Construcciones con regla y compás

Autor: Miguel Navarro Agüera
Tutor: Manuel Saorín Castaño

Índice

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS I: LOS TRES PROBLEMAS CLÁSICOS

1 Introduction

The purpose of this paper is to discuss some of the problems that the book of the Elements of Euclid (300 BC, C) already contained in the History of Mathematics. An Egyptian document was found on the quadrature of the circle of 1650 a. C (they constructed a square of side 8/9 of the diameter, which gave an approximation of π of 3,16) and was not solved until 1882 with the demonstration of the transcendence of Lindemann π. The other three problems did not take much less time to resolve.
The three classic problems, called délicos, are the quadrature of the circle, the duplication of the cube and the trisection of the angle. Another problem related intrinsically to these is the construction of the regular polygon of n sides.
I will explain below what these problems are:

i) The squaring of the circle consists of building with a ruler and compass a square with the same area as a given circle.
ii) The duplication of the cube consists of constructing with rule and compass the edge of a cube whose volume is twice the volume of a given cube.
iii) The trisection of the angle consists in constructing with the ruler and compass the half-lines that divide an angle into three equal angles.

The problem of regular polygons is to construct with rule and compass for each $n > 2$ a regular polygon of n sides.

Why rule and compass?
-They are the tools with which to construct the simplest curves, which are the straight lines and the circumferences.
-The influence of Plato, who believed that they were the only ones capable of respecting the configuration of symmetry.
-The Pythagoreans knew only rational numbers, and when they used the Pythagorean theorem to construct an isosceles right triangle, they realized that there were numbers that could not be put into a fraction.

Introducción

El objetivo de este trabajo es hablar de algunos problemas que ya recogía el libro de los Elementos de Euclides (300 a, C), y que han estado presentes a lo largo de la Historia en las Matemáticas. Se encontró un documento egipcio sobre la cuadratura del círculo de 1650 a. C (ellos construían un cuadrado de lado 8/9 del diámetro, lo que daba una aproximación de π de 3,16) y no se resolvió hasta 1882 con la demostración de la trascendencia de π de Lindemann. Los otros tres problemas no tardaron mucho menos tiempo en resolverse.

Los tres problemas clásicos, llamados délicos, son la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. Otro problema relacionado intrínsecamente a estos es la construcción del polígono regular de n lados.

A continuación explicaré en qué consisten estos problemas:

i) La cuadratura del círculo consiste en construir con regla y compás un cuadrado con la misma área que un círculo dado.

ii) La duplicación del cubo consiste en construir con regla y compás la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen de un cubo dado.

iii) La trisección del ángulo consiste en construir con regla y compás las semirrectas que dividen un ángulo en tres ángulos iguales.

El problema de los polígonos regulares consiste en construir con regla y compás para cada $n>2$ un polígono regular de n lados.

¿Por qué regla y compás?

-Son los instrumentos con los que construir las curvas más sencillas, que son las rectas y las circunferencias.

-La influencia de Platón, que creía que eran los únicos capaces de respetar la configuración de simetría.

-Los pitagóricos sólo conocían los números racionales, y cuando usaron el teorema de Pitágoras al construir un triángulo rectángulo isósceles, se dieron cuenta de que existían números que no se podían poner en forma de fracción.

2 El cuerpo de los puntos constructibles y el teorema de Wantzel

Se partirá de un conjunto B de puntos, los correspondientes a los datos conocidos, y a partir de ellos se irán obteniendo nuevos puntos utilizando dos tipos de construcciones, para las cuales nos valdremos sólo de una regla y un compás:

A) Trazar la recta que pasa por dos de los puntos.

B) Trazar con compás la circunferencia centrada en uno de los puntos y con radio la distancia entre dos de ellos.

Los nuevos puntos se obtendrán como intersección de las rectas y las circunferencias construidas de esta forma a partir de los puntos iniciales de B y de los que previamente se hayan obtenido a partir de éstos.

Definición 2.1 Sea $\mathbb{R}^2$ el plano euclídeo real y B un conjunto finito de puntos de $\mathbb{R}^2$ con al menos dos puntos. Un punto P de $\mathbb{R}^2$ se dice constructible con regla y compás a partir del conjunto B si existe una sucesión finita de puntos $P_1, P_2, \dots P_n = P$ tal que si denotamos E_1 = B y, para 2 ≤ i ≤ n, E_i = B U $\{P_1, P_2, \dots P_n\}$, entonces P_i se obtiene como intersección de:

-Dos rectas que pasan por dos puntos de E_i.

-Una recta que pasa por dos puntos de E_i y una circunferencia de centro un punto de E_i y radio la distancia entre dos puntos de E_i.

-Dos circunferencias de centros puntos de E_i y radios la distancia entre dos puntos de E_i.

Una recta que pasa por dos puntos constructibles se denomina recta constructible a partir de B y una circunferencia con centro un punto constructible y radio la distancia entre dos puntos constructibles se denomina circunferencia constructible a partir de B.

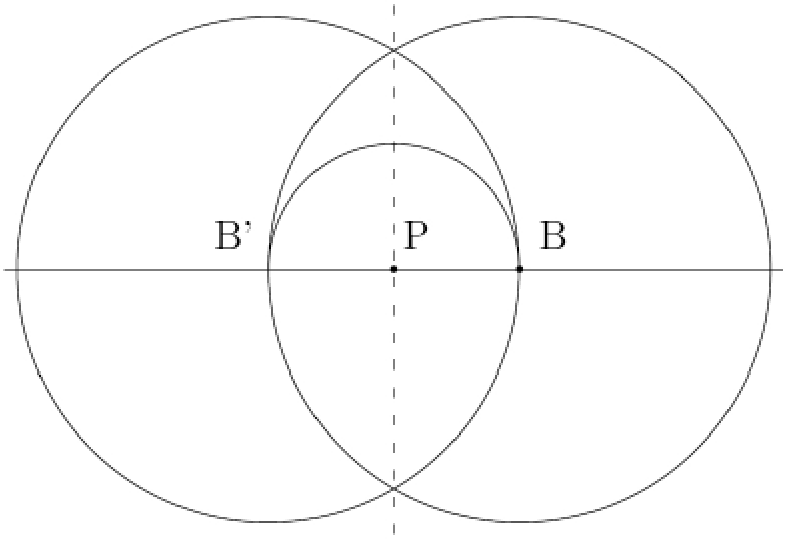
El hecho de que una recta o una circunferencia sea constructible a partir de un conjunto B no significa que sean constructibles todos y cada uno de sus puntos, sólo lo son aquellos que son intersección de este tipo de rectas o circunferencias.

En adelante, el conjunto B será el más sencillo posible, un conjunto con tan sólo dos puntos {O, I}, lo que históricamente corresponde a fijar una unidad de medida. A los puntos constructibles a partir de este conjunto B se les denominará simplemente como puntos constructibles, sin necesidad de hacer mención expresa del conjunto B.

El siguiente resultado nos será de utilidad en el desarrollo de este tema.

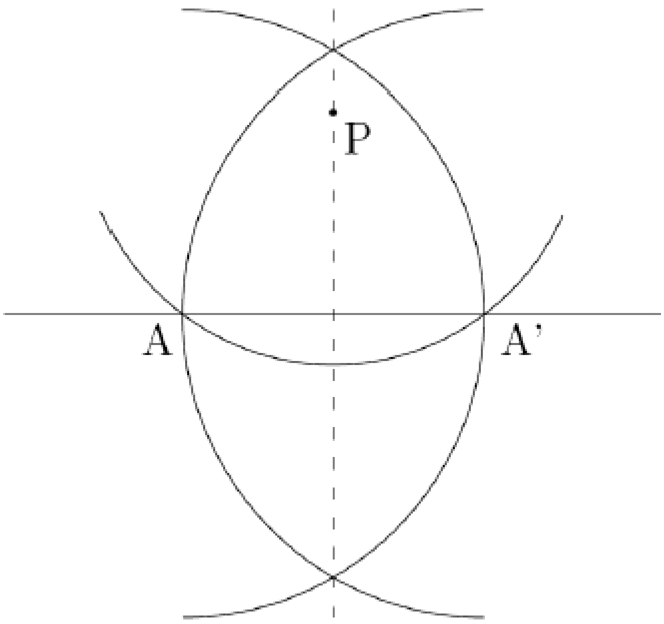
Proposición 3.2 La recta perpendicular a una recta constructible por un punto constructible es constructible.

Demostración. Sea P un punto constructible y r una recta constructible. Por ser r constructible, pasará por dos puntos constructibles: A y B. Si P es un punto de r, se puede suponer que es distinto de B y, entonces, la circunferencia de centro P y radio PB cortará a r en B y en otro punto constructible, B’. Las circunferencias centradas en B y B’ de radio BB’ se cortarán en dos puntos que serán constructibles.



La recta que une estos dos puntos es una recta constructible que es perpendicular a r y pasa por P.

Si $P \notin r$ y se considera la circunferencia de centro P y radio AP, puede ocurrir que dicha circunferencia corte a r en un único punto (necesariamente A), en cuyo caso, como la circunferencia es tangente a r, la recta AP es la perpendicular buscada. En caso contrario, la circunferencia cortará a r en dos puntos distintos, uno de ellos necesariamente A y el otro A' constructible.



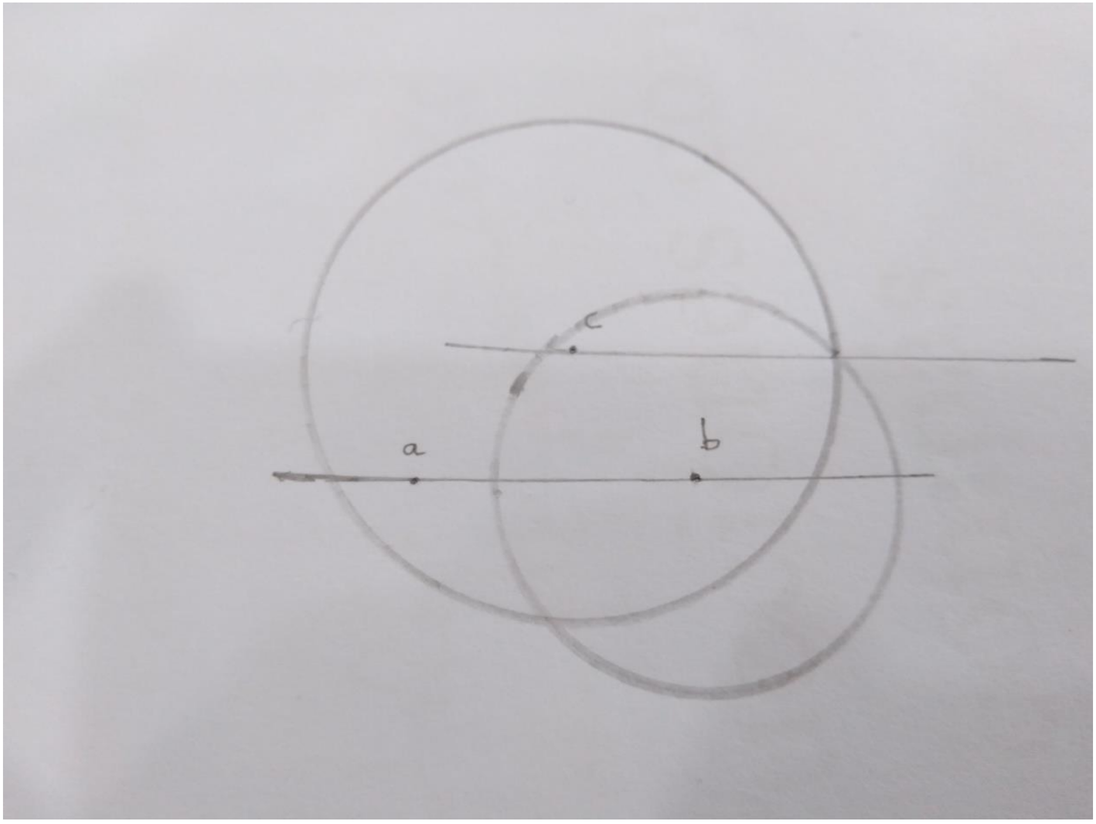
En esta situación, las circunferencias de centros A y A' y radio AA', al igual que en primer caso, se cortarán en dos puntos constructibles que determinan la recta perpendicular a r por P. ■

Utilizando razonamientos análogos a los anteriores, se pueden obtener los resultados siguientes:
Proposición 3.3 Se verifican las siguientes propiedades:
i) La paralela a una recta constructible por un punto constructible es constructible.

ii) La mediatriz y el punto medio de dos puntos constructibles son constructibles.
iii) La bisectriz del ángulo formado por dos rectas constructibles es constructible.

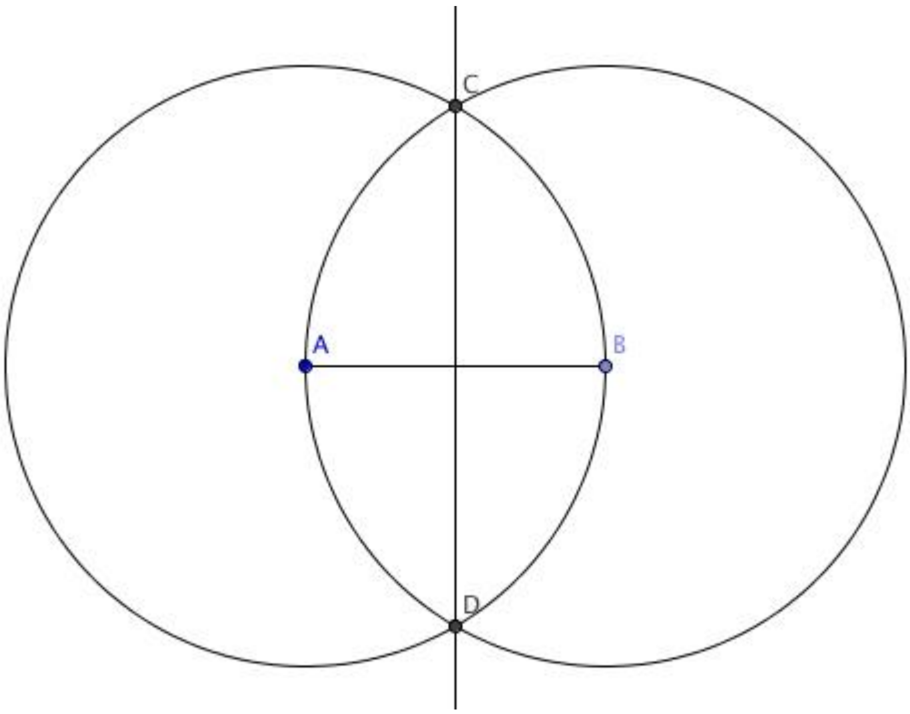
i) Paralela a una recta dada [4]

Para esta construcción utilizaremos tres puntos no alineados {a, b, c}. Trazamos la recta que pasa por a y b. Después trazamos un arco de la circunferencia de centro c y radio la distancia entre a y b y otro arco de circunferencia de centro b y radio la distancia entre a y c. Acabamos de construir otro punto: el punto de corte de los dos arcos de circunferencia. Trazando ahora la recta que pasa por ese punto y por c obtenemos la paralela buscada.



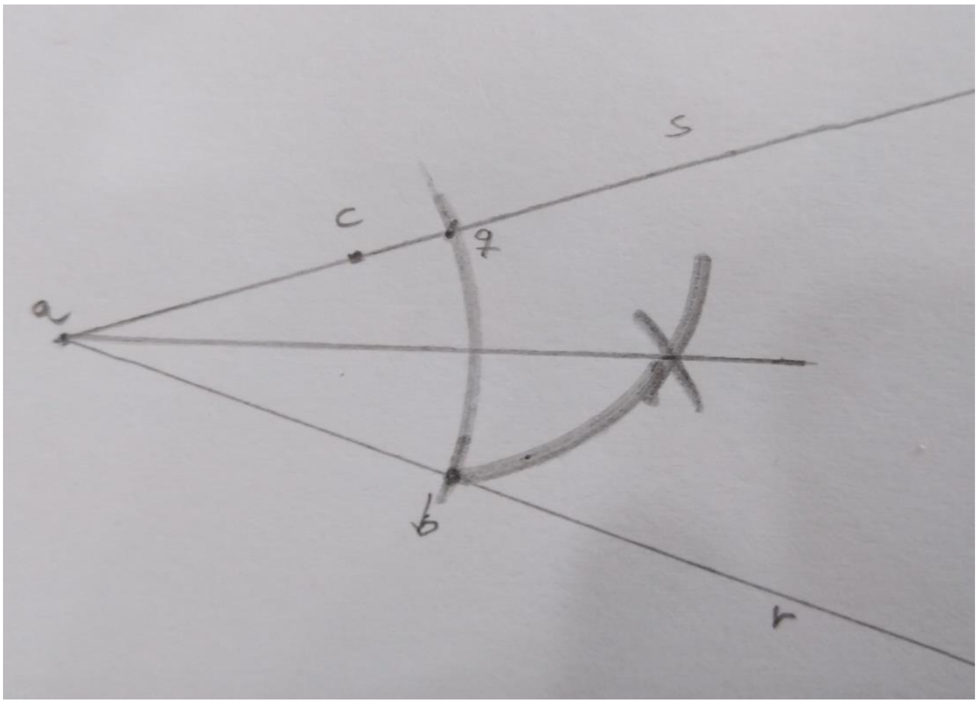
ii) Mediatriz de un segmento

A partir de dos puntos {A, B} podemos construir el segmento que los une. Pinchamos ahora con el compás en A y trazamos una circunferencia tomando como radio la distancia entre A y B. Después pinchamos en B y trazamos otra circunferencia cuyo radio es la misma distancia anterior. De esta forma hemos construido dos nuevos puntos, los dos puntos donde se cortan las dos circunferencias (C y D). Uniendo esos dos puntos obtenemos la mediatriz del segmento inicial



iii) Bisectriz de un ángulo

Para esta construcción utilizaremos tres puntos no alineados {a, b, c}. Trazamos las rectas por las que pasan a y b (recta r) y a y c (recta s). Con centro en a y radio la distancia entre a y b trazamos un arco de circunferencia que corte a la recta s, obteniendo el punto q. Ahora trazamos un arco de circunferencia con centro q y radio la distancia entre q y b y otro arco con centro en b y radio la misma distancia. Esos dos arcos se cortan en un punto. Trazamos la recta que une ese punto con a y obtenemos la bisectriz del ángulo formado por a, b, c. ■

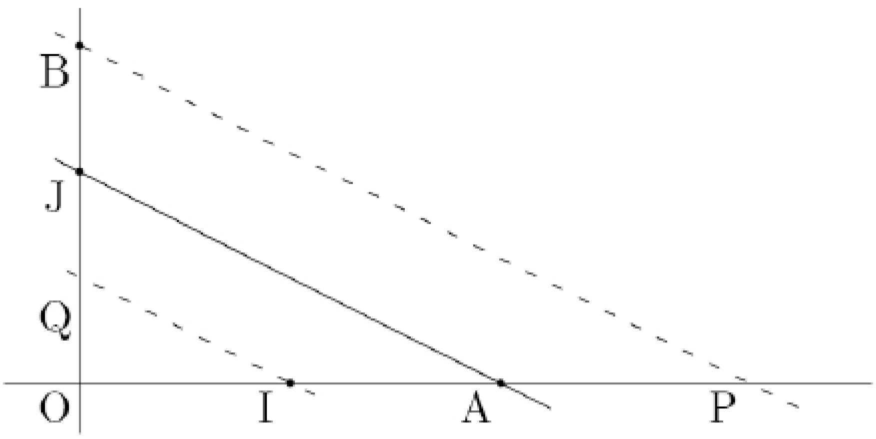


[2] En base a lo anterior, se está en condiciones de afirmar que existe un punto J constructible tal que {O, OI, OJ} es un sistema de referencia ortonormal del plano $\mathbb{R}^2$. Se puede, ahora, introducir el concepto que relaciona los problemas clásicos de construcciones con regla y compás con la teoría de extensiones de cuerpos: el de número constructible.

