Borwein, cualquier sucesión acotada que satisfaga

$$a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} \geq 0$$

será convergente.

En el siguiente teorema analizamos el caso en que $K(z)$ tiene raíces en la circunferencia unidad distintas de 1. En esta situación no podemos garantizar la convergencia de la sucesión (a_n) aunque cumpla la desigualdad (4.4), de hecho, existen ejemplos de sucesiones acotadas pero divergentes que satisfacen tal desigualdad.

Teorema 22. *[4] Si* $K(z) = p(z)q(z)$ *donde* $p(z)$ *es un polinomio y*

$$q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n,$$

y si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q_n| < \infty, \tag{4.9}$$

$$q(z) \neq 0 \text{ en } \bar{D}, \tag{4.10}$$

$$K(\eta) = 0, \eta \neq 1, |\eta| = 1, \tag{4.11}$$

entonces existe una sucesión (a_n) *acotada y divergente y un entero positivo* N *tales que*

$$\sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} = 0 \ (n = N, N+1, \dots). \tag{4.12}$$

Demostración. Definimos una sucesión (a_n) y una función $a(z)$ como sigue

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{q(z)(\eta - z)} \quad (z \in D). \tag{4.13}$$

Por otro lado, sea $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$ dada por

$$w_n = \sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r}.$$

Entonces

$$(1-z)K(z)a(z) = (1-z) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = (1-z) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} K_r a_{n-r} \right) z^n \right) =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} K_r a_{n-r} \right) z^n \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} K_r a_{n-r} \right) z^{n+1} \right) = K_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{n} K_r a_{n-r} - K_{r-1} a_{n-r} \right) z^n =$$

$$= k_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{n} k_r a_{n-r} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n.$$

Luego

$$w(z) = (1-z)K(z)a(z) = (1-z) \frac{p(z)q(z)}{q(z)(\eta - z)} = \frac{(1-z)p(z)}{\eta - z}.$$

Sabemos que $w(\eta) = 0$ por ser $K(\eta) = 0$, pero como $\eta \neq 1, \ |\eta| = 1$ concluimos que $(\eta - z)$ es un factor de $p(z)$. Luego $w(z)$ es un polinomio de grado $N-1$ y se sigue que

$$\sum_{r=0}^{n} w_n = \sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} = 0 \qquad (n = N, N+1, \dots).$$

Entonces, por el corolario del teorema de Wiener-Lévy (véase Anexo I), las condiciones (4.9) y (4.10) implican que existe una sucesión $\{c_n\}$ tal que

$$\frac{1}{q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

Recordemos que $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{1}{q(z)(\eta - z)}$. De ahí que

$$a(z) = \frac{1}{q(z)} \cdot \frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{q(z)} \cdot \frac{\frac{1}{\eta}}{1 - \frac{z}{\eta}} = \frac{1}{q(z)} \cdot \frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\eta} \right)^n = \frac{1}{\eta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-n} z^n \right) =$$

$$= \frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} c_r \eta^{r-n} \right) z^n.$$

Compatando coeficientes,

$$a_n = \frac{1}{\eta} \sum_{r=0}^{n} c_r \eta^{r-n}.$$

Luego

$$\eta^{n+1} a_n = \eta^n \sum_{r=0}^{n} c_r \eta^{r-n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{q(\eta)}.$$

Como $|\eta| = 1$ pero $\eta \neq 1$ y $q(\eta) \neq 0$, concluimos que (a_n) es una sucesión acotada pero no convergente, ya que la sucesión (η^n) siempre tiene al menos dos puntos de acumulación en la circunferencia unidad (véase Anexo III, en donde se demuestra que la sucesión o bien se acumula en una órbita periódica o bien es densa en ∂D).

□

La prueba del teorema 21 ilustra que las condiciones (4.1) y (4.2) implican que $K(z)$ debe satisfacer las hipótesis (4.9) y (4.10) del teorema 22 ya que al ser $K(z) = p(z)q(z)$ donde $p(z)$ es un polinomio, si no se verificase (4.9) dicho producto implicaría que $\sum_{n=0}^{\infty} K_n$ no es absolutamente convergente, contradiciendo así (4.1) y por el mismo razonamiento se verfica (4.10), ya que en caso contrario se contradiría la condición (4.2).

Por último, como consecuencia de los dos teoremas anteriores tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3. *Si $K(z)$ es analítica en $\bar{D}$ y $K(1) \neq 0$, entonces la condición $K(z) \neq 0$ en ∂D es necesaria y suficiente para que toda sucesión (a_n) acotada que satisfaga (4.4), para algún entero positivo N, sea convergente.*

4.2. Sucesiones dobles y sucesiones de funciones

Consideremos una sucesión doble de números reales (a_m^n).

Definición 3. *Decimos que (a_m^n) tiene límite a, si para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural N_ϵ, tal que para todo $n, m \geq N_\epsilon$ se verifica la desigualdad*

$$|a_m^n - a| < \epsilon.$$

Definición 4. *La sucesión doble (a_m^n) es monótona decreciente si $a_{m+i}^{n+k} - a_m^n \leq 0$, para todo i, k, m, n.*

Teorema 23. *[19] Si (a_m^n) es una sucesión doble acotada que satisface la desigualdad*

$$a_{m+r}^{n+l} \leq \sum_{\substack{1\leq s\leq r \\ 1\leq p\leq l}} k_{s,p} a_{m+r-s}^{n+l-p},$$

donde los coeficientes $k_{s,p}$ son estrictamente positivos y $\sum k_{s,p} = 1$, entonces (a_m^n) es convergente.

Demostración. Consideremos

$$A_m^n = \text{máx}\{a_{m-t}^{n-u} : \ 1 \leq t \leq r; \ 1 \leq u \leq l\},$$

de ahí se verifican las siguientes relaciones:

$$a_m^n \leq \sum_{s,p=1} k_{s,p} a_{m-s}^{n-p} \leq \sum_{s,p=1} k_{s,p} A_m^n = A_m^n \sum_{s,p=1} k_{s,p} = A_m^n,$$

es decir,

$$a_m^n \leq A_m^n. \tag{4.14}$$

Además, (A_m^n) es una sucesión monótona. Para probarlo téngase en cuenta que $A_{m+i}^{n+k} \leq A_m^n$ porque el número de elementos que se utilizan en el cálculo de ambos máximos es el mismo, teniendose así una biyección entre ambos conjuntos en la que a cada elemento a_{m+i-t}^{n+k-u} le corresponde a_{m-t}^{n-u}, siendo el primero menor o igual que el segundo.

