UNIVERSIDAD DE MURCIA

Grado en Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

PRODUCTOS INFINITOS EN VARIABLE COMPLEJA

Miguel Marín López

Curso 2013-2014

PRODUCTOS INFINITOS EN VARIABLE COMPLEJA

Miguel Marín López
Estudiante Facultad de Matemáticas
Universidad de Murcia

dirigido por

Bernardo Cascales Salinas y Gustavo Garrigós Aniorte

Contenidos

Introduction

Infinite products, as their name suggest, must be understood in parallel to the numerical series, but changing partial sums by partial products. They constitute a fundamental tool in *Complex Analysis*, as the famous **Weierstrass's Factorization theorem**, 2.2.3, allows us to represent all holomorphic functions like infinite products identifying clearly their zeros.

In **chapter 1**, we determine in which circumstances an infinite product of complex numbers is convergent, whose definition, 1.1.1, leans in the concept of *strictly convergent product*. The condition of a product being strictly convergent, $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ with $z_k \in \mathbb{C}$, is equivalent to the series being convergent $\sum_{k=1}^{\infty} Log\, z_k$, in the sense of the numerical series, and that every $z_k \neq 0$. This equivalence is proved in proposition 1.1.3, and it will be our exit point needed to define *absolutely convergent product*, to demonstrate that this implies that the product is convergent, 1.1.4, and that the absolutely convergent infinite products are also *unconditionally convergent*, 1.1.6.

Once we have become familiar with the infinite product concept for complex numbers the next natural step is to make infinite products of functions, we deal with this issue in section 1.2. Once we have defined the concept of punctual convergence and uniform convergence, 1.2.1, for infinite products, we try to find a sufficient or equivalent condition to the uniform convergence that allows its verification in a relatively simple way.

We cover this last issue in proposition 1.2.3, from the one a really useful, when trying to obtain the uniform convergence of an infinite product, sufficient condition is deduced.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z) - 1| \text{ converges uniformly} \Rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z) \text{ converges uniformly}$$

We will focus on continuous functions (respectively holomorphics), and will be proved that the infinite product of continuous (holomorphics) functions is a continuous (holomorphic) function. This can be seen in 1.2.4 and 1.2.5.

The **Fundamental theorem of algebra** establishes that all nonnull complex polynomial admits a single representation in the form

$$p(z) = c(z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\dots(z-\alpha_n)^{m_n}$$

where $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. This representation, which does explicit the zeros and their corresponding multiplicities, m_i, reveals more information than the usual representation. The objective of this work is to obtain an analogous representation for holomorphics functions in an open set $\Omega \subset \mathbb{C}$. and in particular for entire functions.

If $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ is not identically null in a connected open set $\Omega \subset \mathbb{C}$, the set of its zeros $\mathscr{Z}(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ does not have accumulation points in Ω (see lemma A.1.6), and therefore is at the most numerable (see lemma A.1.5). In addition, each $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$ has a multiplicity $m(f,\alpha) \in \mathbb{N}$ (see A.1.2).

The first task we will approach in **chapter 2** is to solve the inverse problem. Given a set $M \subset \Omega$ without accumulation points in Ω (i.e. $M' \cap \Omega = \emptyset$) and a function $m : M \to \mathbb{N}$, to prove that there exists $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ that $\mathscr{Z}(f) = M$ and each $\alpha \in M$ is a zero of f with multiplicity $m(\alpha)$ (corollary 2.2.2 and theorem 2.2.5). If the set M is finite, the trivial solution of this problem provides a complex polynomial as before.

The second task will be to characterize the set of functions

$$\{f\ in \mathscr{H}(\Omega) : \mathscr{Z}(f) = M,\ \ m(f,\alpha) = m(\alpha)\ \ \forall \alpha \in M\}$$

We notice that if $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ has a finite number of zeros $\mathscr{Z}(f) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ with multiplicities $m_j = m(f,\alpha_j)$, $1 \le j \le n$, we can create a polynomial $p(z) = (z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\dots(z-\alpha_n)^{m_n}$ which has the same zeros and multiplicities that f has. Thus, the quotient $f(z)/p(z)$ presents avoidable singularities (see lemma A.1.10) in each $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$ and by eliminating them, is obtained $G \in \mathscr{H}(\Omega)$ without zeros that makes valid the next factorization

$$f(z) = G(z)(z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\dots(z-\alpha_n)^{m_n}$$

Therefore, the objective is to get an analogous factorization for holomorphics functions with infinite zeros, $M = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, replacing the polynomial p by an infinite product that makes the zeros and the multiplicities explicit. This will be obtained thanks to **Weierstrass's Factorization theorem**, 2.2.3. We will be able to construct holomorphics functions in $D(0,1)$ that do not admit any holomorphic extension in any point of the border (see example page 23).

In general, an infinite product $\prod_{k=1}^{\infty}(z-\alpha_k)^{m_k}$ is not convergent. The convergence will be obtained considering products $\prod_{k=1}^{\infty} A_k(z)$ of special factors $A_k(z)$ (see definition 2.1.1) that each one has only a simple zero in α_k.

In section 2.3 we will see **Mittag-Leffler theorem**, 2.3.6, that can be considered a kind of generalization of the Weierstrass's Factorization theorem because it obtains a numerical series that represents a meromorphic function, in which the poles of the function and their corresponding main parts can be quickly identified (see A.1.3).

We will finish the chapter with a couple of excellent examples of the theory of infinite products. In section 2.4 we will do the factorization of the **Sine** function, more precisely $\sin(\pi z)$, as product of its zeros, and we will make use of this development when calculating Wallis product

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots=\frac{\pi}{2}$$

In section 2.5 we will deal with the *Blaschke products*

$$B(z)=z^p\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \qquad z\in D(0,1)$$

that allows us to create holomorphic and bounded functions in the unit disc $D(0,1)$ that have a predetermined succession of zeros, $(\alpha_k)_k$, verifying $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<\infty$.

In **chapter 3**, we will study a couple of famous functions in *Complex Analysis*, which are the **Euler's Gamma** function and the **Riemann's Zeta** function. Our main reference will be [13], but alternative references for some of the proofs and formulas will be provided during the chapter.

The first one will be introduced as a generalization of the factorial function, deducing a functional equation that the factorial function must satisfy, and considering that the function we want to find should be as *smooth* as possible.
We calculate the poles of the function Γ, all simple ones, and we check that it does not have zeros. Consequently, the function $1/\Gamma$ is an entire function and has zeros where Γ has its poles, being all of them of multiplicity 1. Therefore, the Weierstrass's Factorization theorem 2.2.3 allows us to give an expression of $1/$ *Gamma* from its zeros

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{g(z)}z\prod_{k=1}^{\infty}E_{\rho_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)$$

and consequently an expression of Γ from its poles, 3.1.1.

Next we enunciate and prove some of the most famous formulas, like *Euler's reflection formula*, *Stirling's formula* or *Gauss's multiplication formula*, in which takes part the Γ function, and we prove its integral expression, 3.1.8, with which usually is defined in *Real Analysis*:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \qquad \text{si } Re(z) > 0$$

If it is desired to know some formulas in the ones takes part the Γ function, it is recommended to see [1, p. 255]. In this book appears a great compilation of the properties of Γ function and some functions that are built from it, like Beta function, Digamma function, Poligamma function, etc.

We introduce ζ Function using its classic definition in a numerical series

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \qquad \text{si } Re(z) > 1$$

and straightaway we prove that $\zeta(z)$ is an holomorphic function, proposition 3.2.2, and that can be expressed like infinite product of primes, theorem 3.2.3.

After that, we will prove that ζ can be extended analytically to a meromorphic function in the plane, theorem 3.2.8, with an only simple pole in $z = 1$, whose *trivial zeros* are in $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$ and these are the only zeros in the halfplane $Re(z) < 0$, corollary 3.2.11. In addition, we will see that the remainding of zeros, non-trivial zeros, are in the *critical band* and will enunciate the **Riemann's Hypothesis**, which conjectures that the position of non-trivial zeros is exactly the *critical line*.

We will prove the *Riemann's functional equation*, 3.2.10, which connects the three great functions that we have developed in this work, Sine, Gamma and Zeta functions.

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\,\text{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)$$

From this and the Euler's reflection formula, it can be proved another functional equation that only uses the Gamma and Zeta functions, 3.2.12.

We will see, but no prove, how to put the Riemann's Zeta function as an infinite product with the Weierstrass's factors, theorem 3.2.13

$$\zeta(z) = \frac{e^{(\log(2\pi)-1-\gamma/2)z}}{2(z-1)\Gamma(1+z/2))} \prod_{\rho \in A} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho}$$

where A is the set of non-trivial zeros of the Zeta function.

We will finish with a brief remark about the relationship between the Zeta function and the famous **prime numbers theorem**, 3.2.14, which provides an asymptotic relation of the number of primes in $[0,x]$.

Finally, we include an appendix divided in two sections. In section A.1 are compiled some important definitions and results of *Complex Analysis* that were studied in the subject of the Degree "*Functions of a complex variable*" and which we use during the development of this paper. Among them is the Prolongation principle A.1.7 and the Residue theorem A.1.11.

In section A.2 we include some theory on complex parameter-dependent integrals that will be helpful when proving the holomorphy of the integral representations of the Gamma function and Zeta function, that we will see in 3.1.8 and 3.2.6 respectively.

Introducción

Los **productos infinitos**, como su nombre sugiere, deben entenderse en paralelo a las series numéricas, pero cambiando sumas por productos parciales. Constituyen una herramienta fundamental en en *Análisis complejo*, donde el célebre **Teorema de Factorización de Weierstrass**, 2.2.3, permite representar toda función holomorfa como producto infinito identificando claramente sus ceros.

En el **capítulo 1** veremos cuando entendemos que un producto infinito de números complejos es convergente, cuya definición, 1.1.1, se apoya en el concepto de *producto estrictamente convergente*. La condición de que un producto sea estrictamente convergente, $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ con $z_k \in \mathbb{C}$, es equivalente a que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} Log\, z_k$ sea convergente, en el sentido de las series numéricas, y que cada $z_k \neq 0$. Esta equivalencia es la proposición 1.1.3 y constituye el punto de partida necesario para definir un *producto absolutamente convergente* y demostrar que esto implica que el producto es convergente, 1.1.4, y que los productos infinitos absolutamente convergentes son también *incondicionalmente convergentes*, 1.1.6.

Una vez nos familiarizamos con el concepto de producto infinito para números complejos el siguiente paso natural es hacer productos infinitos de funciones, de esto nos ocupamos en la sección 1.2. Una vez definimos el concepto de convergencia puntual y convergencia uniforme, 1.2.1, para productos infinitos, debemos encontrar alguna condición suficiente o equivalente para la convergencia uniforme que permita la comprobación de la misma de una manera relativamente sencilla.

De esto último nos ocupamos en la proposición 1.2.3, de la cual se deduce una condición suficiente realmente útil a la hora de intentar obtener la convergencia uniforme de un producto infinito

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z) - 1| \text{ converge uniformemente} \Rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z) \text{ converge uniformemente}$$

Nos centraremos en funciones continuas (respectivamente holomorfas) y demostraremos que el producto infinito de funciones continuas (holomorfas) es una función continua (holomorfa). Esto se puede ver en 1.2.4 y 1.2.5.

El **Teorema Fundamental del Álgebra** establece que todo polinomio complejo no nulo admite una única representación de la forma

$$p(z) = c(z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\dots(z-\alpha_n)^{m_n}$$

donde $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Esta representación, al hacer explícitos los ceros y las correspondientes multiplicidades, los m_i, revela más información que la representación habitual. El objetivo de este trabajo es conseguir una representación análoga para funciones holomorfas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y en particular para funciones enteras.

Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no es idénticamente nula en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se sabe que el conjunto de sus ceros $\mathscr{Z}(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ no tiene puntos de acumulación en Ω (ver lema A.1.6), por tanto es a lo sumo numerable (ver lema A.1.5). Además cada $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$ tiene una multiplicidad $m(f,\alpha) \in \mathbb{N}$ (ver A.1.2).

La primera tarea que abordaremos en el **capítulo 2** es la de resolver el problema inverso. Dado un conjunto $M \subset \Omega$ sin puntos de acumulación en Ω (i.e. $M' \cap \Omega = \emptyset$) y una función $m : M \to \mathbb{N}$, se demuestra que existe $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $\mathscr{Z}(f) = M$ y cada $\alpha \in M$ es un cero de f con multiplicidad $m(\alpha)$ (corolario 2.2.2 y teorema 2.2.5). Si el conjunto M es finito, la solución trivial de este problema la proporciona un polinomio complejo como el antes mencionado.

La segunda tarea será caracterizar el conjunto de funciones

$$\{f \in \mathscr{H}(\Omega) : \mathscr{Z}(f) = M,\ \ m(f,\alpha) = m(\alpha)\ \ \forall \alpha \in M\}$$

Notar que si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tiene un número finito de ceros $\mathscr{Z}(f) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ con multiplicidades $m_j = m(f, \alpha_j)$, $1 \le j \le n$, podemos formar un polinomio $p(z) = (z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\dots(z-\alpha_n)^{m_n}$ que tiene los mismos ceros que f con las mismas multiplicidades. De este modo el cociente $f(z)/p(z)$ presenta singularidades evitables (ver lema A.1.10) en cada $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$ y, al eliminarlas, se consigue una función $G \in \mathscr{H}(\Omega)$ sin ceros que hace válida la factorización

$$f(z) = G(z)(z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\dots(z-\alpha_n)^{m_n}$$

El objetivo es, por tanto, conseguir una factorización análoga para funciones holomorfas con infinitos ceros, $M = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, reemplazando el polinomio p por un producto infinito que haga explícitos los ceros y las multiplicidades. Esto se conseguirá gracias al **Teorema de Factorización de Weierstrass**, 2.2.3. Con él podremos construir funciones holomorfas en $D(0,1)$ que no admiten extensión holomorfa en ningún punto de la frontera (ver ejemplo página 23).

En general un producto infinito de la forma $\prod_{k=1}^{\infty}(z-\alpha_k)^{m_k}$ no es convergente. La convergencia se conseguirá considerando productos $\prod_{k=1}^{\infty} A_k(z)$ de factores especiales $A_k(z)$ (ver definición 2.1.1) que tienen cada uno de ellos un único cero simple en α_k.

En la sección 2.3 veremos el **Teorema de Mittag-Leffler**, 2.3.6, este puede considerarse una especia de generalización del Teorema de Factorización de Weierstrass pues consigue una expresión en serie numérica de una función meromorfa, en la cual se pueden identificar rápidamente los polos de la función y sus correspondientes partes principales (ver A.1.3).

Terminaremos el capítulo con un par de ejemplos relevantes en lo que a productos infinitos se refiere. En la sección 2.4 nos ocuparemos de factorizar la función **Seno**, más concretamente $\operatorname{sen}(\pi z)$, como producto de sus ceros y aplicaremos este desarrollo para el cálculo del Producto de Wallis

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots=\frac{\pi}{2}$$

En la sección 2.5 trataremos los llamados *productos de Blaschke*

$$B(z)=z^p\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\qquad z\in D(0,1)$$

que nos permiten crear funciones holomorfas y acotadas en el disco unidad $D(0,1)$ que tengan una sucesión de ceros predeterminados, $(\alpha_k)_k$, cumpliendo $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<\infty$.

En el **capítulo 3** estudiaremos un par de funciones célebres del *Análisis Complejo*, estas son la función **Gamma de Euler** y la función **Zeta de Riemann**. Nuestra referencia base será [13], pero se proporcionarán referencias alternativas para algunas de las demostraciones y fórmulas que se muestren.

La primera de ellas la introduciremos como una generalización del factorial, deduciendo una ecuación funcional que debe cumplir la función factorial y teniendo en cuenta que la función que queremos hallar debe de ser lo más *suave* posible.

Calculamos los polos de la función Γ, todos simples, y vemos que no tiene ceros. En consecuencia, la función $1/\Gamma$ es entera y tiene ceros donde la función Γ tiene sus polos, siendo todos ellos de multiplicidad 1. Por tanto, el Teorema de Factorización de Weierstrass 2.2.3 nos permite dar una expresión de $1/\Gamma$ a partir de sus ceros

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{g(z)} z \prod_{k=1}^{\infty} E_{\rho_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)$$

y en consecuencia, una expresión de Γ a partir de sus polos, 3.1.1.

Seguidamente enunciamos y demostramos algunas de las fórmulas más famosas, como la *Fórmula de los complementos*, la *Fórmula de Stirling*, la *Fórmula de multiplicación de Gauss*, en las que interviene la función Γ, y demostramos su expresión integral, 3.1.8, con la que normalmente se la define en el *Análisis Real*:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \qquad \text{si } Re(z) > 0$$

Si se quiere conocer alguna fórmula más en la que intervenga la función Γ se recomienda ver [1, p. 255], en este libro aparece una gran recopilación de las propiedades de la función Γ y algunas funciones que se construyen a partir de ella como son la función Beta, función Digamma, función Poligamma, etc.

La función ζ la introducimos usando su definición clásica de serie

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \qquad \text{si } Re(z) > 1$$

e inmediatamente demostramos que así definida es una función holomorfa, proposición 3.2.2, y que puede expresarse como producto infinito de primos, teorema 3.2.3.

A continuación, demostraremos que ζ puede extenderse analíticamente a una función meromorfa en el plano, teorema 3.2.8, con un único polo simple en $z = 1$, cuyos *ceros triviales* se encuentran en $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$ y estos son los únicos ceros en el semiplano $Re(z) < 0$, corolario 3.2.11. Además veremos que el resto de ceros, ceros no triviales, se encuentran en la llamada *banda crítica* y enunciaremos la **Hipótesis de Riemann**, la cual conjetura que la posición de los ceros no triviales es exactamente la llamada *línea crítica*.

Demostraremos la *ecuación funcional de Riemann*, 3.2.10, la cual relaciona las tres grandes funciones que hemos desarrollado en este trabajo, función Seno, Gamma y Zeta.

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)$$

A partir de esta y de la Fórmula de los Complementos de la función Gamma se puede demostrar otra ecuación funcional que solamente hace uso de las funciones Gamma y Zeta, corolario 3.2.12.

Veremos, sin demostración, como poner la función Zeta de Riemann como producto infinito con los factores de Weierstrass, teorema 3.2.13

$$\zeta(z) = \frac{e^{(\log(2\pi)-1-\gamma/2)z}}{2(z-1)\Gamma(1+z/2))} \prod_{\rho\in A} \left(1-\frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho}$$

donde A es el conjunto de ceros no triviales de la función Zeta.

Terminaremos con un pequeño comentario sobre su relación con el famoso **teorema de los números primos**, 3.2.14, que nos proporciona una relación asintótica del número de primos que hay en la recta $[0,x]$.

Finalmente, incluimos un apéndice dividido en dos secciones. En la sección A.1 se recogen algunas definiciones y resultados importantes del *Análisis Complejo* que fueron estudiados en la asignatura del Grado *Funciones de variable compleja* y que usaremos durante el desarrollo del trabajo. Entre ellos están el Principio de Identidad A.1.7 y el Teorema de los Residuos A.1.11.

En la sección A.2 incluimos algo de teoría sobre integrales dependientes de un parámetro complejo que nos será de gran ayuda para demostrar la holomorfía de las representaciones integrales de la función Gamma de Euler y la función Zeta de Riemann, que veremos en 3.1.8 y 3.2.6 respectivamente.

Capítulo 1

Preliminares

CONTENIDOS

Presentaremos en este capítulo el concepto de producto infinito de números complejos, el cual debe entenderse en paralelo a las series numéricas, pero cambiando sumas por productos parciales. Seguidamente diremos qué se entiende por producto infinito convergente y daremos algunas condiciones tanto equivalentes como suficientes para la convergencia.

A continuación estudiaremos los productos infinitos de funciones y el concepto de convergencia uniforme del producto infinito sobre un conjunto S de un producto infinito. Terminaremos viendo qué ocurre con el producto inifinito de funciones holomorfas $(f_k)_k$, el cual define una función holomorfa cuyos ceros son la unión de los ceros de las f_k.

Las referencias principales para este capítulo son [4] apuntes sobre *Productos infinitos*, [6, p. 164 - 167], [10, p. 280 - 283], [13, p. 170 - 175].

1.1. Productos infinitos de números complejos

Un producto infinito se entiende como el límite de un producto finito, dónde dicho límite se hace en el índice superior del producto

$$\prod_{k=1}^{\infty} z_k = \lim_{m} \prod_{k=1}^{m} z_k$$

es decir, que al igual que las series se entienden como límites de sumas parciales, un producto infinito se entiende como límite de productos parciales.

Comenzaremos definiendo la noción de convergencia de un producto infinito de números complejos de forma adecuada para los fines que se persiguen.