Definición 3.4 Un número real r se dice constructible si el punto (r, 0) (o equivalentemente (0,r)), con respecto al referencial {O,OI,OJ} es constructible.
Como consecuencia de la constructibilidad con regla y compás de paralelas y perpendiculares se tiene el siguiente resultado:

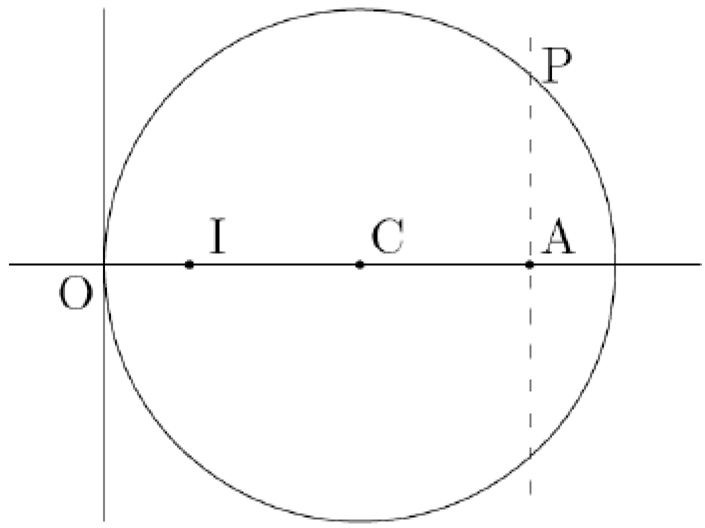
Proposición 3.5 Un punto P de coordenadas (r, s), con respecto al referencial {O, OI, OJ}, es constructible si y sólo si los números reales r y s son constructibles.

Teorema 3.6 El conjunto de los números reales constructibles es un subcuerpo C de $\mathbb{R}$ cerrado para raíces cuadradas de números reales positivos.
Demostración. Es evidente que 0,1 ∈ C. Es fácil probar que, si a, b ∈ C, entonces –a, -b, a+b, a-b ∈ C. La recta que une J(0,1) con A(a,0) es constructible y la recta paralela a ella que pasa por B(0,b) corta a la recta OI en el punto P(ab,0) por lo que ab ∈ C.
Además, si a ≠ 0, la paralela a la recta anterior que pasa por I(1,0) corta a la recta OJ en el punto Q(0,1/a) por lo que 1/a ∈ C. Es decir, C es un subcuerpo de $\mathbb{R}$.



Construcción del producto y el inverso

Veamos que C es cerrado para raíces cuadradas de números reales positivos. Si r ∈ $\mathbb{R}^+ \cup$ C, el punto (r + 1, 0) es constructible y, por tanto, lo es también la circunferencia de centro C($\frac{r+1}{2}$, 0) y radio OC = $\frac{r+1}{2}$.
La recta perpendicular a OI que pasa por A(r, 0) es, por tanto, constructible y, además, corta a dicha circunferencia en el punto P(r, $\sqrt{r}$), por lo que $\sqrt{r}$ ∈ C. ■



Construcción de la raíz cuadrada

Utilizando la ecuación de la recta determinada por dos puntos y la ecuación de la circunferencia centrada en un punto dado y de radio la distancia entre dos puntos conocidos, es inmediato probar el resultado siguiente:

Proposición 3.7 Sean C(a, b), $A_1(a_1,b_1)$ y $A_2(a_2,b_2)$ puntos del plano real, tales que $A_1 \neq A_2$. La recta determinada por A_1 y A_2 tiene una ecuación de la forma px + qy + s = 0 con p, q, s ∈ $\mathbb{Q}(a_1,a_2,b_1,b_2)$.
La circunferencia de centro C y radio A_1A_2 tiene una ecuación de la forma x^2 +y^2 -2px -2qy + s=0 con p, q, s ∈ $\mathbb{Q}$(a, b, a_1,a_2,b_1,b_2).

Teorema 3.8 (Wantzel, 1837) El número real r es constructible si y sólo si existe un entero n ≥ 1 y subcuerpos $L_1,L_2,\ldots L_n$ de $\mathbb{R}$ tales que:
i) $L_1 = \mathbb{Q}$
ii) r $\in L_n$
iii) $L_i \subset L_{i+1}$con [L_{i+1}: L_i] = 1 ó 2 para 1 ≤ i ≤ n + 1.
Demostración. Sea r ∈ $\mathbb{R}$ constructible. Entonces también lo es el punto P(r, 0) y, por tanto, existen puntos $P_1,P_2,\ldots P_n$ = P constructibles con P_1 = O y P_2 = I y tales que cada uno de ellos se ha obtenido de los anteriores por algunos de los métodos indicados.
Supongamos que $P_i(a_i,b_i)$ y sea L_i = $\mathbb{Q}$ $(a_1,a_2,b_1,b_2,\ldots,a_i,b_i)$. Se tiene que L_1 = L_2 = $\mathbb{Q}$,
$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n \subset \mathbb{R}$ y r = $a_n \in L_n$.
Para probar que [L_{i+1}: L_i] = 1 ó 2 procederemos por inducción en i. Es evidente que [L_2 : L_1] = 1.
Supongamos que i ≥ 2 y [L_i: L_{i-1}] = 1 ó 2.
Si P_{i+1} se obtiene como intersección de dos rectas que pasan por dos pares de puntos diferentes del conjunto $\{P_1,P_2,\ldots P_i\}$, entonces las ecuaciones de las rectas serán de la forma
px + qy + s = 0
p’x + q’y + s’ = 0 con p,q,s,p’,q’,s’ $\in L_i$

por lo que $a_{i+1}, b_{i+1} \in L_i$ y por tanto $L_{i+1} = L_i$ y $[L_{i+1} : L_i] = 1$.
Si P_{i+1} se obtiene como intersección de una recta que pasa por dos puntos distintos del conjunto $\{P_1, P_2, ... P_i\}$ y una circunferencia de centro uno de estos puntos y radio el determinado por dos de ellos distintos, entonces las ecuaciones de tales recta y circunferencia serían de la forma
px + qy + s = 0
$x^2 + y^2$ – 2p'x – 2q'y + s' = 0 con p,q,s,p',q',s' $\in L_i$
Se puede suponer que q $\neq$ 0, por lo que $b_{i+1} = -\frac{pa_{i+1}+s}{q}$ y sustituyendo en la ecuación de la circunferencia se obtiene que a_{i+1} es raíz de una ecuación de segundo grado con coeficientes en L_i, por lo que $[L_{i+1} : L_i]$ = 1 ó 2.
Si P_{i+1} se obtiene como intersección de dos circunferencias centradas en puntos de $\{P_1, P_2, ... P_i\}$ y radios determinados por dos de estos puntos, entonces las ecuaciones de tales circunferencias serían de la forma
$x^2 + y^2$ - 2px - 2qy + s = 0
$x^2 + y^2$ - 2p'x -2q'y + s' = 0 con p,q,s,p',q',s' $\in L_i$
este sistema es equivalente a
$x^2 + y^2$ -2p'x -2q'y + s' = 0
2(p'-p) x + 2(q'-q) y + (s'-s) = 0 con p,q,s,p',q',s' $\in L_i$
y, de forma análoga al caso anterior, se obtiene que $[L_{i+1} : L_i]$ = 1 ó 2.
Recíprocamente, sea r ∈ R tal que existe una sucesión de subcuerpos de ℝ que verifican
$\mathbb{Q} = L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n$; con r $\in L_n$ y $[L_{i+1} : L_i]$ = 1 ó 2. Se probará por inducción que $L_i \subset$ C.
Para i = 1, $L_1 = \mathbb{Q} \subset$ C. Sea i ≥ 1 y supongamos que $L_i \subset$ C. Si $[L_{i+1} : L_i] = 1$, $L_{i+1} = L_i \subset$ C.
Si $[L_{i+1} : L_i]$ = 2 y p $\in L_{i+1}$, como $\{1, p, p^2\}$ son linealmente dependientes sobre L_i, p es raíz de un polinomio de grado a lo más dos con coeficientes en L_i. Si Irr(p, L_i) es de grado uno, entonces p$\in L_i$ y por tanto p está en C, y si Irr(p, L_i) es de grado dos, p se obtiene a partir de las operaciones de L_i y raíces cuadradas de elementos de L_i (de números reales no negativos ya que p $\in L_{i+1} \subset \mathbb{R}$); pero como $L_i \subset$ C y C es cerrado para raíces cuadradas, p ∈ C. ■

Como consecuencia del teorema de Wantzel y la fórmula de los grados se deduce el resultado siguiente.

Corolario 3.9 (Criterio de Wantzel) Si un número real r es constructible, entonces r es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ y $[\mathbb{Q}(r) : \mathbb{Q}]$ es una potencia de dos.

El recíproco del criterio de Wantzel es, en general, falso. Como prueba, consideramos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.10 El polinomio $X^4 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible puesto que $X^4 - X - 1$ lo es en $Z_2[X]$. Dado que los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[X]$ son de grado uno o dos, este polinomio, considerado como polinomio en $\mathbb{R}[X]$, se podrá expresar como
$X^4 - X - 1 = (X^2 + aX + b)(X^2 + a'X + b')$ con $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$
por lo que

$$a + a' = 0$$
$$b + b' + aa' = 0$$
$$ab' + a'b = -1$$
$$bb' = -1$$

de donde $a' = -a$ y, como $bb' = -1$ y $b + b' = a^2$, b y b'son raíces del polinomio $T^2 - a^2T - 1 \in \mathbb{R}[X]$.
Puesto que a y a' son opuestos, se puede suponer que $a > 0$, con lo que $a(b' - b) = -1$ y se deduce que $b' < b$ y en consecuencia

$$b = \frac{a^2 + \sqrt{a^4 + 4}}{2} \ y \ b' = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 + 4}}{2}$$

de donde $b' - b = -\sqrt{a^4 + 4}$ y por tanto $a\sqrt{a^4 + 4} = 1$.
Por otra parte, el discriminante de $X^2 + aX + b$ es

$$\Delta_1 = a^2 - 4b = a^2 - 2\left(a^2 + \sqrt{a^4 + 4}\right) = -a^2 - 2\sqrt{a^4 + 4} < 0$$

por lo que las dos raíces de $X^2 + aX + b$ son complejas.
En cambio, el discriminante de $X^2 + a'X + b'$ es

$$\Delta_1 = a'^2 - 4b' = a^2 - 2\left(a^2 - \sqrt{a^4 + 4}\right) = -a^2 + 2\sqrt{a^4 + 4} > 0$$

por lo que $X^2 + a'X + b'$ tiene dos raíces reales α y β , que verifican $\alpha + \beta = -a' = a$.
Como $a\sqrt{a^4 + 4} = a(b - b') = 1$ se tiene que $a^2(a^4 + 4) = 1$ y a^2es raíz del polinomio $T^3 + 4T - 1 \in \mathbb{Q}[X]$
que es irreducible porque ni 1 ni -1 son raíces del polinomio; por tanto, aplicando el criterio de Wantzel, se tiene que a^2 no es constructible y en consecuencia a tampoco lo es. Como $\alpha + \beta = a$, ó α ó β no es constructible aunque se tiene que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 4$ porque $Irr(\alpha, \mathbb{Q}) = X^4 - X - 1 = Irr(\alpha, \mathbb{Q})$

Proposición 3.10 C es el menor subcuerpo de R cerrado para raíces cuadradas.
Demostración. Sea K un subcuerpo de R cerrado para raíces cuadradas. Si a ∈ C, por el teorema de Wantzel, existe una torre de extensiones de grado uno o dos

$$\mathbb{Q} = L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n \text{ con } a \in L_n:$$

Se demostrara, por inducción en i, que $L_i \subset K$, con lo que $L_n \subset K$ y se obtendría que a ∈ K y que C ⊂ K.
$L_1 = \mathbb{Q} \subset K$. Sea i > 1 y $L_{i-1} \subset K$. Si $[L_i : L] = 1$, entonces $L_i = L_{i-1} \subset K$.
Si $[L_i : L_{i-1}] = 2$ todo elemento de $L_i \setminus L_{i-1}$ es raíz de un polinomio irreducible de $L_{i-1}[X]$ de grado dos, cuyo discriminante Δ es positivo ya que $L_i \subset R$; pero como $\Delta \in L_{i-1} \subset K$ y K es cerrado para raíces cuadradas, resulta que $\sqrt{\Delta} \in K$ y, por tanto, las raíces de dicho polinomio pertenecen a K y se deduce que $L_i \subset K$. ■

Trascendencia de π [5]:
Lindemann demostró en 1882 la trascendencia de π sobre el cuerpo ℚ, quedando así demostrada, entre otras, la imposibilidad de la cuadratura del círculo.
Lema 3.11 Sea $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \mathbb{Z}$ tal que $P(0) \neq 0$. Entonces

$$A = \sum_{P(\alpha)=0} e^{\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^*$$

Demostración Se halla completa en la página 193, en el capítulo 11 de [5]. ■

Teorema 3.12(de Lindemann) El número real π es trascendente sobre ℚ
Demostración. Supongamos que π es algebraico sobre ℚ, Entonces πi también lo es. Llamamos P al polinomio irreducible minimal de πi sobre ℚ. Las raíces de P en ℂ son simples, porque en característica nula todas las raíces de un polinomio irreducible son simples. Llamamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ a

dichas raíces. El cuerpo K= $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es el cuerpo de descomposición de P sobre $\mathbb{C}$, y la extensión $\mathbb{Q} \subset$ K es de Galois.

Tenemos que $1 + e^{\pi i} = 0$. Y resulta que

$(1 + e^{\alpha_1}) \ldots (1 + e^{\alpha_n}) = 0,$ porque podemos tomar, por ejemplo, $\alpha_1 = \pi i$.

Si desarrollamos esta expresión, obtenemos

$$\sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}} \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \alpha_j \right) = 0$$

Tomamos ahora $R(X) = \prod_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}} (X - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \alpha_j) \in$ K[X]

El grupo Gal(K/ $\mathbb{Q}$) opera en todas las sumas de la forma $\varepsilon_1 \alpha_1 + \ldots + \varepsilon_n \alpha_n$, con $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$. Dado $\sigma \in$ Gal(K/$\mathbb{Q}$), si llamamos σ' a la extensión de σ en K[X] tenemos σ'(R) = R. Al ser la extensión $\mathbb{Q} \subset$ K de Galois, deducimos que R $\in \mathbb{Q}$[X]. Por consiguiente, $\exists$ m $\in \mathbb{N}^*$ tal que mR $\in \mathbb{Z}[X]$.

Sea q $\in \mathbb{N}^*$ el orden de la raíz 0 de R y S $\in \mathbb{Z}[X]$ tal que R(X) $= X^q S(X)$. Tenemos $S(0) \neq 0$ y

$0 = \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}} \exp(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \alpha_j) = q + \sum_{S(\alpha)=0} e^{\alpha}$.

Esto contradice el lema anterior. Por lo tanto, π es trascendente sobre $\mathbb{Q}$. ■

3. Respuesta negativa a los tres problemas clásicos[2]

Duplicación del cubo. Si se supone el cubo inicial de lado 1, se tratará de ver si el número real r tal que $r^3 = 2$ es constructible. Como Irr($\sqrt[3]{2}$, $\mathbb{Q}$) = $X^3 - 2$, aplicando el criterio de Wantzel, se sabe que r no es constructible.

Trisección del ángulo. Sea $\alpha = \pi/3$; como $\cos(\pi/3)$ = 1/2, el ángulo α es constructible y evidentemente $\alpha/3$ será constructible si y sólo si $\cos(\alpha/3)$ es constructible.
Como *cos(3x) = $4cos^3$(x) - 3cos(x), para $\alpha = \pi/3$ se obtiene que $\cos(\alpha/3)$ es raíz del polinomio $4X^3 - 3X - 1/2 \in \mathbb{Q}[X]$ que es un polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$, por lo que $[\mathbb{Q}(\cos(\alpha/3)) : \mathbb{Q}] = 3$ y de nuevo, por el criterio de Wantzel, $\cos(\alpha/3)$ no es constructible.

Cuadratura del círculo. Supóngase que el círculo tiene radio 1; se tratará de construir con regla y compás un número real r tal que $r^2 = \pi$. Si $\sqrt{\pi}$ fuese constructible lo sería π y, por el criterio de Wantzel, π sería algebraico sobre $\mathbb{Q}$; pero el teorema de Lindemann demuestra que π es trascendente sobre $\mathbb{Q}$.

*cos(x+y) = cos(x)cos(y) – sen(x)sen(y)
sen(2x) = 2sen(x)cos(x)
cos(3x) = cos(2x+x) = cos(2x)cos(x) – sen(2x)sen(x) = (cos^2(x) - sen^2(x))cos(x) –2sen^2(x)cos(x)=
$= cos^3(x) - sen^2(x)\cos(x) - 2(1 - cos^2(x))\cos(x) = cos^3(x) - (1 - cos^2(x))\cos(x) - 2\cos(x) + 2cos^3(x) = 4cos^3(x) - 3\cos(x)$

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS II: POLÍGONOS REGULARES

4. Construcción de polinomios regulares. Teorema de Gauss –Wantzel

4.1 Numeros de Fermat [5]:

Antes de continuar, definiremos unos números muy interesantes.

Definición 4.1[2] Para $n \in \mathbb{N}$, Se llama número de Fermat de índice n a F(n) = 2^{2^n}+1. Si F(n) es primo se dice que es un primo de Fermat.