Ahora bien, está claro que si (A_m^n) tiende a $-\infty$ entonces $\{a_m^n\}$ tiende a $-\infty$ por (4.14). Por ello que ha de cumplirse $\liminf_{m,n\to\infty} A_m^n$ existe y es finito. Denotemos

$$\liminf_{m,n\to\infty} A_m^n = A.$$

Entonces para cualquier $\epsilon > 0$ podemos encontrar un entero N_ϵ tal que

$$A \leq A_m^n \leq A + \epsilon, \tag{4.15}$$

para todo $m, n \geq N_\epsilon$. Luego para cualquier $1 \leq i \leq r,\ 1 \leq p \leq l$ tenemos que al ser la sucesión monótona sus elementos no pueden ser inferiores a su límite inferior.

$$a_{m+i}^{n+p} \leq k_{i,p} a_m^n + \sum_{(t,s)\neq(i,p)} k_{t,s} a_{m+i-t}^{n+p-s} \leq k_{i,p} a_m^n + (1 - k_{i,j}) A_{m+i}^{n+p}$$

Para todo par $m, n \geq N_\epsilon$ encontramos un (i, p) tal que $a_{m+i}^{n+p} = A_{m+r+1}^{n+l+1}$ lo que nos lleva, teniendo en cuenta la desigualdad anterior y (4.15),

$$A \leq A_{m+r+1}^{n+l+1} = a_{m+i}^{n+p} \leq k_{i,p} a_m^n + (1 - k_{i,j})(A + \epsilon) =$$
$$= a_m^n + (1 - k_{i,p})(A + \epsilon - a_m^n) = k_{i,p} a_m^n + A - k_{i,p} A + \epsilon - k_{i,p}\epsilon,$$

despejando,

$$k_{i,p} a_m^n \geq k_{i,p} A - (1 - k_{i,p})\epsilon$$

dividiendo por $k_{i,p}$ y acotando con k, el menor de los coeficientes $k_{t,s}$,

$$a_m^n \geq A - \frac{1-k}{k}\epsilon.$$

Luego

$$A - \frac{1-k}{k}\epsilon \leq a_m^n \leq A + \epsilon,$$

para todo $n \geq N_\epsilon$ de ahí que

$$\lim_{m,n\to\infty} a_m^n = A.$$

□

A continuacion analizamos el caso de las sucesiones de funciones en relación con el teorema de Copson.

Teorema 24. *[19] Sea X un espacio compacto y $\{f_n\}$ una sucesión acotada de funciones reales continuas tal que:*

1. *$f_n \to f$ puntualmente y f es continua.*
2. *Existen constantes estrictamente positivas k_s, con $\sum_{s=1}^r k_s = 1$, tales que*

$$f_{n+r}(t) \leq \sum_{s=1}^{r} k_s f_{n+r-s}(t),$$

para $n = 1, 2, \ldots$ entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a f.

Demostración. Consideremos la función

$$F_n(t) = \text{máx}\{f_{n-1}(t), \dots, f_{n-r}(t)\},$$

la continuad es inmediata. Veamos que la sucesión (F_n) es monótona. En primer lugar,

$$f_n(t) \leq \sum_{s=1}^{r} k_s f_{n-s}(t) \leq \sum_{s=1}^{r} k_s F_n(t) = F_n(t).$$

Seguidamente,

$$F_{n+1}(t) = \text{máx}\{f_n(t), \dots, f_{n-r+1}(t)\} \leq \text{máx}\{f_n(t), \dots, f_{n-r+1}(t), f_{n-r}(t)\} = \text{máx}\, f_n(t), F_n(t) \leq F_n(t).$$

Aplicando el teorema de Dini a dicha sucesión (véase Anexo III), se deduce $F_n \to F$ uniformemente. Por tanto, dado $\epsilon > 0$, existe N_ϵ tal que para todo $t \in X$ y $n \geq N_\epsilon$ se cumple

$$F(t) \leq F_n(t) \leq F(t) + \epsilon. \tag{4.16}$$

Ahora bien, para $1 \leq s \leq r$ tenemos

$$f_{n+s}(t) \leq k_s f_n(t) + \sum_{u \neq s} k_u f_{n+s-u}(t) \leq$$

$$\leq k_s f_n(t) + \sum_{u \neq s} k_u F_{n+s}(t) \leq (1 - k_s)(F(t) + \epsilon) + k_s f_n(t),$$

en donde se ha empleado la definición de F_n y la desigualdad (4.16). Sea t_0 un punto arbitrario de X. Para cada $m \leq N_\epsilon$ encontramos un entero $s \in [1, r]$ tal que $f_{n+s}(t_0) = F_{n+r+1}(t_0)$. Lo que nos lleva a

$$F(t_0) \leq F_{n+r+1}(t_0) = f_{n+s}(t_0) \leq (1 - k_s)(F(t_0) + \epsilon) + k_s f_n(t_0) =$$
$$= f_n(t_0) + (1 - k_s)(F(t_0) + \epsilon - f_n(t_0)).$$

Si k es el menor de los coeficientes k_s obtenemos

$$F(t_0) \leq f_n(t_0) + (1 - k)(F(t_0) + \epsilon - f_n(t_0)) = k f_n(t_0) + (1 - k)(F(t_0) + \epsilon),$$

por consiguiente

$$f_n(t_0) \geq F(t_0) - \frac{1 - k}{k}\epsilon.$$

Como t_0 es arbitrario, esto prueba que (f_n) converge uniformemente a f.

□

4.3. Generalización del teorema de la convergencia monótona de Lebesgue

Finalmente, en la última sección de este capítulo, presentamos un resultado propio que, aplicando la técnica desarrollada por R. A. Rankin para demostrar el teorema de Copson, generaliza el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue. Introduzcamos brevemente unos conceptos de teoría de la medida tomados de [12].