Definición 1.1.1. Sea $(z_k)_k$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que:

- El producto $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ es *estrictamente convergente* si $\exists$ $\text{lím}_m \prod_{k=1}^{m} z_k = u \neq 0$ y definimos
$$\prod_{k=1}^{\infty} z_k := u$$
- El producto $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ es *convergente* si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{k=n+1}^{\infty} z_k$ es estrictamente convergente y definimos
$$\prod_{k=1}^{\infty} z_k := z_1 z_2 \dots z_n \prod_{k=n+1}^{\infty} z_k$$

Observación. 1. Es obvio a partir de la definición que si un producto es estrictamente convergente, entonces es convergente.
2. Se tiene que si $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ es convergente, entonces:
$$\prod_{k=1}^{\infty} z_k = 0 \Leftrightarrow 1 \leq \#\{k : z_k = 0\} < \infty$$
3. Si $z_k \neq 0 \, \forall k$ entonces las definiciones de convergente y estrictamente convergente son equivalentes.
4. Diremos que un producto infinito es divergente si no es convergente.
5. Para un producto infinito se cumple
$$\prod_{k=1}^{\infty} z_k \quad \text{es estrictamente convergente} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k} \quad \text{es estrictamente convergente}$$
La demostración de esto es sencilla, simplemente hay que tomar límites y saber que el producto finito de inversos es el inverso de un producto finito
$$0 \neq u = \text{lím}_m \prod_{k=1}^{m} z_k \Leftrightarrow 0 \neq \frac{1}{u} = \frac{1}{\text{lím}_m \prod_{k=1}^{m} z_k} = \text{lím}_m \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{z_k}$$

Ejemplo. 1. Si tomamos la sucesión $z_1 = 1/2$ y $z_k = \frac{k^2}{k^2-1}$ si $k \neq 1$ entonces el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ es estrictamente convergente y por tanto convergente. Veámoslo:
$$\text{lím}_m \prod_{k=1}^{m} z_k = \text{lím}_m \left(\frac{1}{2}\frac{4}{3}\frac{9}{8} \cdots \frac{m^2}{m^2-1} \right) = \text{lím}_m \left(\frac{m}{m+1} \right) = 1$$
La segunda igualdad es sencilla de probar por inducción.

2. Si tomamos la sucesión $z_k = 1/k \neq 0$ entonces el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ diverge, para verlo nos basta ver que el producto no es estrictamente convergente y por una observación anterior tendremos que no es convergente
$$\lim_m \prod_{k=1}^{m} z_k = \lim_m \left(\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{m}\right) = \lim_m \frac{1}{m!} = 0$$
Diremos que el producto infinito diverge a 0.
3. Si tomamos la sucesión $z_k = \frac{k+1}{k} \neq 0$ entonces el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ diverge, nos basta ver que el producto no es estrictamente convergente
$$\lim_m \prod_{k=1}^{m} z_k = \lim_m \left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdots\frac{m+1}{m}\right) = \lim_m (m+1) = \infty$$
Diremos que el producto diverge a ∞.

Proposición 1.1.2. *Si el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ es convergente hacia u entonces:*
1. *Para cada $n \geq 1$ el producto $\prod_{k=n+1}^{\infty} z_k$ converge y su valor R_n cumple $z_1 z_2 \dots z_n R_n = u$*
2. $\lim_n R_n = 1$ *y* $\lim_n z_n = 1$

Demostración. Por definición de convergente $\exists n$ tal que $\prod_{k=n+1}^{\infty} z_k = R_n \neq 0$ es estrictamente convergente. Cuando $1 \leq j < n$ es clara la convergencia del producto
$$R_j = \prod_{k=j+1}^{\infty} z_k = z_{j+1} z_{j+2} \cdots z_n \prod_{k=n+1}^{\infty} z_k = z_{j+1} z_{j+2} \cdots z_n R_n$$
que cumple $z_1 z_2 \dots z_j R_j = z_1 z_2 \dots z_n R_n = u$ por definición.
Para $j \geq n$ también es inmediata la convergencia estricta del producto
$$R_j = \prod_{k=j+1}^{\infty} z_k = \frac{z_{n+1} z_{n+2} \cdots z_j \prod_{k=j+1}^{\infty} z_k}{z_{n+1} z_{n+2} \cdots z_j} = \frac{R_n}{z_{n+1} z_{n+2} \cdots z_j}$$
que también cumple $z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1} z_{n+2} \dots z_j R_j = z_1 z_2 \dots z_n R_n = u$ por definición.
Pasando al límite en la expresión anterior cuando $j \to \infty$ se obtiene
$$\lim_j R_j = \lim_j \frac{R_n}{z_{n+1} z_{n+2} \cdots z_j} = \frac{R_n}{R_n} = 1$$
la cual es válida pues al tomar límite en j se tiene $j \geq n$. De esto se sigue que
$$\lim_j z_j = \lim_j \frac{R_{j-1}}{R_j} = 1$$
□

En la siguiente proposición $Log\, z$ denota el logaritmo principal de $z \neq 0$ determinado por $-\pi < Im(Log\, z) \leq \pi$.

Proposición 1.1.3. *Una condición necesaria y suficiente para que el producto $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ sea estrictamente convergente es que $z_k \neq 0 \forall k \in \mathbb{N}$ y que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} Log\, z_k$ sea convergente.*

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $z_k \neq 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$ entonces el logaritmo principal está definido en cada z_k y podemos considerar la serie $\sum_{k=1}^{\infty} Log\, z_k$.

Supongamos que es convergente, es decir, que existe $\lim_m \sum_{k=1}^{m} Log\, z_k = S$ entonces por la continuidad de la función exponencial se tiene que existe $\lim_m exp\,(\sum_{k=1}^{m} Log\, z_k) = e^S \neq 0$. Ahora por las propiedades de la exponencial queda

$$\lim_m exp\left(\sum_{k=1}^{m} Log\, z_k\right) = \lim_m \prod_{k=1}^{m} exp(Log\, z_k) = \lim_m \prod_{k=1}^{m} z_k = e^S \neq 0$$

por tanto el producto infinito es estrictamente convergente.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ es estrictamente convergente entonces $\pi_m = \prod_{k=1}^{m} z_k \to u \neq 0$, es inmediato que $z_k \neq 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$ pues si no lo fuese entonces $u = 0$.
Sea $A(z)$ un argumento continuo de z definido en $\Omega_u = \mathbb{C} \setminus \{tu : t \leq 0\}$. Como $u \neq 0$ y $\pi_m \to u$ entonces existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_m \in \Omega_u \;\; \forall m \geq m_0$ luego la sucesión $\theta_m = A(\pi_m) \to \theta = A(u)$ pues A es continua.

Podemos considerar la sucesión

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} Log\, z_k$$

y esta cumple

$$\exp(S_m) = \prod_{k=1}^{m} \exp(Log\, z_k) = \prod_{k=1}^{m} z_k = \pi_m = \exp(\log|\pi_m| + i\theta_m)$$

entonces $S_m = \log|\pi_m| + i\theta_m + 2\pi i t_m$ con $t_m \in \mathbb{Z}$ y entonces

$$Log\, z_{m+1} = S_{m+1} - S_m = \log|\pi_{m+1}| - \log|\pi_m| + i(\theta_{m+1} - \theta_m) + 2\pi i(t_{m+1} - t_m) =$$

$$= \log|z_{m+1}| + i(\theta_{m+1} - \theta_m) + 2\pi i(t_{m+1} - t_m)$$

Por la Proposición 1.1.2 se tiene que $\lim_m z_m = 1$ y Log es continuo en 1, luego tomando límites en la igualdad anterior queda que

$$0 = 0 + i(\theta - \theta) + 2\pi i \lim_m (t_{m+1} - t_m)$$

por tanto $t_{m+1} - t_m \to 0$ y entonces existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t_m = t$, constante, $\forall m \geq m_1$. Y así, tomando límites en m, hacemos $m \geq \max\{m_0, m_1\}$ y queda

$$S_m \to \log|u| + i\theta + 2\pi i t$$

por lo que la serie es convergente. □

Proposición 1.1.4. *Dado un producto infinito de números complejos* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ *se verifica* $a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c) \Rightarrow d)$*:*

a) La serie $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k| < \infty$*.*
b) Existe $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\sum_{k=n+1}^{\infty}|Log(1+z_k)| < \infty$*.*
c) El producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|z_k|)$ *es convergente.*
d) El producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ *es convergente.*

Demostración. Cada una de las propiedades $a), b), c)$ implica que $\lim_k z_k = 0$ y así podemos suponer en lo que sigue que se cumple esta condición.

$\boxed{a) \Leftrightarrow b)}$ Para $|z| < 1$ vale el desarrollo en serie de potencias

$$Log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

luego

$$\lim_{z\to 0}\frac{Log(1+z)}{z} = \lim_{k}\frac{Log(1+z_k)}{z_k} = 1$$

Por la definición de límite $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{Log(1+z_k)}{z_k} - 1\right| < \frac{1}{2} \qquad \forall k > n_0$$

Entonces para $k > n_0$ se cumplen las desigualdades

$$\frac{1}{2}|z_k| \leq |Log(1+z_k)| \leq \frac{3}{2}|z_k|$$

con las que podemos comparar ambas series y por tanto la convergencia de una implica la convergencia de la otra y viceversa.

$\boxed{a) \Leftrightarrow c)}$ Puesto que $\lim_k z_k = 0$ se tiene que $\lim_k |z_k| = 0$ y repitiendo el razonamiento del apartado anterior se tiene que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > n_0$ se cumple

$$\frac{1}{2}|z_k| \leq |Log(1+|z_k|)| = Log(1+|z_k|) \leq \frac{3}{2}|z_k|$$

por tanto se tiene que $a)$ equivale a la convergencia de la serie

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |Log(1+|z_k|)| = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} Log(1+|z_k|)$$

y esto, en virtud de la Proposición 1.1.3, equivale a la condición $c)$.

$\boxed{b) \Rightarrow d)}$ Basta tener en cuenta que toda serie absolutamente convergente es convergente y por tanto como $\sum_{k=n+1}^{\infty} |Log(1+z_k)| < \infty$ se sigue que $\sum_{k=n+1}^{\infty} Log(1+z_k)$ converge y que $z_k \neq -1$, pues si fuese igual a -1 no sería convergente.

Luego, por la Proposición 1.1.3, el producto $\prod_{k=n+1}^{\infty}(1+z_k)$ es estrictamente convergente y por definición $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ es convergente. □

Definición 1.1.5. El producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ se dice *absolutamente convergente* si cumple alguna de las condiciones $a), b)$ o $c)$ de la proposición anterior.

Observación. Después de la proposición anterior y esta definición podemos decir que todo producto absolutamente convergente es convergente.

Ejemplo. Veamos un producto infinito, $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$, que converge pero no converge absolutamente. Tomemos la sucesión $(z_k)_k = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots\}$.
No converge absolutamente pues la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Sin embargo sí converge, pues teniendo en cuenta que

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k) = \lim_m \left((1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})\dots \right) =$$

$$= \lim_m \left((1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\dots \right) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{(k+1)^2})$$

Y el último producto sí converge absolutamente pues $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} < \infty$ y por la Proposición 1.1.4 se tiene que el producto es convergente, luego el producto original también es convergente.

Corolario 1.1.6. *Si un producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ converge absolutamente, entonces el producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_{\pi(k)})$ converge absolutamente para toda $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutación.*

Demostración. Si el producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ converge absolutamente entonces, por la Proposición 1.1.4, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es absolutamente convergente y por tanto también lo es incondicionalmente, luego $\sum_{k=1}^{\infty} z_{\pi(k)}$ es absolutamente convergente y se tiene que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_{\pi(k)})$ converge absolutamente. □

1.2. Productos infinitos de funciones

Ya nos hemos familiarizado con el producto infinito de números complejos. Vamos a generalizar el concepto a productos de funciones que tomen valores en $\mathbb{C}$. Primero vamos a definir los conceptos de convergencia puntual y uniforme.

Definición 1.2.1. Sea S un conjunto y $f_k : S \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones.

1. Si el producto $\prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge para cada $z \in S$, se dice que el producto infinito converge puntualmente en S.
2. Si además la sucesión $R_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre S se dice que el producto $\prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente sobre S.

Observación. Diremos que $\prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente sobre una familia de conjuntos si converge uniformemente sobre cada uno de ellos.

Lema 1.2.2. *Si $z_1, \dots, z_m$ son números complejos entonces se cumple*

$$\left| \prod_{k=1}^{m} (1+z_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^{m} (1+|z_k|) - 1 \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{m} |z_k| \right) - 1$$

Demostración. Para $x \geq 0$, la desigualdad $1+x \leq e^x$ es una consecuencia inmediata del desarrollo de e^x en potencias de x. Si cambiamos x por $|z_1|, \dots, |z_m|$ y multiplicamos las desigualdades resultantes, obtenemos la segunda desigualdad.

Para la primera desigualdad basta aplicar la desigualdad triangular a las sumas que resultan al desarrollar el primer producto

$$\left| \prod_{k=1}^{m} (1+z_k) - 1 \right| = \left| 1 + \sum_{k=1}^{m} z_k + z_1 \sum_{k=2}^{m} z_k + \ldots + \prod_{k=1}^{m} z_k - 1 \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} |z_k| + |z_1| \sum_{k=2}^{m} |z_k| + \ldots + \prod_{k=1}^{m} |z_k| = \left(1 + \sum_{k=1}^{m} |z_k| + |z_1| \sum_{k=2}^{m} |z_k| + \ldots + \prod_{k=1}^{m} |z_k| \right) - 1 =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} (1+|z_k|) - 1$$

$\square$

Proposición 1.2.3. *Sea S un conjunto y $f_k : S \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Se verifica $a) \Leftrightarrow b) \Rightarrow c)$:*

a) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)|$ converge uniformemente sobre S.
b) El producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|f_k(z)|)$ converge uniformemente sobre S.
c) El producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1+f_k(z))$ converge uniformemente sobre S.

Demostración. $\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Si se cumple $a)$, en virtud de la Proposición 1.1.4 el producto que interviene en $b)$ converge puntualmente en S. Entonces, para cada $z \in S$ y cada $n \in \mathbb{N}$ están definidas las funciones $R_n^*(z) := \prod_{k=n+1}^{\infty}(1+|f_k(z)|)$ y tenemos que demostrar que la sucesión $(R_n^*(z))_n$ converge hacia 1 uniformemente sobre S.

Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $0 < e^{\delta} - 1 < \varepsilon$. Por cumplirse $a)$ existe un $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_\delta$ y todo $z \in S$ se verifica $\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| < \delta$. Usando la segunda desigualdad del lema 1.2.2 se obtiene que para todo $n > n_\delta$ y todo $z \in S$ se cumple

$$0 \le \prod_{k=n+1}^{m}(1+|f_k(z)|) - 1 \le \exp\left(\sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)|\right) - 1 < e^{\delta} - 1 < \varepsilon$$

y pasando al límite cuando $m \to \infty$ se llega a que para todo $n > n_\delta$ y todo $z \in S$ se verifica

$$0 \le R_n^*(z) - 1 < \varepsilon$$

y por tanto la convergencia hacia 1 uniformemente sobre S.

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Si se cumple $b)$, en virtud de la Proposición 1.1.4 la serie que interviene en $a)$ converge puntualmente en S. Usando la siguiente desigualdad trivial

$$0 \le \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \le \prod_{k=n+1}^{m}(1+|f_k(z)|) - 1$$

y tomando límites cuando $m \to \infty$ se obtiene

$$0 \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \le R_n^*(z) - 1$$

utilizando ahora que $R_n^*(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre S se obtiene que $\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)|$ converge hacia 0 uniformemente sobre S.

$\boxed{b) \Rightarrow c)}$ Si se cumple $b)$ el producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1+f_k(z))$ converge absolutamente para cada $z \in S$ y en particular converge puntualmente en S. Utilizando la primera desigualdad del lema 1.2.2

$$0 \le \left|\prod_{k=n+1}^{m}(1+f_k(z)) - 1\right| \le \prod_{k=n+1}^{m}(1+|f_k(z)|) - 1$$

y pasando al límite cuando $m \to \infty$ se obtiene que las funciones $R_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty}(1+f_k(z))$ cumplen la desigualdad

$$0 \leq |R_n(z) - 1| \leq |R_n^*(z) - 1| \qquad \forall n \in \mathbb{N}, z \in S$$

Como $R_n^*(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre S se cumcluye que $R_n(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre S, es decir, se cumple $c)$. □

Aplicando la proposición anterior en cada conjunto compacto $K \subset \Omega$ abierto se obtiene que la convergencia uniforme sobre compactos de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z) - 1|$ es condición suficiente para la convergencia uniforme sobre compactos del producto $\prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$.

Ejemplo. Veamos una sucesión de funciones que cumplen la condición $c)$ pero no la condición $a)$ de la proposición anterior. Fijemos $S = K$ un compacto de $\mathbb{C}$ y consideremos la sucesión de funciones $(f_k(z))_k = \{z, -z, \frac{z}{2}, \frac{-z}{2}, \frac{z}{3}, \frac{-z}{3}, \ldots\}$.

No cumple la condición $a)$ pues

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)| = 2|z| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Pero sí cumple la condición $c)$, para ello basta multiplicar los términos del producto adecuadamente como en un ejemplo anterior

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + f_k(z)) = (1+z)(1-z)(1+\frac{z}{2})(1-\frac{z}{2})(1+\frac{z}{3})(1-\frac{z}{3})\ldots =$$

$$= (1-z^2)(1-\frac{z^2}{4})(1-\frac{z^2}{9})\ldots = \prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{k^2})$$

Y este último producto converge uniformemente sobre K pues la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z^2|}{k^2}$$

converge uniformemente sobre K ya que $|z^2|/k^2 \leq C_K/k^2$ con $C_K = \text{máx}\{z^2 : z \in K\}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} C_K/k^2 = C_K\pi^2/6$. Aplicando el criterio M de Weierstrass nos queda el resultado.

Proposición 1.2.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones continuas y $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ un producto infinito que converge uniformemente sobre compactos de Ω, entonces:*

- *Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ no se anula en K.*
- *La sucesión de productos parciales $\pi_m(z) = \prod_{k=1}^{m} f_k(z)$ converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia $f(z)$.*
- *f es continua en Ω.*

Demostración. Sea $K \subset \Omega$ compacto, por hipótesis $R_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ es una sucesión de funciones que converge hacia 1 uniformemente sobre K, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ y cada $z \in K$ se cumple $|R_n(z) - 1| < 1/2$, luego $1/2 < |R_n(z)| < 3/2$, y en particular se tiene que $0 \notin R_{n_0}(K)$.

Por otra parte, para cada $m \geq n_0$ y cada $z \in K$, se cumple

$$\left| \prod_{k=n_0+1}^{m} f_k(z) \right| = \left| \frac{R_{n_0}(z)}{R_m(z)} \right| < \frac{3/2}{1/2} = 3$$

luego

$$|\pi_m(z)| = |\pi_{n_0}(z)| \left| \prod_{k=n_0+1}^{m} f_k(z) \right| \leq 3C_{n_0}$$

donde $C_{n_0} = \max\{|\pi_{n_0}(z)| : z \in K\}$ (que se alcanza pues K es compacto). Se obtiene así la desigualdad

$$|\pi_m(z) - f(z)| = |\pi_m(z)||1 - R_m(z)| \leq 3C_{n_0}|1 - R_m(z)| \qquad \forall m \geq n_0, z \in K$$

y como $R_m(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre K se tiene que $\pi_m(z)$ converge hacia $f(z)$ uniformemente sobre K.

Para ver que f es continua en Ω basta escribir Ω como unión numerable de compactos $K_1 \subset \overset{\circ}{K_2} \subset K_2 \subset \overset{\circ}{K_3} \subset \ldots \subset \Omega$ (ver [13, p. 278], Proposición A.2.1), ya que f es continua en todo compacto $K \subset \Omega$ al ser límite uniforme de las funciones continuas π_m. $\square$

Observación. La primera conclusión se puede sustituir por la siguiente equivalente:

Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathscr{Z}(f_k) \cap K = \emptyset \quad \forall k > n$.

Es decir, los ceros en un compacto, de un producto de funciones uniformemente convergente, se encuentran en las primeras funciones del producto.

Teorema 1.2.5. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un abierto,* $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ *una sucesión de funciones holomorfas no idénticamente nulas y* $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *un producto infinito que converge uniformemente sobre compactos de* Ω*, entonces:*

- f *es holomorfa en* Ω*.*
- $\mathscr{Z}(f) = \bigcup_k \mathscr{Z}(f_k)$*.*
- *Para cada* $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$ *el conjunto* $\{k \in \mathbb{N} : f_k(\alpha) = 0\}$ *es finito y*

$$m(f,\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} m(f_k,\alpha) \qquad \textit{(hay un número finito de sumandos no nulos)}$$

Demostración. Según la Proposición 1.2.4, la sucesión de funciones holomorfas $\pi_m = \prod_{k=1}^{m} f_k$ converge uniformemente sobre compactos hacia la función f, luego f es holomorfa en virtud del Teorema A.1.8.

Para ver que $\mathscr{Z}(f) = \bigcup_k \mathscr{Z}(f_k)$ lo haremos por doble inclusión. La inclusión obvia es $\mathscr{Z}(f) \supseteq \bigcup_k \mathscr{Z}(f_k)$. Veamos la otra inclusión, dado $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $K = \overline{D(\alpha,\varepsilon)} \subset \Omega$, según la Proposición 1.2.4 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R_n(z)$ no se anula en K y teniendo en cuenta el producto finito

$$f(z) = f_1(z)\dots f_n(z)R_n(z) \tag{1.1}$$

se obtiene que existe $k_0 \in \{1,2,\dots,n\}$ tal que $f_{k_0}(\alpha) = 0$ y por tanto $\alpha \in \bigcup_k \mathscr{Z}(f_k)$.