Los números de Fermat transmiten una curiosidad asombrosa. Si bien Fermat lanzó la hipótesis de que todos eran primos, basándose en que es cierto para n≤5, ahora la conjetura es otra. Asombrosamente existe la hipótesis contraria, es decir, esos son los únicos números de Fermat que son primos, habiendo comprobado hasta n=19.

Estas son algunas de las propiedades de dichos números:

1.- $F_0 \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_{n-1} = F_n - 2$

2.- Ningún número de Fermat puede ser suma de dos números primos

3.- Dos números de Fermat son siempre primos entre sí

Lema 4.2 Sea $m \in \mathbb{N}^*$. Si el entero $2^m + 1$ es primo, m es una potencia de 2 y, por tanto, $2^m + 1$ es un primo de Fermat

Demostración. Todo entero $m \in \mathbb{N}^*$ se escribe de forma única como $m = 2^q(2r+1)$, con $q.r \in \mathbb{N}$. Supongamos que r ≥ 1, es decir, que m no es una potencia de 2. Escribimos $s = 2^{2^q}$,

$$2^m + 1 = s^{2r+1} + 1 = (s+1)\sum_{i=0}^{2r}(-1)^i s^{2r-i}$$

Tenemos $2 < s+1$ y $s+1 < 2^m + 1$, donde $r \geq 1$. Por lo tanto, $2^m + 1$ no es primo. ■

Proposición 4.3[3]: Si $m, n \in \mathbb{N}$ son distintos, los números de Fermat $F(m)$ y $F(n)$ son primos entre ellos.

Demostración. Podemos suponer $n = m + q$ con $q \in \mathbb{N}^*$. Entonces

$$F(n) = 2^{2^{m+q}} + 1 = (F(m) - 1)^{2^q} + 1$$

Como q ≥ 1, 2^q es par. De acuerdo con la fórmula del binomio, $\exists s \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(F(m) - 1)^{2^q} = sF(m) + 1$$

Tenemos así $F(n) = sF(m) + 2$, lo que prueba que todo divisor común a $F(n)$ y $F(m)$ es divisible por 2. Como $F(n)$ es impar, hemos obtenido el resultado. ■

4.2 Función de Euler[2]:

Definición 4.4 Se denomina función de Euler a la aplicación ϕ: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que a cada entero positivo n asocia el número de enteros positivos r tales que 1 ≤ r < n y (r, n) = 1.

[12] Se sigue de la definición que $\phi(1) = 1$, y para los demás números se tiene:

- $\phi(p) = \text{p} - 1$ si p es primo.
- $\phi(p^k) = (\text{p} - 1)p^{k-1}$ si p es primo y k es un número entero positivo.
- si m y n son primos entre sí, entonces $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$.

De todo esto, si n se descompone como n = ${p_1}^{k_1} \dots {p_r}^{k_r}$ donde los p_j son primos distintos entre sí, entonces $\phi(n) = (p_1 - 1){p_1}^{k-1} \dots (p_r - 1){p_r}^{k_r - 1}$

Definición 4.5 Un elemento $\zeta \in$ K se dice una raíz n-ésima primitiva de la unidad si ζ es una raíz n-ésima cuyo orden multiplicativo es precisamente n.

Definición 4.6 Si car(K) no divide a n y ϕ(n) = r, al polinomio

$$\Phi_n(X) = (X - \zeta_1) \dots (X - \zeta_r),$$

donde $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ son las raíces n-ésimas primitivas de la unidad en una clausura algebraica de K, se le denomina n-ésimo polinomio ciclotómico sobre K.

Definición 4.7 Una extensión K $\subset$ F se dice una extensión ciclotómica de orden n sobre K, si F es el cuerpo de descomposición sobre K del polinomio $X^n - 1 \in$ K[X].

Teorema 4.8 El n-ésimo polinomio ciclotómico sobre $\mathbb{Q}$, $\Phi_n(X)$, es irreducible.
Demostración. Sea ζuna raíz n-ésima primitiva de la unidad y $f(X) = Irr(\zeta, \mathbb{Q})$. Se tiene que $f(X)|\Phi_n(X)$ y, si se demuestra que para cada entero r con (r, n) = 1, ζ^r es también raíz de $f(X)$, se tendrá que $\Phi_n(X)|f(X)$ y, como ambos polinomios son mónicos, que $\Phi_n(X) = f(X)$.
Si (r, n) = 1, para probar que ζ^r es raíz de $f(X)$, iterando el proceso bastará demostrarlo para los factores primos de r. Si p es un primo que no divide a n, y $g(X) = Irr(\zeta^p, \mathbb{Q})$, utilizando el lema de Gauss y la unicidad de la factorización, se tiene que $f(X)$ y $g(X)$ son polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$, que además dividen a $X^n - 1$ (y también a $\Phi_n(X)$). Si $f(X)$ y $g(X)$ no son asociados, entonces $f(X)g(X) \mid X^n - 1$; esto es, existe $h(X) \in \mathbb{Z}[X]$ tal que

$$X^n - 1 = f(X)g(X)h(X).$$

Por otra parte, ζ es raíz de $g(X^p)$ y por tanto $g(X^p) = f(X)t(X)$ para algún $t(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Si se denota por $\overline{\mathrm{q}}(X)$ la reducción módulo p de un polinomio $q(X)$, de esta última expresión se tiene

$$(\overline{\mathrm{g}}(X))^p = \overline{\mathrm{g}}(X^p) = \overline{\mathrm{f}}(X)\overline{\mathrm{t}}(X)$$

De donde, cada divisor irreducible de $\overline{\mathrm{f}}(X)$ lo es también de $\overline{\mathrm{g}}(X)$. Así, cada uno de estos divisores es un factor múltiple de $\overline{X^n - 1} = \overline{\mathrm{f}}(X)\overline{\mathrm{g}}(X)\overline{\mathrm{h}}(X)$, lo que lleva a una contradicción ya que, como (p, n) = 1, $\overline{\mathrm{n}X^{n-1}} \neq 0$ y $\overline{X^n - 1}$ no tienen factores comunes. De manera que $f(X) = g(X)$ y ζ^p es raíz de $f(X)$, lo que termina la demostración. ■

Como consecuencia de que, en característica cero, si ζ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad todas las raíces n-ésimas de la unidad son de la forma ζ^i y grado$(\Phi_n(X)) = \phi(n)$ se tiene el resultado siguiente.

Corolario 4.9 Si $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, entonces $\mathbb{Q}(\zeta)$ es la extensión ciclotómica de orden n sobre $\mathbb{Q}$ y, además, $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$.

Teorema 4.10 (Gauss-Wantzel) El polígono regular de n lados es constructible con regla y compás si y sólo si $\phi(n)$ es una potencia de 2.
Demostración. Suponiendo inscrito el polígono en la circunferencia de radio unidad, la constructibilidad de éste es equivalente a la constructibilidad del punto (cos($\frac{2\pi}{n}$), sin($\frac{2\pi}{n}$)) y esto es a su vez equivalente a la constructibilidad del número real cos($\frac{2\pi}{n}$).
Sea $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ raíz n-ésima primitiva de la unidad, entonces 2cos($\frac{2\pi}{n}$) = $\zeta + \zeta^{-1}$ y por tanto $\mathbb{Q}$(cos($\frac{2\pi}{n}$)) = $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$. Por otra parte $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})] = 2$ ya que ζ es raíz del polinomio $X^2 - (\zeta + \zeta^{-1})$X + 1 y $\zeta \notin \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ ya que este cuerpo es real. Así, si el polígono regular de n lados es

constructible con regla y compás, por el criterio de Wantzel, se tiene que $[\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1}) : \mathbb{Q}] = 2^t$ para algún t y en consecuencia $\phi(n) = [\mathbb{Q}\ (\zeta) : \mathbb{Q}] = 2*2^t = 2^{t+1}$.
Recíprocamente, supongamos que $\phi(n) = 2^r$, entonces utilizando el razonamiento anterior se tiene que $[\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1}) : \mathbb{Q}] = 2^{r-1}$ y $|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})/\mathbb{Q})| = [\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1}) : \mathbb{Q}] = 2^{r-1}$, esto es, $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})/\mathbb{Q})$ es un 2-grupo abeliano y, por tanto, existe una cadena de subgrupos $\{1\}= H_0 < H_1 < \ldots < H_s = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1}) = \mathbb{Q})$ tal que $[H_i : H_{i-1}] = 2$ para i = 1,…, s. Pero al ser $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})$ una extensión de Galois, si $E_i = H'_i$, se tiene una torre de extensiones $\mathbb{Q} = E_s \subset E_{s-1} \subset E_1 \subset E_0 = \mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})$ tal que $[E_{i-1} : E_i] = [H_i : H_{i-1}] = 2$ para i = 1,…, s de donde se sigue el resultado sin más que utilizar el teorema de Wantzel. ■

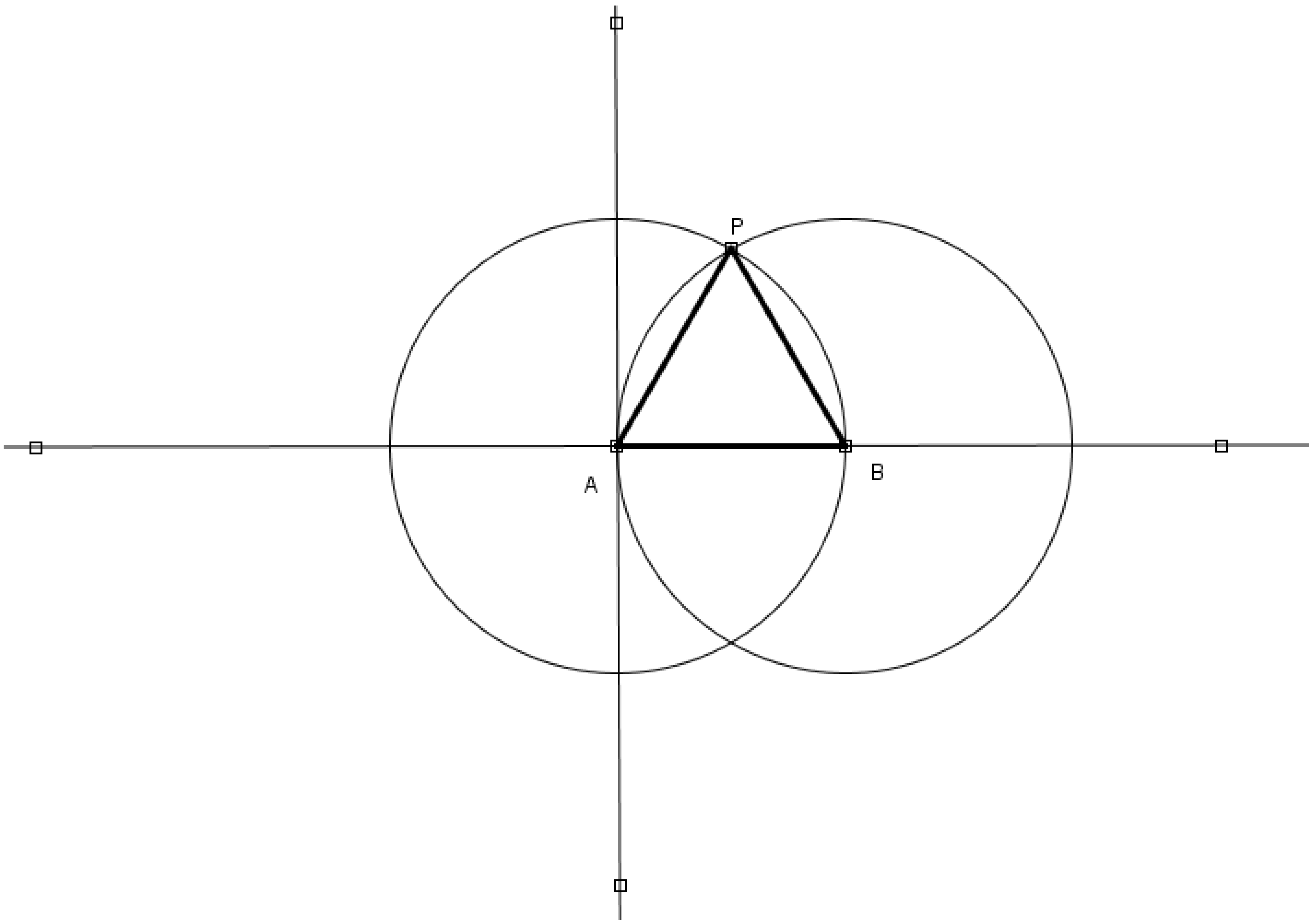
Proposición 4.11 [3]: Sea $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:
i) $\phi(n)$ es una potencia de 2.
ii) Tenemos que $n = 2^s p_1 \ldots p_r$ donde $r \in \mathbb{N}$, y donde $p_1, \ldots, p_r$ son enteros primos impares distintos, y tales que $p_i - 1$ sea una potencia de 2 para $1 \leq i \leq r$.
Demostración. Si $\phi(n) = 2^t$ y $n = 2^s {p_1}^{\alpha_1} \ldots {p_r}^{\alpha_r}$ con algún $\alpha_i > 1$, entonces el primo impar p_i aparece en la factorización de $\phi(n)$ y en consecuencia divide a 2, lo que entraña una contradicción. De modo que
$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 1$ y por tanto $2^t = \phi(n) = 2^{s-1}(p_1 - 1) \ldots (p_r - 1)$ de donde se obtiene el resultado ya que cada $p_i - 1$ ha de ser de la forma 2^{s_i}. ■

Corolario 4.12 [2] Una condición necesaria y suficiente para que un polígono regular de n lados sea constructible con regla y compás es que n sea de la forma $2^s p_1 \ldots p_r$ donde los p_i son primos distintos de la forma $1 + 2^{s_i}$, es decir, primos de Fermat.

5. Construcción explícita de algunos polígonos:

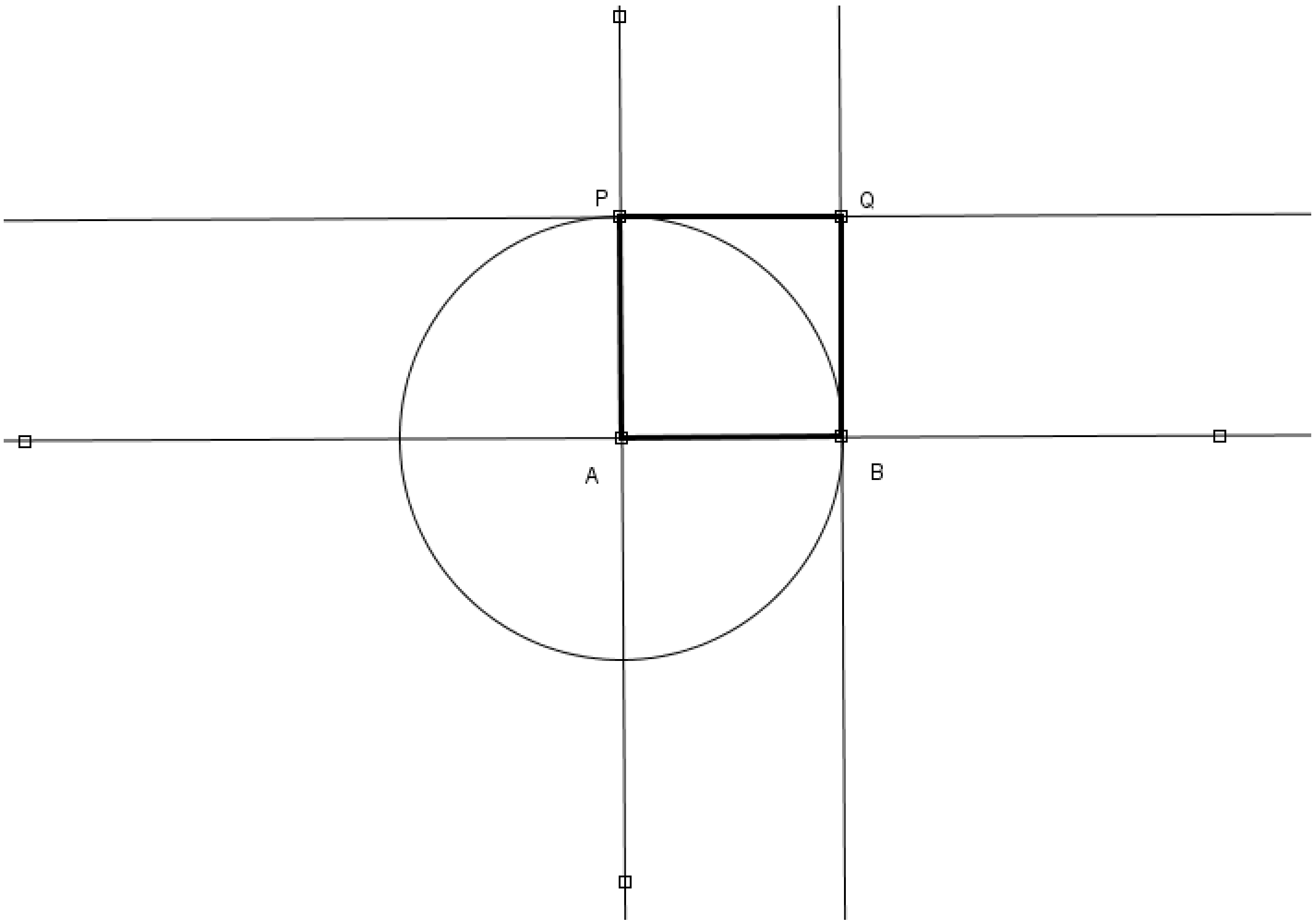
Polígono regular de 3 lados: Triángulo equilátero [6]

Trazamos una circunferencia con centro en A y radio AB y otra con centro en B y mismo radio. Esas dos circunferencias se cortan en dos puntos. Tomamos uno de ellos, digamos P. Trazando los segmentos AP y PB obtenemos el triángulo equilátero APB.