Definición 5. *Llamamos σ-álgebra, y lo denotaremos por Σ, a una familia de subconjuntos de un espacio X que verifica las siguientes propiedades:*

1. $\emptyset \in \Sigma$.
2. *Si $A \in \Sigma$, entonces $X \setminus A \in \Sigma$.*
3. *Si $A_1, A_2, A_3, \dots$ es una sucesión de elementos de Σ, entonces la unión numerable de todos ellos también está en Σ.*

Definición 6. *Una medida μ es una función definida sobre una σ-álgebra, $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ que verifica:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión numerable de conjuntos disjuntos dos a dos de Σ, entonces*

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Definición 7. *La terna (X, Σ, μ) se denomina espacio de medida, y los elementos de Σ se denominan conjuntos medibles.*

Definición 8. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \in \Sigma$, y $f : X \to \mathbb{R}$. Se dice que f es medible Lebesgue si para todo abierto G en $\mathbb{R}$, la imagen inversa*

$$f^{-1}(G) = \{x \in X; f(x) \in G\},$$

es un conjunto medible de $\mathbb{R}^n$.

Definición 9. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \in \Sigma$. Se llama función simple en X a una función medible $s : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ que sólo toma un número finito de valores, es decir, tal que $s(X) = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ es finito.*

Definición 10. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \in \Sigma$ y sea $s : X \to \mathbb{R}$ una función simple no negativa,*

$$s = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i},$$

con $a_i \geq 0$ para todo i, $1 \leq i \leq k$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y $\sum_{i=1}^{k} A_i = X$.

Definimos la integral de s sobre X como

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i).$$

Teorema 25. ***Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue*** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles sobre X, y supongamos que*

1. $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq \infty$, *para todo $x \in X$.*
2. $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$, *para todo $x \in X$.*

Entonces f es medible y $\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int_X d\mu$.

El lector interesado en la demostración puede encontrarla en [12, págs. 21-22].

Antes de centrarnos en el resultado principal vamos a enunciar una serie de resultados previos que aplicaremos en su demostración.

Proposición 1. *Si $f_n : X \to \mathbb{R}$ es medible para $n = 1, 2, \ldots$ y*

$$g = \sup_{n\geq 1} f_n; \qquad h = \lim_{n\to\infty} sup f_n.$$

Entonces g y h son medibles.

El lector interesado en su demostración puede encontrarla en [12, págs. 16-17].

Teorema 26. *Sean s y t funciones simples y medibles no negativas sobre X. Para $E \in \Sigma$ definimos $\phi(E) = \int_E s d\mu$. Entonces ϕ es medible. También se verifica*

$$\int_X (s+t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu.$$

En el teorema anterior, Σ representa una $\sigma-$ álgebra. El lector interesado en su demostracióm puede encontrarla en [12, págs.20-21]. -

Teorema 27. *Sea μ una medida positiva sobre una $\sigma-$álgebra. Entonces $\mu(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mu(A)$ si $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$; $A_n \in \Sigma$ y $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$*

El lector interesado en su demostracióm puede encontrarla en [12, pág. 14].

Presentamos ya el resultado principal de esta sección.

Teorema 28. *Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles y no negativas sobre X. Supongamos que:*

$$f_{n+k}(x) \geq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{n+k-j}(x), \tag{4.17}$$

para todo $x \in \mathbb{X}$ donde $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$ con $0 < \alpha_j < 1,\ j = 1, \ldots, k$. Supongamos también que

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x), \tag{4.18}$$

para todo $x \in \mathbb{X}$. Entonces f es medible y $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Consideramos la función dada por

$$A_n = \text{mín}\{f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_{n-k}\}.$$

De ahí $A_n \leq f_n$ ya que

$$f_n \geq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{n-j} \geq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j A_n = A_n.$$

Por otro lado,

$$A_{n+1} = \text{mín}\{f_n, \ldots, f_{n-(k+1)}\} \geq \text{mín}\{f_n, \ldots, f_{n-(k+1)}, f_{n-r}\}. \tag{4.19}$$

Ahora bien, aquí pueden darse dos casos,

1. $\text{mín}\{f_n, \ldots, f_{n-k}\} = \text{mín}\{f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_{n-k}\} = A_n$.
2. $\text{mín}\{f_n, \ldots, f_{n-k}\} = f_n \geq A_n$.

Sin embargo, de ambos casos y de la desigualdad (4.19) podemos concluir lo mismo

$$A_n \leq A_{n+1}.$$

Como A_n se puede entender como una subsucesión de f_n entonces, por hipótesis,

$$A_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x),$$

para todo $x \in X$. Además, como $A_n \leq A_{n+1}$ implica que $\int_X A_n d\mu \leq \int_X A_{n+1} d\mu$ y, por consiguiente, recordando que las funciones f_n son no negativas por hipótesis, existirá un $\alpha \in [0, +\infty]$ tal que

$$\int_X A_n d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \alpha. \tag{4.20}$$

Por otro lado, la proposición 1 nos garantiza que f es medible por ser límite puntual de f_n. Como $A_n \leq f$, se tiene que $\int_X A_n d\mu \leq \int_X f d\mu$ para todo n. Luego por (4.20)

$$\alpha \leq \int_X f d\mu. \tag{4.21}$$

Sea s una función medible simple tal que $0 \leq s \leq f$. Sea c una constante tal que $0 < c < 1$, y definimos

$$E_n = \{x : A_n(x) \geq cs(x)\} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Cada E_n es medible, $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ (ya que $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \dots$) y $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Veamos que esta última igualdad es cierta.