Sea $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$, por (1.1) se tiene que el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : f_k(\alpha) = 0\}$ es finito y además

$$m(f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} m(f_k,\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} m(f_k,\alpha)$$

$\square$

Capítulo 2

Representación de funciones

CONTENIDOS

Definiremos en este capítulo los factores elementales de Weierstrass, que nos servirán para escribir el producto de los infinitos ceros de una función de manera que dicho producto sea uniformemente convergente. El concepto de sucesión adaptada será esencial para esto último y se intentará buscar sucesiones adaptadas constantes si es posible.

El Teorema de factorización de Weierstrass 2.2.3 será precisamente el que nos permita construir, a partir de los ceros de una función holomorfa y usando los factores elementales de Weierstrass, un producto infinito que convergerá uniformemente hacia la función original y que nos servirá como representación de la misma. Su utilidad reside en hacer explícitos los ceros de la función.

En el contexto de la representación de funciones demostraremos el Teorema de Mittag-Leffler 2.3.6 que nos permite representar una función meromorfa como una serie en la que intervienen sus partes principales (ver A.1.3). Su importancia reside en hacer explícitos los polos, en este caso las partes principales, de una función meromorfa.

Terminamos el capítulo con dos ejemplos sencillos y representativos de desarrollos de productos infinitos, la función seno y los productos de Blaschke, esta última clase de productos permite construir funciones holomorfas y acotadas en el disco unidad con ceros prescritos (siempre que estos cumplan una condición de admisibilidad necesaria en funciones acotadas).

Las referencias principales para este capítulo son [4] apuntes sobre *Productos infinitos* y *Desarrollos de Mittag-Lefler*, [6, p. 168 - 173, 204 - 206], [10, p. 254, 283 - 286, 291 - 293], [13, p. 162 - 166, 175 - 180].

2.1. Factores elementales de Weierstrass

Vamos a definir aquellos *factores especiales* de los que hablábamos al principio del trabajo que consiguen hacer un producto infinito de funciones en el que se pueden ver los ceros explícitamente y que, además, hacen a dicho producto convergente.

Definición 2.1.1. Se llaman *factores elementales de Weierstrass* a las funciones

$$E_0(z) = 1 - z$$

$$E_m(z) = (1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{z^k}{k}\right) \qquad \forall m \in \{1,2,3,\ldots\}$$

Observación. Si $|z| < 1$ entonces vale la igualdad $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = -Log(1-z)$ y por tanto si tomamos límites en los factores elementales se tiene que

$$\lim_{m} E_m(z) = 1$$

lo que era una condición necesaria para que el producto $\prod_{m=0}^{\infty} E_m(z)$ fuese convergente.

Lema 2.1.2. *Se tiene que* $\forall m \in \{0,1,2,3,\ldots\}$ *y* $|z| \leq 1$

$$|1 - E_m(z)| \leq |z|^{m+1}$$

Demostración. El resultado para $m = 0$ es trivial. La demostración para $m \geq 1$ se basa en la consideración del desarrollo en serie de potencias

$$E_m(z) = E_m(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

Se comprueba fácilmente que si derivamos

$$E'_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = -z^m \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{z^k}{k}\right)$$

Usando esta expresión se deduce que $E'_m(z)$ tiene en $z = 0$ un cero de multiplicidad m y por tanto $a_k = 0$ si $1 \leq k \leq m$. Para el resto de coeficientes vamos a razonar sobre la función

$$\frac{E'_m(z)}{z^m} = -\exp(p(z))$$

donde $p(z) = \sum_{k=1}^{m} z^k/k$ es un polinomio con todos sus coeficientes positivos. Si ahora escribimos el desarrollo de la exponencial en serie de potencias nos queda que

$$-\exp(p(z)) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(z)^k}{k!}$$

Al tener $p(z)$ todos sus coeficientes positivos, $p(z)^k$ también los tendrá y por tanto al reordenar la serie tendremos que

$$-\exp(p(z)) = -\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \qquad \text{para ciertos } b_k > 0$$

Pero habíamos visto que $-\exp(p(z)) = \sum_{k=m+1}^{\infty} k a_k z^{k-m-1}$, entonces igualando las dos series y usando la unicidad de los coeficientes de la series de potencias se tiene que

$$(m+k+1)a_{m+k+1} = -b_k \qquad \forall k \geq 0$$

Por tanto $a_k < 0 \ \ \forall k > m$ y entonces, con esta información sobre los coeficientes a_k se obtiene

$$0 = E_m(1) = 1 + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = 1 - \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k|$$

Y si $|z| \leq 1$, usando esta igualdad se establece la desigualdad siguiente

$$|1 - E_m(z)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k||z|^k = |z|^{m+1} \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k||z|^{k-m-1} \leq |z|^{m+1} \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| = |z|^{m+1}$$

$\square$

Lema 2.1.3. *Dada una sucesión* $(z_k)_k \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *con* $\lim_k |z_k| \to \infty$*, existe una sucesión* $(\rho_k)_k \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ *tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|z_k|} \right)^{\rho_k + 1} < \infty \qquad \forall R > 0$$

Demostración. La sucesión $\rho_k = k - 1$ cumple los requisitos del enunciado pues dado $R > 0$ y como $\lim_k |z_k| \to \infty$ entonces $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k > k_0$ se cumple $|z_k| > 2R$ y

$$\left(\frac{R}{|z_k|} \right)^k \leq \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

luego nos queda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|z_k|} \right)^k \leq \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{R}{|z_k|} \right)^k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{R}{|z_k|} \right)^k + 1 < \infty$$

$\square$

Definición 2.1.4. Si una sucesión $(\rho_k)_k$ cumple las condiciones del lema anterior diremos que es una *sucesión adaptada* a la sucesión de números complejos $(z_k)_k$.

2.2. Teorema de factorización de Weierstrass

Teorema 2.2.1. *Sea $(z_k)_k \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ una sucesión tal que* $\text{lím}_k |z_k| \to \infty$ *y* $(\rho_k)_k \subset \mathbb{N}\cup\{0\}$ *una sucesión adaptada a ella. Entonces el producto*

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E_{\rho_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)$$

converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ a una función entera f tal que $\mathscr{Z}(f) = \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$. Para cada $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$ la multiplicidad $m(f,\alpha) = \#\{k : z_k = \alpha\}$.

Demostración. Llamemos $f_k(z) = E_{\rho_k}(z/z_k)$, para ver que el producto $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$, en virtud de la proposición 1.2.3, basta ver que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)-1|$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ y esto último es una sencilla consecuencia de los lemas 2.1.2 y 2.1.3.

En efecto, sea K un compacto de $\mathbb{C}$, entonces existe $R > 0$ tal que $K \subset \overline{D(0,R)}$. Como $\text{lím}_k |z_k| \to \infty$ entonces $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k > k_0$ se cumple $|z_k| \geq R$, luego $|z/z_k| \leq 1$ para todo $z \in K$. Entonces para $k > k_0$ y todo $z \in K$ se cumple, por el lema 2.1.2, que

$$|f_k(z)-1| = |E_{\rho_k}\left(\frac{z}{z_k}\right) - 1| \leq \left|\frac{z}{z_k}\right|^{\rho_k+1} \leq \left|\frac{R}{z_k}\right|^{\rho_k+1}$$

Por hipótesis, puesto que $(\rho_k)_k$ es una sucesión adaptada a $(z_k)_k$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{R}{z_k}\right|^{\rho_k+1} < \infty$$

y aplicando el criterio de Weierstrass (ver A.1.13) se concluye que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)-1|$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$.

Cada función $f_k(z)$ tiene un único cero simple para $z = z_k$, por tanto aplicando el teorema 1.2.5 se tiene:

- f es holomorfa en $\mathbb{C}$
- $\mathscr{Z}(f) = \bigcup_k \mathscr{Z}(f_k) = \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$
- Para cada $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$ la multiplicidad $m(f,\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} m(f_k,\alpha) = \#\{k : z_k = \alpha\}$

$\square$

Observación. Para algunas sucesiones $(z_k)_k$, tales que $\lim_k |z_k| \to \infty$, podemos encontrar sucesiones adaptadas $(\rho_k)_k$ que sean constantes y en dicho caso nos interesará encontrar la menor constante posible.

Así, por ejemplo, si $\sum_k 1/|z_k|^p < \infty$ podemos tomar $\rho_k = p-1$ y gracias al lema 2.1.3 se concluye que $(\rho_k)_k$ es una sucesión adaptada.

Corolario 2.2.2. ***(Problema de los ceros en $\mathbb{C}$)***
Sea $M \subset \mathbb{C}$ un conjunto sin puntos de acumulación ($M' = \emptyset$) y $m : M \longrightarrow \mathbb{N}$. Entonces existe una función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $\mathscr{Z}(f) = M$ y la multiplicidad de cada $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$ es $m(f,\alpha) = m(\alpha)$.

Demostración. Si M es finito el resultado es trivial tomando a f como un polinomio. Supongamos que M es infinito entonces, por el lema A.1.5, M es numerable. Distingamos dos casos:

- Si $0 \notin M$, entonces los elementos de M los podemos ordenar como una sucesión $\{z_k : k \in \mathbb{N}\}$ tal que $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$. Esta sucesión, al no tener M puntos de acumulación, cumple que $\lim_k |z_k| \to \infty$. Sea $(\alpha_k)_k$ la sucesión obtenida a partir de $(z_k)_k$ repitiendo términos de acuerdo con la función m del enunciado (el término z_k se repite $m(z_k)$ veces). La sucesión $(\alpha_k)_k$ también cumple que $\lim_k |\alpha_k| \to \infty$ y aplicando el teorema 2.2.1 se obtiene una función entera de la forma $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E_{\rho_k}(z/\alpha_k)$ que tiene las propiedades requeridas.
- Si $0 \in M$, reducimos al caso anterior considerando el conjunto $M \setminus \{0\}$. Ahora se obtiene una función entera de la forma $f(z) = z^p \prod_{k=1}^{\infty} E_{\rho_k}(z/\alpha_k)$ con $p = m(0)$.

□

Teorema 2.2.3. ***(Teorema de Factorización de Weierstrass en $\mathbb{C}$)***
Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ no idénticamente nula con infinitos ceros y sea $(z_k)_k \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la sucesión de los ceros de f repetidos tantas veces según su multiplicidad. Entonces para cada sucesión adaptada $(\rho_k)_k$ existe $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que

$$f(z) = e^{g(z)} z^p \prod_{k=1}^{\infty} E_{\rho_k}\left(\frac{z}{z_k}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

donde $p = m(f,0)$ y el producto infinito converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración. Como f es entera sus ceros no pueden acumularse (ver lema A.1.6) y por tanto $\lim_k |z_k| \to \infty$. Por el lema 2.1.3 sabemos que existe $(\rho_k)_k$ sucesión adaptada a $(z_k)_k$.

Según el teorema 2.2.1 la función $F(z) = z^p \prod_{k=1}^{\infty} E_{\rho_k}(z/z_k)$ tiene los mismos ceros que f, con las mismas multiplicidades, luego $G = f/F$ presenta singularidades evitables para cada $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$ (ver lema A.1.10).

Redefinimos G eliminando las singularidades evitables

$$G(\alpha) := \lim_{z\to\alpha} \frac{f(z)}{F(z)} \qquad \text{si } \alpha \in \mathscr{Z}(f)$$

entonces tenemos que G es una función entera sin ceros y por el teorema A.1.9 existe $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $G = e^g$. $\square$

Una aplicación directa del Teorema de Factorización de Weierstrass es el siguiente corolario el cual trata el problema típico de interpolación de encontrar una función suave (holomorfa) tal que en un conjunto de puntos distintos tome unos valores determinados.

Corolario 2.2.4. ***(Teorema de interpolación de Pringsheim).*** *Sean $(a_k)_k \subset \mathbb{C}$, un conjunto de puntos distintos y sin puntos de acumulación, y $(b_k)_k \subset \mathbb{C}$ un conjunto de puntos arbitrarios, entonces existe $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $f(a_k) = b_k \ \forall k \in \mathbb{N}$*

Demostración. Si $a_k = 0$ para algún k entonces lo ponemos en a_0. Por el teorema 2.2.3 existe $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $g(a_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y además todos los a_k son ceros simples de g. Construimos las funciones

$$F_k(z) = \begin{cases} \frac{b_k}{g'(a_k)} \frac{g(z)}{z-a_k} & \text{si } z \neq a_k \\ b_k & \text{si } z = a_k \end{cases}$$

Las cuales son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ y continuas en $\mathbb{C}$, por tanto son holomorfas en $\mathbb{C}$ y cumplen que

$$F_k(a_j) = b_k \delta_j^k$$

donde δ_j^k es la Delta de Kronecker. Ahora busco una sucesión $(q_k)_k$ tal que la serie

$$f(z) = F_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(z) \left(\frac{z}{a_k}\right)^{q_k}$$

converja uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$.

Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto, entonces existe $R > 0$ tal que $K \subset D(0,R)$. Como la sucesión $(a_k)_k$ no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$ se cumple que $\lim_k a_k = \infty$, por tanto existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_k| \geq 2R \ \forall k \geq k_0$.

Sea $z \in K$ y $k \geq k_0$ entonces $|z - a_k| = |a_k - z| \geq |a_k| - |z| \geq R$ y $|z/a_k| \leq 1/2$, con lo cual

$$\left| F_k(z) \left(\frac{z}{a_k}\right)^{q_k} \right| = \frac{|b_k|}{|g'(a_k)|} \cdot \frac{|g(z)|}{|z-a_k|} \cdot \left|\frac{z}{a_k}\right|^{q_k} \leq \frac{|b_k|}{|g'(a_k)|} \cdot \frac{M}{R} \cdot \frac{1}{2^{q_k}}$$

donde $M = \sup\{|g(z)| : z \in K\} < \infty$ pues $|g(z)|$ es continua en K. Luego, de la desigualdad anterior, si tomo

$$q_k = k + \log_2\left(\frac{|b_k|}{|g'(a_k)|}\right)$$

nos queda que

$$\left|F_k(z)\left(\frac{z}{a_k}\right)^{q_k}\right| \leq \frac{M}{2^k R}$$

Aplicando el criterio de Weierstrass (ver A.1.13), nuestra serie es uniformemente convergente sobre K compacto arbitrario de $\mathbb{C}$ y por tanto la función f definida arriba es entera y cumple las condiciones deseadas. □

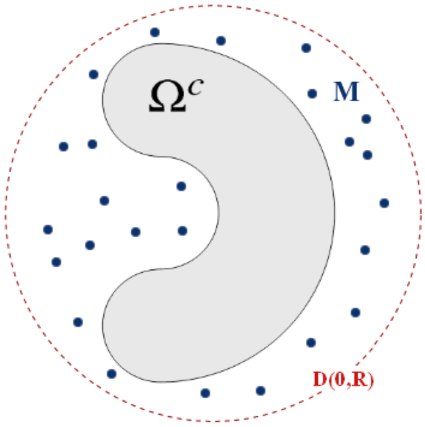
Observación. Se puede hacer una generalización de este corolario queriendo encontrar una función holomorfa en $\mathbb{C}$ tal que, además de la condición del enunciado, las sucesivas derivadas tomen unos determinados valores, no necesariamente iguales, en los puntos $(a_k)_k$. Incluso se puede llegar a demostrar para una función holomorfa en un abierto Ω, pero para ello se necesitan desarrollos de *Mittag-Leffler* en un abierto. Una demostración de esto último se puede encontrar en [10, p. 286].

A continuación presentamos el problema de los ceros, que hemos resuelto para $\mathbb{C}$, para un abierto conexo Ω. Si bien la demostración no es directa a partir de las proposiciones desarrolladas, igualmente es sencillo de comprobar el resultado y es una generalización natural a lo visto en la sección anterior.

Teorema 2.2.5. ***(Problema de los ceros en Ω)***
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $M \subset \Omega$ sin puntos de acumulación en Ω ($M' \cap \Omega = \emptyset$) y $m : M \to \mathbb{N}$. Entonces existe $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $\mathscr{Z}(f) = M$ y la multiplicidad de cada $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$ es $m(f, \alpha) = m(\alpha)$.

Demostración. Si M es finito el resultado es trivial tomando a f como un polinomio. Supongamos que M es infinito y como $M' \cap \Omega = \emptyset$ se tiene que M es numerable (lema A.1.5). Podemos entonces ver M como una sucesión $\{z_k : k \in \mathbb{N}\}$ y ahora considerar $(\alpha_k)_k$ la sucesión obtenida a partir de $(z_k)_k$ repitiendo términos de acuerdo con la función m del enunciado.

- Supongamos que $\exists R > 0$ tal que $\Omega^c \subset D(0,R)$ y $|\alpha_k| < R \quad \forall k \in \mathbb{N}$.



Veamos que $\lim_k d(\alpha_k, \Omega^c) \to 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\exists \varepsilon > 0$ y una subsucesión $(\alpha_{k_j})_j$ tal que $d(\alpha_{k_j}, \Omega^c) \geq \varepsilon \ \forall j$.
Como por hipótesis la sucesión $(\alpha_{k_j})_j$ está acotada, $|\alpha_{k_j}| < R \ \forall j$, se tiene que posee una subsucesión convergente, que vamos a denotar igual para no tener exceso de subíndices. Por tanto $\lim_j \alpha_{k_j} = \alpha \in M'$.

Entonces $\lim_j d(\alpha_{k_j}, \Omega^c) = d(\alpha, \Omega^c) \geq \varepsilon$ por la continuidad de la función distancia, luego $\alpha \notin \Omega^c \Rightarrow \alpha \in \Omega \Rightarrow M' \cap \Omega \neq \emptyset$, lo que contradice la hipótesis inicial.

Consideremos la sucesión de funciones

$$f_k(z) = E_k\left(\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k}\right)$$

donde $\beta_k \in \Omega^c$ es un punto tal que $d(\alpha_k, \Omega^c) = |\alpha_k - \beta_k|$, este punto siempre existe pues Ω^c es compacto y la distancia se alcanza siempre.

Veamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z) - 1|$ converge uniformemente sobre compactos de Ω. Sea $K \subset \Omega$ compacto y $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \eta < d(K, \Omega^c)$, que existe pues ambos son compactos separados.
Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_k - \beta_k| \leq 2\eta$ para todo $k \geq k_0$ (esto es posible pues $\lim_k |\alpha_k - \beta_k| \to 0$). Entonces $\forall k \geq k_0$ y para cada $z \in K$ se tiene que

$$\left|\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k}\right| \leq \frac{|\alpha_k - \beta_k|}{\eta} \leq \frac{1}{2}$$

Por el lema 2.1.2 se sigue que

$$|f_k(z) - 1| = |1 - E_k\left(\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k}\right)| \leq \left|\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k}\right|^{k+1} \leq \frac{1}{2^{k+1}} \qquad \forall k \geq k_0, z \in K$$

Aplicando el criterio de Weierstrass (ver A.1.13) se obtiene la convergencia uniforme de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z) - 1|$ sobre compactos de Ω y por la proposición 1.2.3 el producto

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

converge uniformemente sobre compactos de Ω. Como cada $f_k \in \mathscr{H}(\Omega)$ y tiene un cero simple en α_k, aplicando el teorema 1.2.5 se obtiene

- $f \in \mathscr{H}(\Omega)$
- $\mathscr{Z}(f) = \bigcup_k \mathscr{Z}(f_k) = M$
- $m(f,\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} m(f_k,\alpha) = \#\{k : \alpha_k = \alpha\} = m(\alpha)$ para cada $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$

Se cumple además que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 1$.

Efectivamente, sea $\varepsilon > 0$ y como $\beta_k \in \Omega^c \subset D(0,R)$ se tiene que

$$|\alpha_k - \beta_k| \leq |\alpha_k| + |\beta_k| \leq 2R$$

$$|z - \beta_k| \geq |z| - |\beta_k| \geq |z| - R$$

y por tanto

$$\left|\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k}\right| \leq \frac{2R}{|z| - R} \qquad \forall |z| \geq R$$

Elijo $R' > R$ tal que $2R/(R' - R) < \delta$ para $0 < \delta < 1/2$ fijo, luego

$$\left|\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k}\right| \leq \frac{2R}{R' - R} < \delta \qquad \forall |z| \geq R'$$

Notar que podemos escribir

$$f(z) = e^{\sum_{k=1}^{\infty} Log\left(E_k\left(\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k}\right)\right)}$$

En particular la identidad es cierta para todo $|z| \geq R'$ ya que aplicando el lema 2.1.2 se tiene que

$$\left|E_k\left(\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k}\right) - 1\right| \leq \delta^{k+1} < 1 \qquad \forall |z| \geq R'$$

Además

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} Log\left(E_k\left(\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k}\right)\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|Log\left(E_k\left(\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k}\right)\right)\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2\left|E_k\left(\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k}\right) - 1\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2\delta^{k+1} = \frac{2\delta^2}{1 - \delta}$$

usando el lema 2.1.2 para $|z| \geq R'$ y que $|Log(1+\omega)| \leq 2|\omega|$ para todo $|\omega| \leq 1/2$. Por continuidad de la exponencial:

$$|e^{\omega} - 1| < \varepsilon \qquad \forall |\omega| < \frac{2\delta^2}{1 - \delta}$$

y por tanto

$$|f(z)-1| = \left| e^{\sum_{k=1}^{\infty} Log\left(E_k\left(\frac{\alpha_k-\beta_k}{z-\beta_k}\right)\right)} - 1 \right| < \varepsilon \qquad |z| \geq R'$$

lo que prueba la afirmación sobre el límite comentada antes.