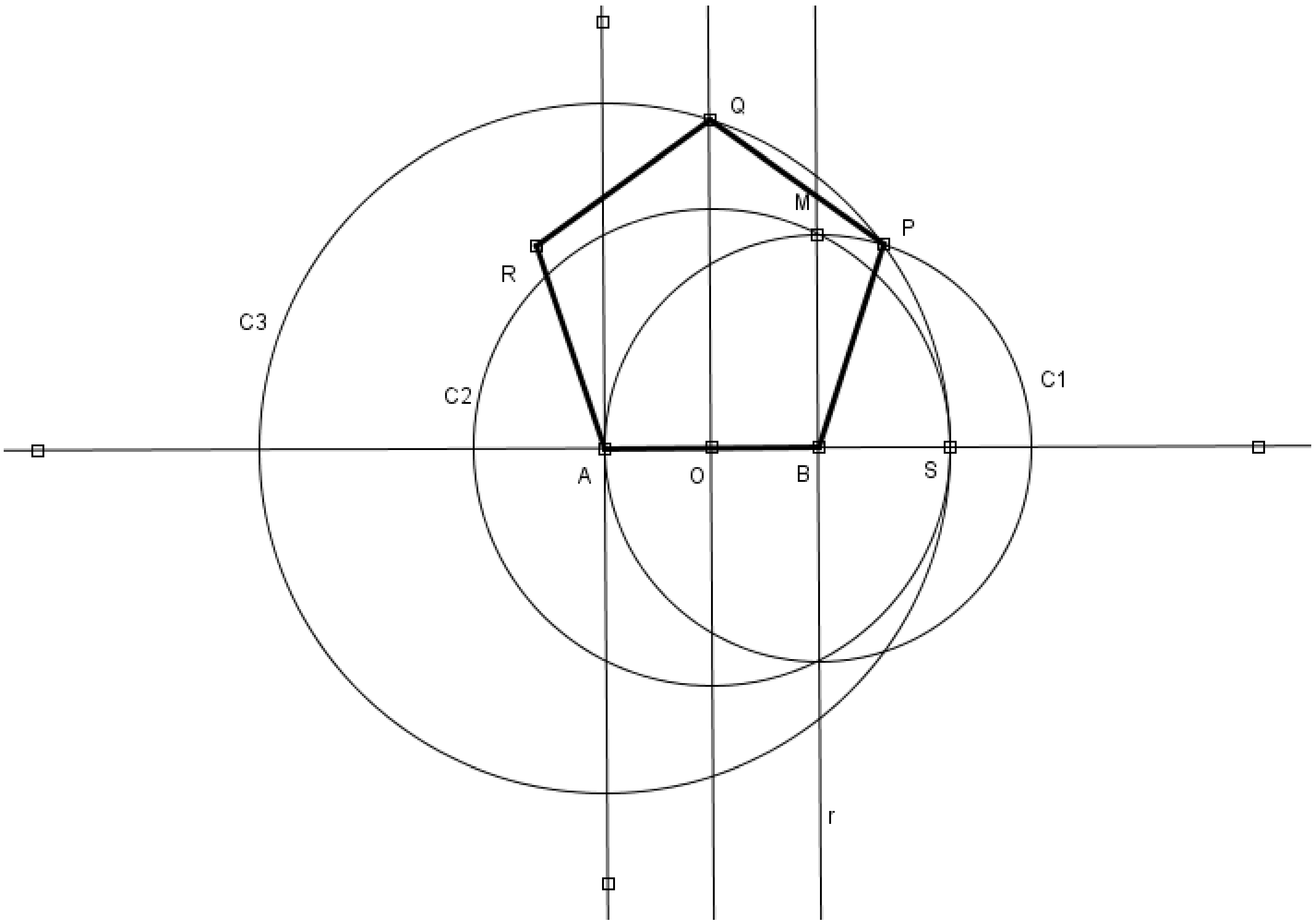
Polígono regular de 4 lados: Cuadrado

Trazamos una circunferencia con centro en A y radio AB. Esa circunferencia corta al eje Y en dos puntos. Tomamos uno de ellos, digamos P. Trazamos la recta paralela al eje X que pasa por P y la recta paralela al eje Y que pasa por B. El punto de corte de las mismas, digamos Q, es el vértice que nos faltaba. Trazando los segmentos AP, PQ y QB obtenemos nuestro cuadrado.



Polígono regular de 5 lados: Pentágono regular

Trazamos la paralela al eje Y que pasa por B, digamos r. Se traza la mediatriz del segmento AB obteniendo el punto O como corte con el eje X. Trazamos la circunferencia de centro B y radio AB, digamos $C1$. Obtenemos el punto M como corte de $C1$ con la recta r. Con centro en O trazamos la circunferencia de radio OM, a la que llamamos $C2$, obteniendo el punto S de corte con el eje X. Trazamos ahora la circunferencia de centro A y radio AS, $C3$. Obtenemos el punto P al cortar con $C1$ y el punto Q como corte con la mediatriz del segmento AB. Para obtener el vértice que nos falta, R, simplemente construimos el punto simétrico a P respecto de la mediatriz del segmento AB. Uniendo los vértices obtenemos el pentágono regular buscado.



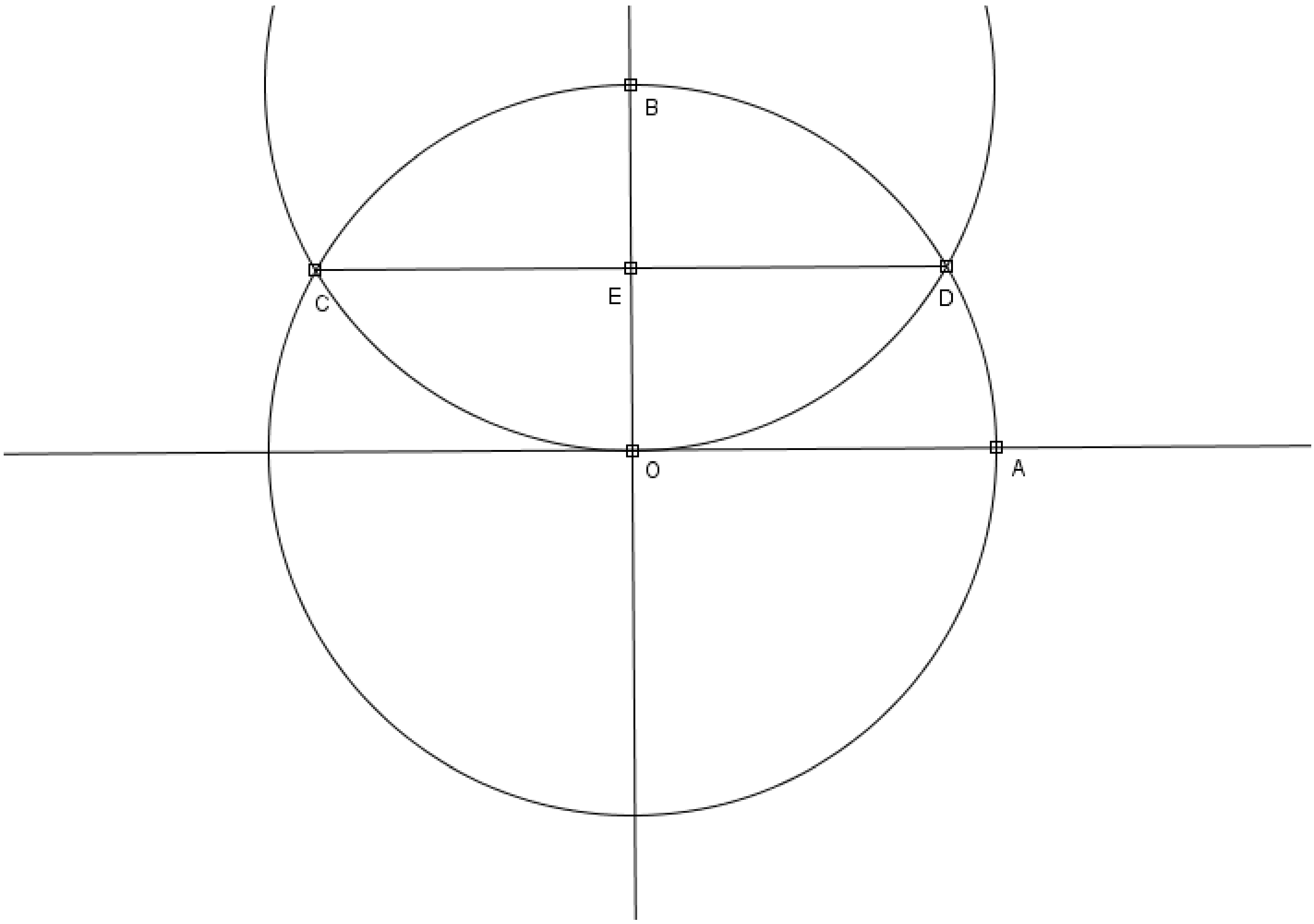
Polígono regular de 17 lados: Heptadecágono regular [7]

La demostración de Gaus del heptadecágono regular no fue constructiva, es decir, no nos mostró los pasos que hay que seguir para construirlo. Fue Johannes Erchinger el encargado de mostrarnos por primera vez un método para construir el heptadecágono consistente en 64 pasos.

La explicación se va a realizar de la siguiente forma: en cada una de las partes en las que he dividido el método habrá varias cosas hechas en el paso anterior. En cada uno de ellos se podrá ver una imagen de la construcción hasta ese momento:

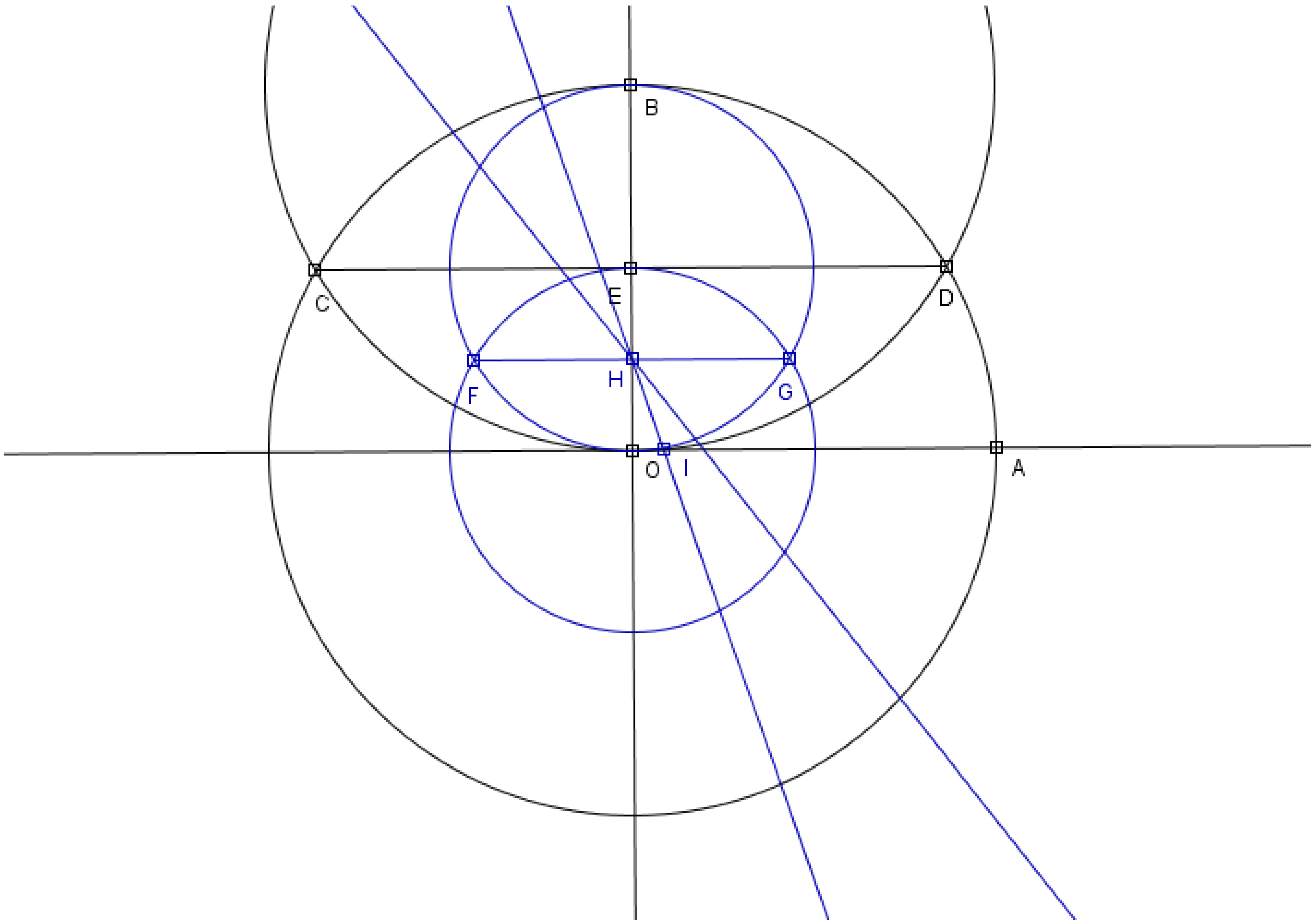
Parte 1

Partimos, como en muchas de las construcciones que hemos visto en la serie, de un eje de coordenadas con centro O y otro punto en el eje X al que llamamos A . Trazamos la circunferencia c de centro O y radio OA . Llamamos B al punto de corte de esa circunferencia con la parte positiva del eje Y y trazamos la circunferencia de centro B y radio OB . Esta circunferencia corta a c en dos puntos a los que llamamos C y D . Trazamos el segmento CD que corta al eje Y en un punto al que llamamos E. Las figuras construidas en este paso están en color negro.



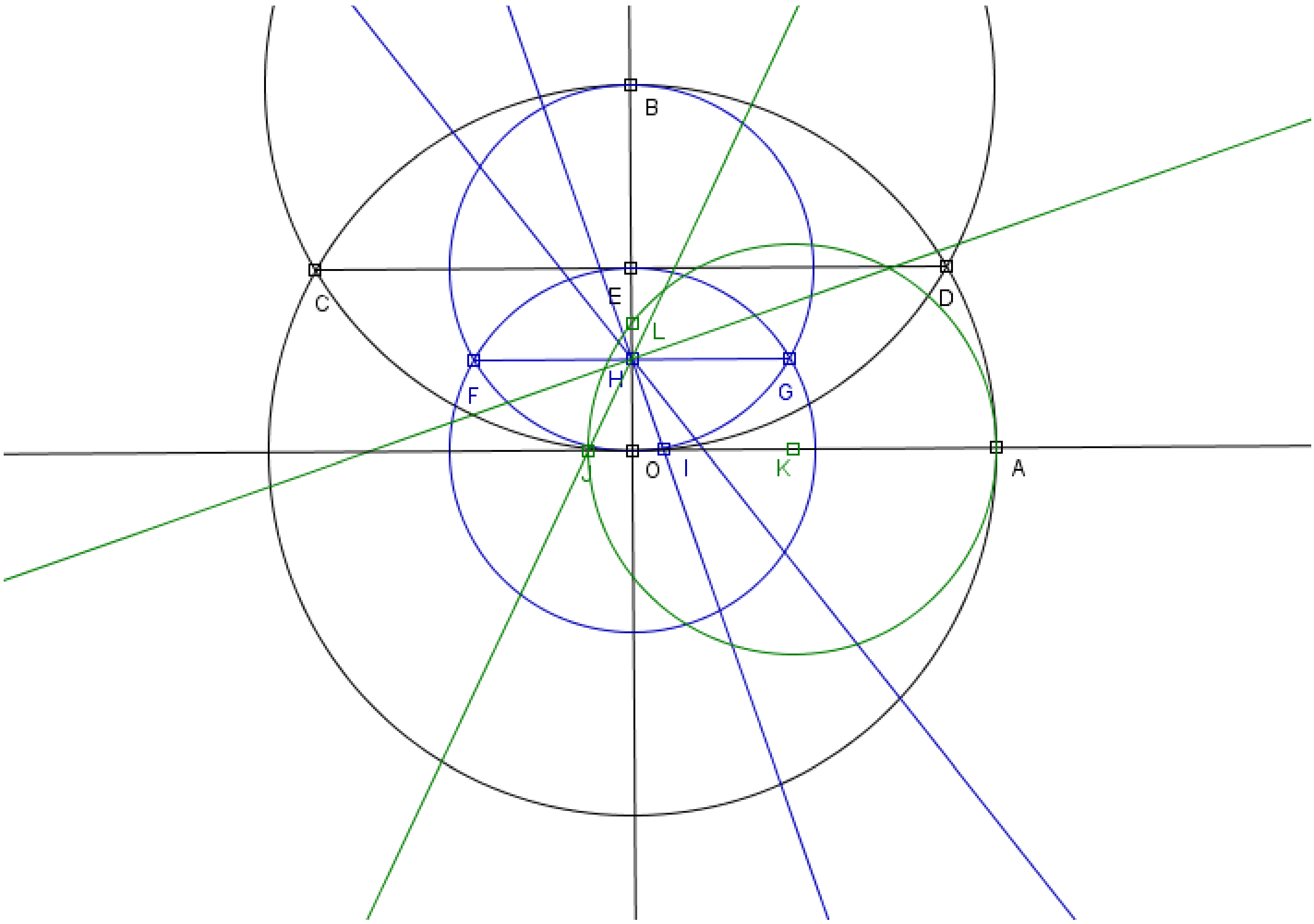
Parte 2

Trazamos las circunferencias de radio OE que tienen sus centros en O y en E. Llamamos a los dos puntos de corte entre ellas F y G. Trazamos el segmento FG que corta al eje Y en un punto al que llamamos H. Trazamos ahora la bisectriz del ángulo AHO y después la bisectriz de ella con el eje Y. Llamamos I a la intersección de esta última bisectriz con el eje X. Las figuras construidas en este paso están en color azul.