Sea $x \in X$. Si $f(x) = 0$, entonces $x \in E_1$. Si $f(x) > 0$ y $0 < c < 1$, entonces $cs(x) < f(x)$. Eso es porque estamos suponiendo que $0 \leq s \leq f$. Como $A_n(x)$ tiende de forma monótona a $f(x)$ tendremos que $A_n(x) \geq cs(x)$ para algún n, es decir, $x \in E_n$ para algún n. También se tiene, por las propiedades de la integral de Lebesgue, que

$$\int_X A_n d\mu \geq \int_{E_n} A_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{4.22}$$

Haciendo $n \to \infty$ y aplicando los teoremas 26 y 27 en la última integral de (4.22) resulta que

$$\alpha \geq c \int_X s d\mu. \tag{4.23}$$

Como (4.23) es cierto para todo $c < 1$, entonces

$$\alpha \geq \int_X s d\mu,$$

para toda función simple medible s satisfaciendo $0 \leq s \leq f$. Así que

$$\alpha \geq \int_X f d\mu. \tag{4.24}$$

Entonces, juntando (4.20), (4.21) y (4.24)

$$\lim_{n\to\infty} \int_X A_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Por simplicidad en la notación llamemos

$$A = \lim_{n\to\infty} \int_X A_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Si A es infinito como $A_n \leq f_n$ entonces $\int_X A_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu$, por lo tanto al tomar límite también $\lim \int_X f_n d\mu = \infty = \int_X f d\mu$.

Supongamos que A es finito, por definición de límite, para todo $\epsilon > 0$ existe N entero positivo tal que

$$A - \epsilon \leq \int_X A_n d\mu \leq A,$$

cuando $n \geq N$ (recordemos que la sucesión A_n es monótona no negativa). Si $1 \leq s \leq k$tenemos

$$\int_X f_{n+s} d\mu \geq \alpha_s \int_X f_n d\mu + \sum_{\substack{t\neq s \\ 1\leq t\leq k}} \alpha_t \int_X f_{n+s-t} d\mu \geq \alpha_s \int_X f_n d\mu + \sum_{\substack{t\neq s \\ 1\leq t\leq k}} \alpha_t \int_X A_{n+s} d\mu =$$

$$= \alpha_s \int_X f_n d\mu + (1 - \alpha_s) \int_X A_{n+s} d\mu \geq (1 - \alpha_s)(A - \epsilon) + \alpha_s \int_X f_n d\mu.$$

Para cada $m \geq N$ podemos encontrar un entero $\hat{s}$ $(1 \leq \hat{s} \leq k)$ tal que

$$\int_X f_{m+\hat{s}} d\mu = \int A_{m+k+1}.$$

De ahí que

$$A \geq \int_X A_{m+k+1} d\mu = \int_X f_{m+\hat{s}} d\mu \geq (1-\alpha_{\hat{s}})(A-\epsilon)+\alpha_{\hat{s}} \int_X f_m d\mu = \int_X f_m d\mu + (1-\alpha_{\hat{s}})(A-\epsilon-\int_X f_m d\mu).$$

Pero $\int_X f_m d\mu \geq \int_X A_m d\mu \geq A-\epsilon$. Por lo tanto, si α es el mayor de los coeficientes α_j

$$A \geq \int_X f_m d\mu + (1-\alpha)(A-\epsilon-\int_X f_m d\mu) = \alpha \int_X f_m d\mu + (1-\alpha)(A-\epsilon).$$

De donde se sigue

$$\alpha \int_X f_m d\mu \leq \alpha A + (1-\alpha)\epsilon \Rightarrow \int_X f_m d\mu \leq A + \frac{1-\alpha}{\alpha}\epsilon,$$

donde recordemos que $0 < \alpha < 1$.

Hemos probado que para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que cuando $m \geq N$

$$A-\epsilon \leq \int_X f_m d\mu \leq A + \frac{1-\alpha}{\alpha}\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces

$$\lim_{m\to\infty} \int_X f_m d\mu = A = \int_X f d\mu.$$

□

Anexos

Anexo I: Teorema de Wiener-Lévy

Definición 11. *Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos. La denotaremos por $S[f]$ y tienen la forma*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \mathrm{sen} \frac{2n\pi}{T} t \right],$$

donde a_n y b_n se denominan coeficientes de fourier de la serie de fourier de f.

Lema 9. *[21] Si $g(x, \theta)$ es periódica en x, y si para cualquier valor del parámetro θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tenemos $||g(x, \theta)|| \leq A$, entonces*

$$\left|\left| \int_0^{2\pi} g(x, \theta) d\theta \right|\right| \leq 2\pi A.$$

Demostración.

$$\left|\left| \int_0^{2\pi} g(x, \theta) d\theta \right|\right| \leq \int_0^{2\pi} ||g(x, \theta)|| d\theta = \int_0^{2\pi} A d\theta = A\theta|_0^{2\pi} = 2\pi A.$$

□

Teorema 29. *[21]* ***Teorema de Wiener-Lévy***

1. *Supongamos que S[f] converge absolutamente, que los valores (en general, complejos) de $f(t)$ caen en la curva c, y que $\phi(z)$ es analítica (no necesariamente singular) de variable compleja regular en cada punto de c. Entonces $S[\phi(f)]$ converge absolutamente.*

2. *En particular, si $f(t) \neq 0$, y si $S[f]$ converge absolutamente, también lo hace $S[1/f]$.*

Demostración. Para toda $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ikx}$ escribimos $||g|| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, $\quad Mg = \max_x |g(x)|$.

Claramente

$$\left|\left| \sum_{k=0}^{\infty} g_i \right|\right| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k + \cdots + b_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| = \sum_{k=0}^{\infty} ||g_i||,$$

y

$$||g_1 g_2|| \leq ||g_1|| ||g_2||,$$

ya que al ser $g_1 g_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ikx}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ikx}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}\right) e^{ikx}$ implica

$$||g_1 g_2|| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} |a_n| |b_{k-n}| \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right) = ||g_1|| ||g_2||.$$

Como ϕ es analítica para $z = f(x)$, existe un $\rho > 0$ tal que $\phi(z)$ es regular en cada círculo $|z - f(x)| \leq 2\rho$. Sea $s(x)$ una suma parcial de $S[f]$ tal que $M(s - f) \leq ||s - f|| \leq \frac{1}{2}\rho$. Entonces $\phi\left[s(x) + \rho e^{i\theta}\right]$ es de clase C^2 en x y θ.