- Si no estamos en el caso anterior podemos llegar a él mediante una transformación de Möbius.
  Sea $\omega \in \Omega$ tal que $\omega \notin M$ y consideremos la función $h(z) = 1/(z-\omega)$, una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{\omega\}$. Como Ω es abierto $\exists \varepsilon > 0$ tal que $D(\omega, \varepsilon) \subset \Omega$ y además podemos tomar ε, suficientemente pequeño, de tal forma que $M \cap D(\omega, \varepsilon) = \emptyset$, veamos esto último.
  Supongamos que para $\omega \in \Omega$ fijo y $\forall \varepsilon > 0$ se tiene que $M \cap D(\omega, \varepsilon) \neq \emptyset$ entonces, por definición, $\omega \in M'$ por lo tanto $M' \cap \Omega \neq \emptyset$ y esto contradice las hipótesis iniciales.
  Ahora bien, como $D(\omega, \varepsilon) \subset \Omega$, tomando complementarios, $\Omega^c \subset D(\omega, \varepsilon)^c$. Por tanto si $z \in \Omega^c \Rightarrow |z-\omega| \geq \varepsilon \Rightarrow |h(z)| \leq 1/\varepsilon$. Luego

$$h(\Omega)^c = h(\Omega^c) \subset D\left(0, \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

  De forma análoga, como $M \cap D(\omega, \varepsilon) = \emptyset$ entonces si $\alpha \in M \Rightarrow |\alpha - \omega| \geq \varepsilon \Rightarrow |h(\alpha)| \leq 1/\varepsilon$.
  Lo que acabamos de ver es que existe $R = 1/\varepsilon > 0$ tal que el abierto $\widetilde{\Omega} := h(\Omega)$ cumple $(\widetilde{\Omega})^c \subset D(0,R)$ y el conjunto $\widetilde{M} := h(M)$ cumple $|\widetilde{\alpha}| < R$ para todo $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{M}$, es decir, estamos en el caso anterior y por tanto existe una función $\widetilde{f} \in \mathscr{H}(\widetilde{\Omega})$ tal que $\mathscr{Z}(\widetilde{f}) = \widetilde{M}$. Luego la función que estamos buscando es

$$f(z) := \widetilde{f}(h(z)) \in \mathscr{H}(\Omega \setminus \{\omega\})$$

  Me falta por ver que f es holomorfa en ω, para ello me basta ver que es continua en Ω. Pero eso es trivial por el primer apartado:

$$\lim_{z \to \omega} f(z) = \lim_{z \to \omega} \widetilde{f}(h(z)) = \lim_{|z| \to \infty} \widetilde{f}(z) = 1$$

  Por lo tanto definiendo $f(\omega) := 1$ hacemos que f sea holomorfa en Ω.

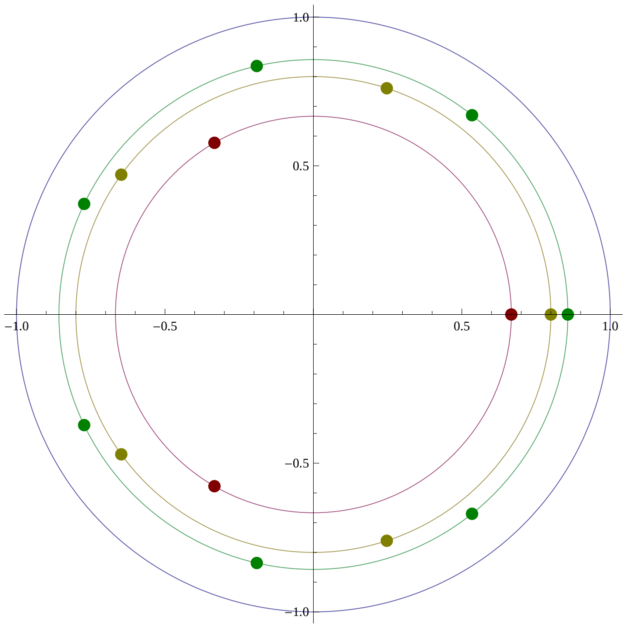
$\square$

Veamos una aplicación de este último teorema en la construcción de una función holomorfa en el disco unidad, no idénticamente nula y que no puede extenderse de manera analítica en ningún entorno fuera del disco unidad.

Ejemplo. Tomemos como $\Omega = D(0,1)$ y como conjunto sin puntos de acumulación

$$M = \{(1-\frac{1}{k})\exp(\frac{2\pi i j}{k}) : j \in \{0,1,\ldots,k-1\}, k > 1\}$$

el cual se ha construido tomando las raíces k-ésimas de la unidad multiplicadas por un factor que haga que se acerquen a la frontera del disco unidad cuando $k \to \infty$.



Por el Teorema 2.2.5 existe una función $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, no idénticamente nula, tal que $\mathscr{Z}(f) = M$. Supongamos que f es continua en la frontera de Ω, veamos que f se anula en todos los puntos de $\partial\Omega$, sea $\alpha \in \partial\Omega$ entonces existe $\theta \in [0,1)$ tal que $\alpha = e^{2\pi i\theta}$.

Dado $q > 1$ entero, existe $p_q = p \in \mathbb{Z}$, $p < q$, tal que

$$p \leq q\theta \leq p+1$$

Dividiendo entre q y restando p/q en las desigualdades anteriores obtenemos

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q}$$

luego cuando $q \to \infty$ entonces $p/q = p_q/q \to \theta$ y podemos escribir

$$\alpha = e^{2\pi i\theta} = \lim_{q\to\infty} \left(1 - \frac{1}{q}\right) e^{2\pi i \frac{p_q}{q}}$$

donde $(1-1/q)e^{2\pi i p_q/q} \in M$. Por la continuidad de la función f tenemos

$$f(\alpha) = f(e^{2\pi i\theta}) = \lim_{q\to\infty} f\left(\left(1 - \frac{1}{q}\right) e^{2\pi i \frac{p_q}{q}}\right) = 0$$

Por tanto f se anula en todos los puntos de la frontera de Ω. Supongamos que existe $\omega \in \partial\Omega$ tal que $f \in \mathscr{H}(D(\omega,\varepsilon))$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces por lo visto, f se anula en $D(\omega,\varepsilon) \cap \partial\Omega$ y por el principio de identidad (Corolario A.1.7) se sigue que $f \equiv 0$, contradicción. Por tanto f es una función que no se puede extender de manera holomorfa a ningún entorno fuera del disco unidad.

2.3. Teorema de Mittag-Leffler

Primero de todo vamos a ver qué entendemos por *función meromorfa* en un abierto Ω del plano complejo.

Definición 2.3.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ se dice meromorfa en Ω si existe un conjunto $M \subset \Omega$ tal que:

- M no tiene puntos de acumulación en Ω (i.e. $M' \cap \Omega = \emptyset$).
- $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus M)$
- f tiene un polo en cada $\alpha \in M$.

Observación.

- Denotaremos por $\mathscr{M}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones meromorfas en Ω.
- En la definición anterior se puede tomar $M = \emptyset$, en cuyo caso se tiene que

$$\mathscr{H}(\Omega) = \mathscr{M}(\Omega)$$

- Si $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ se denota, al igual que con los holomorfas, como $\mathscr{Z}(f)$ el conjunto de sus ceros y el conjunto de sus polos se denota por $\mathscr{P}(f)$ (ver A.1.3).

Ahora veamos un resultado que se deduce del Teorema 2.2.5 que nos permite representar cualquier función meromorfa en un abierto conexo como cociente de funciones holomorfas.

Corolario 2.3.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, cada $F \in \mathscr{M}(\Omega)$ admite una representación $F = f/g$ como cociente de funciones $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$.*

Demostración. Denotaremos por $m(\alpha)$ la multiplicidad del polo $\alpha \in \mathscr{P}(F)$. Según el Teorema 2.2.5 existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que cada $\alpha \in \mathscr{P}(F)$ es cero de g con multiplicidad $m(\alpha)$. La función $f = gF$ presenta singularidades evitables en los puntos $\alpha \in \mathscr{P}(F)$ y eliminándolas definiendo

$$f(\alpha) := \lim_{z \to \alpha} g(z)F(z) \qquad \text{si } \alpha \in \mathscr{P}(F)$$

se obtiene una función que es holomorfa en Ω con la que se obtiene la representación $F = f/g$. □

Una vez que hemos definido el concepto de función meromorfa es natural preguntarse qué ocurre con las series de funciones meromorfas y cuándo se entenderá que una serie de tal tipo converge uniformemente. Para ello usamos la siguiente definición que no es contradictoria con los conceptos del *Análisis Complejo* que poseemos.

Definición 2.3.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $(f_k)_k$ una sucesión de funciones meromorfas, se dice que

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

converge uniformemente sobre compactos de Ω si para cada $K \subset \Omega$ compacto existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

- $\mathscr{P}(f_k) \cap K = \emptyset \quad \forall k > k_0$
- La serie $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente sobre K en el sentido tradicional.

La siguiente proposición nos da una regla para calcular la *derivada logarítmica* de un producto infinito de funciones holomorfas. Para su demostración necesitaremos el concepto que acabamos de definir sobre la convergencia uniforme de una serie de funciones meromorfas.

Proposición 2.3.4. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ un producto infinito, de funciones holomorfas $f_k \in \mathscr{H}(\Omega)$ no idénticamente nulas, que converge uniformemente sobre compactos de Ω. Entonces*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}$$

donde la serie de funciones meromorfas $(f_k'/f_k)_k$ converge uniformemente sobre compactos de Ω.

Demostración. Como cada f_k no es idénticamente nula en Ω abierto conexo y es holomorfa en Ω se tiene que sus ceros son aislados (ver lema A.1.6). Entonces el cociente f_k'/f_k es una función meromorfa en Ω cuyos polos, todos simples (pues si f_k tiene un cero de multiplicidad m entonces f_k' tiene un cero de multiplicidad $m-1$), son los ceros de f_k. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \dots f_n(z) R_n(z)$$

donde $R_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$. Es sencillo ver que la derivada logarítmica de un producto finito es la suma de las derivadas logarítmicas, luego

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} + \frac{f_2'(z)}{f_2(z)} + \dots + \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} + \frac{R_n'(z)}{R_n(z)}$$

suma válida para todo $z \in \Omega \setminus \mathscr{Z}(f)$ que se puede considerar como suma de funciones meromorfas en el espacio $\mathscr{M}(\Omega)$.

Como la sucesión $R_n(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre compactos de Ω, dado un compacto $K \subset \Omega$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > n_0$ y cada $z \in K$ se cumple $|R_n(z) - 1| < 1/2$, y por tanto $|R_n(z)| > 1/2$. Esto nos asegura que para todo $n > n_0$ se cumple que $\mathscr{P}(f_n'/f_n) \cap K = \mathscr{Z}(f_n) \cap K = \emptyset$.

Por otro lado, según el teorema de Weierstrass (ver teorema A.1.8) la sucesión de derivadas $R_n'(z)$ converge hacia 0 uniformemente sobre compactos de Ω pues $R_n(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre compactos. Como tenemos la desigualdad $|R_n'(z)/R_n(z)| \leq 2|R_n'(z)|$, se tiene que $R_n'(z)/R_n(z)$ converge hacia 0 uniformemente sobre K.

Se obtiene así que la serie de funciones meromorfas $\sum_{k=1}^{\infty}(f_k'/f_k)$ converge, según la definición anterior, hacia la función meromorfa f'/f. □

Observación. La proposición anterior se puede generalizar a cualquier conjunto Ω no necesariamente abierto ni conexo, basta con añadir a las hipótesis que los ceros de todas las funciones f_k sean aislados, es decir, $\mathscr{Z}(f_k)' \cap \Omega = \emptyset \ \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Sabemos ([13, p. 116] proposición 4.4.3) que si f es una función meromorfa y racional (cociente de polinomios complejos) podemos encontrar una única representación de f como

$$f(z) = p(z) + \sum_{k=1}^{m} P_k\left(\frac{1}{z-\alpha_k}\right)$$

donde p es un polinomio (constante cuando el ∞ no es un polo de f) y cada P_k es un polinomio con $P_k(0) = 0$. Esta es a llamada *descomposición en fracciones simples* de la función racional f cuyo interés reside en que hace explícitos los polos $\mathscr{P}(f) = \{\alpha_k : 1 \leq k \leq m\}$ y las correspondientes partes principales $P_k(1/(z-\alpha_k))$ (ver A.1.3). Cuando $p(z)$ no es constante, la parte principal de f en el ∞ es $p(z) - p(0)$.

El objetivo de esta sección es llegar a una expresión análoga para una función f meromorfa con infinitos polos $\mathscr{P}(f) = \{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$. En esta situación es natural pensar que la serie de partes principales

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k\left(\frac{1}{z-\alpha_k}\right)$$

va a intervenir en el desarrollo, pero se da el problema de que esta serie no es convergente en general. El problema se resolverá demostrando que es posible elegir una sucesión de polinomios $Q_k(z)$ tales que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[P_k\left(\frac{1}{z-\alpha_k}\right) - Q_k(z)\right]$$

converge según la definición dada en 2.3.3.

Veamos primero el problema inverso, es decir, dado un conjunto de polos fijo encontrar una función meromorfa f que tenga esos polos exactamente.

Teorema 2.3.5. ***(Problema de los polos en $\mathbb{C}$).*** *Sea $M \subset \mathbb{C}$ un conjunto sin puntos de acumulación en $\mathbb{C}$. Para cada $\alpha \in M$ sea $P_\alpha(z)$ un polinomio no nulo con $P_\alpha(0) = 0$. Entonces, existe $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con $\mathscr{P}(f) = M$ de forma que $P_\alpha(1/(z-\alpha))$ es la parte principal de f en cada $\alpha \in M$. Más concretamente:*

- *Si M es finito, podemos tomar $f(z) = \sum_{\alpha \in M} P_\alpha(1/(z-\alpha))$.*
- *Si M es infinito, entonces lo podemos escribir como sucesión $M = \{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$ de forma que*

  $$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \text{ y } \lim_{k\to\infty} |\alpha_k| = \infty$$

  Entonces existe una sucesión de polinomios $Q_k(z)$ tales que la serie

  $$\sum_{k=1}^{\infty}\left[P_{\alpha_k}\left(\frac{1}{z-\alpha_k}\right) - Q_k(z)\right]$$

  converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ y define una función $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con las propiedades requeridas.

Demostración. En caso en que M sea finito es obvio. Supongamos que M es infinito, como $M' \cap \mathbb{C} = \emptyset$ por el lema A.1.5 se tiene que M es numerable y se puede escribir como dice el enunciado $M = \{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$ y

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \text{ y } \lim_{k\to\infty} |\alpha_k| = \infty$$

Supongamos que $\alpha_1 \neq 0$. Entonces para cada $k \geq 1$ la función $f_k(z) = P_k(1/(z-\alpha_k))$ es holomorfa en el disco $D(0,|\alpha_k|)$ donde tiene un desarrollo en serie de potencias

$$f_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} z^j$$

Según las propiedades de las series de potencias, este desarrollo converge uniformemente sobre compactos del disco de convergencia $D(0,|\alpha_k|)$. En particular, converge uniformemente sobre $D_k = \{z : |z| \leq |\alpha_k|/2\}$, luego existe un $j_k \in \mathbb{N}$ tal que la suma parcial

$$Q_k(z) = \sum_{j=0}^{j_k} a_{kj} z^j \text{ cumple que } |f_k(z) - Q_k(z)| < \frac{1}{2^k} \qquad \forall z \in D_k$$

Veamos que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_k(z) - Q_k(z))$$

converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ según la definición 2.3.3. Efectivamente, si $K \subset \mathbb{C}$ un compacto y $R = \text{máx}\{|z| : z \in K\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_k| > 2R$ para todo $k > n$, luego $K \subset D_k$ y se cumple:

a) $\mathscr{P}(f_k - Q_k) \cap K = \{\alpha_k\} \cap K = \emptyset \ \forall k > n$.

b) $|f_k(z) - Q_k(z)| \leq 1/2^k \ \forall z \in K$.

En virtud al criterio de Weierstrass (ver A.1.13), la condición b) asegura que la serie

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (f_k(z) - Q_k(z))$$

converge uniformemente sobre K. Por tanto, según la definición 2.3.3 la suma

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(z) - Q_k(z))$$

define una función meromorfa en $\mathbb{C}$ cumpliendo las condiciones requeridas.

Finalmente, si $\alpha_1 = 0$, tomamos $Q_1 \equiv 0$ y aplicamos el razonamiento anterior al conjunto $\{\alpha_k : k \geq 2\}$ para obtener los polinomios $Q_k(z)$ con $k \geq 2$. □

Como corolario tenemos el problema inicial que comentábamos antes, fijar una función meromorfa f y descomponerla como suma de sus partes principales modificadas por un polinomio.

Corolario 2.3.6. ***(Teorema de Mittag-Leffler en $\mathbb{C}$).*** *Sea $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con infinitos polos $\mathscr{P}(f) = \{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$ que se suponen ordenados según módulos crecientes*

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \ldots \leq |\alpha_k| \leq |\alpha_{k+1}| \leq \ldots$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $P_k(z)$ un polinomio con $P_k(0) = 0$ tal que $P_k(1/(z-\alpha_k))$ es la parte principal de f en α_k. Entonces existe una función entera $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y una sucesión de polinomios $Q_k(z)$ tales que f admite un desarrollo de la forma

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[P_k\left(\frac{1}{z-\alpha_k}\right) - Q_k(z) \right]$$

uniformemente convergente sobre compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración. Según el Teorema 2.3.6 existe una sucesión de polinomios $Q_k(z)$ tal que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[P_{\alpha_k}\left(\frac{1}{z-\alpha_k}\right) - Q_k(z) \right]$$

converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ y define una función meromorfa $F \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con los mismos polos y partes principales que f. La diferencia $g := f - F$ presenta singularidades evitables en cada α_k y eliminando estas singularidades evitables se obtiene la función entera $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ del enunciado. $\square$

Observación.

- Los polinomios $Q_k(z)$ que aparecen en el Teorema 2.3.6 y en el Corolario 2.3.5 no están unívocamente determinados y en cada caso particular convendrá elegirlos del mínimo grado posible.
- Si la serie de las partes principales $\sum_{k=1}^{\infty} P_k(1/(z-\alpha_k))$ ya converge uniformemente sobre compactos, los polinomios $Q_k(z)$ se pueden tomar todos idénticamente nulos.

Ejemplo. La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2}$$

converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$. Por lo tanto define una función $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ tal que $\mathscr{P}(f) = \mathbb{N}$ y cada $k \in \mathbb{N}$ es un polo doble con parte principal $1/(z-k)^2$.

Efectivamente, sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto y sea $n > 2\,\text{máx}\{|z| : z \in K\}$. Entonces para todo $k > n$ la función $f_k(z) = 1/(z-k)^2$ no tiene polos en K. Además, para todo $z \in K$ se cumple $|z| \leq k/2$ y por tanto

$$\left|\frac{1}{(z-k)^2}\right| \leq \frac{1}{(k-|z|)^2} \leq \frac{1}{(k-k/2)^2} = \frac{4}{k^2}$$

y según el criterio de Weierstrass (ver A.1.13) se tiene que la serie $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente sobre K. Con esto queda demostrado que la serie inicial converge según la definición 2.3.3 y por lo tanto define una función meromorfa con las propiedades indicadas.

El resultado obtenido en el Teorema 2.3.6 se puede generalizar para un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ arbitrario. Su demostración habitual, que usa el Teorema de Runge sobre aproximación de funciones holomorfas mediante funciones racionales ([10, p. 251-253]), queda fuera del alcance de los resultados expuestos hasta ahora. Si se quisiese ver una demostración del mismo se puede ver en [10, p. 254] o [6, p. 205].

Teorema 2.3.7. ***(Problema de los polos en Ω).*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $M \subset \Omega$ un conjunto sin puntos de acumulación en Ω y para cada $\alpha \in M$ sea $P_\alpha(z)$ un polinomio con $P_\alpha(0) = 0$. Entonces existe una función meromorfa $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $\mathscr{P}(f) = M$ y la parte principal de f en cada polo $\alpha \in M$ es $P_\alpha(1/(z-\alpha))$.*

2.4. Ejemplo: Función Seno

Vamos a ver cómo obtener la factorización de la función seno, más concretamente veremos la factorización de $f(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$.