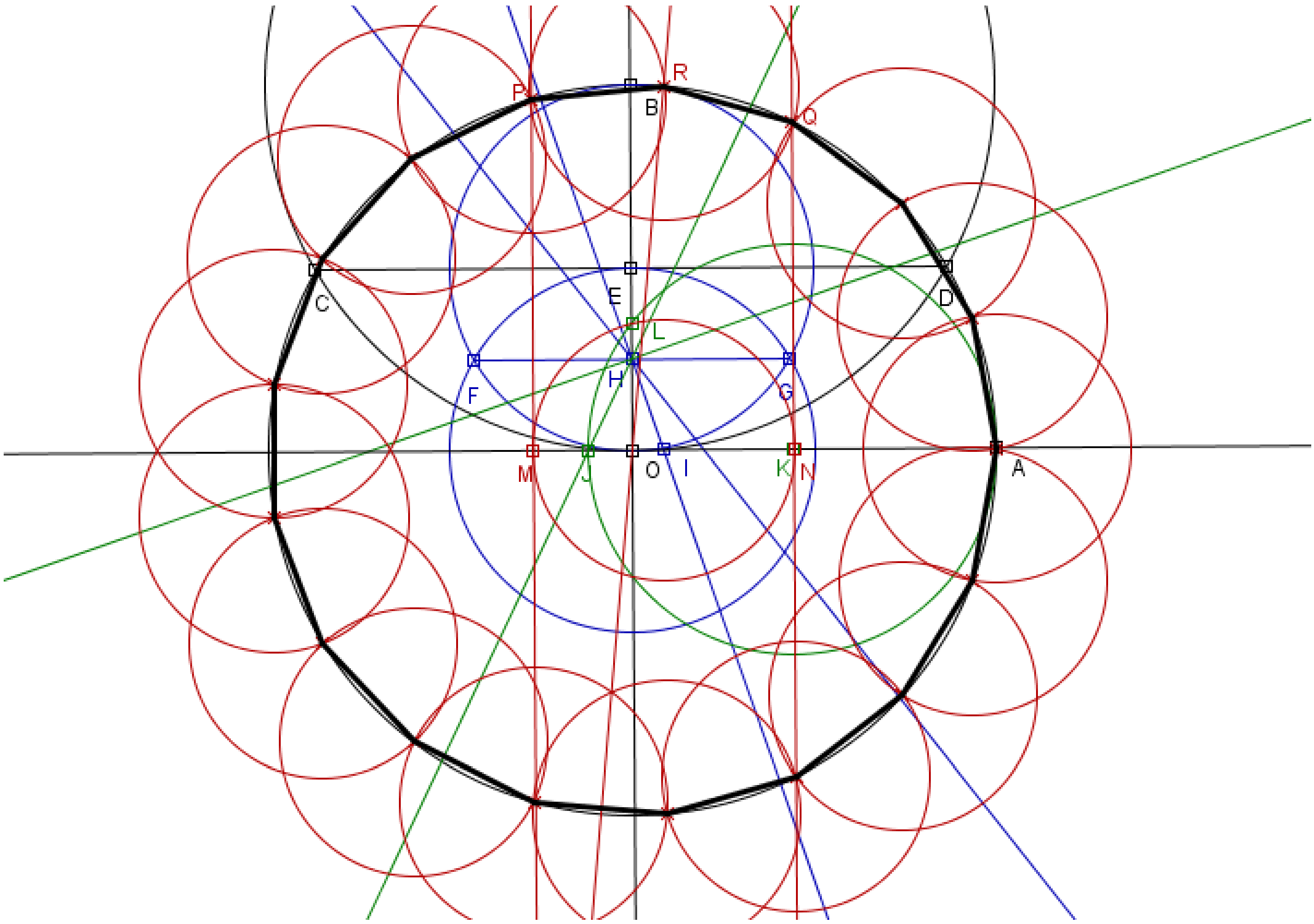
Parte 3

Trazamos la perpendicular al segmento HI que pasa por el punto H y después la bisectriz de esta recta con la recta que pasa por H y por I. Llamamos J al punto de corte con el eje X. Construimos el punto medio del segmento AJ y lo llamamos K. Trazamos la circunferencia de centro K y radio KA. Llamamos L al punto de corte de esta circunferencia con la parte superior del eje Y. Las figuras construidas en este paso están en color verde.



Parte 4

Trazamos la circunferencia de centro I y radio IL y llamamos M y N a los puntos de corte de la misma con el eje X (nótese que N queda muy cerca de K, pero no son el mismo punto). Trazamos las perpendiculares al eje X que pasan por M y por N. Estas perpendiculares cortan a la circunferencia inicial c en P y Q, que son dos de los vértices del heptadecágono. Trazamos la bisectriz del ángulo POQ que corta a la circunferencia inicial c en el punto R, que es también uno de los vértices del heptadecágono. De hecho la longitud de cada uno de los lados es tanto la distancia PR como la distancia RQ. Trasladando esta distancia por la circunferencia inicial las veces necesarias obtenemos los vértices que nos faltan. Las figuras construidas en este paso están en color rojo.



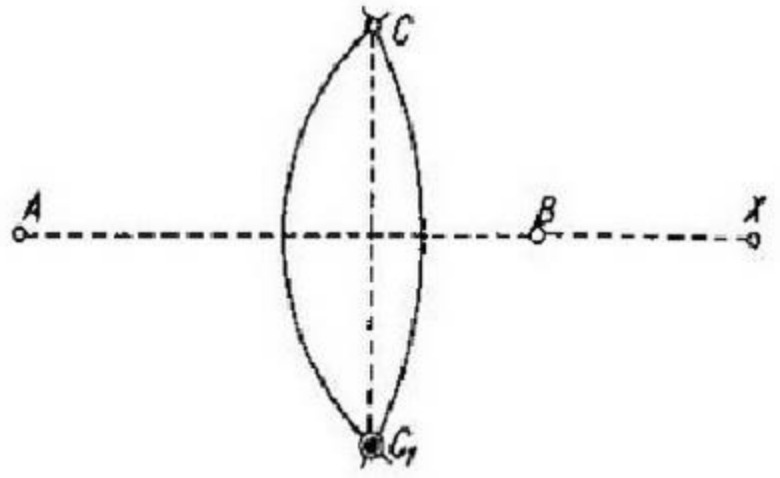
Uniendo todos los vértices obtenidos llegamos a la construcción del heptadecágono regular.

CONSTRUCCIONES SOLO CON COMPÁS

6. Demostración del teorema de Mohr-Mascheroni

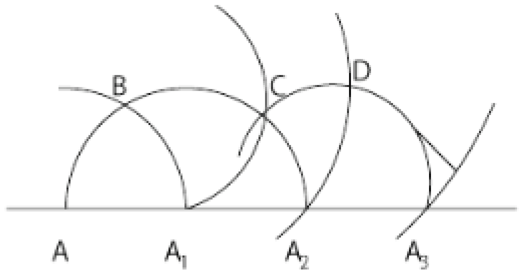
Problema 6.1 Construir un punto simétrico al dado C respecto a una recta dada AB

Construcción. Describimos las circunferencias (A, C) y (B, C), es decir, tomando los puntos A y B como centros, trazamos las circunferencias que pasen por el punto C. En la intersección de las circunferencias aducidas obtenemos el punto C_1.



Problema 6.2 Construir un segmento n veces más grande que un segmento dado $\overline{AA_1}$, n = 2, 3,…

Construcción. Consideramos $B \in C(A_1, AA_1) \cap C(A, AA_1), C \in C(A_1, AA_1)C(B, AA_1)$. En la intersección $C(C, AA_1) \cap C(A_1, AA_1)$ se encuentra un punto A_2 tal que $AA_2 = 2AA_1$. Iterando este proceso se obtiene el resultado buscado.

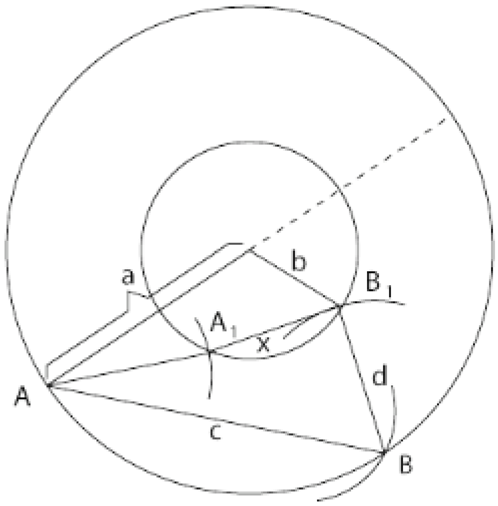


Problema 6.3 El valor x se dice un cuarto proporcional geométrico, en adelante c.p.g., de los valores a,b,c si se cumple a : b = c : x.

Construcción. Construiremos x a partir de a, b, c, dividiendo el problema en dos casos:

i) c < 2a

Se trazan C(O, a) y C(O, b) siendo O un punto cualquiera en el plano. Elegimos A arbitrariamente sobre C(O, a) y hacemos B = C(O, a) ∩ C(A, c). Luego, con un radio arbitrario d, se trazan C(A, d) y C(B, d), obteniéndose los puntos A_1 y B_1, respectivamente, al intersecar con C(O, b). Tenemos A_1B_1 = x, a:b = c:x.



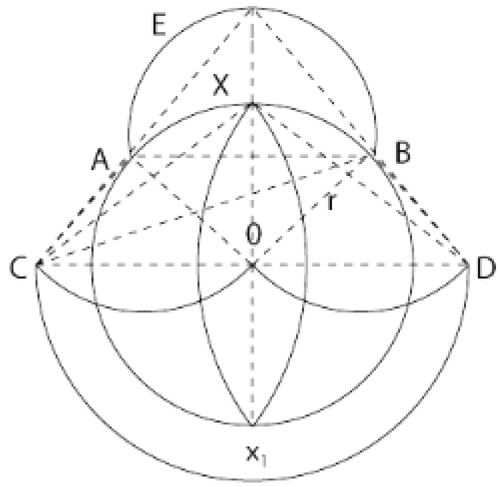
ii) $c \geq 2a$

Usando el lema 7.2, obtenemos a' tal que a' = na y n es suficientemente grande para que c < 2a'. Así, usando la parte i) para encontrar el cuarto proporcional geométrico de a', b, c, a la que llamaremos y (a':b = c:y). Luego construimos x = ny y se tendrá a:b = c:x.

Problema 6.4 Dividir el arco AB de la circunferencia por la mitad.

Construcción. Se puede suponer que se conoce el centro O de la circunferencia; más adelante se demostrará cómo se construye el centro de una circunferencia (problema de Napoleón)

Sea OA = OB = r y AB = a, dibujamos las circunferencias (O, a), (A, r) y (B, r) y en la intersección obtenemos los puntos C y D. Trazamos las circunferencias (C, CB) y (D, DA) hasta su encuentro en el punto E. Si ahora se trazan las circunferencias (C, OE) y (D, OE), entonces en sus intersecciones obtendremos los puntos X y X_1. X divide el arco AB por la mitad y X_1 divide a su suplemento por la mitad.

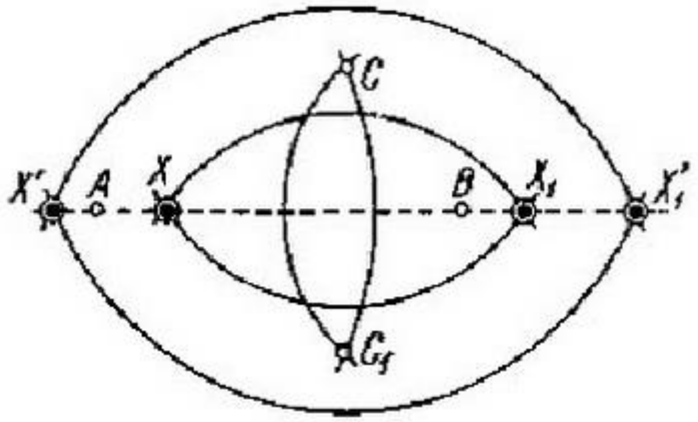


Demostración. Las figuras ABOC y ABDO son paralelogramos, por lo tanto los puntos C, O y D se hallan en una recta (COAB, ODAB). De los triángulos isósceles CED y CXD se deduce que ∢COE = ∢COX = 90º. De este modo, el segmento OX es perpendicular a la cuerda AB; por consiguiente, para demostrar que el punto X divide el arco AB por la mitad, es suficiente demostrar que el segmento OX = r.

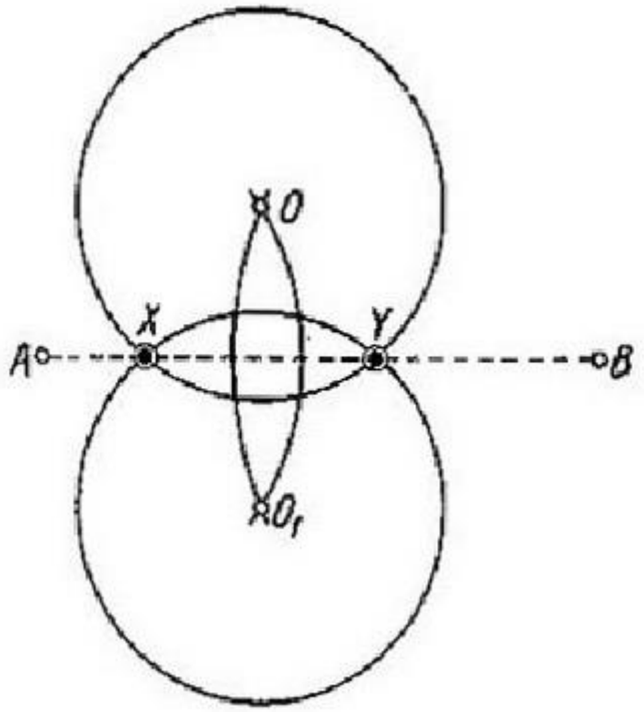
Del paralelogramo ABOC se deduce que $OA^2 + BC^2 = 2OB^2 + 2AB^2$ ó $r^2 + BC^2 = 2r^2 + 2a^2$ por eso $BC^2 = r^2 + 2a^2$
Del triángulo rectángulo COE podemos escribir: $CE^2 = BC^2 = OC^2 + OE^2$
De donde $r^2 + 2a^2 = a^2 + OE^2 \rightarrow r^2 + a^2 = OE^2$
Por fin, del triángulo rectángulo COX obtenemos:

$$OX = \sqrt{CX^2 - OC^2} = \sqrt{OE^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 + r^2 - a^2} = r$$

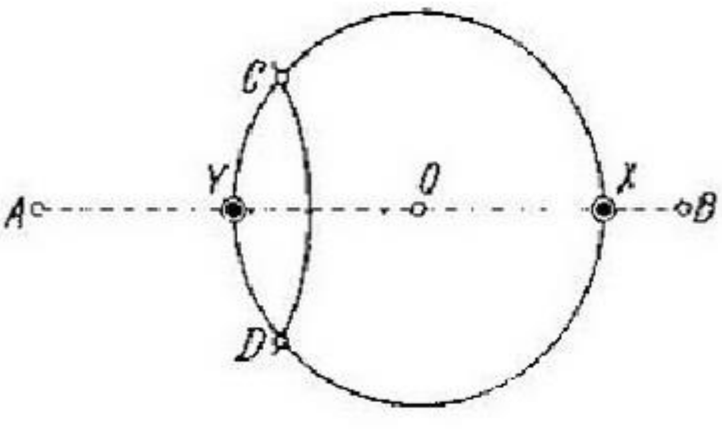
Problema 6.5 En la recta determinada por dos puntos A y B es necesario obtener uno o varios puntos.
Construcción. Tomemos en el plano, fuera de la recta AB, un punto arbitrario C y marquemos el punto C_1 que es simétrico al primero respecto a la recta AB (lema 7.1). Con un radio arbitrario r describamos las circunferencias (C, r) y (C_1, r), en las intersecciones obtendremos los puntos buscados X y X_1 que se hayan sobre la recta dada AB. Cambiando la magnitud del radio r se puede encontrar cualesquiera que sean puntos de la recta dada: X', X_1', etc.



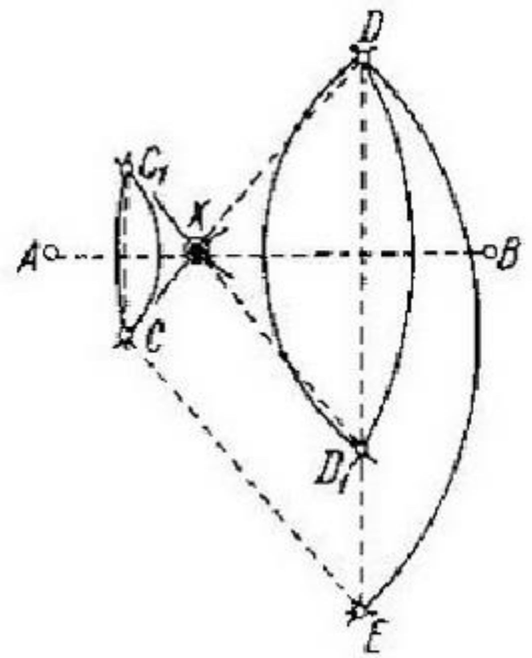
Problema 6.6 Trazar los puntos de intersección de la circunferencia dada (O, r) con la recta dada por dos puntos A y B.
Construcción en el caso de que O no se encuentre en la recta dada AB.
Determinamos el punto O_1 que es simétrico al centro O de la circunferencia dada respecto a la recta AB (problema 1). Describimos la circunferencia (O_1, r) que interseca la circunferencia dada en los puntos buscados X e Y. La validez de la construcción se ve evidentemente de la simetría del dibujo respecto de la recta dada AB.

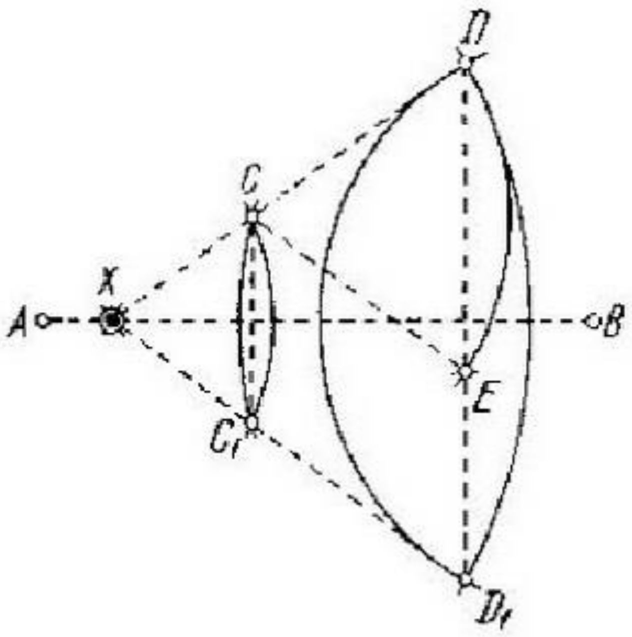


Construcción en el caso de que el centro O de la circunferencia dada se halla sobre la recta AB
Al tomar el punto A como centro describimos la circunferencia de radio arbitrario d que interseca la circunferencia dada en los puntos C y D. Dividimos los arcos CD de la circunferencia (O, r) por las mitades (problema 4). Los puntos X e Y son los buscados.
Observación. De la construcción expuesta se deduce: AX = AO + OX y AY = AO - OX



Problema 6.7 Construir el punto de intersección de dos rectas AB y CD cada una de las cuales queda determinada por dos puntos.
Construcción. Marquemos los puntos C_1 y D_1 simétricos correspondientemente a los puntos C y D respecto a la recta dada AB. Describamos las circunferencias (C_1, CD_1) y (C, CD) y designamos con E el punto de su intersección. Tracemos el segmento x que es cuarto proporcional a los segmentos DE, DD_1, y CD (problema 3). Si ahora se describen las circunferencias (D, x) y (D_1, x) entonces en la intersección obtendremos el punto buscado X.





Demostración. Puesto que el punto C_1 es simétrico al punto C y el punto D_1 es simétrico al punto D, es evidente que encontramos el punto de intersección de las rectas dadas, si encontramos el punto de intersección de las rectas CD y C_1D_1.
La figura CC_1D_1E es paralelogramo y, por consiguiente, los puntos D, D_1 y E se encuentran sobre la recta (DECC_1, DD_1CC_1). Los triángulos CDE y XDD_1 son semejantes, por lo que
DE : DD_1 = CE : D_1X pero CE = CD = C_1D_1.
El segmente D_1X = x es cuarto proporcional a los segmentos DE, DD_1 y CD ■

Ya vimos al principio de este trabajo que si tenemos un conjunto B de puntos constructibles, a partir de estos podemos construir nuevos puntos constructibles de las siguientes formas:
i) Trazando una recta que pasa por dos puntos dados.
ii) La circunferencia de centro constructible y radio la distancia entre dos puntos constructibles.
iii) Intersección de dos circunferencias dadas.
iv) Intersección entre una recta y una circunferencia.
v) Intersección entre dos rectas cada una dada por dos puntos.