De ahí, que para cada θ, $||\phi[s(x)+\rho e^{i\theta}]||$ sea finito, y esta norma sea una función acotada de θ. Por otro lado, tenemos que

$$\left(s+\rho e^{i\theta}-f\right)^{-1}=\rho^{-1}e^{-i\theta}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(f-s)^n\rho^{-n}e^{-in\theta}\right),$$

y por cumplirse $||g_1g_2||\leq||g_1||||g_2||$,

$$\left|\left|\left(s+\rho e^{i\theta}-f\right)^{-1}\right|\right|\leq\rho^{-1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\rho\right)^n\rho^{-n}\right)=2\rho^{-1}.$$

Luego por la fórmula de Cauchy

$$\phi[f(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\phi[s(x)+\rho e^{i\theta}]}{s(x)+\rho e^{i\theta}-f(x)}\rho e^{i\theta}d\theta,$$

y el lema previo implica que $||\phi[f(x)]||$ es finita. □

Corolario 4. *[21] Si $F(z)$ es regular para $|z|<1$, continua y distinta de 0 en $|z|\leq 1$, y si la serie de Taylor de F converge absolutamente en $|z|=1$, entonces la serie de Taylor de $\frac{1}{F}$ también converge absolutamente en $|z|=1$.*

Para demostrar el corolario nos limitaremos a ver la relación que existe entre el desarrollo de Taylor y el de Fourier de una función. De esta forma, el Teorema de Wiener-Lévy seguirá siendo cierto al cambiar las series de Fourier por las de Taylor teniendo así el corolario.

Para ello necesitaremos hacer uso de un conocido resultado de Análisis Complejo, el teorema de Laurent. Nos limitaremos a enunciarlo pudiendo encontrarse su demostración en [1].

Teorema 30. *[1]* ***Teorema de Laurent*** *Sea $f\in\mathbb{H}(D(a,R_1,R_2))$ para ciertos $0\leq R_1<R_2\leq\infty$. Entonces*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n,$$

donde $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\omega)}{(\omega-a)^{n+1}}d\omega$, $\{z=a+re^{i\theta};\ \theta\in[0,2\pi)\}$, $R_1<r<R_2$.

Centrémonos ahora en la relación entre los dos desarrollos. Sea $q(z)$ una función analítica en D y continua que no se anula en $\bar{D}$. Al tratarse de una función analítica, podemos expresarla como serie de potencias

$$q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nz^n.$$

Ahora bien, analítica en D implica que la función sea holomorfa en el disco, permitiéndonos escribir los coeficientes q_n en función de su desarrollo de Taylor.

$$q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n)}(0)}{n!}z^n.$$

Por otro lado, al ser holomorfa en D podemos aplicar el teorema de Laurent

$$q(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n,$$

donde

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{q(w)}{w^{n+1}}dw,$$

con $\gamma_r = \{z = e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$.

Consideremos otra vez la función $q(z)$. Al encontrarnos en el disco unidad, $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi))$ y la serie de Fourier correspondiente es $g(\theta) = q(e^{i\theta})$ donde los coeficientes se calculan como sigue

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)e^{-ni\theta}d\theta.$$

Vamos a hacer el cambio de variable $z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow \frac{1}{iz}dz = d\theta$.

Luego

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)e^{ni\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{q(e^{i\theta})}{e^{ni\theta}}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{q(z)}{z^n}\frac{1}{iz}dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{q(Z)}{z^{n+1}}dz.$$

Pero la última expresión se corresponde con los coeficientes del desarrollo de Laurente e igualando

$$q^{(n}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{q(z)}{z^{n+1}}dz.$$

Quedando así patente la conexión existente entre los desarrollos de Taylor y de Fourier.

Anexo II: Método de variación de las constantes

Definición 12. *Una ecuación en diferencias lineal homogénea de primer orden es una ecuación del tipo*

$$x(n+1) = a(n)x(n), \qquad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0,$$

donde $a(n)$ es una función real no nula definida para todo $n \geq n_0 \geq 0$. Resolver ecuaciones de este tipo no tiene mayor dificultad que el de proceder por iteración, pudiendo escribir la solución general como

$$x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0.$$

Definición 13. *Una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden k es una ecuación del tipo*

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \cdots + p_k(n)x(n) = 0. \tag{4.25}$$

Se suele escribir $x(n+k) = -p_1(n)x(n+k-1) - \cdots - p_k(n)x(n)$ donde $p_i(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ y $p_k(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 14. *Una sucesión $(x(n))_{n=n_0}^{\infty}$ o simplemente $x(n)$ se dice que es una solución de*

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \cdots + p_k(n)x(n) = 0$$

si satisface la ecuación.

Si especificamos las condiciones iniciales de la ecuación obtenemos lo que se conoce como problema de valor incial.

Definición 15. *Las funciones $f_1(n), \ldots, f_r(n)$ son linealmente independientes para $n \geq n_0$ si dada la ecuación*

$$a_1 f_1(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0,$$

para todo $n \geq n_0$. Entonces se tiene $a_1 = \cdots = a_r = 0$.

Definición 16. *Un conjunto de k soluciones linealmente independientes de (4.25) se llama conjunto fundamental de soluciones.*

Definición 17. *El casoratiano $W(n)$ de las soluciones $x_1(n), \ldots, x_r(n)$ viene dado por*

$$W(n) = det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \cdots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \cdots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \cdots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}.$$

Lema 10. ***(Lema de Abel)*** *Sean $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ soluciones de (4.25) y sea $W(n)$ su Casoratiano. Entonces, para $n \geq n_0$,*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i)\right) W(n_0).$$

Teorema 31. *El conjunto de soluciones $\{x_1(n), \cdots, x_k(n)\}$ de (4.25) es un conjunto fundamental si y sólo si para algún $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, el Casoratiano $W(n_0) \neq 0$.*

Definición 18. *Sea $\{x_1(n), \ldots, x_k(n)\}$ un conjunto fundamental de soluciones de (4.25). Entonces la solución general de (4.25) viene dada por*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$$

para constantes arbitrarias a_i.