Tenemos que $\mathscr{Z}(f) = \mathbb{Z}$, veamos que $\rho_k = 1\ \forall k$ es una sucesión adaptada a la sucesión $(z_k)_k$ de los ceros no nulos de f (ver lema 2.1.3) pues

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|z_k|} \right)^2 = 2R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{R^2\pi^2}{3} < \infty$$

Usando el teorema 2.2.3 tenemos que existe $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\pi z) &= e^{g(z)} z \prod_{z_k \in \mathscr{Z}(f)\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k}} = e^{g(z)} z(1-z)e^{z}(1+z)e^{-z}(1-\frac{z}{2})e^{\frac{z}{2}}(1+\frac{z}{2})e^{-\frac{z}{2}}\dots \\ &= e^{g(z)} z(1-z^2)(1-\frac{z^2}{4})\dots = e^{g(z)} z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \end{aligned}$$

Entonces, si llamamos $P(z) = z\prod_{k=1}^{\infty}(1 - z^2/k^2)$ haciendo la derivada logarítmica de f queda

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{e^{g(z)}g'(z)P(z) + e^{g(z)}P'(z)}{e^{g(z)}P(z)} = g'(z) + \frac{P'(z)}{P(z)}$$

Y aplicado la proposición 2.3.4 a $P(z)$ tenemos

$$\pi\cot(\pi z) = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2z/k^2}{1-z^2/k^2} = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}$$

Para concluir necesitaremos la siguiente fórmula

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2} \qquad \text{si } z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$$

Si dicha fórmula es cierta se obtiene que $g'(z) = 0$ y por tanto que $g(z) = c$, una constante. Para calcular dicha constante vamos a usar la expresión del seno, que recordemos era

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z} = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = e^{c} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

Tomando en esta igualdad límites cuando $z \to 0$ obtenemos:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z} = \pi = \lim_{z\to 0} e^{c} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = e^{c} \prod_{k=1}^{\infty} 1 = e^{c}$$

Luego $e^c = \pi$ y hemos llegado a la expresión en producto infinito del $\operatorname{sen}(\pi z)$:

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

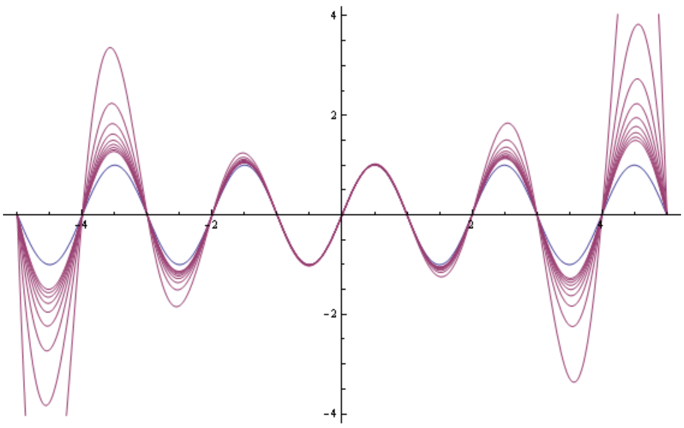


Figura 2.1: El seno es la gráfica azul y los sucesivos productos las gráficas moradas.

En la figura 2.1 podemos apreciar cómo el producto se aproxima lentamente a la función seno en los reales. Hemos dibujado junto a la función seno los productos parciales hasta los índices $\{10,15,20,25,30,35,40,45,50\}$.

El código en mathematica para generar esta imagen ha sido

$$\text{Plot}\left[\left\{\text{Sin}[\text{Pi}\,x], \text{Table}\left[\left\{\text{Pi}\,x\prod_{k=1}^{m}(1-x^2/k^2)\right\}, \{m,10,50,5\}\right]\right\}, \{x,-5,5\}\right]$$

Vamos a demostrar la fórmula que antes hemos dado por cierta. Esto se puede hacer de múltiples formas, aquí presentaremos una ellas basada en el Teorema de los Residuos (ver teorema A.1.11) aplicado a la función

$$h(z) = \frac{2a}{a^2-z^2}\pi\cot(\pi z)$$

donde $a \notin \mathbb{Z}$ es fijo.

Lema 2.4.1. *Si $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ entonces*

$$\pi\cot(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-k^2}$$

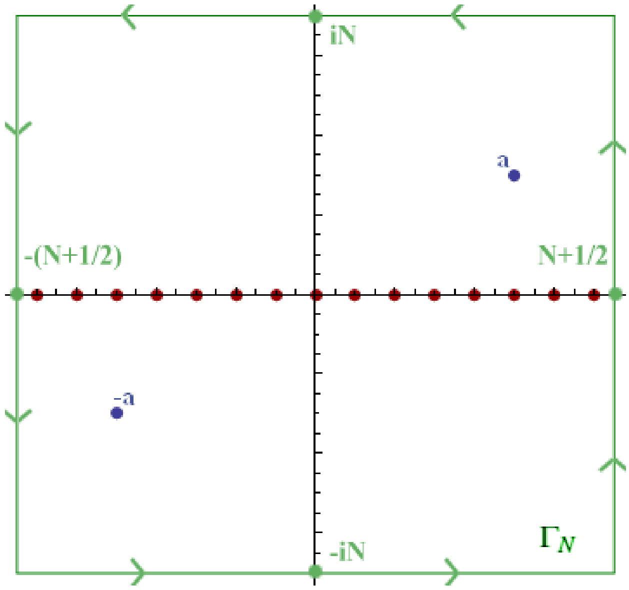
Demostración. Notemos que $\mathscr{P}(h) = \mathbb{Z}\cup\{\pm a\}$ y todos son polos simples, calculemos los residuos

$$\begin{aligned}
Res(h,k) &= \lim_{z\to k}(z-k)h(z) = \lim_{z\to k}\frac{2a\pi}{a^2-z^2}\frac{z-k}{\tan(\pi z)} = \frac{2a\pi}{a^2-k^2}\lim_{z\to k}\frac{z-k}{\tan(\pi z)-\tan(\pi k)}\\
&= \frac{2a\pi}{a^2-k^2}\frac{1}{[\tan'(\pi z)]_{z=k}} = \frac{2a}{a^2-k^2}\cos^2(\pi k) = \frac{2a}{a^2-k^2}\\
Res(h,a) &= \lim_{z\to a}\frac{2a(z-a)}{a^2-z^2}\pi\cot(\pi z) = \lim_{z\to a}\frac{-2a}{a+z}\pi\cot(\pi z) = -\pi\cot(\pi a)\\
Res(h,-a) &= \lim_{z\to -a}\frac{2a(z+a)}{a^2-z^2}\pi\cot(\pi z) = \lim_{z\to -a}\frac{2a}{a-z}\pi\cot(\pi z) = \pi\cot(-\pi a)\\
&= -\pi\cot(\pi a)
\end{aligned}$$

Por tanto se tiene, aplicando el teorema A.1.11, que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} h(z)dz = \sum_{|k|\le N} Res(h,k) + Res(h,a) + Res(h,-a) = \sum_{|k|\le N}\frac{2a}{a^2-k^2} - 2\pi\cot(\pi a)$$

donde el camino Γ_N es el de la siguiente figura



Veamos que $\lim_N |\int_{\Gamma_N} h(z)dz| = 0$. Como tenemos la acotación

$$0 \leq \left| \int_{\Gamma_N} h(z)dz \right| \leq \int_{\Gamma_N} |h(z)|dz$$

nos basta ver que la última integral tiende a 0 cuando N tiende a infinito. Empecemos por acotar la función $h(z)$ en los puntos $z \in Imagen(\Gamma_N)$.

$$|h(z)| = \frac{2|a|}{|z^2 - a^2|} \pi |\cot(\pi z)| \leq \frac{2|a|}{N^2 - |a|^2} \pi |\cot(\pi z)|$$

pues como $z \in Imagen(\Gamma_N) \Rightarrow |z| \geq N$ y por tanto $|z^2 - a^2| \geq |z|^2 - |a|^2 \geq N^2 - |a|^2$. Solo nos queda ver que

$$\sup_{z \in Imagen(\Gamma_N)} |\cot(\pi z)| \leq C \qquad \text{constante indep. de } N$$

Distinguiremos dos casos, si z se encuentra en el lado derecho o izquierdo de Γ_N o si se encuentra arriba o abajo. Usaremos las identidades conocidas $\operatorname{sen}(it) = i \operatorname{senh}(t)$, $\cos(it) = \cosh(t)$ y el hecho de que $N \in \mathbb{N}$ y que $\cosh(\pi N) \geq \operatorname{senh}(\pi N)$.

- **Caso 1:** Sea $z = \pm(N + 1/2) + it$ con $t \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\pm\pi(N+1/2) + \pi it) &= \pm \operatorname{sen}(\pi(N+1/2)) \cos(\pi it) + \cos(\pi(N+1/2)) \operatorname{sen}(\pi it) \\
&= \pm(-1)^N \cosh(\pi t) \\
\cos(\pm\pi(N+1/2) + \pi it) &= cos(\pi(N+1/2))) \cos(\pi it) \mp \operatorname{sen}(\pi(N+1/2)) \operatorname{sen}(\pi it) \\
&= \mp(-1)^N i \operatorname{senh}(\pi t)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$|\cot(\pi z)| = \left|\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\right| = \left|\frac{\operatorname{senh}(\pi t)}{\cosh(\pi t)}\right| \leq 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Caso 2:** Sea $z = t \pm iN$ con $t \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen}(\pi t \pm \pi iN)| &= |\operatorname{sen}(\pi t)\cos(\pi iN) \pm \cos(\pi t)\operatorname{sen}(\pi iN)| \\
&= |\operatorname{sen}(\pi t)\cosh(\pi N) \pm i\cos(\pi t)\operatorname{senh}(\pi N)| \\
&\geq |\operatorname{senh}(\pi N)(\operatorname{sen}(\pi t) \pm i\cos(\pi t))| = |\operatorname{senh}(\pi N)| \\
|\cos(\pi t \pm \pi iN)| &= |\cos(\pi t)\cos(\pi iN) \mp \operatorname{sen}(\pi t)\operatorname{sen}(\pi iN)| \\
&= |\cos(\pi t)\cosh(\pi N) \mp i\operatorname{sen}(\pi t)\operatorname{senh}(\pi N)| \\
&\leq |\cosh(\pi N)(\cos(\pi t) \mp i\operatorname{sen}(\pi t))| = |\cosh(\pi N)|
\end{aligned}$$

Por tanto

$$|\cot(\pi z)| = \left|\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\right| \leq \left|\frac{\cosh(\pi N)}{\operatorname{senh}(\pi N)}\right| \leq C \qquad \text{si } N \geq 1$$

Así hemos llegado a que

$$|h(z)| \leq \frac{2|a|\pi C}{N^2 - |a|^2} \qquad \text{si } N \geq 1$$

Luego, al tomar límites cuando $N \to \infty$ en la integral del principio

$$\lim_N \int_{\Gamma_N} |h(z)|dz \leq \lim_N \left(\frac{2|a|\pi C}{N^2 - |a|^2}\int_{\Gamma_N} dz\right) = \lim_N \left(\frac{2|a|\pi C}{N^2 - |a|^2}|\Gamma_N|\right) \leq \lim_N \frac{C'}{N} = 0$$

pues Γ_N es un camino cuya longitud es $|\Gamma_N| = 8N + 2$.

Haciendo uso de la igualdad obtenida por el Teorema de los residuos y tomando límites en N se tiene

$$0 = \lim_N \int_{\Gamma_N} h(z)dz = \lim_N \sum_{|k|\leq N} \frac{2a}{a^2 - k^2} - 2\pi\cot(\pi a) = \frac{2}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4a}{a^2 - k^2} - 2\pi\cot(\pi a)$$

Luego se tiene que para $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ arbitrario

$$\pi\cot(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - k^2}$$

□

Hay otras formas de computar la fórmula anterior, una de ellas se desarrolla en [11, p. 142 - 144] y hace uso del Teorema de Liouville (ver Teorema A.1.12) para que ver que la diferencia entre la función cotangente y la serie de antes es constante igual a cero en todo el plano complejo. Otra forma es haciendo uso del Teorema de Mittag-Leffler (Teorema 2.3.6) para calcular los polinomios $Q_k(z)$, esta forma está desarrollada en [13, p. 169] Proposición 7.1.8.

Veamos a continuación una aplicación de la representación del seno como producto infinito, esta es el famoso producto de Wallis:

Proposición 2.4.2. ***(Producto de Wallis).*** *Se verifica la identidad*

$$\lim_m \frac{2^2 4^2 \dots (2m)^2}{1{\cdot}3^2 \dots (2m-1)^2(2m+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\dots = \frac{\pi}{2}$$

Demostración. Primero de todo, notemos que se cumple la igualdad

$$\lim_m \frac{2^2 4^2 \dots (2m)^2}{1{\cdot}3^2 \dots (2m-1)^2(2m+1)} = \lim_m \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right)$$

Ahora, tomamos el desarrollo del seno en producto infinito y sustituyendo en $z = 1/2$ queda

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4k^2-1}{4k^2}\right)$$

Luego, se tiene

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4k^2-1}{4k^2}\right)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4k^2}{4k^2-1}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right)$$

□

2.5. Ejemplo: Producto de Blaschke

Vamos a construir una función holomorfa en el disco unidad, $D(0,1) = \{z : |z| < 1\}$, que sea acotada y que además posea los ceros que nosotros queramos, que cumplan cierta condición. Para ello usaremos algunos de los resultados obtenido en el Capítulo 1 sobre productos infinitos de funciones. Primero probaremos un lema previo:

Lema 2.5.1. *Sea $\alpha \in D(0,1)$ entonces se cumple*

$$\left|\frac{\alpha + |\alpha| z}{(1-\bar{\alpha} z)\alpha}\right| \leq \frac{1+r}{1-r} \qquad \forall |z| \leq r < 1$$

Demostración. Sea z tal que $|z| \leq r < 1$ y $\alpha \in D(0,1)$ entonces

$$|\alpha + |\alpha|z| \leq |\alpha| + |\alpha||z| \leq |\alpha|(1+r)$$

y

$$|(1-\bar{\alpha}z)\alpha| = |\alpha - |\alpha|^2 z| \geq |\alpha| - |\alpha|^2|z| \geq |\alpha|(1-r)$$

Por tanto haciendo el cociente, se obtiene la desigualdad del enunciado. □

Veamos como construir esa función holomorfa en el disco unidad que hemos comentado antes:

Proposición 2.5.2. *Sea* $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de números complejos en el disco unidad tal que* $\alpha_k \neq 0$ *y*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < \infty$$

Si p *es un entero no negativo y si*

$$B(z) = z^p \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \qquad z \in D(0,1)$$

entonces $B \in \mathscr{H}(D(0,1))$*,* B *no tiene ceros excepto en los puntos* α_k *y en el origen si* $p > 0$ *y* $|B(z)| \leq 1$ *para todo* $z \in D(0,1)$

Llamamos a esta función B un *producto de Blaschke*. Históricamente, los *productos de Blaschke* infinitos fueron introducidos por el matemático austriaco Wilhelm Blaschke [3] en 1915. Notemos que pueden repetirse algunos de los α_k, en cuyo caso B tiene ceros múltiples en esos puntos. El término *producto de Blaschke* se utilizará también si hay solo un número finito de factores e incluso cuando no hay ninguno, en cuyo caso $B(z) = 1$.

Demostración. Para demostrar que el producto infinito define una función holomorfa con esos ceros bastará ver que el producto converge uniformemente sobre compactos del disco unidad y por la Proposición 1.2.5 se tendrá que B es holomorfa en el disco con esos ceros exactamente. Por la Proposición 1.2.3 es suficiente ver la convergencia uniforme sobre compactos de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \right|$$

para tener la convergencia uniforme sobre compactos del producto.

Teniendo en cuenta que el término k-ésimo de la serie anterior es

$$\left|1-\frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right| = \left|\frac{(1-\bar{\alpha}_k z)\alpha_k - (\alpha_k - z)|\alpha_k|}{(1-\bar{\alpha}_k z)\alpha_k}\right| = \left|\frac{\alpha_k - |\alpha_k|^2 z - \alpha_k|\alpha_k| + |\alpha_k| z}{(1-\bar{\alpha}_k z)\alpha_k}\right|$$
$$= \left|\frac{(\alpha_k + |\alpha_k| z)(1-|\alpha_k|)}{(1-\bar{\alpha}_k z)\alpha_k}\right| = \left|\frac{\alpha_k + |\alpha_k| z}{(1-\bar{\alpha}_k z)\alpha_k}\right|(1-|\alpha_k|)$$

Usando el lema anterior

$$\left|1-\frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right| = \left|\frac{\alpha_k + |\alpha_k| z}{(1-\bar{\alpha}_k z)\alpha_k}\right|(1-|\alpha_k|) \leq \frac{1+r}{1-r}(1-|\alpha_k|)$$

cuando $|z| \leq r < 1$. Por el criterio de Weierstrass (ver A.1.13) la serie es uniformemente convergente sobre compactos del disco unidad y la función B cumple las condiciones del enunciado.

Como cada factor del producto infinito es una transformación de Möbius, $T_k(z)$, por propiedades de estas transformaciones nos basta ver que transforma la frontera del disco unidad en la frontera del disco unidad y que un punto del interior del disco lo manda al interior para ver que cada factor tiene norma menor que uno. Tomemos $|z| = 1$, entonces

$$|T_k(z)| = \left|\frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}\right| = \left|\frac{\alpha_k - z}{\bar{z}z - \bar{\alpha}_k z}\right| = \left|\frac{\alpha_k - z}{\bar{z} - \bar{\alpha}_k}\right| = 1$$

Luego $T_k(\partial D(0,1)) = \partial D(0,1)$ y como $T_k(\alpha_k) = 0$ con $|\alpha_k| \leq 1$ se tiene que $T_k(D(0,1)) = D(0,1)$. Como esto ocurre para todo k, se deduce que $|B(z)| < 1$ para todo $z \in D(0,1)$, y la demostración queda completa. □

La proposición anterior nos muestra que

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|) < \infty$$

es una condición suficiente para la existencia de una función holomorfa en $D(0,1)$ y acotada que tiene solo los ceros prescritos α_k. Esta condición también resulta ser necesaria no solo para los ceros de funciones acotadas en el disco unidad sino para una familia de funciones más amplia (las funciones de la clase *Nevanlinna*, ver [10, p. 292]).

Sin embargo, la demostración de este recíproco requiere de la *fórmula de Jensen*, la demostración de la fórmula puede encontrarse en [10, p. 289].

Teorema 2.5.3. ***(Fórmula de Jensen).*** *Supongamos que* $\Omega = D(0,1)$*,* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$*,* $f(0) \neq 0$*,* $r < 1$ *y que* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *son los ceros de* f *en* $\overline{D(0,r)}$*, enumerados de acuerdo con sus multiplicidades. Entonces*

$$|f(0)|\prod_{k=1}^{m}\frac{r}{|\alpha_k|} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\right)$$

Proposición 2.5.4. *Sea f holomorfa en $D(0,1)$ y acotada, no idénticamente nula y que $(\alpha_k)_k$ son los ceros de f, enumerados de acuerdo con sus multiplicidades. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|) < \infty$$

Demostración. Si f tuviese un cero de orden s en el origen, entonces $g(z) = f(z)z^{-s}$ es holomorfa en $D(0,1)$, acotada y tiene los mismos ceros que f salvo en el origen. Por tanto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(0) \neq 0$. Supondremos también que f tiene infinitos ceros en $D(0,1)$ (y por tanto se acumulan en la frontera), de otro modo el resultado es obvio.

Sea $n(r)$ el número de ceros de f en $\overline{D(0,r)}$, fijemos M y tomemos cualquier $r < 1$ tal que $n(r) > M$. Entonces por la fórmula de Jensen 2.5.3 se tiene

$$|f(0)|\prod_{k=1}^{n(r)}\frac{r}{|\alpha_k|} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\right)$$

Si ahora definimos la función

$$\log^+(t) = \begin{cases} \log(t) & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

entonces es obvio que

$$|f(0)|\prod_{k=1}^{M}\frac{r}{|\alpha_k|} \leq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta\right)$$

Puesto que por hipótesis f está acotada en $D(0,1)$ y por la definición de $\log^+$ se tiene que la integral de la derecha está acotada por una constante $C < \infty$ para todo $0 < r < 1$. Se tiene que

$$\prod_{k=1}^{M}|\alpha_k| \geq \frac{|f(0)|r^M}{C}$$

La desigualdad persiste para todo M cuando $r \to 1$, por tanto, como $f(0) \neq 0$ se tiene

$$\infty > |\alpha_1| \geq \prod_{k=1}^{\infty}|\alpha_k| \geq \frac{|f(0)|}{C} > 0$$

es decir, nuestro producto infinito es *absolutamente convergente* y por la proposición 1.1.4 se obtiene la convergencia de la serie inicial. □

Capítulo 3

Funciones célebres

CONTENIDOS

En este capítulo hablaremos de dos funciones relevantes para el *Análisis*, estas son la función **Gamma de Euler** y la función **Zeta de Riemann**.

Primeramente hablaremos sobre la función Gamma, su construcción como generalización del factorial y veremos numerosas identidades en las que interviene tales como la *fórmula de Stirling*, la *fórmula de duplicación de Legendre*, entre otras.

A continuación hablaremos sobre la función Zeta, daremos la conocida ecuación funcional de Riemann y terminaremos dando la expresión de Zeta como producto de sus ceros no sin antes hablar acerca del célebre Teorema de los números primos 3.2.14.

Las referencias principales para este capítulo son [2, p. 198 - 206, 212 - 218], [4] apuntes sobre *Funciones Gamma y Zeta*, [5, p. 20 - 47], [6, p. 176 - 194], [11, p. 159 - 174, 181 - 197], [13, p. 181 - 194].

3.1. Función Gamma de Euler

La función Gamma de Euler, denotada por $\Gamma(z)$, es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ que extiende a la función factorial definida en los naturales por $f(n) = (n-1)!$. Si nos fijamos esta función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ queda caracterizada por la ecuación funcional $f(n+1) = nf(n)$ con condición inicial $f(1) = 1$.