Georg Mohr en 1672 y Lorenzo Mascheroni en 1797 obtuvieron independientemente el uno del otro el siguiente resultado.
Teorema 6.8 (de Mohr-Mascheroni) Todo punto constructible con regla y compás es constructible sólo con compás.
Demostración. Las operaciones ii) y el iii) ya se realizan solo con compás. El resolver los problemas i), iv) y v) sólo con compás viene demostrado en los problemas 7.5, 7.6 y 7. 7 respectivamente. ■

7. Problema de Napoleón

Un tercer famoso problema del libro de Mascheroni es el llamado «problema de Napoleón», porque se dice que Napoleón se lo propuso a Mascheroni. No suele saberse que Napoleón fuera un entusiasta matemático aficionado, y aunque tal vez no muy penetrante, sin duda estaba fascinado por la geometría, ciencia, por otra parte, de gran importancia militar. El problema es el siguiente:

Teorema 7.1 Hallar el centro de una circunferencia dibujada.

Construcción. Tomemos en la circunferencia dada un punto A y describamos una circunferencia (A, d) de un radio arbitrario d; en las intersecciones obtenemos los puntos B y D. En la circunferencia (A, AD) marquemos el punto C que es diametralmente opuesto al punto B. Describamos luego las circunferencias (C, CD) y (A, CD); designemos con E el punto de su intersección. Y, por fin, describamos la circunferencia (E, CD) hasta su encuentro con (A, d) en el punto M. El segmento BM es igual al radio de la circunferencia dada. Las circunferencias (B, BM) y (A, BM) determinan el centro buscado de la circunferencia descrita.

Demostración. C es simétrico a M respecto a la recta AE, por lo que los triángulos isósceles ACE y AEM son iguales el uno al otro y, por consiguiente, el ángulo que forman las rectas EA y EM es igual al que forman AC y AE. Dicho de forma esquemática, $\sphericalangle EAM = \sphericalangle ACE$.

Por un lado $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ACE + \sphericalangle AEC$ [$\sphericalangle BAE$ es el ángulo exterior de triángulo ACE] y por otro lado, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BAM + \sphericalangle EAM$. De aquí $\sphericalangle BAM = \sphericalangle EAC$.

De este modo, los triángulos isósceles ABM y ACE son semejantes y, de este modo,

BM:AB = AC:CE ó BX:AB = AC:CD.

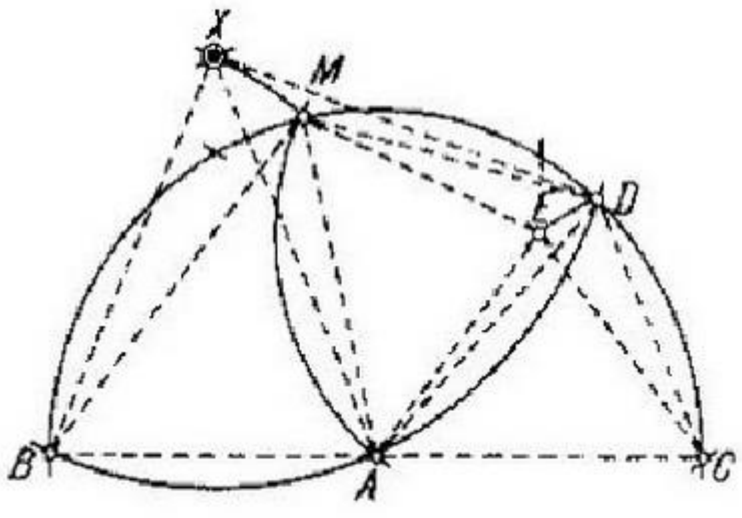
De la última correlación se deduce que los triángulos isósceles ABX y ACD son semejantes, entonces resulta que $\sphericalangle BAX = \sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAX$

Las últimas dos igualdades se deducen de que $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC + \sphericalangle ACD = 2\sphericalangle ACD = \sphericalangle BAX$.

Basándose sobre la igualdad de los ángulos BAX y DAX llegamos a la conclusión de que los triángulos isósceles ABX y ADX son iguales entre sí, es decir, BX = AX = DX.

El punto X es el centro buscado de la circunferencia.

Observación. El segmento d = AB debe tomarse mayor que la mitad del radio de la circunferencia dada; en caso contrario las circunferencias (C, CD) y (A, CD) no se cortarán. ■

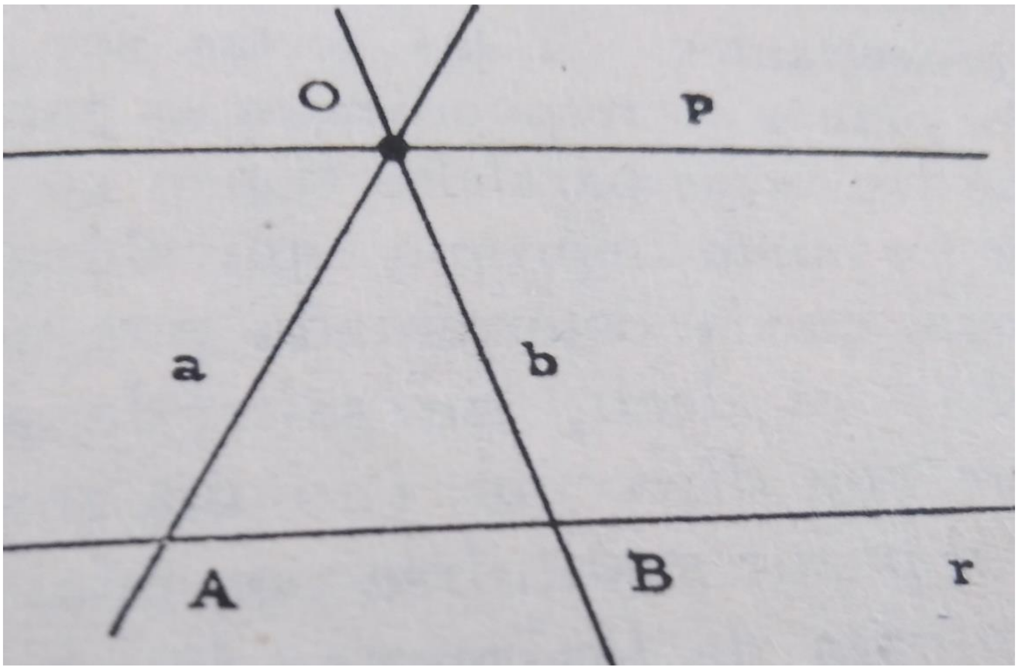


CONSTRUCCIONES SOLO CON REGLA

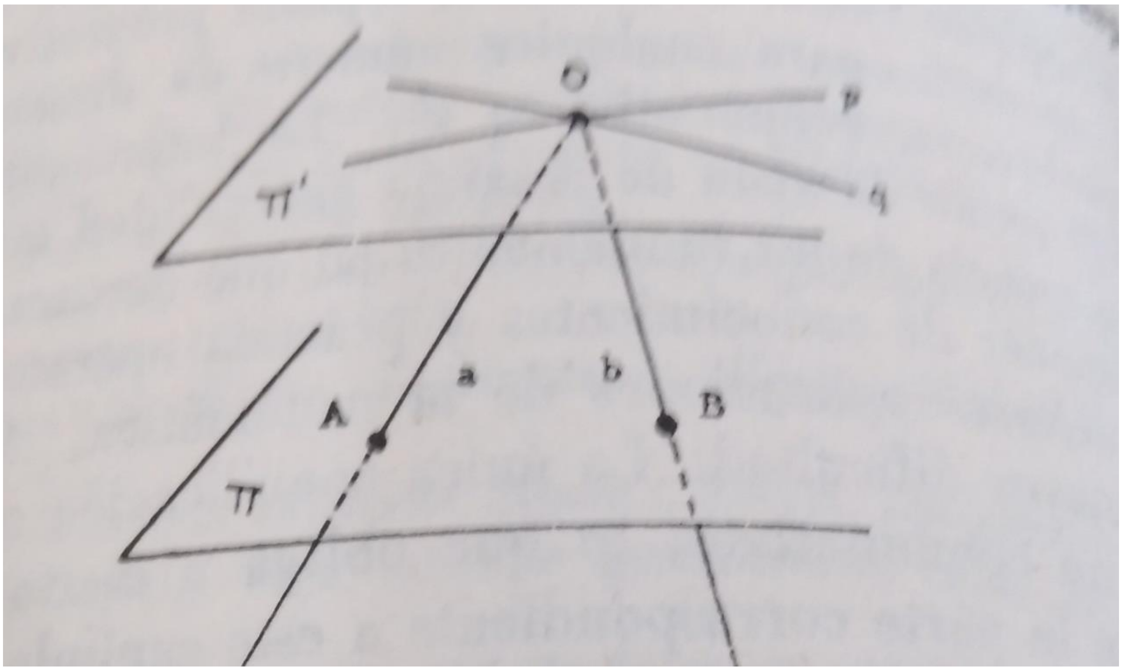
8 El plano proyectivo [11]

8.1 El espacio proyectivo de n dimensiones.

Consideremos el plano de la geometría elemental (al que llamaremos plano euclídeo) y en él una recta r y un punto 0 no perteneciente a la misma. Hagamos corresponder a cada punto A de r la recta a = 0A que lo proyecta desde 0. Se tiene así una correspondencia entre los puntos de la recta r y las rectas del haz 0. Esta correspondencia no es biyectiva pues queda como excepcional la recta p paralela a r, a la cual no corresponde ningún punto de r. Para que la correspondencia sea biyectiva se conviene en decir que a la recta p corresponde también un punto, el cual se llama un punto impropio o punto del infinito de r. Si a los puntos de la recta r se añade el punto impropio, se tiene la recta proyectiva. Vemos que ella es equivalente al conjunto de las rectas del plano que pasan por un punto, considerando estas rectas como los puntos de la recta proyectiva.



Consideremos ahora el espacio ordinario y en él un plano euclidiano π y un punto exterior 0. Hagamos corresponder a cada punto A de π la recta a = 0A que lo proyecta desde 0. A cada punto de π corresponde una recta, pero la correspondencia no es biyectiva, pues las rectas por 0 paralelas a π (contenidas en el plano π' paralelo a π por 0) no corresponde ningún punto. Para hacer que la correspondencia sea biyectiva se puede convenir en que a las rectas por 0 paralelas a π como la p, q,…, corresponde un punto impropio o punto del infinito del plano π que representamos por P_∞, Q_∞,….



A las rectas de π corresponden los planos que las proyectan desde 0 y al punto de intersección de dos rectas corresponde la recta de intersección de los planos proyectantes. Si las rectas son paralelas, la recta de intersección de los planos correspondientes es paralela a π; de aquí que se pueda decir que las rectas paralelas tienen común un punto impropio o del infinito. Dar un punto impropio equivaldrá a dar una recta por 0 paralela a π, la cual queda determinada por cualquier recta del plano π paralela a ella; es decir, sin salir de π, un punto impropio está determinado por una dirección (no un sentido), o sea, por una recta del plano, la cual puede sustituirse por cualquiera de sus paralelas. Por otra parte, el conjunto de los puntos impropios corresponde a las rectas contenidas en el plano π' y como a los planos por 0 corresponden rectas de π, es natural decir que los puntos impropios constituyen la recta impropia o recta del infinito del plano π. El plano euclidiano, ampliado con los puntos impropios, constituye el llamado plano proyectivo. Vemos que él es equivalente al conjunto de las rectas que pasan por un punto del espacio (radiación de rectas) considerando a las rectas como puntos y a los planos como rectas del plano proyectivo.

Estas consideraciones intuitivas pueden generalizarse en dos direcciones. Primero aumentando el número de dimensiones, es decir, pasando de la recta y el plano que hemos considerado, a los espacios de tres o más dimensiones. Segundo, considerando conjuntos de puntos más generales que los que constituyen la recta o el plano euclídeo. Es decir, así como la recta euclídea es la imagen geométrica del conjunto de los números reales, cabe considerar otros tipos de cuerpos y con ello otros tipos de recta (por ejemplo la recta racional, si solo se consideran puntos de abscisa racional; la recta compleja, si se consideran conjuntos de puntos cuya abscisa es un número complejo; la recta constructible, etc.) y análogamente otros tipos de planos y espacios de más dimensiones.

Supongamos pues un cuerpo K, no necesariamente conmutativo. Para introducir lo análogo a las rectas que pasan por un punto 0, consideramos un espacio vectorial E sobre K. Todos los vectores de la forma λA, con λ variable en K y A un vector fijo no nulo de E, forman un subespacio vectorial de dimensión uno, el cual, pensando en los vectores del espacio ordinario, se puede identificar con una recta por 0. Se comprenden así las siguientes definiciones:

Definición 8.1 Dado un espacio vectorial E a la izquierda sobre un cuerpo K, llamaremos recta homogénea de E a todo subespacio vectorial de dimensión uno.

Una recta homogénea está determinada por un vector A, distinto del vector nulo. Todos los vectores λA $(\lambda \neq 0, \lambda \in K)$ definen la misma recta homogénea. Es decir, las rectas homogéneas son los vectores de E excepto el vector nulo, con la relación de equivalencia
A ~ λA, $(\lambda \neq 0, \lambda \in K)$

Definición 8.2 Si E es de dimensión n+1, el conjunto de las rectas homogéneas de E constituye el espacio proyectivo asociado a E, de dimensión n, a la izquierda sobre el cuerpo K. Se indica con P_n(K, E) y las rectas homogéneas se llaman entonces los puntos de P_n(K, E).

En otras palabras, los puntos de P_n(K, E) son las clases de equivalencia en E por la relación R: A ~ λA $(\lambda \neq 0, \lambda \in K)$ y P_n(K, E) es el espacio cociente (E - 0) / R.
Si E fuera un espacio vectorial a la derecha, la misma definición conduce a la de espacio proyectivo asociado a E, de dimensión n, a la derecha sobre K.
La definición vale para n=0, en cuyo caso E consta de una sola recta homogénea y P_0(K, E) de un solo punto.
Los subespacios vectoriales de dimensión r+1 de E, vistos como el conjunto de las rectas homogéneas contenidos en ellos se llaman subespacios lineales de dimensión r de P_n(K, E). En particular, para r = 0 se tienen los puntos, para r = 1 las rectas y para r = n-1 los hiperplanos del espacio proyectivo.
Todos los espacios vectoriales E de dimensión n sobre K son isomorfos al espacio vectorial de las n-uplas de K. Por tanto, también los espacios proyectivos correspondientes serán todos isomorfos entre sí; es decir, lo interesante es tan solo la dimensión n y el cuerpo K. Por esto, en vez de P_n(K, E) pondremos en general P_n(K) y si no hay lugar a confusión, P_n.

8.2 El plano proyectivo

El espacio proyectivo de dimensión 2 es el plano proyectivo. Se representa por P_2 o bien por P_2(K).
Tener dimensión 2 significa que existen tres puntos linealmente independientes y que, en cambio, dados cuatro puntos cualesquiera A, B, C, D existe siempre entre ellos una relación de la forma

$$\lambda_1 \mathrm{A} + \lambda_2 \mathrm{B} + \lambda_3 \mathrm{C} + \lambda_4 \mathrm{D} = 0 \ (*)$$

con los λ_i elementos de K no todos nulos a la vez.
Los subespacios lineales de dimensión uno son las rectas. Una recta queda determinada por dos puntos. La recta determinada por los puntos A y B es el conjunto de puntos de la forma X = λA + μB$(**)$, con λ, μ elementos variables del cuerpo K, no nulos a la vez.
Todo punto distinto de B tiene $\lambda \neq 0$ y por tanto, siendo $X \sim \lambda^{-1}X = A + \lambda^{-1}\mu B$, resulta que se puede escribir en la forma $X = A + \alpha B, \alpha \in K$
Esta forma es muy útil, pues fijada una determinación para A y B, la correspondencia entre los puntos de la recta, distintos de B, y los elementos α de K resulta biyectiva.
Son inmediatos, pero importantes, los siguientes teoremas:

Teorema 8.3 Dos puntos cualesquiera de una recta, determinan la misma recta.

Demostración En efecto, si en vez de A y B se toman $X_1 = A + \alpha_1 B$, $X_2 = A + \alpha_2 B$, con $\alpha_1 \neq \alpha_2$, la recta que determinan es

$$X = \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2 = (\lambda_1 + \mu_1)A + (\lambda_1\alpha_1 + \mu_1\alpha_2)B \ (***)$$

Para probar que esta recta es la misma que $(**)$ debemos probar que dando a λ_1, μ_1 valores convenientes, los coeficientes pueden tomar cualquier valor, o sea, que las ecuaciones

$$\lambda_1 + \mu_1 = \lambda \ , \ \lambda_1\alpha_1 + \mu_1\alpha_2 = \mu$$

tienen siempre solución. En efecto, alguno de los α_1, α_2 es $\neq$ 0; sea α_1. De la segunda ecuación $(***)$ se deduce

$$\lambda_1 + \mu_1\alpha_2{\alpha_1}^{-1} = \mu{\alpha_1}^{-1},$$

y por tanto la solución es

$$\lambda_1 = \mu{\alpha_1}^{-1} - \mu_1\alpha_2{\alpha_1}^{-1} \ , \ \mu_1 = \lambda - \mu_1{\alpha_1}^{-1} + \mu_1\alpha_2{\alpha_1}^{-1}$$ ■

Teorema 8.4 No todos los puntos del plano proyectivo pertenecen a una misma recta.
Demostración En efecto, siendo de dimensión dos, el plano proyectivo tiene por lo menos tres puntos linealmente independientes, sean A, B, C. Si C perteneciera a la recta AB, sería C = λA + μB, lo que no puede ser por tratarse de puntos linealmente independientes. ■

Teorema 8.5 Toda recta tiene por lo menos tres puntos.
Demostración En efecto, como todo cuerpo tiene los elementos 0, 1 toda recta contendrá, además de B, los puntos A y A+B, correspondientes a α=0 y α=1. Si la recta se considera de la forma $(**)$, ella contiene por lo menos los puntos correspondientes a los pares (0, 1), (1, 0), (1, 1) como valores de λ, μ. Si K es un cuerpo finito de q elementos, el número de puntos de cada recta es q+1. Si K es infinito, cada recta tiene infinitos puntos. ■

Teorema 8.6 Dos rectas distintas del plano proyectivo tienen siempre un punto común.
Demostración En efecto, si las dos rectas son X = λA + μB, X = λ_1C + μ_1D, como cuatro puntos son siempre linealmente dependientes, existirá entre A, B, C, D una relación de la forma $(*)$ y por tanto el punto P = λ_1A + λ_2B = -λ_3C -λ_4D pertenece a ambas rectas. ■

Teorema 8.7 No todas las rectas del plano proyectivo pasan por un mismo punto.
Demostración En efecto, según el Teorema 8.4 existen por lo menos dos rectas y la recta determinada por dos puntos de rectas diferentes no pasa por el punto de intersección de las mismas. ■

Teorema 8.8 Por todo punto pasan por lo menos tres rectas.
Demostración En efecto, si A es un punto y r una recta que no pasa por A, existen las tres rectas que unen A con los tres puntos que por lo menos contiene r (Teorema 8.5). ■

8.3 Coordenadas homogéneas en el plano. Ecuación de la recta.

Si U_0, U_1, U_2 son tres vectores independientes del espacio vectorial asociado a P_2, o sea, tres puntos independientes de P_2 con una determinación dada, todo punto X del mismo puede expresarse en la forma $X = x_0U_0 + x_1U_1 + x_2U_2$.