Cabe destacar el caso particular en que la ecuación en diferencias tienen los coeficientes constantes. Para ello vamos a considerar la ecuación en diferencias de orden k,

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + \cdots + p_k x(n) = 0, \tag{4.26}$$

donde los $p_i's$ son constantes y $p_k \neq 0$. Nuestro objetivo es encontrar el conjunto fundamental de soluciones de dicha ecuación y, consecuentemente, la solución general. En primer lugar, introduciremos los siguientes términos.

Definición 19. *Sea*

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + \cdots + p_k x(n) = 0$$

una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden k con coeficientes constantes.

1. *El polinomio $\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k$ es el polinomio característico de (4.26).*

2. *La ecuación $\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0$ es la ecuación característica de (4.26).*

3. *Las soluciones de la ecuación característica $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ son las raíces características.*

Destaquemos que las raíces características pertenecen a $\mathbb{C}$, pudiéndose dar el caso particular en el que sean reales. Por otro lado, al ser $p_k \neq 0$ se tiene que ningún λ puede ser 0, ya que si hubiese alguno, al sustituir en la ecuación característica obtendríamos $p_k = 0$ llegando a una contradicción.

Corolario 5. *La solución general de (4.26) viene dada por*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n (a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \cdots + a_{im_{i-1}} n^{m_i - 1}).$$

Definición 20. *Una ecuación en diferencias lineal no homogénea de orden k es una ecuación del tipo*

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \cdots + p_k(n)x(n) = g(n); \quad n \geq n_0 \geq 0 \tag{4.27}$$

donde $p_i(n)$ y $g(n)$ son funciones reales definidas para $n \geq n_0 \geq 0$.

Definición 21. *Una sucesión $(x(n))_{n_0}^{\infty}$ o simplemente $x(n)$ se dice que es una solución de (4.27) si satisface la ecuación.*

Definición 22.

1. *La solución general de la ecuación homogénea (4.30) se denomina solución complementaria de la ecuación no homogénea (4.29), y se denotará por $x_c(n)$.*

2. *Una solución de la ecuación no homogénea (4.29) se denomina solución particular, y se denotará por $x_p(n)$.*

Teorema 32. *Cualquier solución $x(n)$ de (4.29) puede escribirse como*

$$x(n) = x_p(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$$

donde $\{x_1(n), \ldots, x_k(n)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (4.30).

Definición 23. *La solución general de una ecuación en diferencias lineal no homogénea viene dada por*

$$x(n) = x_c(n) + x_p(n). \tag{4.28}$$

Una forma de resolver ecuaciones no homogéneas es sumando una solución particular a la solución de la ecuación homogénea asociada. Ahora bien, obtener una solución particular puede ser una tarea árdua en la mayoría de los casos. Es por ello, que es necesario un método que nos permita resolver dicho tipo de ecuaciones sin necesidad de hacer uso de la intuición o la suposición. Este método es el conocido como variación de los parámetros o de las constantes. Lo que sigue está basado en los textos de Elaydi [6] y

Kelley [9].

Pretendemos resolver una ecuación en diferencias lineal no homogénea de orden k, a saber una ecuación del tipo

$$x(n+k)+p_1(n)x(n+k-1)+\cdots+p_k(n)x(n)=g(n). \tag{4.29}$$

En primer lugar, resolveremos la ecuación homogénea asociada

$$x(n+k)+p_1(n)x(n+k-1)+\cdots+p_k(n)x(n)=0. \tag{4.30}$$

Sea $x_h(n)$ una solución de la homogénea. Sabemos que el conjunto de soluciones de una ecuación homogénea tiene estructura de espacio vectorial, siendo un conjunto fundamental una base para el mismo. De esta forma, puedo considerar una base $\{x_1(n),\ldots,x_k(n)\}$ de dicho espacio de soluciones tal que se verifica

$$x_h(n)=\sum_{j=1}^{k}c_jx_j(n).$$

Partiendo de dicha expresión, la base del método consiste en considerar las constantes c_j como funciones de n con $c_j(n_0)=c_j$ y exigir que la función

$$x(n)=\sum_{j=1}^{k}c_j(n)x_j(n), \tag{4.31}$$

satisfaga la ecuación (4.29). De esta última relación podemos deducir lo siguiente

$$x(n+1)=\sum_{j=1}^{k}c_j(n+1)x_j(n+1)=\sum_{j=1}^{k}c_j(n)x_j(n+1)+\sum_{j=1}^{k}\Delta c_j(n)x_j(n+1).$$

Si fijamos

$$\sum_{j=1}^{k}\Delta c_j(n)x_j(n+1)=0,$$

obtenemos

$$x(n+1)=\sum_{j=1}^{k}c_j(n)x_j(n+1).$$

Análogamente, para $i=2,\ldots,k-1$ podemos proceder de forma recursiva obteniendo

$$x(n+i)=\sum_{j=1}^{k}c_j(n)x(n+i). \tag{4.32}$$

Fijamos al igual que antes

$$\sum_{j=1}^{k}\Delta c_j(n)x_j(n+i)=0$$

con $i=1,2,\ldots,k-1$. Por lo tanto, al final obtenemos

$$x(n+k)=\sum_{j=1}^{k}c_j(n)x(n+k)+\sum_{j=1}^{k}\Delta c_j(n)x(n+k). \tag{4.33}$$

Sustituyendo en la ecuación original, donde tomamos $p_0(n)=1$.

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(n)x(n+k-i) = \sum_{i=0}^{k} p_i(n)\left(\sum_{j=1}^{k} c_j(n)x_j(n+k-i) + \sum_{j=1}^{k} \Delta c_j(n)x_j(n+k)\right) = g(n).$$

Ahora bien, como $x_j(n)$ para $j = 1, \ldots, k$ son soluciones de la homogénea, el primer término de la igualdad anterior se anula quedando

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta c_j(n)x_j(n+k) = g(n).$$

Las ecuaciones (4.32) y (4.33) forman un sistema lineal de k ecuaciones con k incógnitas $\Delta c_j(n)$, cuya matriz de coeficientes es el Casoratiano $W(n+1)$. la solución viene dada por

$$\begin{pmatrix} \Delta c_1(n) \\ \Delta c_2(n) \\ \ldots \\ \Delta c_k(n) \end{pmatrix} = W^{-1}(n+1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ g(n) \end{pmatrix}.$$

Denotamos por $M_{ik}(n+1)$ el elemento (i,k) de la matriz adjunta de $W(n+1)$, el sistema anterior se convierte

$$\Delta c_i(n) = \frac{M_{ik}(n+1)}{W(n+1)} g(n).$$

con $i = 1, 2 \ldots, k$, de donde se sigue que

$$c_i(n) = \Delta^{-1} \frac{M_{ik}(n+1)}{W(n+1)} g(n) + \omega_i, \qquad c_i(n_0) = c_i.$$

Sustituyendo los valores de $c_i(n)$ en (4.31) comprobamos que $x(n)$ satisface la ecuación.