Para construir la función Γ planteamos el problema de buscar una función compleja $f(z)$ que cumpla la misma ecuación funcional que la función factorial.

$$f(1) = 1, \qquad f(z+1) = zf(z) \quad \forall z \neq 0$$

Es natural querer buscar una función f lo más suave posible, y la condición $f(1)=1$ sugiere que impongamos la condición de que f sea holomorfa en un entorno del 1. Este requisito junto con la ecuación funcional lleva a que

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} f(z+1) = f(1) = 1$$

Luego f debe de tener en $z=0$ un polo simple con residuo $Res(f,0)=1$. Análogamente, la igualdad $f(z+2)=(z+1)f(z+1)=(z+1)zf(z)$ lleva consigo que f tenga en $z=-1$ otro polo simple con residuo

$$Res(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{f(z+2)}{z} = -f(1) = -1$$

Y en general, para $k\in\mathbb{N}$, la igualdad $f(z+k+1)=z(z+1)\dots(z+k)f(z)$ nos dice que la solución, suave, que buscamos debe tener un polo simple en $z=-k$ con residuo

$$Res(f,-k) = \lim_{z\to -k}(z+k)f(z) = \lim_{z\to -k}\frac{f(z+k+1)}{z(z+1)\dots(z+k-1)} = \frac{(-1)^k}{k!}$$

Estas consideraciones justifican que busquemos nuestra f en el conjunto $\mathscr{M}(\mathbb{C})$ con polos simples en los enteros negativos. Esta claro que al ser f meromorfa, sin ceros y con polos simples, se puede escribir de la forma $f=1/F$ donde $F\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$ tiene ceros simples en el conjuntos $\{k\in\mathbb{Z}: k\leq 0\}$. Según el teorema 2.2.3 nuestra función F se puede escribir de la forma

$$F(z) = e^{g(z)}z\prod_{k=1}^{\infty}E_{\rho_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)$$

donde $z_k=-k$ y solo nos queda por ver cuál es la sucesión adaptada $(\rho_k)_k$. Vamos a ver que tomando $\rho_k=1\ \ \forall k$ ya obtenemos una sucesión adaptada a la sucesión de ceros no nulos de F pues

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|z_k|}\right)^{\rho_k+1} = R^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty \qquad \forall R>0$$

y el lema 2.1.3 me da el resultado. Por tanto podemos escribir la función F como producto infinito

$$F(z) = e^{g(z)}z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$$

donde $g\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$. Nuestro problema es ahora encontrar una función g, lo más sencilla posible, tal que haga que la función F cumpla las condiciones

$$F(1)=1, \qquad F(z)=zF(z+1) \quad \forall z\neq 0$$

De la ecuación funcional podemos sacar que

$$1 = \frac{zF(z+1)}{F(z)} = \lim_m \frac{ze^{g(z+1)}(z+1)\prod_{k=1}^m \left(1+\frac{z+1}{k}\right)e^{-(z+1)/k}}{e^{g(z)}z\prod_{k=1}^m \left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}} =$$

$$= \lim_m \frac{e^{g(z+1)}z(z+1)(z+2)\frac{z+3}{2}\dots\frac{z+m+1}{m}\exp(-\sum_{k=1}^m \frac{1}{k})\prod_{k=1}^m e^{-z/k}}{e^{g(z)}z(z+1)\frac{z+2}{2}\dots\frac{z+m}{m}\prod_{k=1}^m e^{-z/k}} =$$

$$= \lim_m \left((z+m+1)e^{g(z+1)-g(z)-S_m}\right) = \lim_m \left(\frac{z+m+1}{m}e^{g(z+1)-g(z)-S_m+\log(m)}\right)$$

donde $S_m = \sum_{k=1}^m 1/k$. Teniendo en cuenta que la sucesión $S_m - \log(m)$ es convergente y su límite es la conocida constante de *Euler-Mascheroni*, denotada por γ y cuyo valor aproximado es 0,577215..., el límite anterior existe y vale

$$1 = e^{g(z+1)-g(z)-\gamma}$$

Ahora, razonando sobre la condición inicial $F(1) = 1$, obteniendo que

$$1 = F(1) = e^{g(1)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-1/k} = e^{g(1)}\lim_m \prod_{k=1}^m \left(\frac{k+1}{k}e^{-1/k}\right) =$$

$$= e^{g(1)}\lim_m \left(\frac{(m+1)!}{m!}e^{-S_m}\right) = e^{g(1)}\lim_m \left(\frac{m+1}{m}e^{-S_m+\log(m)}\right) = e^{g(1)-\gamma}$$

Luego tenemos que las condiciones que debe cumplir la función g son

$$e^{g(1)-\gamma} = 1, \qquad e^{g(z+1)-g(z)-\gamma} = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Como hemos dicho, buscamos la función g lo más sencilla posible y por tanto tomamos $g(z) = \gamma z$. Con esto ya estamos en disposición de definir la función Γ.

Definición 3.1.1. Se llama función *Gamma de Euler* a la función meromorfa $\Gamma \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ definida por el producto infinito

$$\Gamma(z) := \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+z}\right)e^{z/k}$$

donde $\gamma = \lim_m(\sum_{k=1}^m 1/k - \log(m))$ es la constante de *Euler-Mascheroni*.

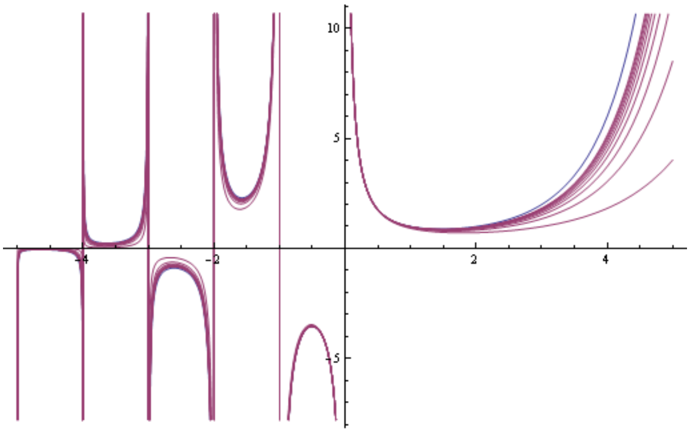


Figura 3.1: La función Γ es la gráfica azul y los sucesivos productos las gráficas moradas.

En la figura 3.1 podemos ver a la función Γ en los reales y sucesivos productos parciales. En este caso, como el producto hace explícitos los polos de la función Γ se puede apreciar que es allí dónde mejor aproxima el producto parcial a la función Γ.

El código en mathetica para generar esta imagen ha sido

$$\text{Plot}\left[\left\{\text{Gamma}[x],\text{Table}\left[\left\{\text{Exp}[-\text{EulerGamma}x]/x\prod_{k=1}^{m}k\text{Exp}[x/k]/(k+x)\right\},\{m,5,50,5\}\right]\right\},\{x,-5,5\}\right]$$

Teniendo en cuenta la motivación de su definición como extensión de la función factorial y los cálculos hechos previamente sobre sus polos y residuos podemos enunciar algunas de sus propiedades básicas:

Lema 3.1.2. *La función Γ satisface la ecuación funcional*

$$\Gamma(1)=1, \qquad \Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \quad \forall z\neq 0$$

No tiene ceros, $\mathscr{Z}(\Gamma)=\emptyset$, y sus polos son $\mathscr{P}(\Gamma)=\{0,-1,-2\dots\}=\mathbb{Z}^-$ todos simples con residuo $Res(f,-k)=(-1)^k/k!$.

Observación. La función Γ no es la única solución a la ecuación funcional que hemos tratado para extender el factorial, pues si $g\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$ es una función entera de periodo 1 tal que $g(1)=1$ (por ejemplo $g(z)=\cos(2\pi z)$) es directo comprobar que la función $f(z)=g(z)\Gamma(z)$ también cumple la ecuación funcional.

Si consideramos el límite de los productos parciales del producto infinito con el que se ha definido la función Γ se llega a la conocida *fórmula de Gauss*, en la cual no interviene la constante de *Euler-Mascheroni* γ:

Proposición 3.1.3. ***(Fórmula de Gauss).*** *Si $z \notin \mathbb{Z}^-$ entonces se verifica*

$$\Gamma(z) = \lim_m \frac{m!m^z}{z(z+1)\dots(z+m)}$$

Demostración. Usando la propia definición de la función Γ

$$\Gamma(z) := \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+z}\right)e^{z/k} = \lim_m \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{k+z}\right)e^{z/k} =$$

$$= \lim_m \frac{e^{-\gamma z}}{z}\frac{m!}{(z+1)\dots(z+m)}e^{zS_m} = \lim_m \frac{m!e^{z(S_m-\gamma)}}{z(z+1)\dots(z+m)} =$$

$$= \lim_m \frac{m!e^{z(\log(m)+S_m-\log(m)-\gamma)}}{z(z+1)\dots(z+m)}$$

Y teniendo en cuenta que $\lim_m(S_m - \log(m)) = \gamma$ se llega a que

$$\Gamma(z) = \lim_m \frac{m!e^{z\log(m)}}{z(z+1)\dots(z+m)} = \lim_m \frac{m!m^z}{z(z+1)\dots(z+m)}$$

□

A continuación vamos a ver otra forma de expresar a la función Γ como producto infinito, es el llamado producto infinito de Euler de la función Γ. Una prueba de esta igualdad puede encontrarse en [5, p. 24].

Proposición 3.1.4.

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^z\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\right]$$

Otra fórmula importante es la *fórmula de los complementos* que relaciona la función Γ y la función seno.

Proposición 3.1.5. ***(Fórmula de los complementos).*** *Si $z \notin \mathbb{Z}$ entonces se verifica*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

Demostración. Utilizando la ecuación funcional que cumple Γ (ver lema 3.1.2) se tiene que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\Gamma(z)\Gamma(-z)$$

Usando ahora la definición de la función Γ

$$-z\Gamma(z)\Gamma(-z) = -z\left(\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+z}\right)e^{z/k}\right)\left(\frac{e^{\gamma z}}{-z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k-z}\right)e^{-z/k}\right)$$

Y ahora simplificando y multiplicando los productos infinitos término a término obtenemos

$$-z\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{k^2-z^2}\right) = \frac{1}{z\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2-z^2}{k^2}\right)} = \frac{1}{z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}$$

Teniendo en cuenta el desarrollo en producto infinito del $\operatorname{sen}(\pi z)$ obtenido en la sección anterior obtenemos la fórmula deseada

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{1}{z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

□

Observación. Con esta fórmula se deduce que $\Gamma(1/2)^2 = \pi$ y teniendo en cuenta que $\Gamma(x) > 0$ si $x > 0$ (lo cual es obvio usando su definición como producto infinito) se llega a que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Algo más general se puede lograr usando la ecuación funcional del lema 3.1.2, pudiendo deducir que

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\pi} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Proposición 3.1.6. ***(Fórmula de duplicación de Legendre).*** *Si $z\notin\mathbb{Z}^-$ entonces*

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$$

Demostración. Usando la proposición 2.3.4 en la función $\Gamma\in\mathscr{H}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-)$ obtenemos que para $z\notin\mathbb{Z}^-$ es válido el desarrollo

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{k(k+z)}$$

serie que converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$. Por tanto, para derivar la igualdad anterior, podemos derivar la serie término a término, quedándonos

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^2}$$

Usando esta fórmula en $z, z+1/2$ y sumando, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z+1/2)}{\Gamma(z+1/2)}\right)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1/2+k)^2}\\ &=4\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+2k)^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+1+2k)^2}\right)\\ &=4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+k)^2}=2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right)\end{aligned}$$

Integrando esta igualdad respecto de z obtenemos

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}+\frac{\Gamma'(z+1/2)}{\Gamma(z+1/2)}=a+2\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\qquad a\in\mathbb{C}\text{ constante}$$

Y ahora volviendo a integrar, al menos para z en un entorno de z_0 y una rama adecuada del logaritmo (que depende de z_0), se tiene

$$\log(\Gamma(z))+\log(\Gamma(z+1/2))=az+b+\log(\Gamma(2z))\qquad a,b\in\mathbb{C}\text{ constantes}$$

Tomando exponenciales (independientemente de la rama del logaritmo escogida)

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)=e^{az+b}\Gamma(2z)\qquad a,b\in\mathbb{C}\text{ constantes}$$

Para calcular los valores de a y b tenemos que sustituir en la fórmula para algún valor de z, por ejemplo para $z=1/2,1$. Tras la observación de la proposición anterior, sabemos que $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(3/2)=\sqrt{\pi}/2$ y $\Gamma(2)=1$, luego, sustituyendo en los valores comentados en la igualdad anterior queda

$$\sqrt{\pi}=e^{a/2+b};\qquad \sqrt{\pi}/2=e^{a+b}$$

que despejando el sistema se obtiene

$$a=-\log(4);\qquad b=\log(2\sqrt{\pi})$$

quedando la fórmula del enunciado. □

Vamos a demostrar ahora que la función Γ puede expresarse como una integral dependiente de un parámetro, que es la forma habitual en la que se presenta la función Γ en variable real. Para ser más exactos vamos a demostrar que la función Γ es holomorfa en el semiplano $Re(z) > 0$ y admite la representación

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \qquad \text{si } Re(z) > 0$$

Veamos un lema previo antes del teorema de representación integral de la función Γ.

Lema 3.1.7. *La integral impropia*

$$f_0(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$$

converge uniformemente sobre compactos del semiplano $Re(z) > 0$ *donde define una función holomorfa y la integral impropia*

$$f_1(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ *donde define una función entera.*

Demostración. Razonemos primeros para $f_0(z)$. Sea $K \subset \{z : Re(z) > 0\}$ compacto, está claro que $\delta = \text{mín}\{Re(z) : z \in K\} > 0$ pues K es compacto y la función $Re(z)$ es continua en K. Para todo $z \in K$ y $t \in [0,1]$ se cumple:

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{Re(z)-1} \leq t^{\delta-1}$$

y teniendo en cuenta que la integral

$$\int_0^1 t^{\delta-1} dt = \left[\frac{t^\delta}{\delta} \right]_0^1 = \frac{1}{\delta}$$

es finita pues $\delta > 0$. Y ahora usando las proposiciones A.2.3 y A.2.4, en su versión para integrales de segunda especie, se obtiene el resultado deseado.

Razonemos ahora para $f_1(z)$. Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto y tomamos $A = \text{máx}\{Re(z) : z \in K\} < \infty$ pues los compactos de $\mathbb{C}$ son acotados y $Re(z)$ es continua en K. Para todo $z \in K$ y $t \in [1, \infty)$ se cumple:

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{Re(z)-1} \leq e^{-t} t^{A-1} = (e^{-t} t^{A+1}) t^{-2}$$

La función $e^{-t}t^{A+1}$ está acotada en $[1,\infty)$ pues es continua con límite 0 en el infinito. Por tanto podemos considerar $C = \sup\{e^{-t}t^{A+1} : t \geq 1\} < \infty$ con la que se obtiene

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leq Ct^{-2}$$

y teniendo en cuenta que la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^\infty = 1$$

es finita y usando las proposiciones A.2.3 y A.2.4 se obtiene el resultado deseado. □

Ya podemos demostrar que Γ admite la representación integral dicha anteriormente:

Teorema 3.1.8. ***(Representación integral).***

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \qquad si \;\; Re(z) > 0$$

Demostración. En virtud del lema 3.1.7 la integral impropia

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

define una función holomorfa en el semiplano $\{z : Re(z) > 0\}$. Según el Principio de Identidad (ver lema A.1.7) basta demostrar que $\Gamma(x) = f(x)$ para todo $x \in [1,\infty)$ lo cual se obtendrá de forma directa al demostrar los siguientes dos puntos:

a) $\lim_n \int_0^n (1-t/n)^n t^{x-1}dt = \Gamma(x)$

b) $\lim_n \int_0^n (1-t/n)^n t^{x-1}dt = f(x)$

La integral que interviene en el apartado $a)$ se puede calcular realizando primero un cambio de variables $s = t/n$ y luego integrando por partes sucesivamente:

$$\begin{aligned}
\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = n^x \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1}ds &= \frac{n^x}{x}\int_0^1 n(1-s)^{n-1}s^x ds \\
&= \frac{n^x}{x(x+1)}\int_0^1 n(n-1)(1-s)^{n-2}s^{x+1}ds = \dots \\
&= \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\int_0^1 s^{x+n-1}ds \\
&= \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}
\end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de Gauss (ver proposición 3.1.3) se tiene el apartado a).

Vamos a ver ahora el apartado b). Consideremos las funciones

$$\phi_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\chi_{[0,n]} \qquad n \in \mathbb{N}$$

que convergen puntualmente a la función $e^{-t}t^{x-1}\chi_{[0,\infty)}$ y

$$\left|\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\right| \leq e^{-t}t^{x-1}$$

Se obtiene, aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, que

$$\begin{aligned}\lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt &= \lim_n \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_n \phi_n(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-t}t^{x-1}\chi_{[0,\infty)}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = f(x)\end{aligned}$$

Aplicando los dos apartados, es obvio que $\Gamma(x) = f(x)$ para $x \in [1,\infty)$. □

Veamos ahora una prueba de la conocida *fórmula de Stirling*, que establece cómo se comporta asintóticamente $\Gamma(x+1)$ con $x \in (0,\infty)$. Seguiremos la demostración que se encuentra en [8, p. 121-123], otra demostración distinta puede encontrarse en [5, p. 40-42].

Proposición 3.1.9. ***(Fórmula de Stirling real).*** *Se verifica*

$$\lim_x \frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}} = 1$$

Demostración. Si en la representación integral de la función Γ (Teorema 3.1.8) hacemos el cambio de variables $t = x + \sqrt{x}s$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^x dt = x^x\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-x-\sqrt{x}s}\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right)^x ds \\ &= e^{-x}x^x\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{x\log(1+s/\sqrt{x})-\sqrt{x}s}ds\end{aligned}$$

Vamos a intentar aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada para demostrar que

$$\lim_x \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{x\log(1+s/\sqrt{x})-\sqrt{x}s}ds = \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2/2}ds$$

lo cual concluiría la prueba, pues haciendo el cambio $s = \sqrt{2}u$ queda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} ds = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{2\pi}$$

Dado que $\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \alpha(u)$, donde $\alpha(u)/u^2 \to 0$ cuando $u \to 0$, se tiene que

$$\lim_x \left(x \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}s \right) = -\frac{s^2}{2}$$

Por tanto nos basta encontrar una función integrable en $\mathbb{R}$ que acote, uniformemente en $x \to \infty$, a

$$e^{x\log(1+s/\sqrt{x}) - \sqrt{x}s} \chi_{(-\sqrt{x},\infty)}(s)$$

Observemos que

$$x \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}s = x \left(\log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - \frac{s}{\sqrt{x}} \right)$$

lo cual, haciendo el cambio $u = s/\sqrt{x}$, nos lleva a considerar la función $u \to \log(1+u) - u$. Vamos a probar que:

- $\log(1+u) - u \le -\frac{u^2}{4}$ si $|u| < 1$.
- $\log(1+u) - u \le -\frac{u}{4}$ si $u > 1$.

En efecto, si $\varphi_1(u) = \log(1+u) - u + \frac{u^2}{4}$, tenemos que

$$\varphi_1'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 + \frac{u}{2} = u \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+u} \right)$$

y como $1/(1+u) > 1/2$ cuando $|u| < 1$, se deduce que el signo de $\varphi_1'(u)$ es el mismo que el de u. Por tanto φ_1 tiene un máximo en el 0 y se cumple

$$\varphi_1(u) \le \varphi_1(0) = 0 \qquad \forall u \in (-1,1)$$

que es justo la primera desigualdad que queríamos probar. Para la segunda, basta considerar $\varphi_2(u) = \log(1+u) - u + \frac{u}{4}$ y entonces

$$\varphi_2'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 + \frac{1}{4} < 0 \qquad \forall u > 1$$

de donde se sigue que φ_2 es decreciente y por tanto

$$\varphi_2(u) < \varphi_2(1) < 0 \qquad \forall u > 1$$

Gracias a estas desigualdades podemos proceder a acotar tomando $u = s/\sqrt{x}$, suponiendo $x > 1$ y distinguiendo los casos:

$$x\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}s \leq \begin{cases} -s^2/4 & \text{si } |s| < \sqrt{x} \\ -\sqrt{x}s/4 \leq -s/4 & \text{si } s > \sqrt{x} \end{cases}$$

Por tanto hemos probado que

$$e^{x\log(1+s/\sqrt{x})-\sqrt{x}s}\chi_{(-\sqrt{x},\infty)}(s) \leq \begin{cases} e^{-s^2/4} & \text{si } |s| < \sqrt{x} \\ e^{-s/4} & \text{si } s > \sqrt{x} \end{cases} \leq e^{-(|s|-1)/4}$$

que es una función integrable en $\mathbb{R}$ y es lícito usar el Teorema de la convergencia dominada para concluir la prueba.