Los coeficientes x_0, x_1, x_2, elementos de K no todos nulos a la vez, son las coordenadas homogéneas de X respecto del sistema de coordenadas determinado por los vectores U_0, U_1, U_2. Ellas están determinadas salvo la equivalencia $(x_0, x_1, x_2) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$.

Consideramos la recta $(**)$ determinada por los puntos A y B. Supongamos que sea

$$A = a_0 U_0 + a_1 U_1 + a_2 U_2 \quad , \quad B = b_0 U_0 + b_1 U_1 + b_2 U_2,$$

Lo cual indica que a_i son las coordenadas homogéneas de A y b_i las de B; expresaremos esto abreviadamente escribiendo $A(a_0, a_1, a_2), B(b_0, b_1, b_2)$.

Sustituyendo en $(**)$ resulta

$X = \sum_{i=0}^{2} (\lambda a_i + \mu b_i)\, U_i$,

Lo que nos dice que las coordenadas homogéneas del punto variable X de la recta están dadas por las fórmulas

$$x_0 = \lambda a_0 + \mu b_0 \,, x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \,, x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \ (*3)$$

en las cuales λ, μ varían en K, pudiendo tomar todos los valores posibles menos anularse al mismo tiempo.

De $(*3)$ podemos eliminar λ, μ para obtener la ecuación cartesiana de la recta. Despejando λ en las dos primeras ecuaciones e igualando, y haciendo lo mismo entre la primera y la tercera, resulta

$$x_0 a_0^{-1} - \mu b_0 a_0^{-1} = x_1 a_1^{-1} - \mu b_1 a_1^{-1}$$
$$x_0 a_0^{-1} - \mu b_0 a_0^{-1} = x_2 a_2^{-1} - \mu b_2 a_2^{-1}$$

y de aquí, despejando μ en ambas ecuaciones e igualando

$$\frac{(x_0 a_0^{-1} - x_1 a_1^{-1})}{(b_0 a_0^{-1} - b_1 a_1^{-1})} = \frac{(x_0 a_0^{-1} - x_2 a_2^{-1})}{(b_0 a_0^{-1} - b_2 a_2^{-1})} \ (*4)$$

que es la ecuación general de la recta que pasa por dos puntos en su forma cartesiana. Si alguno de los elementos a_i es nulo no se puede tomar el inverso, pero la eliminación se conduce de manera análoga, simplificada por el hecho de que en tal caso en algunas de las ecuaciones $(*3)$ ya no figura λ o μ. Los binomios $b_0 a_0^{-1} - b_1 a_1^{-1}$, $b_0 a_0^{-1} - b_2 a_2^{-1}$ cuya inversa aparece en $(*4)$ no pueden ser nulos a la vez, pues en tal caso sería

$$b_0 = (b_1 a_1^{-1}) a_0 \,, b_1 = (b_1 a_1^{-1}) a_1 \,, b_2 = (b_1 a_1^{-1}) a_2 \,,$$

y por tanto A y B serían un mismo punto por tener sus coordenadas proporcionales.

Observemos que la ecuación $(*4)$ es siempre de la forma $x_0\lambda_0 + x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 = 0 \ (*5)$.

Recíprocamente, toda ecuación de esta forma representa una recta. En efecto, ella es la determinada por los puntos $A(a_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, a_1 = -1 - \lambda_2, a_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\lambda_2})$ y $B(b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = -\lambda_1/\lambda_2)$.

Si K es conmutativo, la fórmula $(*4)$ puede escribirse en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

puesto que, efectivamente, esta ecuación representa una recta por ser de la forma $(*5)$ y se satisface para los puntos A y B.

9 Teoremas de las construcciones con regla

Empezaremos esta sección con dos definiciones que utilizaremos posteriormente.

Definición 9.1[13] Consideremos una variedad lineal proyectiva L $\subseteq P_n(K)$ de dimensión r $\geq$ 1 y un subconjunto R = $\{P_0, \dots, P_{r+1}\}$ $\subset$ L con r + 2 puntos. Diremos que R es un sistema referencial proyectivo de L si cualquier subconjunto suyo con r + 1 puntos es linealmente independiente.

Definición 9.2 Sea R = $\{P_0, \dots, P_{r+1}\}$ $\subset$ L un sistema referencial proyectivo y P $\in$ L. Las coordenadas proyectivas (homogéneas) de P respecto de R son, por definición, el punto $(x_0, \dots, x_r)$ $\in P_r(K)$, donde $(x_0, \dots, x_r)$ son las coordenadas de un vector u $\in$ $\mathcal{L}$(L)\\{0} tal que π(u) = P, respecto de una base normalizada B de R, en cuyo caso escribiremos P = $(x_0, \dots, x_r)_R$

[1] Las construcciones con regla necesitan al menos cuatro puntos de base, y el plano conveniente para las construcciones será el plano proyectivo.

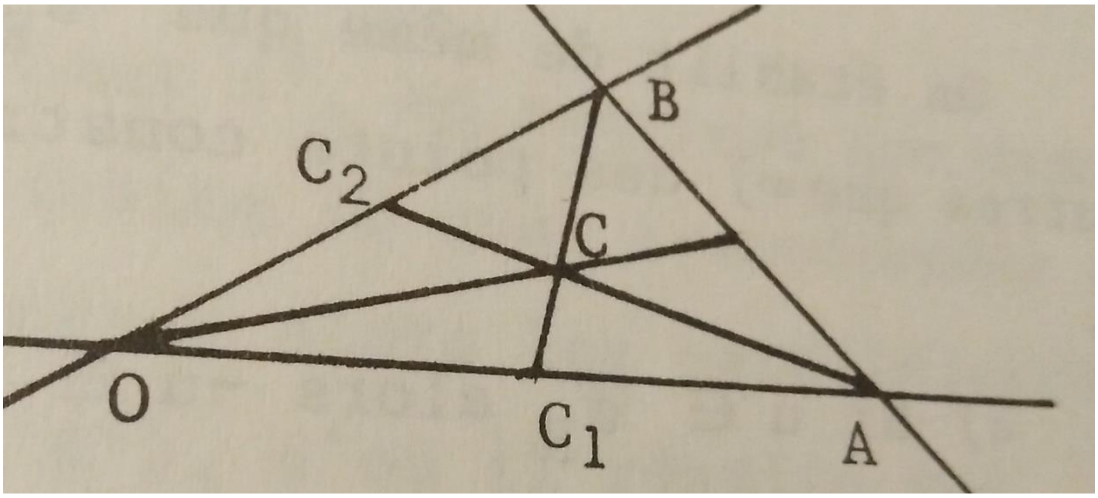
Partiremos de un plano proyectivo $\bar{P}$ obtenido con la ayuda de un plano afín real P, y de cuatro puntos de P, 0, A, B, C tales que (0, A, B, C) sea un sistema referencial proyectivo de P.

Definición 9.3 Un punto M de $\bar{P}$ se llamará constructible con regla si existe un conjunto de puntos de $\bar{P}$: M_1, M_2,…, M_n = M tales que para todo 1 ≤ i ≤ n, M_i es punto de intersección de dos rectas distintas, cada una de las cuales pasan por dos puntos distintos de {0, A, B, C, M_1,…, M_{i-1}}.

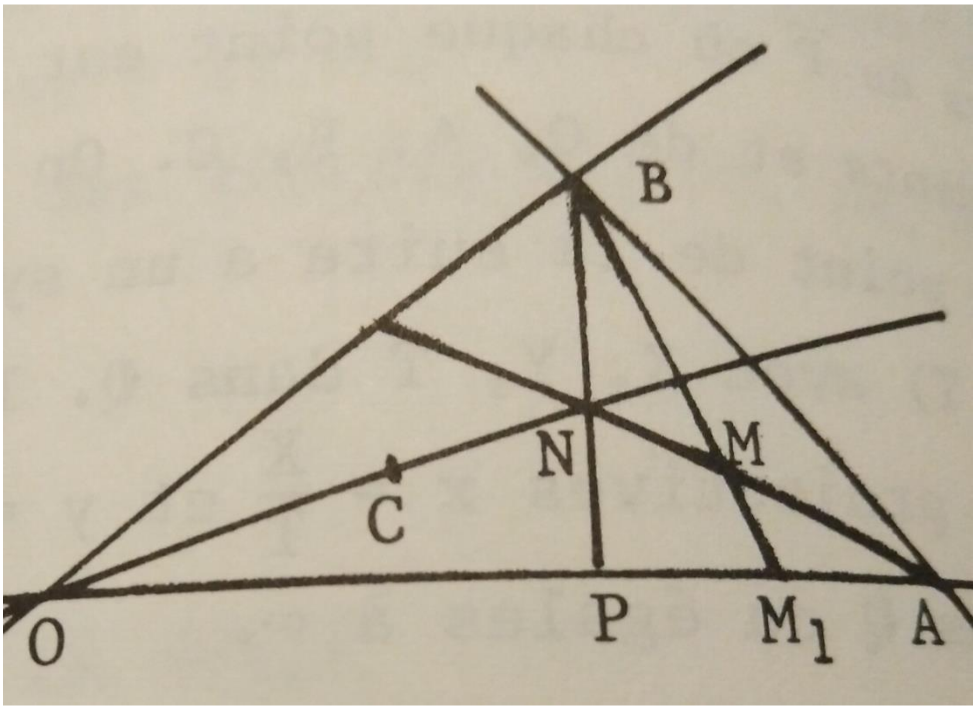
Teorema 9.4 El conjunto de las coordenadas proyectivas (diferentes de ∞) en (0, A, B, C) de los puntos de $\bar{P}$ constructibles con regla es el cuerpo $\mathbb{Q}$.

Demostración. Llamamos φ_R al conjunto de coordenadas proyectivas (diferentes de ∞) de los puntos de $\bar{P}$ constructibles (con regla). Si M ϵ $\bar{P}$ es constructible, tenemos una sucesión $M_1, \dots, M_n = M$ de puntos de $\bar{P}$ cada uno de los cuales es constructible a partir de los precedentes y de 0, A, B, C. Mostramos entonces por recurrencia que cada punto de una sucesión de un sistema de coordenadas homogéneas (X, Y, T) con X, Y, T en $\mathbb{Q}$. Resultará entonces que las coordenadas proyectivas x = X/T e y = Y/T de cada punto de la sucesión está en $\mathbb{Q}$ o es igual a ∞.

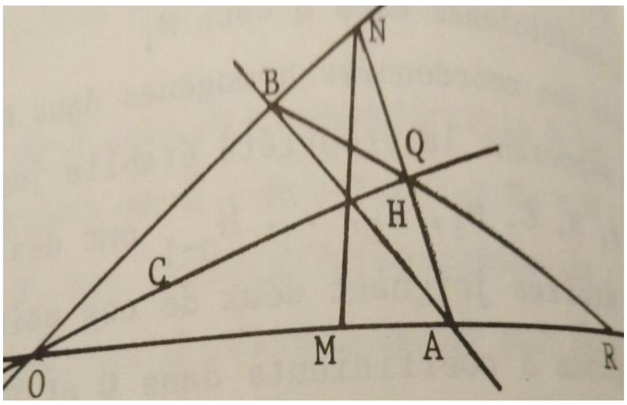
La recurrencia se hace así: M_1 es punto de intersección de dos rectas tomadas necesariamente entre las rectas 0A, 0B, 0C, AB, CA, CB. Estas rectas tienen por ecuaciones homogéneas Y = 0, X = 0, X-Y = 0, T = 0, Y-T = 0, X-T = 0. Estas ecuaciones tienen coeficientes en $\mathbb{Q}$, entonces M_1 tendrá las coordenadas homogéneas en $\mathbb{Q}$.

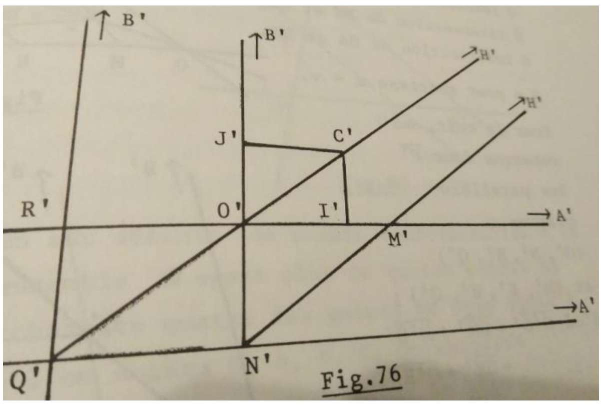


Si suponemos la propiedad cierta para n-1, los puntos 0, A, B, C, $M_1,\ldots, M_{n-1}$ tienen las coordenadas homogéneas sobre $\mathbb{Q}$, las rectas que unen dos de estos puntos tienen entonces las ecuaciones homogéneas con los coeficientes sobre $\mathbb{Q}$ y $M_n = M$ que es punto de intersección de dos de estas rectas tiene las coordenadas homogéneas en $\mathbb{Q}$. Hemos visto que $\varphi_R \subset \mathbb{Q}$.
Para establecer la inclusión contraria, es suficiente demostrar, puesto que $\mathbb{Q}$ está contenido en todos los subcuerpos de $\mathbb{R}$, que φ_R es un subcuerpo de $\mathbb{R}$. Vamos a establecer el resultado en varias etapas:
1. Mostraremos en primer lugar de la demostración que φ_R es el conjunto de abcisas (distintas de ∞) de los puntos constructibles de la recta proyectiva 0A.
Si u ϵ φ_R, u es una coordenada proyectiva de un punto M ϵ $\bar{P}$.
-Si u es la abscisa de M, u es también la abscisa de M_1, proyección de M sobre 0A (M_1 es la intersección de las rectas 0A y BM)
-Si u es la ordenada de M, u es también la ordenada del punto N, intersección de AM con 0C, u es también la abscisa de P, intersección de 0A y BN.
Establecemos del mismo modo que φ_R es el conjunto de ordenadas (distintas de ∞) de los puntos constructibles de la recta proyectiva 0B.



2. Si u ϵ φ_R entonces -u ϵ φ_R.
Sea M el punto de la recta 0A de abscisa u.
Sea H un punto de la recta AB (por ejemplo el punto de intersección de AB y OC).
Sea N el punto de intersección de 0B y MH.
Sea Q el punto de intersección de 0H y AN.
El punto R de intersección de 0A y BQ es entonces el punto de 0A de abscisa –u.
En efecto, supongamos que para la proyección central, transformamos el plano $\bar{P}$ en un plano $\bar{P}'$ de tal forma que la recta AB sea transformada en la recta infinito de $\bar{P}'$.
Sabemos entonces que un referencial proyectivo (0, A, B, C) de $\bar{P}$ corresponde a un referencial afín (0′, I′, J′) de $\bar{P}'$ y un punto M de $\bar{P}$ es transformado en M′ sobre $\bar{P}'$ con las mismas coordenadas proyectivas en los dos referenciales.
Para establecer la figura transformada sobre $\bar{P}'$, vamos a remarcar que dos rectas de P que se cortan sobre la recta AB son transformadas en dos rectas paralelas de P′. Obtenemos entonces los paralelogramos (O', M', N', Q') y (O', N', Q', R'), de donde resulta que $\overline{O'R'}$ = -$\overline{OM'}$ y así la abscisa de R' (que es también la abscisa de R) es –u.





3. Si u y v están en φ_R entonces u + v $\epsilon\ \varphi_R$

Sean M y N los puntos de la recta 0A de abscisas u y v. Usaremos el método anterior para transformar $\bar{P}$ en $\bar{P}'$.

Sobre P construimos sucesivamente:

H la intersección de AB y 0C,

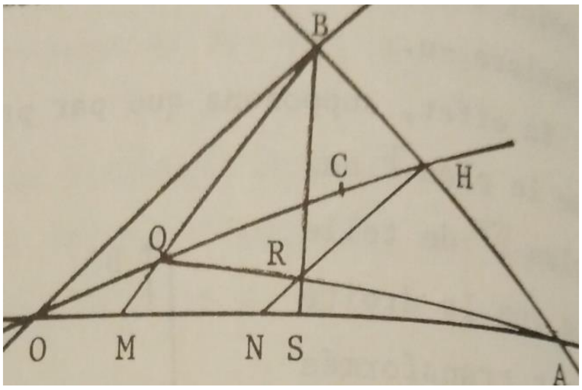
Q la intersección de BM y 0C,

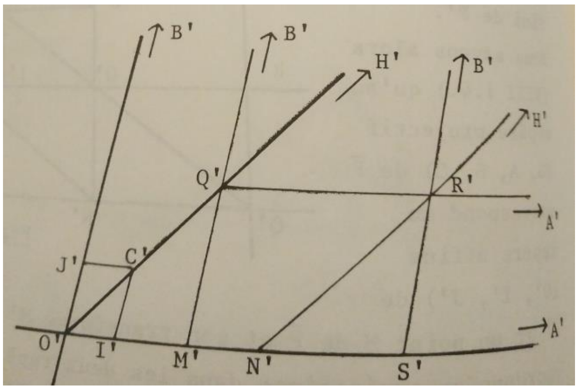
R la intersección de NH y QA,

S la intersección de 0A y BR,

S tiene por abscisa u + v.

Para comprobarlo, observamos en $\bar{P}'$ los paralelogramos: (O', N', R', Q') y (M', S', R', Q'); de donde $\overline{O'S'} = \overline{OM'} + \overline{M'S'} = \overline{OM'} + \overline{Q'R'} = \overline{O'M'} + \overline{O'N'}$ y así S' tiene por abscisa u + v.