A continuación ilustremos el método con un ejemplo.

Ejemplo 6. *Resolvamos la ecuación en diferencias*

$$x(n+2) - 7x(n+1) + 6x(n) = n.$$

En primer lugar, debemos comenzar resolviendo la ecuación homogénea asociada, a saber

$$x(n+2) - 7x(n+1) + x(n) = 0,$$

cuyo polinomio característico es

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6.$$

Resolviendo la ecuación característica pertinente, obtenemos las raíces $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 1$. De esta forma, podemos concluir que la solución para la ecuación homogénea es

$$x_h(n) = c_1 6^n + c_2,$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

Ahora consideramos dichas constantes como funciones de n

$$x(n) = c_1(n)6^n + c_2(n).$$

Por lo descrito en teoría, sabemos que vamos a necesitar el Casoratiano

$$det \begin{pmatrix} 6^{n+1} & 1 \\ 6^{n+2} & 1 \end{pmatrix} = -5 \cdot 6^{n+1}.$$

Luego aplicando las fórmulas pertinentes

$$c_1(n) = \Delta^{-1}\frac{-1}{5\cdot 6^{n+1}}\cdot n + \omega_1.$$

$$c_2(n) = \Delta^{-1}\frac{-1}{5\cdot 6^{n+1}}\cdot n + \omega_2.$$

Veamos cómo actúa Δ^{-1}

$$\Delta^{-1}\frac{-1}{5\cdot 6^{n+1}}\cdot n = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{-i}{5\cdot 6^{i+1}} = \frac{-1}{30}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{6^i} - \frac{n}{6^n}\right) = \frac{-1}{30}\left(\frac{-5(n+1)\frac{1}{6^n} - \frac{1}{6^n} + 6}{25} - \frac{n}{6^n}\right).$$

Para la última igualdad hemos utilizado la relación $\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{(a-1)(n+1)a^{n+1} - a^{n+2} + a}{(a-1)^2}$.

Finalmente, computándolo todo llegamos a la solución final

$$x(n) = \left[\frac{-1}{30}\left(\frac{-5(n+1)\frac{1}{6^n} - \frac{1}{6^n} + 6}{25} - \frac{n}{6^n}\right) + \omega_1\right]6^n + \left[\frac{-1}{30}\left(\frac{-5(n+1)\frac{1}{6^n} - \frac{1}{6^n} + 6}{25} - \frac{n}{6^n}\right) + \omega_2\right].$$

Anexo III: Resultados de análisis complejo

En el presente anexo recogemos un compendio de resultados básicos del análisis complejos de los cuáles hacemos uso a lo largo del trabajo. La totalidad de los resultados se pueden encontrar fácilmente en cualquier manual de análisis complejo como [1], [2] o [12]. Omitiremos las demostraciones pudiéndose encontrar todas en la literatura citada.

Definición 24. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. f se dice holomorfa en Ω si es derivable en todos los puntos de Ω. Se denota por $\mathbb{H}(\Omega)$ el conjunto de fundiones holomorfas en Ω. f se dice entera si $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$.*

Definición 25. *Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$, f se dice analítica en a si existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ con radio de convergencia $R > 0$ de modo que para algún $\delta > 0$ se tiene $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ en $|z-a| < \delta$.*

Se dice analítica en Ω, y se denota $f \in \mathbb{A}(\Omega)$, si lo es en cada punto $a \in \Omega$.

Teorema 33. ***Teorema Fundamental del Álgebra*** *Todo polinomio complejo no constante tiene al menos una raíz.*

Teorema 34. ***Teorema del límite de Abel*** *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiende a $f(1)$ mientras z se acerca a 1 de tal forma que $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ se mantiene acotado.*

Teorema 35. ***Teorema de Rouché***
Supongamos que las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en el interior de un ciclo γ en el plano complejo y que se verifica $|f(z)| > |g(z)|$ para todo $z \in \gamma$. Entonces $f(z)$ y $f(z) + g(z)$ tienen el mismo número de ceros, contando multiplicidades, dentro de γ.

Teorema 36. ***Teorema de Dini*** *Si K es compacto y*

1. *$\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas sobre K.*
2. *$\{f_n\}$ converge puntualmente a una función continua f sobre K.*
3. *$f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ $\forall x \in K$, $n = 1, 2, 3, \dots$*

Entonces $f_n \to f$ uniformemente sobre K.

La siguiente proposición se utiliza en el lema 4

Proposición 2. *La sucesión $(e^{in\theta})$ es divergente, donde su órbita es periódica, presentando varios puntos de acumulación, o bien es densa en $\mathbb{S}^1$. En particular, las sucesiones $(\cos(n\theta))$ y $(\text{sen}(n\theta))$, con $\theta \neq \pi$, también son divergentes.*

Demostración. Sea $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)$.

Supongamos que $e^{in\theta} = e^{im\theta}$ para algunos $n,\ m,\ n \geq m$. Entonces $e^{i(n-m)\theta} = 1$, lo que implica que

$$(n-m)\theta = \hat{q}2\pi, \tag{4.34}$$

para algún $\hat{q} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

CASO A Si $\theta = \frac{p}{q}\pi$ para algunos $p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ p \neq 0$, entonces

$$(n-m)\frac{p}{q}\pi = \hat{q}2\pi.$$

para algún $\hat{q} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En ese caso, $e^{i2q\pi} = e^{i2\pi p} = 1$, de donde se deduce que la órbita $(e^{in\theta})_{n\geq 0}$ es periódica con periodo mayor que 1. Esto significa que hay varios puntos de acumulación y, por ende, la sucesión $(e^{in\theta})_n$ es divergente. De esta forma, lo mismo puede decirse de $(\cos(n\theta))$ y $(\text{sen}(n\theta))$.