$\square$

Gracias a la *fórmula de Stirling* para números reales y la *fórmula de Gauss* (proposición 3.1.3) podemos probar una generalización de la *fórmula de duplicación de Legendre* (proposición 3.1.6), llamada *fórmula de multiplicación de Gauss*. Otra demostración que no usa la *fórmula de Stirling* durante la prueba se puede encontrar en [7, p. 4-5]

Proposición 3.1.10. ***(Fórmula de multiplicación de Gauss).*** *Si $m \in \mathbb{N}^*$ se verifica*

$$(\sqrt{2\pi})^{m-1}\Gamma(mz) = m^{mz-1/2}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right)$$

Demostración. Usando la ecuación funcional que cumple la función Γ

$$\Gamma(z-1) = \frac{\Gamma(z)}{z-1}$$

Y ahora, usando la proposición 3.1.3 para $\Gamma(z-1)$

$$\Gamma(z-1) = \lim_{j}\frac{j!\,j^{z-1}}{(z-1)z(z+1)\dots(z+j-1)}$$

Por tanto, obtenemos

$$\Gamma(z) = \lim_{j}\frac{j!\,j^{z-1}}{z(z+1)\dots(z+j-1)} \tag{3.1}$$

Sustituyendo esta última fórmula en el punto $z+k/m$ se tiene

$$\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right) = \lim_{j}\frac{j!\,j^{z+\frac{k}{m}-1}}{(z+\frac{k}{m})(z+\frac{k}{m}+1)\dots(z+\frac{k}{m}+j-1)}$$

Entonces, usando la fórmula de Stirling (3.1.9) para $j!$, podemos usarla pues estamos haciendo un límite en j y lo único que necesitamos es su comportamiento asintótico

$$\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right) = \lim_{j} \frac{\sqrt{2\pi j}(\frac{j}{e})^j j^{z+\frac{k}{m}-1}}{(z+\frac{k}{m})(z+\frac{k}{m}+1)\dots(z+\frac{k}{m}+j-1)}$$
$$= \lim_{j} \frac{\sqrt{2\pi}(\frac{mj}{e})^j j^{z+\frac{k}{m}-1/2}}{(mz+k)(mz+k+m)\dots(mz+k+mj-m)}$$

Por tanto, multiplicando y reordenando el denominador

$$m^{mz-1/2}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right) =$$

$$= \lim_{j} \frac{m^{mz-1/2}(\sqrt{2\pi})^m(\frac{mj}{e})^{mj} j^{mz+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k}{m}-m/2}}{(mz)(mz+1)\dots(mz+m-1)(mz+m)\dots(mz+mj-m)\dots(mz+mj-1)}$$

Teniendo en cuenta que $\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k}{m}-m/2 = -1/2$ y que el hecho de cambiar $mj \to j$ no cambia el valor del límite, nos queda

$$m^{mz-1/2}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right) = \lim_{j} \frac{(\sqrt{2\pi})^m(\frac{j}{e})^j j^{mz-1/2}}{(mz)(mz+1)\dots(mz+j-1)}$$
$$= \lim_{j} \frac{(\sqrt{2\pi})^{m-1} j! j^{mz-1}}{(mz)(mz+1)\dots(mz+j-1)} = (\sqrt{2\pi})^{m-1}\Gamma(mz)$$

Las dos últimas igualdades se consiguen aplicando la *fórmula de Stirling* y la ecuación (3.1). □

Se puede dar una generalización de la *fórmula de Stirling* para números reales que la hace válida en cualquier sector del plano complejo que omita el eje real negativo, su demostración se puede encontrar en [11, p. 326] o en [2, p. 201 -206].

Proposición 3.1.11. ***(Fórmula de Stirling compleja).*** *Para cada $\delta > 0$ definimos el conjunto $\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |arg(z)| \leq \pi - \delta\}$, se verifica*

$$\Gamma(z) = e^{z\log(z)}e^{-z}\frac{\sqrt{2\pi}}{z^{1/2}}\left(1+O\left(\frac{1}{|z|^{1/2}}\right)\right) \qquad si\ \ |z|\to\infty\ \ con\ \ z\in\Omega_\delta$$

3.2. Función Zeta de Riemann

Lo primero que hacemos es definir la función ζ como la suma de una serie, que es la forma habitual de definirla en el *Análisis Complejo*.

Definición 3.2.1. Se define en el semiplano $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1\}$ la función Zeta de Riemann como

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Observación. La definición de la potencia compleja n^z se realiza mediante:

$$n^z := e^{z\log(n)} \qquad \text{con } \log(n) \in \mathbb{R}$$

En cuyo caso se cumple

$$|n^z| = |e^{z\log(n)}| = e^{Re(z)\log(n)} = n^{Re(z)}$$

Veamos que la función así definida es holomorfa en su semiplano de definición:

Proposición 3.2.2. *La serie que define la función ζ converge uniformemente sobre compactos de $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1\}$, y así, ζ define una función holomorfa en Ω.*

Demostración. Sea $K \subset \Omega$ un compacto y consideremos $\alpha = \min\{Re(z) : z \in K\} > 1$ entonces se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{Re(z)}} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

y por tanto

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \qquad \text{pues } \alpha > 1$$

Como consecuencia del criterio de Weierstrass A.1.13 se obtiene la convergencia uniforme sobre compactos de la serie y, por el teorema de Weierstrass A.1.8, $\zeta \in \mathscr{H}(\Omega)$. □

Nuestro principal objetivo es demostrar que ζ se puede prolongar analíticamente a una función meromorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ con un único polo simple en $z = 1$ y que sus ceros, fuera de lo que llamaremos la *banda crítica* $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Re(z) < 1\}$, son

$$\mathscr{Z}(\zeta) \setminus B = \{-2n : n \in \mathbb{N}\}$$

que son los llamados *ceros triviales* de la función ζ. Ciertamente nosotros no probaremos que ζ no se anula en la frontera de B, para ello se puede consultar [11, p. 185] y usar la observación de la página 59 sobre los ceros de la función ζ.

En 1859 Riemann afirmó en [9] que la función ζ tiene infinitos ceros en B y que el número de ceros, $N(T)$, en $B \cap \{z : 0 \leq Im(z) \leq T\}$ verifica

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log(T))$$

La primera afirmación fue demostrada por J. Hadamard en 1859 y la segunda por Mangolet en 1905.

Riemann también formuló una conjetura sobre los ceros de la función ζ en B, actualmente la veracidad o no de esta es uno de los problemas matemáticos más conocidos del mundo y sigue sin tener una demostración.

Conjetura. ***(Hipótesis de Riemann).*** *Los ceros de la función ζ de Riemann en la banda crítica B se encuentran en la línea crítica*

$$\{z \in B : Re(z) = \frac{1}{2}\}$$

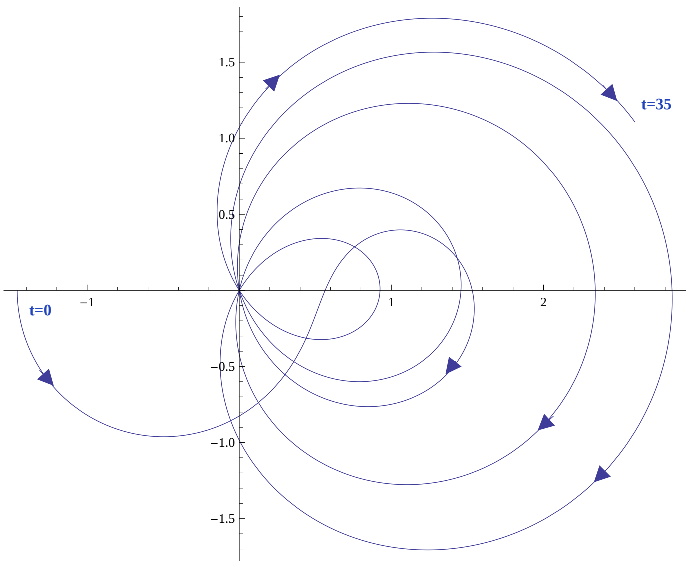


Figura 3.2: Representación de $(Re(\zeta(1/2+it)), Im(\zeta(1/2+it)))$ con $t \in (0,35)$.

En 1914, G.H. Hardy logró demostrar que había infinitos ceros en la línea crítica y más adelante, en 1975, N. Levinson demostró que esta recta contenía asintóticamente mas de un tercio de los ceros de la función ζ en B. Posteriormente, con ayuda de las computadoras, se han extendido los cálculos que siguen avalando dicha conjetura.

Si la respuesta a la hipótesis es afirmativa, esta tendría importantes repercusiones en la teoría de números. La relación que tiene la función ζ con la teoría de números se pone de manifiesto con el siguiente teorema (el cual demostró Euler en 1737) que sirve, entre otras cuestiones, para demostrar que ζ no tiene ceros en el semiplano $Re(z) > 1$.

Teorema 3.2.3. ***(Producto de Euler).*** *Si $(p_k)_k$ es la sucesión ordenada de números primos y $Re(z) > 1$ se verifica*

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-z}}$$

donde el producto converge uniformemente sobre compactos de $\{z : Re(z) > 1\}$.

Demostración. Según la proposición 1.2.3 para que el producto infinito converja uniformemente sobre compactos del semiplano $Re(z) > 1$ es suficiente comprobar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{1 - p_k^{-z}} \right|$$

converge uniformemente sobre compactos del semiplano. Sea $K \subset \{z : Re(z) > 1\}$ un compacto y $\alpha = \text{mín}\{Re(z) : z \in K\} > 1$, entonces para todo $z \in K$ se cumple:

$$\left| 1 - \frac{1}{1 - p_k^{-z}} \right| = \left| \frac{1}{p_k^z - 1} \right| \leq \frac{1}{|p_k^z| - 1} = \frac{1}{p_k^{Re(z)} - 1} \leq \frac{1}{p_k^{\alpha} - 1} \leq \frac{1}{k^{\alpha} - 1}$$

Aplicando el criterio de Weierstrass A.1.13 se obtiene la convergencia uniforme de la serie. Por tanto, aplicando el teorema 1.2.5 el producto inifinito define una función holomorfa en el semiplano $\{z : Re(z) > 1\}$ y, por el principio de identidad A.1.7, basta ver que $\zeta(x) = f(x)$ para todo $x > 1$, donde f representa al producto infinito.

Multiplicando los desarrollos en progresión geométrica de razón $p_k^{-x} < 1$,

$$\frac{1}{1 - p_k^{-x}} = 1 + p_k^{-x} + p_k^{-2x} + p_k^{-3x} + \ldots \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, m$$

se obtiene

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - p_k^{-x}} = \sum_{j_1, \ldots, j_m = 0}^{\infty} [p_1^{j_1} p_2^{j_2} \ldots p_m^{j_m}]^{-x} = \sum_{n \in A_m} \frac{1}{n^x}$$

donde A_m es el conjunto de los números naturales que no admiten divisores primos mayores que p_m. Se obtiene así las desigualdades:

$$\sum_{n=1}^{p_m} \frac{1}{n^x} \leq \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-x}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x)$$

Y ahora, haciendo el paso al límite cuando $m \to \infty$, se obtiene el resultado deseado. □

Corolario 3.2.4. *$\zeta(z) \neq 0$ si $Re(z) > 1$.*

Demostración. Por 3.2.3, el producto será cero si y solo si alguno de sus factores se anula, cosa que nunca ocurre, por tanto, el producto es no nulo y ζ no se anula en el semiplano $\{z : Re(z) > 1\}$. □

El siguiente lema es análogo al lema 3.1.7, proporcionando una función F holomorfa en el semiplano $\{z : Re(z) > 1\}$ que será utilizada para la prolongación analítica de la función ζ.

Lema 3.2.5. *La integral impropia*

$$F_0(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

converge uniformemente sobre compactos del semiplano $Re(z) > 1$ donde define una función holomorfa y la integral impropia

$$F_1(z) = \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ donde define una función entera.

Demostración. Puesto que la demostración es análoga al lema 3.1.7 solo indicaremos las pequeñas modificaciones pertinentes:

- Para F_0, si $K \subset \{z : Re(z) > 1\}$ es un compacto es claro que $\delta = \text{mín}\{Re(z) : z \in K\} > 1$ y para todo $z \in K$ y todo $t \in [0,1]$ vale la acotación

$$\left| \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \right| \leq \frac{t^{Re(z)-1}}{t} = t^{Re(z)-2} \leq t^{\delta-2}$$

- Para F_1, si $K \subset \mathbb{C}$ es un compacto y $A = \text{máx}\{Re(z) : z \in K\} < \infty$ entonces para todo $z \in K$ y todo $t \geq 1$ vale la acotación

$$\left| \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \right| \leq \frac{t^{Re(z)-1}}{e^t - 1} \leq \frac{t^{A-1}}{e^t - 1} \leq \frac{C}{t^2}$$

donde $C = \sup\{t^{A+1}/(e^t - 1) : t \geq 1\} < \infty$.

$\square$

Proposición 3.2.6. ***(Representación integral).*** *Si $Re(z) > 1$ se verifica*

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

Demostración. Por el lema 3.2.5 la integral de la derecha es una función holomorfa en $\Omega = \{z : Re(z) > 1\}$. Como las funciones ζ y Γ son holomorfas en Ω se tiene que, por el principio de identidad A.1.7, para demostrar la igualdad es suficiente verla para $z = x \geq 2$. En este caso, considerando el desarrollo en serie geométrica de razón $e^{-t} < 1$ se obtiene que para todo $t > 0$ se cumple

$$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \frac{t^{x-1}}{e^t} \frac{1}{1 - e^{-t}} = \frac{t^{x-1}}{e^t} \sum_{k=0}^{m} e^{-kt} + R_m(t)$$

donde

$$R_m(t) = \frac{t^{x-1}}{e^t} \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-kt} = \frac{t^{x-1}}{e^{(m+1)t}} \frac{1}{e^t - 1} \leq \frac{t^{x-2}}{e^{(m+1)t}}$$

pues $e^t \geq t + 1$ si $t > 0$. Como $x \geq 2$ se obtiene que la desigualdad $R_m(t) \leq e^{-(m+1)t}$ es válida para todo $t \in [0, 1]$ y con ella se deduce que

$$\lim_m \int_0^1 R_m(t) dt = 0$$

Por otro lado, para $t \geq 1$ vale la desigualdad $R_m(t) \leq t^{x-2}/e^{t+m}$ y con la que se obtiene fácilmente

$$0 \leq \lim_m \int_1^\infty R_m(t) dt \leq \lim_m e^{-m} \int_1^\infty e^{-t} t^{x-2} dt \leq \lim_m e^{-m} \Gamma(x-1) = 0$$

Hemos comprobado así que

$$\lim_m \int_0^\infty R_m(t) dt = 0$$

y por tanto

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \lim_m \sum_{k=0}^{m} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-(k+1)t} dt$$

Haciendo el cambio $t = s/(k+1)$ se obtiene

$$\lim_m \sum_{k=0}^{m} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-(k+1)t} dt = \lim_m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(k+1)^x} \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds = \zeta(x)\Gamma(x)$$

$\square$

Es necesario ver que podemos prolongar a una función meromorfa en el plano la integral de la proposición anterior, definida como la suma de F_0 y F_1 del lema 3.2.5, para demostrar que ζ admite una prolongación meromorfa en el plano.

Puesto que F_1 es entera basta con encontrar una prolongación meromorfa en el plano de F_0, digamos $\tilde{F}_0$, y definir $\tilde{F} = \tilde{F}_0 + F_1$ la extensión meromorfa de F. La demostración completa de la siguiente proposición, que resume este hecho, puede encontrarse en [13, p. 190-191] proposición 7.4.5.

Proposición 3.2.7. *La función*

$$F(z) := F_0(z) + F_1(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

definida y holomorfa en $\{z : Re(z) > 1\}$ *(por el lema 3.2.5) se puede prolongar a una única función* $\tilde{F} \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ *con polos simples en* $\{1, 0, -1, -3, \ldots, -(2n+1), \ldots\}$

Teorema 3.2.8. *La función* ζ *se puede prolongar analíticamente a una función meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con un único polo simple en* $z = 1$ *y ceros en los puntos* $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. Si $\tilde{F}$ es la prolongación meromorfa de F obtenida en 3.2.7, en virtud de 3.2.6 la función $\tilde{F}/\Gamma$ es una prolongación meromorfa de ζ a todo el plano complejo.

Observese que los polos simples que tiene $\tilde{F}$ en $\{0, -1, -3, \ldots, -(2n+1), \ldots\}$ se cancelan con los polos simples de Γ en los mismos puntos. Los polos de Γ que no se han cancelado, $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$, dan lugar a los ceros de ζ y el polo de $\tilde{F}$ en $z = 1$ da lugar al polo de ζ. $\square$

Acabamos de demostrar que la función ζ, en el semiplano $\{z : Re(z) < 0\}$, se anula en los enteros negativos pares, veamos ahora que estos son los *únicos* ceros de la función ζ en ese semiplano. Esto será consecuencia de la *ecuación funcional de Riemann* 3.2.10 cuya demostración requiere el siguiente lema, que puede encontrarse en [13, p. 192-193] proposición 7.4.7.

Lema 3.2.9. *Sea* $\tilde{F} \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ *la prolongación meromorfa de*

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \qquad si \;\; Re(z) > 1$$

obtenida en la proposición 3.2.7. Si $Re(z) \in (-1, 0)$ *se verifica*

$$\tilde{F}(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1} dt$$

donde la integral converge uniformemente sobre compactos de $\{z : Re(z) \in (-1, 0)\}$

Teorema 3.2.10. ***(Ecuación funcional de Riemann).***

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)$$

Demostración. Por el principio de identidad A.1.7 basta establecer la igualdad cuando $z = x \in (-1,0)$. Primeramente vamos a computar la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2+4k^2\pi^2}$$

para ello usaremos el lema 2.4.1 en el punto $a = it/(2\pi)$, obteniendo la igualdad

$$\cot\left(\frac{it}{2}\right) = \frac{2}{it} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4it}{t^2+4k^2\pi^2}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{e^t-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^t+1}{e^t-1} = \frac{i}{2}\cot\left(\frac{it}{2}\right)$$

nos queda, despejando la serie, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2+4k^2\pi^2} = \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}$$

Usando ahora el teorema 3.2.8 y el lema 3.2.9 se obtiene

$$\begin{aligned}\zeta(x)\Gamma(x) = \tilde{F}(x) &= \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)t^{x-1}dt \\ &= \int_0^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2t^x}{t^2+4k^2\pi^2}\right)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{2t^x}{t^2+4k^2\pi^2}\right)dt\end{aligned}$$

donde la última igualdad se puede justificar por un conocido resultado de la integral de Lebesgue según el cual se puede realizar una integración formal término a término en las series de funciones no negativas.

Si en las integrales

$$\int_0^{\infty}\frac{2t^x}{t^2+4k^2\pi^2}dt$$

hacemos el cambio $t = 2\pi ks$ se obtiene

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{2(2\pi k)^{x-1}s^x}{s^2+1}\right)ds = 2(2\pi)^{x-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{1-x}}\right)\int_0^{\infty}\frac{s^x}{s^2+1}ds$$

Con el método de los residuos se puede obtener, puesto que $x \in (-1,0)$, el valor de la integral

$$\int_0^\infty \frac{s^x}{s^2+1} ds = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u^{(x-1)/2}}{u+1} du = \frac{\pi}{2\cos(\pi x/2)}$$

para una demostración de este hecho se puede consultar [6, p. 119-120] Example 2.12.

Sustituyendo arriba se sigue que

$$\zeta(x) = 2(2\pi)^{x-1}\zeta(1-x)\frac{\pi}{2\cos(\pi x/2)}\frac{1}{\Gamma(x)}$$

y según la fórmula de los complementos 3.1.5 se tiene que $1/\Gamma(x) = \Gamma(1-x)\operatorname{sen}(\pi x)/\pi$, es decir

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= 2(2\pi)^{x-1}\zeta(1-x)\Gamma(1-x)\frac{\pi}{2\cos(\pi x/2)}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} \\ &= 2(2\pi)^{x-1}\zeta(1-x)\Gamma(1-x)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\end{aligned}$$

□

Observación. Si $Im(z) \neq 0$ entonces se cumple que

$$z \in \mathscr{Z}(\zeta) \Leftrightarrow 1-z \in \mathscr{Z}(\zeta)$$

y además el cero es del mismo orden. Esto se debe a la ecuación funcional que acabamos de demostrar, pues si $z = x+iy$ entonces

$$(2\pi)^{z-1} = e^{(z-1)\log(2\pi)} = e^{(x-1)\log(2\pi)}(\cos(y\log(2\pi)) + i\operatorname{sen}(y\log(2\pi)) \neq 0$$

ya que la exponencial real no se anula y no se pueden anular el seno y coseno simultáneamente. Por definición de la función Gamma sabemos que no tiene ceros, luego

$$\Gamma(1-z) \neq 0$$

Y por último

$$\operatorname{sen}(\pi z/2) = \operatorname{sen}(\pi x/2)\cosh(\pi y/2) + i\cos(\pi x/2)\operatorname{senh}(\pi y/2) \neq 0$$

debido a que el seno hiperbólico solo se anula en $y = 0$ y el coseno hiperbólico no se anula nunca, nos quedaría comprobar si el seno y el coseno se anulan simultáneamente, pero como dijimos, eso no es posible.

Por tanto, si $z \in \mathscr{Z}(\zeta)$ y $Im(z) \neq 0$, por la ecuación funcional se sigue que $1-z \in \mathscr{Z}(\zeta)$. El recíproco es directo.

Corolario 3.2.11. *Los únicos ceros de la función ζ en el semiplano $Re(z) < 0$ son*

$$\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$$

Demostración. Si $Re(z) < 0$, entonces $Re(1-z) > 1$ y por el corolario 3.2.4 se tiene que $\zeta(1-z) \neq 0$. Entonces en virtud a la ecuación funcional 3.2.10 en el semiplano $Re(z) < 0$ los ceros de ζ coinciden exactamente con los ceros de la función $\operatorname{sen}(\pi z/2)$, es decir, son $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$. □

A continuación vamos a ver una forma equivalente de la ecuación funcional 3.2.10 que muchos autores, como por ejemplo [11, p. 170], demuestran antes que nuestra ecuación funcional. La demostración se basa en una serie de observaciones y la aplicación de la fórmula de duplicación de Legendre 3.1.6.

Corolario 3.2.12. *La función*

$$\xi(z) = \frac{z(1-z)}{2}\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

es entera y satisface $\xi(z) = \xi(1-z)$.