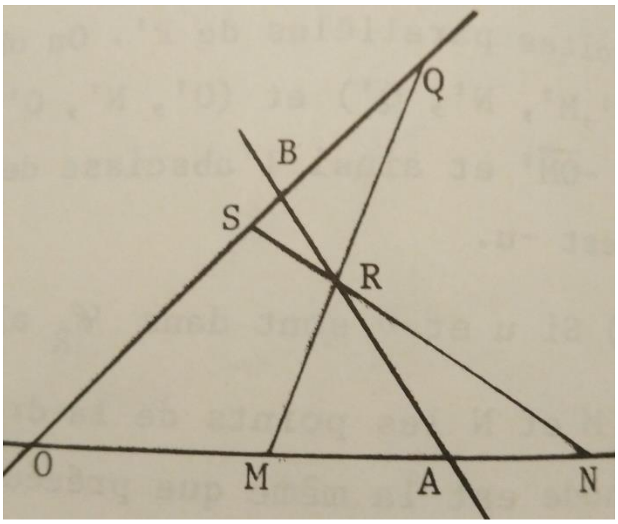


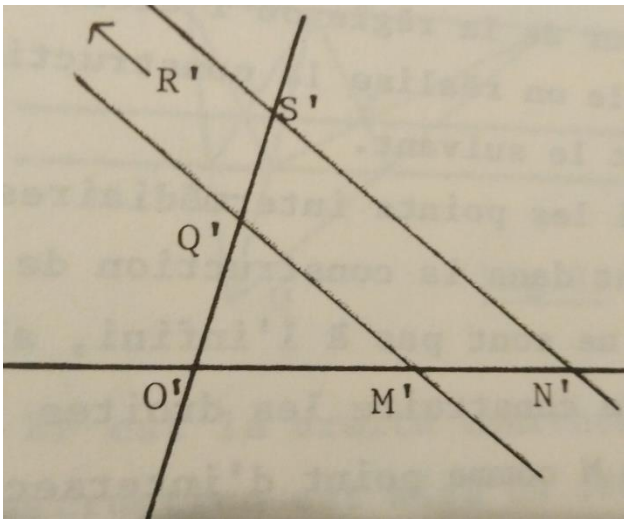
4. Si u, v, w están en φ_R con w $\neq 0$ entonces $\frac{uv}{w}\ \epsilon\ \varphi_R$.

Sean M y N los puntos de la recta 0A de abscisas w y v y sea Q el punto de la recta 0B de ordenada u. Si R es el punto de intersección de AB y MQ y S el punto de intersección de 0B y NR entonces la ordenada de S es $\frac{uv}{w}$.

Para verlo, como anteriormente, transformamos $\bar{P}$ en $\bar{P}'$ en la cual obtenemos una figura que, por el teorema de Thales:

$\overline{O'S'} = \overline{O'Q'}\,\frac{\overline{ON'}}{\overline{OM'}} = \frac{uv}{w}$ ■



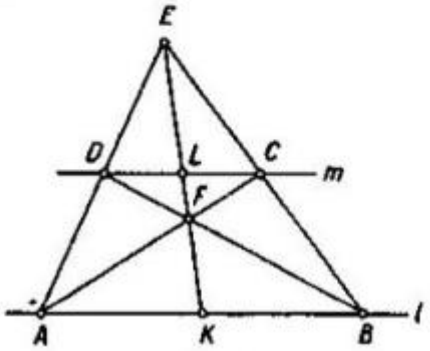


Observación: Podemos definir los puntos constructibles con regla a partir de un conjunto B formado por más de cuatro puntos de base. En este caso elegiremos cuatro de los puntos de base tres a tres no alineados, a los que llamaremos 0, A, B, C. Elegiremos A y B de manera que ningún otro punto de la base no está sobre la recta AB. Si designamos entonces por $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ las coordenadas proyectivas sobre (0, A, B, C) de los otros puntos de la base, el teorema precedente se generaliza fácilmente así:
El conjunto de las coordenadas proyectivas (diferentes de ∞) sobre (0, A, B, C) de los puntos $\bar{P}$ constructibles con regla a partir de B es el cuerpo $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

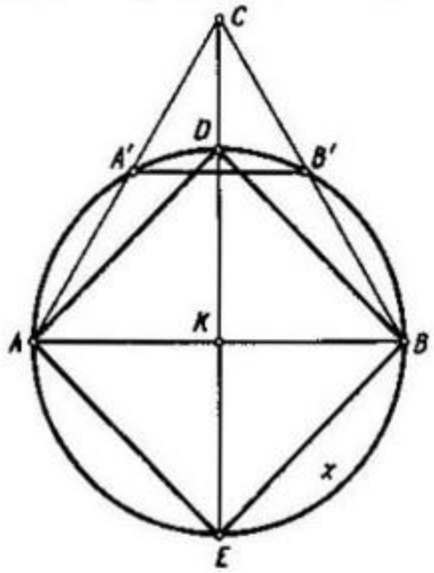
10 Teorema de Poncelet-Steiner[10]

Veremos a continuación qué puede ser construido mediante sólo una regla, si en el plano de las construcciones está trazada una circunferencia e indicado su centro.

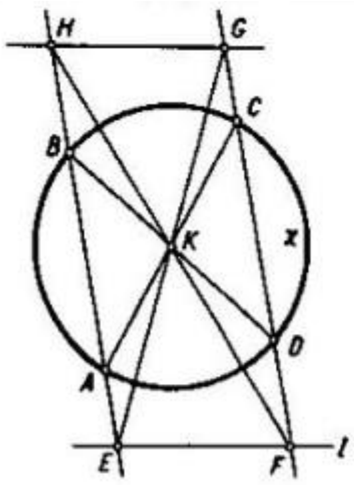
Problema 10.1 Sea dado el segmento AB y su punto medio K. Trazar por el punto dado D una recta paralela a la recta AB.
Construyamos las rectas AD, BD, BE y KE, donde E es un punto arbitrario del rayo AD. Designemos por F el punto de intersección de las rectas BD y KE. Tracemos la recta AF; ésta corta BE en cierto punto C. Construyamos la recta CD; ésta es paralela a la recta AB.



Problema 10.2 Construir un cuadrado inscrito en la circunferencia dada.
Construyamos el diámetro AB de la circunferencia χ y tracemos su cuerda $A'B'$ paralela a AB (Problema 10.1). Por el punto C de intersección de las rectas AA' y BB' tracemos la recta CK; esta cortará la circunferencia χ en los puntos D y E. El cuadrilátero ADBE es un cuadrado.

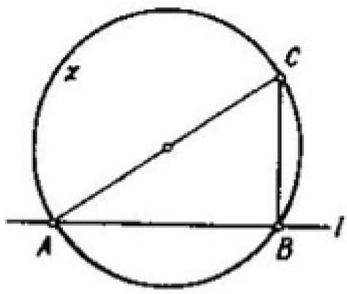


Problema 10.3 Trazar por un punto dado una recta perpendicular a la recta *l* dada.
Si *l* pasa a través de K, tenemos el problema 10.1. En caso contrario es necesario trazar primero una recta cualquiera paralela a *l*, en consecuencia de lo cual llegamos al problema de trazar una recta paralela a dos rectas dadas. La construcción es evidente de la siguiente figura. La recta GH es paralela a *l*.

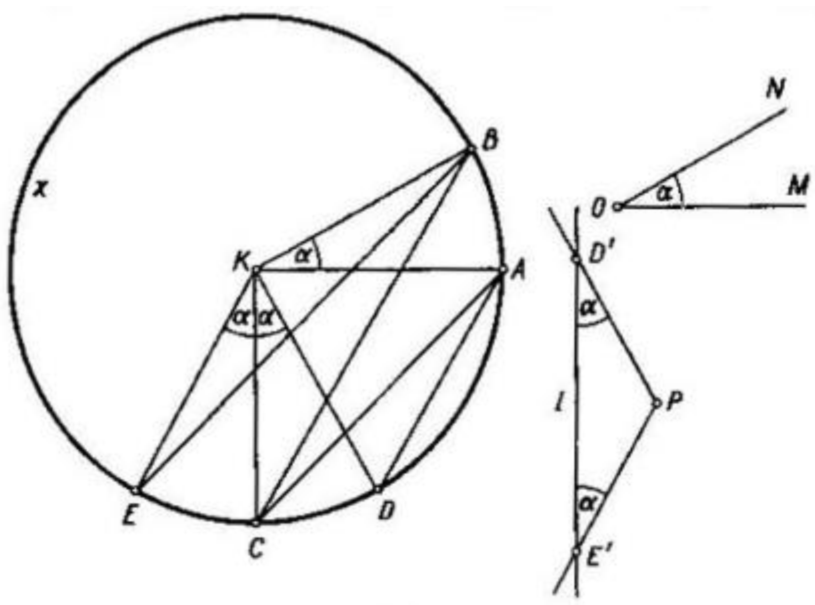


Problema 10.4 Trazar por un punto dado una recta perpendicular a la recta *l* dada.
Si *l* interseca la circunferencia χ en los puntos A y B, pero no pasa a través de su centro, entonces trazamos el diámetro AC de la circunferencia χ; la recta CB es perpendicular a *l*. Después, por el punto dado trazamos una recta paralela a CB.

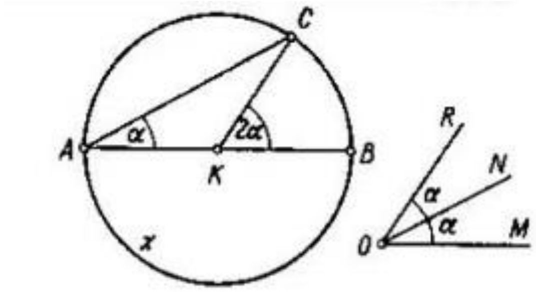
En otros casos empleamos el mismo método, pero construimos previamente una recta paralela a l y que corta la circunferencia χ en dos puntos, que no se encuentran en un mismo diámetro.



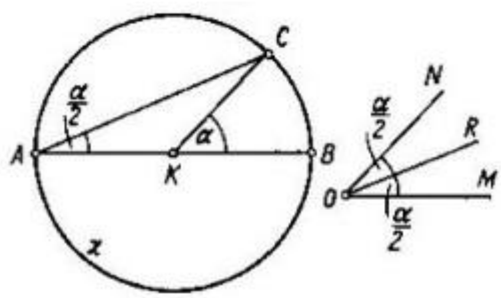
Problema 10.5 Trazar por un punto dado P una recta que forme con la recta prefijada *l* un ángulo dado MON = α.
La solución se aduce en la siguiente figura, donde KA || OM, KB || ON, KC || *l*, AD || BC, BE || AC, PD' || KD y PE' || KE.
Si el ángulo α es agudo o bien obtuso, el problema tiene dos soluciones.



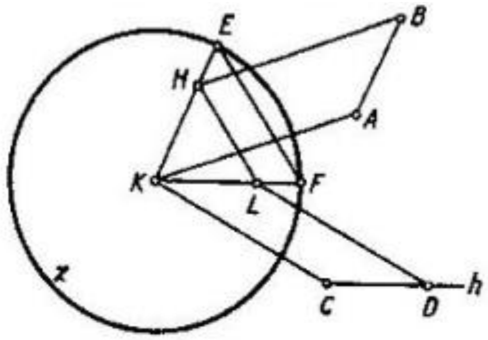
Problema 10.6 Duplicar el ángulo dado MON = α.
Tracemos paralelamente a la recta OM el diámetro AB de la circunferencia χ y paralelamente a la recta ON, la cuerda AC. Entonces $\angle BKC = 2\alpha$. El lado OR del ángulo buscado MOR es paralelo a la recta KC.



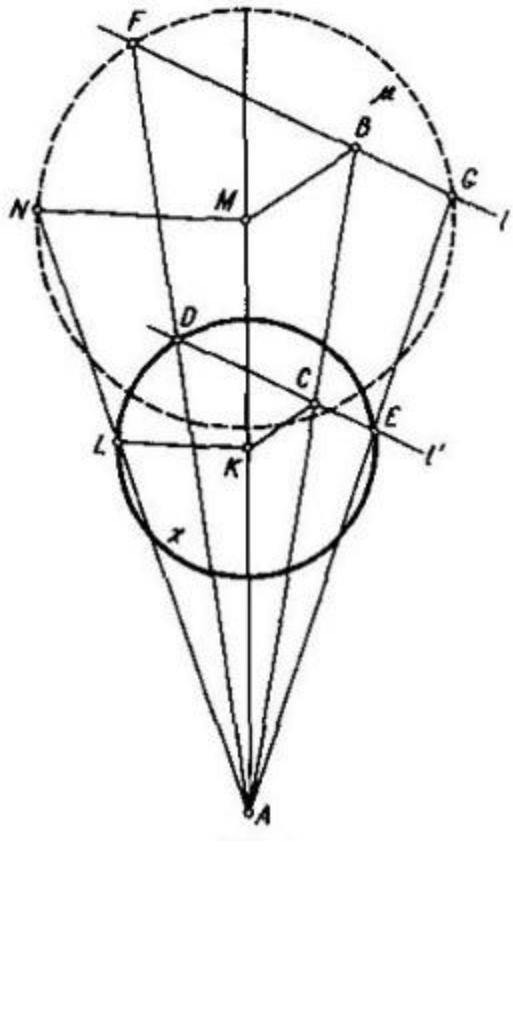
Problema 10.7 Construir la bisectriz del ángulo dado MON = α.
La construcción está ejecutada en la figura siguiente, donde AB || OM, KC || ON y OR || AC.



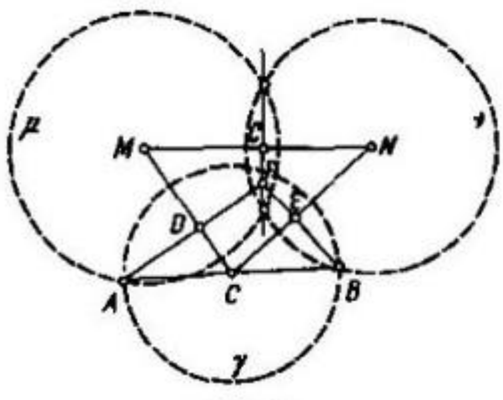
Problema 10.8 Sea dado el segmento AB y el rayo h con el vértice C. Construir sobre h el segmento CD igual a AB.
Construyamos el paralelogramo KABH y tracemos paralelamente a h el rayo KF. Sea que los rayos KH y KF intersecan la circunferencia χ en los puntos E y F. Tracemos las rectas EF y HL || EF hasta su intersección con KF en el punto L. Construyamos el paralelogramo CKLD. El segmento CD es el buscado.
La construcción se simplifica si los puntos K, A y B o el punto K y el rayo h se encuentran en una misma recta.
Esta construcción permite hallar los puntos de la circunferencia en las rectas que pasan por su centro y su radio.



Problema 10.9 Construir los puntos de intersección de la recta dada l con la circunferencia μ prefijada por el centro M y el radio MN, pero no trazada.
Tracemos el radio KL de la circunferencia χ paralelo a la recta MN. Construyamos las rectas KM y LN y hallemos el punto A de su intersección que es el centro de semejanza de las circunferencias χ y μ (en la figura está construido el centro exterior de semejanza).
Luego, encontremos la recta l', a la cuál pasará la recta l, si aplicamos a la figura dada la transformación de semejanza con el centro A, que traslada la circunferencia μ a la circunferencia χ. Para ello tomemos sobre l un punto arbitrario B, construyamos los segmentos BA y BM, tracemos por K la recta KC || MB hasta que interseque con AB en el punto C y a través de C tracemos l' || l. Sea que l' corte la circunferencia χ en los puntos D y E. Las rectas AD y AE cortan la recta l en los puntos F y G buscados.
Si los puntos D y E coinciden, entonces l hace contacto con la circunferencia μ. Si l' no tiene puntos comunes con la circunferencia χ, entonces l no tiene puntos comunes con la circunferencia μ.
Si el punto A es ínfimamente alejado, entonces en lugar del centro exterior hay que tomar el centro interior de semejanza de las circunferencias χ y μ.



Problema 10.10 Sean dado los centros M y N de las circunferencias μ y ν y sus radios. Construir los puntos de intersección de estas circunferencias.
Empecemos por la construcción del eje radical de las circunferencias dadas. Sea A un punto arbitrario de la circunferencia μ, B, un punto arbitrario de la circunferencia ν, además, por lo menos, uno de los puntos A y B se encuentran en la recta MN.
Construyamos el segmento AB, hallemos su punto medio C y tracemos las rectas MN, MC, NC, AD ⊥ CM, BE ⊥ CN. Sea que las rectas dadas AD y BE se cortan en el punto F; construyamos FG ⊥ MN. La recta FG es el eje radical de las circunferencias μ y ν. En efecto, al construir sobre el segmento AB, como en un diámetro, la circunferencia γ, advertimos que el punto F es un centro radical de las circunferencias μ, ν y γ, por consiguiente, este punto se encuentra sobre el eje radical de las circunferencias μ y ν.
Puesto que el eje radical de dos circunferencias intersecantes pasa por los puntos de su intersección, entonces el problema dadose reduce al interior: hallazgo de los puntos de intersección de las circunferencias (μ o bien ν) y la recta (FG).



Teorema 10.11 Todo punto constructible con regla y compás se puede construir solo con regla, si en el plano de las construcciones está trazada una circunferencia e indicado su centro.
Demostración Cada punto constructible se toma de los anteriores mediante la intersección de dos rectas constructibles que pasan por puntos constructibles, para lo cual no se utiliza el compás; mediante la intersección de una recta constructible y una circunferencia centrada en un punto constructible y con radio la distancia entre dos puntos constructibles, resuelto en el problema 10.9; y como intersección de circunferencias con centros constructibles y radios la distancia entre dos puntos constructibles, resuelto en el problema 10.10 ■

BIBLIOGRAFÍA

[1] Théorie des corps. La règle et le compas. Jean-Claude Carrega (1989)

[2] Apuntes de Ecuaciones Algebraicas. José Asensio (2016)

[3] Galois Theory (Capítulos 5 y 17). Ian Stewart (1972)

[4] http://gaussianos.com/construcciones-con-regla-y-compas-i-introduccion-y-primeras-construcciones/

[5] Corps conmutatifs et théorie de Galois (Capítulo 11). P. Tauvel (2007)

[6] http://gaussianos.com/construcciones-con-regla-y-compas-iii-los-poligonos-regulares/

[7] http://gaussianos.com/construcciones-con-regla-y-compas-iv-la-construccion-del-heptadecagono/

[8] Construcciones geométricas mediante un compás. A. N. Kostovski (1980)

[9] https://revistadelprofesor.files.wordpress.com/2012/05/menares_ac3b1o8_nro1.pdf

[10] La regla en construcciones geométricas. A. S. Smogorzhevski (1981)

[11] Geometría proyectiva. Luis A Santaló (1977)

[12] https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_%CF%86_de_Euler

[13] https://rodas5.us.es/file/f689a028-feaa-49a8-899b-fdcf502bc39b/1/tema1.pdf