CASO B Si $\theta \neq \frac{p}{q}\pi$ (θ y π son inconmesurables), de (4.34) se deduce que $n = m$, $\hat{q} = 0$, es decir, todos los puntos de la órbita $(e^{in\theta})_n$ son distintos; en esta situación, afirmamos que $(e^{in\theta})$ es densa en

$\mathbb{S}^1$.

En efecto, si consideramos en $\mathbb{S}^1$ la métrica dada por

$$d(e^{i\mu}, e^{i\sigma}) = \frac{1}{2\pi} \cdot l = \frac{1}{2\pi} 2\pi|\mu - \sigma| = |\mu - \sigma|,$$

con $\sigma, \mu \in [0, 2\pi)$, y donde l denota la longitud de la circunferencia unidad.

Dado $\epsilon > 0$ y dado un punto $e^{i\sigma}$, fijamos un entorno $W = W(e^{i\sigma})$ centrado en $e^{i\sigma}$ de longitud menor que ϵ.

Por otra parte, como $(e^{in\theta})_n$ es un conjunto infinito en un compacto, sabemos que existe una subsucesión convergente

$$e^{in_j\theta} \xrightarrow{j\to\infty} e^{i\alpha}.$$

Así existen al menos dos elementos $e^{in_{j_1}\theta}$ y $e^{in_{j_2}\theta}$ en $U = U(e^{i\alpha})$ donde U es un entorno centrado en $e^{i\alpha}$ de longitud menor que $\frac{\epsilon}{2}$.

Sea $T(z) = ze^{i\theta},\ z \in \mathbb{S}^1$. Como $T(U)$ es un entorno de $T(\alpha)$ con la misma longitud de arco (T es una traslación) y debido a que la propiedad arquimediana nos asegura que existe m_0 con $(m_0-1)\epsilon \leq 2\pi \leq m_0\epsilon$, los entornos $\{U, T(U), T^2(U), \dots\}$ cubren todo $\mathbb{S}^1$. En particular, es sencillo demostrar que existe una iterada N tal que $T^N(U) \subset W$, ya que $T^N(u)$ tiene lingitud $\frac{\epsilon}{2}$ y W tiene longitud ϵ.

En particular, $T^N(e^{in_{j_1}\theta})$, $T^N(e^{in_{j_2}\theta}) \in W$, luego

$$e^{i(N+n_{j_1})\theta},\ e^{i(N+n_{j_1})\theta} \in W.$$

Hemos probado que dado cualquier punto $e^{i\sigma}$ y cualquier entorno suyo verifican

$$(e^{in\theta})_n \cap W \neq 0,$$

es decir, $(e^{in\theta})_n$ es denso en $\mathbb{S}^1$. Por tanto

$$\overline{\{e^{in\theta} : n \in \mathbb{N}\}} = \mathbb{S}^1.$$

En conclusión, de ambos casos A y B se deduce que $(e^{in\theta})_n$ es divergente, $\theta \in [0, 2\pi)$. Además, si $\theta \neq \pi$, también entonces $(\cos(n\theta))$ y $(\mathrm{sen}(n\theta))$ son divergentes.

$\square$

Bibliografía

[1] Ahlfors, L.V., *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Second Edition, New York, 1966.

[2] Apostol, T.M., *Análisis Matemático*, Reverté, Barcelona, 1976.

[3] Bibby, J., *Axiomatisations of the average and a further generalisation of monotonic sequences*, Glasgow Math. J. **15** (1974) 63-65.

[4] Borwein, D., *Convergence criteria for bounded sequences*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **18** (1972), 99-103.

[5] Copson, E.T., *On a generalisation of monotonic sequences*, Proc. Eedinburgh Math. Soc. **17** (1970), 159-164.

[6] Elaydi, S., *An introduction to difference equations*, Springer, New York, 2005.

[7] Iričanin, B.D., *A global convergence result for a higher order difference equation*, Discrete dynamics in Nature and Society, (2007) 1-7.

[8] Kečkić, J.D., *A remark on a generalization of monotonic sequences*, Publ. Inst. Math., Beograd **16** (30) (1973) 85-89.

[9] Kelley, W.G., Peterson, A.C., *Difference equations : an introduction with applications*, Academic Press, San Diego, 1991.

[10] Markushevich, A. *Teoría de las funciones analíticas*, MIR, Moscú, 1970.

[11] Ramírez Alfonsín, J.L., *The diophantine Frobenius problem*, Oxford Lectures Series in Mathematics 30, Oxford University Press, Oxford, UK, 2005.

[12] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1964.

[13] Stević, S., *A note on bounded sequences satisfying linear inequalities*, Indian J. Math. **43** (2001), 223-230.

[14] Stević, S., *A note on bounded sequences satisfying linear nonhomogeneous difference equation*, Indian J. Math **45** (2003), 357-367.

[15] Stević, S., *A generalization of the Copson's theorem concerning sequences which satisfy a linear inequality*, Indian J. Math. **43** (2001), 3, 277-282.

[16] Stević, S., *A global convergence result*, Indian J. Math. **44** (2002), 361-368.

[17] Stević, S., *On sequences which satisfy a nonlinear inequality*, Indian J. of Mathematics, **45** (2003), 105-116.

[18] Tan, K.K., Xu, H.K., *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process*, J. Math. Anal. Appl. 178 (1993) 301-308.

[19] Vranceanu, G.G., *Some remarks on Copson's generalization of monotonic sequences*, Roum. Math. Pures et Appl., **26** 2 (1979) 319-324.

[20] Wiener, N., *Tauberian Theorems*, Annals Math. 33 (1932), 1-100.

[21] Zygmund, A., *Trigonometric Series*, Vol. 1, Cambridge, 1959.