Demostración. Es evidente que $\xi(z)$ es entera pues el factor $1-z$ contrarresta el polo simple de $\zeta(z)$ y los polos de $\Gamma(z/2)$ se cancelan con los ceros triviales de $\zeta(z)$. Por la fórmula de los complementos 3.1.5 se tiene

$$\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\Gamma(z)\operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{\pi}{2\Gamma(z)\operatorname{sen}(\pi z/2)\cos(\pi z/2)}$$

Ahora, por la ecuación funcional 3.2.10 se obtiene

$$\zeta(1-z) = \frac{2^{-z}\pi^{1-z}\zeta(z)}{\Gamma(1-z)\operatorname{sen}(\pi z/2)} = 2^{1-z}\pi^{-z}\zeta(z)\Gamma(z)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)$$

Lo que queremos demostrar es que $\xi(z) = \xi(1-z)$, es decir

$$\begin{aligned}\frac{z(1-z)}{2}\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) &= \frac{z(1-z)}{2}\pi^{(z-1)/2}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)\\ &= \frac{z(1-z)}{2}2^{1-z}\pi^{-(z+1)/2}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Gamma(z)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)\zeta(z)\end{aligned}$$

lo que es lo mismo que la siguiente igualdad

$$2^{z-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Gamma(z)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)$$

Usando la fórmula de los complementos 3.1.5 en el punto $(1-z)/2$ se obtiene

$$\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi(1-z)/2)}=\frac{\pi}{\cos(\pi z/2)}$$

y sustituyendo en la igualdad anterior, ver que $\xi(z)=\xi(1-z)$ es equivalente a ver que

$$2^{z-1}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(z)$$

y esta es la fórmula de duplicación de Legendre 3.1.6 para $z/2$, por lo que la ecuación inicial ha sido probada. □

Ahora vamos a ver el desarrollo en producto infinito de la función ζ de Riemann al igual que lo vimos con la función Γ y sen. En este caso, el producto se mueve sobre el conjunto de ceros no triviales de ζ y, al no conocerlos explícitamete, el producto solamente se puede dejar indicado, pero sí se puede calcular la sucesión adaptada a los ceros no triviales de la función ζ, que se puede tomar constante igual a 1. Para una prueba del siguiente teorema se pueden consultar [12, p. 30-31] o [14].

Teorema 3.2.13. *Sea $A=\mathscr{Z}(\zeta)\cap B$ el conjunto de ceros no triviales de la función ζ, entonces*

$$\zeta(z)=\frac{e^{(\log(2\pi)-1-\gamma/2)z}}{2(z-1)\Gamma(1+z/2))}\prod_{\rho\in A}\left(1-\frac{z}{\rho}\right)e^{z/\rho}$$

Como ya se ha comentado, la función ζ de Riemann está fuertemente unida a la teoría de números por su expresión como producto de primos 3.2.3. Pero esta no es su única conexión con los números primos, pues una de las principales razones por las que la función ζ ha sido estudiada es por su relación con el Teorema de los números primos

Teorema 3.2.14. ***(Teorema de los números primos).*** *Sea $\pi(x)$ el número de primos menores o iguales que x, entonces*

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log(x)}\qquad si\ \ x\to\infty$$

Una de las claves para demostrar este teorema reside en el hecho de que la función ζ de Riemann no se anula en la recta $Re(z)=1$, pero este no es el único razonamiento sobre esta función que hay que hacer. En [11, p. 185 - 197] se desarrollan todos los resultados necesarios para poder probar el teorema de los números primos. También se puede consultar [12, p. 51].

Aunque este teorema se puede probar de otras formas más elementales, es decir, sin usar la función ζ, no se puede negar la utilidad de la misma en la Teoría de números.

Apéndice A

Resultados Complementarios

CONTENIDOS

A.1. Resultados clásicos del Análisis Complejo

En esta sección presentamos algunos resultados básicos sobre funciones holomorfas, que en su mayoría vimos en el curso del grado de Variable Compleja.

El punto de partida natural en el estudio de ceros de funciones holomorfas es el siguiente resultado:

Teorema A.1.1. *Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no idénticamente nula y $\alpha \in \Omega$ tal que $f(\alpha) = 0$. Entonces $\exists! m \in \mathbb{N}$ y $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $g(\alpha) \neq 0$ y*

$$f(z) = (z-\alpha)^m g(z) \qquad z \in \Omega$$

Este resultado no es difícil de obtener de la representación en serie de potencias de f en un entorno de α (ver [10, p. 196-197] o [11, p. 73-74]).

Definición A.1.2. Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no idénticamente nula y $\alpha \in \Omega$ tal que $f(\alpha) = 0$, decimos que α es un cero de f de multiplicidad m cuando se verifica el teorema anterior. Al único m del teorema anterior lo denotaremos por $m(f,\alpha)$. Al conjunto de todos los ceros de f lo denotamos por $\mathscr{Z}(f)$.

Observación. También es fácil ver que $m(f,\alpha) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(\alpha) \neq 0\}$ (consultar [13, p. 102]).

Es natural, una vez definido el concepto de cero de una función holomorfa, definir el concepto de polo, para ello podemos usar el siguiente resultado cuya demostración se puede encontrar en [10, p. 198-199].

Teorema A.1.3. *Si $\alpha \in \Omega$ y $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus \{\alpha\})$, entonces debe presentarse uno de los siguientes casos:*

a) *f posee una singularidad evitable en α. Es decir, f puede extenderse a una función holomorfa en Ω.*

b) *Existe un único entero positivo m y números complejos $c_1, c_2, \dots c_m$ con $c_m \neq 0$, tales que*

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-\alpha)^k}$$

tiene una singularidad evitable en α.

c) *Si $r > 0$ y $D(\alpha, r) \subset \Omega$, entonces $f(D(\alpha, r) \setminus \{\alpha\})$ es denso en el plano.*

En el caso b) se dice que f tiene un *polo* de orden m en α y la función

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-\alpha)^k}$$

se llama la *parte principal* de f en α. Al conjunto de todos los polos de f lo denotamos por $\mathscr{P}(f)$. En el caso c) se dice que f tiene una *singularidad esencial* en α.

A partir de estos resultados obtuvimos en clase el llamado *principio de identidad* (o de prolongación analítica) presentado en el Corolario A.1.7. Para su demostración necesitaremos un par de lemas previos:

Lema A.1.4. *Si A es un conjunto infinito contenido en un compacto K entonces $A' \cap K \neq \emptyset$*

Demostración. Sea $(a_n)_n \subset A$ una sucesión, como en un compacto cada sucesión posee al menos una subsucesión convergente en el compacto se tiene que existe $(a_{n_j})_j$ tal que $\lim_j a_{n_j} = a \in K$ por tanto A tiene un punto de acumulación en K y $a \in A' \cap K \neq \emptyset$. □

Lema A.1.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $M \subset \Omega$ tal que $M' \cap \Omega = \emptyset$. Entonces M es a lo sumo numerable.*

Demostración. Definamos una sucesión creciente de compactos K_n como sigue

$$K_n := \{z \in \Omega : |z| \leq n,\ \ d(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\}$$

tal sucesión cubre nuestro abierto Ω, es decir, $\bigcup_n K_n = \Omega$. (ver [13, p. 278] proposición A.2.1 o [10, p. 249]).

Ahora, veamos que $M \cap K_n$ es finito por reducción al absurdo. Supongamos que es infinito, entonces $(M \cap K_n)' \cap K_n \neq \emptyset$ por el lema A.1.4, pero como $(M \cap K_n)' \subset M' \cap K_n' = M' \cap K_n$ entonces $M' \cap K_n \neq \emptyset$ y por tanto $M' \cap \Omega \neq \emptyset$, contradicción.

Por tanto $M = M \cap \Omega = M \cap (\bigcup_n K_n) = \bigcup_n (M \cap K_n)$ que es una unión numerable de conjuntos finitos, por tanto es a lo sumo numerable. $\square$

Teorema A.1.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no idénticamente nula, entonces el conjunto de sus ceros, $\mathscr{Z}(f)$, cumple*

- *Es un conjunto de puntos aislados.*
- *No tiene puntos de acumulación en Ω (i.e. $\mathscr{Z}(f)' \cap \Omega = \emptyset$).*
- *Sus puntos de acumulación están en la frontera de Ω (i.e. $\mathscr{Z}(f)' \subset \partial\Omega$).*
- *Es a lo sumo numerable.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathscr{Z}(f)$, como f no es idénticamente nula se tiene que existe $k \geq 1$ tal que $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$. Sea $n = \min\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(\alpha) \neq 0\}$. Como la función f es holomorfa, entonces es analítica y se puede escribir

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-\alpha)^k = (z-a)^m g(z)$$

donde g es una función continua en un cierto disco $D(\alpha, r)$ con $r > 0$ y tal que $g(\alpha) \neq 0$.

Entonces, por continuidad, existe $0 < \varepsilon < r$ tal que $g \neq 0$ en $D(\alpha, \varepsilon)$ y por tanto

$$D(\alpha, \varepsilon) \cap \mathscr{Z}(f) = \{\alpha\}$$

lo que demuestra que $\mathscr{Z}(f)$ sea un conjunto de puntos aislados.

Supongamos que existe $a \in \mathscr{Z}(f)' \cap \Omega$, entonces se tiene que existe una sucesión $(a_k)_k \subset \mathscr{Z}(f)$ tal que $\lim_k a_k = a$ y por continuidad de la función f se tiene que $\lim_k f(a_k) = f(a)$ luego $f(a) = 0$ y por tanto $a \in \mathscr{Z}(f)$. Pero entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \in D(a, \varepsilon)$ $\forall k \geq k_0$, lo que es una contradicción pues los ceros de f eran aislados.

Ahora bien, como el conjunto de puntos de acumulación está contenido en la adherencia de Ω, es decir, $\mathscr{Z}(f)' \subset \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ y $\mathscr{Z}(f)' \cap \Omega = \emptyset$ se tiene necesariamente que $\mathscr{Z}(f)' \subset \partial\Omega$.

Que sea a lo sumo numerable se debe al lema A.1.5. $\square$

Corolario A.1.7. ***(Principio de Identidad).*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $M \subset \Omega$ tal que $M' \cap \Omega \neq \emptyset$ (i.e. tiene puntos de acumulación en Ω). Si $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $f(z) = g(z)$ $\forall z \in M$ entonces $f(z) = g(z)$ $\forall z \in \Omega$*

Demostración. Construimos la función $h = f - g \in \mathscr{H}(\Omega)$ que cumple

$$\emptyset \neq M' \cap \Omega \subset \mathscr{Z}(h)' \cap \Omega$$

Por tanto, aplicando el Teorema A.1.6, h es idénticamente nula en Ω. $\square$

Teorema A.1.8. ***(Weierstrass)*** *Si $(f_k)_k$ es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω que converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ entonces:*

i) f es holomorfa en Ω.
ii) La sucesión de derivadas $(f_k')_k$ converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia f'.

Demostración. Se pueden encontrar en [13, p. 94], teorema 3.3.13 (Weierstrass), o [2, p. 176] $\square$

Necesitaremos algunas implicaciones del siguiente resultado que se obtiene a partir del Teorema Homológico de Cauchy. Los abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}$ que cumplen las condiciones del teorema se llamaran *simplemente conexos*.

Teorema A.1.9. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo, son equivalentes:*

i) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
ii) Cada ciclo regular a trozos en Ω es Ω-homólogo a 0.
iii) Para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω, cada $z \in \Omega \setminus Imagen(\Gamma)$ y cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ se cumple:

$$f(z) Ind(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

iv) Para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω y cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ se cumple $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.
v) Para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$.
vi) Para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $e^g = f$.

Demostración. Ver [13, p. 127-128], teorema 5.2.4. $\square$

Lema A.1.10. *Sean dos funciones $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ tales que tienen los mismos ceros con las mismas multiplicidades, entonces el cociente $f/g \in \mathscr{H}(\Omega)$.*

Demostración. Basta ver que f/g es holomorfa en un entorno de cada cero de g. Sea $\alpha \in \mathscr{Z}(g) = \mathscr{Z}(f)$ entonces f y g se pueden reescribir de la forma:

$$f(z) = \hat{f}(z)(z - \alpha)^m$$

$$g(z) = \hat{g}(z)(z - \alpha)^m$$

donde $\hat{f}$ y $\hat{g}$ son holomorfas en Ω no nulas en $D(\alpha, \varepsilon)$, un entorno de α. Entonces $f/g = \hat{f}(z)/\hat{g}(z)$ que es holomorfa en $D(\alpha, \varepsilon)$. $\square$

Teorema A.1.11. ***(Teorema de los Residuos).*** *Sea f una función meromorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si Γ es un ciclo en $\Omega \setminus \mathscr{P}(f)$ tal que*

$$Ind_\Gamma(\omega) = 0 \qquad \forall \omega \notin \Omega$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{\alpha \in \mathscr{P}(f)} Res(f,\alpha) Ind_\Gamma(\alpha)$$

Demostración. Se puede encontrar en [10, p. 212], [6, p. 112] o [2, p. 150]. □

Teorema A.1.12. ***(Teorema de Liouville).*** *Si f es una función entera y acotada, entonces f es constante.*

Demostración. Se puede encontrar en [10, p. 200], [6, p. 77] o [2, p. 122]. □

Proposición A.1.13. ***(M-test de Weierstrass).*** *Sean X un conjunto y $f_k : X \to \mathbb{C}$ funciones tales que $|f_k(x)| \leq M_k$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente.*

Demostración. Se puede encontrar en [6, p. 29]. □

A.2. Integrales dependientes de un parámetro

Daremos por hecho el siguiente resultado que nos proporciona la holomorfía respecto de una variable (parámetro) de la integral de una función de dos variables que cumple ciertas condiciones de holomorfía. Además con este se obtiene una regla de derivación bajo el signo integral, conmunmente llamada *regla de Leibniz* de derivación bajo el signo integral. En [8, p. 108-109] podemos ver un teorema análogo pero usando espacios de medida y funciones reales.

Teorema A.2.1. *Sea $F : [\alpha,\beta] \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua tal que las funciones $z \to F(t,z)$ para cada t son holomorfas en Ω con derivada $\frac{\partial F}{\partial z}(t,z)$. Entonces se verifica:*

i) La integral $f(z) = \int_\alpha^\beta F(t,z)dt$ define una función holomorfa en Ω.

ii) Para cada $z \in \Omega$ la función $t \to \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)$ es continua en $[\alpha,\beta]$ y

$$f'(z) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)dt$$

Demostración. Una demostración puede encontrarse en [13, p. 95-97] teorema 3.3.15. □

El resultado obtenido en el teorema A.2.1 se extiende fácilmente al caso de integrales impropias que convergen uniformemente sobre compactos. Demos una definición precisa de esto último:

Definición A.2.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $F : [\alpha, \infty) \times \Omega \to \mathbb{C}$ continua, se dice que la integral impropia

$$f(z) = \int_\alpha^\infty F(t,z)dt$$

converge uniformemente sobre compactos de Ω cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ y cada sucesión $\beta_n > \alpha$ convergente hacia ∞ la sucesión de funciones

$$f_n(z) = \int_\alpha^{\beta_n} F(t,z)dt$$

converge hacia $f(z)$ uniformemente sobre K.

Obtendremos a continuación una condición suficiente para la convergencia uniforme sobre compactos de una integral impropia. Será útil en la practica, pues se basa en una acotación uniforme de tu función a integrar.

Proposición A.2.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $F : [\alpha, \infty) \times \Omega \to \mathbb{C}$ continua, la siguiente condición es suficiente para que la integral impropia*

$$f(z) = \int_\alpha^\infty F(t,z)dt$$

sea uniformemente convergente sobre compactos de Ω.

Para cada Compacto $K \subset \Omega$ hay una función $\varphi_K : [a, \infty) \to [0, \infty)$, con $a \geq \alpha$, integrable Riemann en sentido impropio (i.e. $\int_a^\infty \varphi_K(t)dt < \infty$) tal que

$$|F(t,z)| \leq \varphi_K(t) \qquad \forall z \in K, \ t \geq a$$

Demostración. Es claro que la condición del enunciado implica la convergencia absoluta de la integral impropia en cada punto $z \in \Omega$. Sea $(\beta_n)_n$ una sucesión tal que $\beta_n > \alpha$ y tiene límite $+\infty$, entonces podemos considerar $\beta_n > a$ y para cada $z \in K \subset \Omega$ se cumple

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \int_\alpha^{\beta_n} F(t,z)dt - \int_\alpha^\infty F(t,z)dt \right| \leq \int_{\beta_n}^\infty |F(t,z)|dt \leq \int_{\beta_n}^\infty \varphi_K(t)dt = \rho_n$$

donde $\lim_n \rho_n = 0$ ya que $\lim_n \beta_n = \infty$. □

La siguiente proposición me proporciona el resultado que generaliza A.2.1 para integrales impropias.

Proposición A.2.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $F : [\alpha,\infty) \times \Omega \to \mathbb{C}$ continua tal que todas las funciones $z \to F(t,z)$ para cada t son holomorfas en Ω. Si la integral*

$$f(z) = \int_{\alpha}^{\infty} F(t,z)dt$$

converge uniformemente sobre compactos de Ω entonces:

i) $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.

ii) Para cada $z \in \Omega$ la función $t \to \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)$ es continua en $[\alpha,\infty)$ y

$$f'(z) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)dt$$

Demostración. Según el teorema A.2.1 para cada $\beta > \alpha$ las funciones $t \to \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)$ son continuas en $[\alpha,\beta]$, luego son continuas en $[\alpha,\infty)$. Dada una sucesión $\beta_n > \alpha$ con límite $+\infty$ el teorema A.2.1 también nos asegura que las funciones

$$f_n(z) = \int_{\alpha}^{\beta_n} F(t,z)dt$$

son holomorfas en Ω con derivada

$$f_n'(z) = \int_{\alpha}^{\beta_n} \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)dt$$

Si la integral impropia del enunciado converge uniformemente sobre compactos de Ω, dada una sucesión $\beta_n > \alpha$ con $\lim_n \beta_n = \infty$, la sucesión de funciones $f_n(z)$ converge hacia $f(z)$ uniformemente sobre compactos y por el teorema de Weierstrass (A.1.8) se concluye que f es holomorfa en Ω con derivada

$$f'(z) = \lim_n f_n'(z) = \lim_n \int_{\alpha}^{\beta_n} \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)dt$$

donde la convergencia de la sucesión de derivadas también es uniforme sobre compactos por el teorema de Weierstrass. □

Observación. Cuando el intervalo $[\alpha,\infty)$ se reemplaza por un intervalo acotado $[\alpha,\beta)$ se pueden demostrar versiones análogas de las proposiciones A.2.3 y A.2.4 relativas a integrales impropias de segunda especie de la forma

$$f(z) = \int_{\alpha}^{\beta^-} F(t,z)dt$$

y también hay versiones para las integrales impropias de la forma

$$\int_{-\infty}^{\beta} F(t,z)dt \qquad \int_{\alpha^+}^{\beta} F(t,z)dt$$

Estas versiones, aunque no se han enunciado explícitamente, pueden ser usadas con total tranquilidad por el lector.

Bibliografía

[1] **M. Abramowitz & I.A. Stegun**, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, décima ed., New York: Dover, 1972. VIII, XIV

[2] **L.V. Ahlfors**, *Complex analysis*, tercera ed., Singapore: McGraw-Hill, 1979. 39, 51, 66, 67

[3] **W. Blaschke**, *Eine erweiterung des satzes von vitali über folgen analytischer funktionen*, Leipzig (1915), no. 61, 194–200. 36

[4] **B. Cascales**, *Notas sobre análisis complejo*, <http://webs.um.es/beca/docencia>, 2011, Consulta: 2014. 1, 13, 39

[5] **E.Y.M. Chiang**, *Classical analysis*, <http://www.math.ust.hk/~machiang/391N/Classical_Analysis.pdf>, Dic. 2009, Consulta: 2014. 39, 43, 48

[6] **J.B. Conway**, *Functions of one complex variable*, segunda ed., New York: Springer-Verlag, 1978. 1, 13, 30, 39, 59, 67

[7] **A. Erdély, W. Magnus, F. Oberhettinger, & F. G. Tricomi**, *Higher transcendental functions, vol. 1.*, New York: Krieger, 1981. 50

[8] **J.A. Facenda & F.J. Freniche**, *Integración de funciones de varias variables*, Madrid: Pirámide, 2002. 48, 67

[9] **B. Riemann**, *Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie (1859), 145–153. 53

[10] **W. Rudin**, *Análisis real y complejo*, primera ed., Madrid: Alhambra, 1979. 1, 13, 19, 30, 37, 63, 64, 67

[11] **E.M. Stein & R. Shakarchi**, *Complex analysis*, United Kingdom: Princeton University Press, 2003. 35, 39, 51, 53, 60, 61, 63

[12] **E.C. Titchmarsh**, *The theory of the riemann zeta function*, segunda ed., New York: Clarendon Press, 1987. 61

[13] **G. Vera**, *Lecciones de análisis complejo*, <http://webs.um.es/gvb/>, Sept. 2011, Consulta: 2014. VII, XIII, 1, 10, 13, 26, 35, 39, 57, 63, 64, 66, 67

[14] **A. Voros**, *Spectral functions, special functions and the selberg zeta function*, Commun. Math. Phys. (1987), no. 110, 439–465. 61

Índice terminológico