



UNIVERSIDAD DE MURCIA

Grado en Matemáticas

TRABAJO FIN DE GRADO

Convergencia y Divergencia de Series de Fourier

Antonio Jesús Fernández Sánchez
Curso 2014-2015

Índice general

Resumen	I
Abstract	V
Introducción histórica	VIII
1. Primeras definiciones y preliminares a la convergencia	1
1.1. Definiciones y primeros ejemplos	1
1.2. Convoluciones	5
1.3. Núcleos de sumabilidad	8
2. Primeros resultados sobre convergencia	15
2.1. Sumabilidad Césaró. Aplicación a las series de Fourier	15
2.1.1. Teorema de Féjer	15
2.1.2. Consecuencias	16
2.2. Teoría de Series de Fourier en L^2	19
3. Criterios de convergencia puntual	22
3.1. Núcleo de Dirichlet	22
3.2. Criterio de Dini	27
3.3. Criterio de Dirichlet-Jordan	32
4. Teorema de Marcel Riesz	35
4.1. Introducción y resultados previos	35
4.2. Convergencia en L^p	38
5. Series de Fourier Divergentes	41
5.1. Contraejemplo de Du Bois Reymond	41
5.1.1. Contraejemplo de Du Bois Reymond. Versión I	41
5.1.2. Contraejemplo de Du Bois Reymond. Versión II	42
5.2. Contraejemplo de Kolmogorov	46
5.2.1. Teorema de Kronecker.	47
5.2.2. Resultados previos.	50
5.2.3. Contraejemplo.	52
6. Aplicaciones	56
6.1. La desigualdad isoperimétrica	56
6.2. La ecuación del calor: El sótano de Fourier	59
A. Espacios de Hilbert	63

B. Un teorema de valor medio para Integrales	65
C. Teorema de interpolación de Riesz-Thorin	67
D. Resultados Auxiliares	71
Bibliografía	73
Índice alfabético	74

Resumen

El objetivo de este Trabajo Fin de Grado radica en el estudio de una herramienta del análisis conocida con el nombre de Series de Fourier. Principalmente, en el estudio de la convergencia y divergencia de las mismas y algunas de sus aplicaciones más destacadas.

Antes de pasar al desarrollo matemático del trabajo propiamente hemos realizado una breve introducción histórica para reparar en la trascendencia de las **Series de Fourier** en la historia de las matemáticas. En ella citamos algunos nombres propios a los que se les atribuyen resultados de vital importancia en el estudio de las Series de Fourier.

Tras esta introducción histórica pasamos propiamente al desarrollo matemático del trabajo. En el **capítulo 1**, introducimos la definición de los coeficientes de Fourier asociados a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx$$

donde $L = b - a$, así como la definición formal de su serie de Fourier

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x / L}$$

Posteriormente en ese mismo capítulo vemos algunos ejemplos concretos de Series de Fourier así como algunas consecuencias de dichos ejemplos.

Una vez establecidos los conceptos de coeficiente de Fourier y Serie de Fourier asociada a una función, continuamos dando una serie de definiciones y propiedades asociadas a las mismas que tendrán un papel fundamental en el estudio de las Series de Fourier. Definimos aquí la **Convolución** de dos funciones en un marco adecuado y los **Núcleos de Sumabilidad**. Estudiamos además algunas de sus propiedades.

El problema fundamental de las Series de Fourier consiste en encontrar condiciones en $f(x)$ que garanticen que

$$S_N f(x) \longrightarrow f(x)$$

bien puntualmente, bien uniformemente o bien en L^p donde $S_N f$ denota la N -ésima suma parcial de la serie de Fourier asociada a f .

Es propiamente en el **capítulo 2** cuando empezamos a estudiar algunos resultados sobre convergencia. Para ello establecemos una serie de conceptos relacionados con la Sumabilidad Césaró de una serie que nos llevan a un importante resultado conocido como **Teorema de Féjer**, 2.1.3, del cual podremos extraer varias consecuencias relacionadas con las series de Fourier. Algunas de vital importancia, como el **Lema de Riemann-Lebesgue**, 2.1.8, que afirma que

$$\text{Si } f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ entonces se verifica que } \lim_{|n| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(n)| = 0$$

o el **Teorema de unicidad de la Serie de Fourier** asociada a una función, 2.1.7. Además, obtenemos los primeros resultados sobre convergencia uniforme de las Series de Fourier.

En este mismo capítulo se realiza también el estudio de la **Teoría de Series de Fourier en L^2** . Para ello, nos serviremos de importantes resultados de Análisis Funcional estudiados en el Grado que citamos en el Apéndice A. Establecemos aquí ya un importante resultado de convergencia, 2.2.2, que afirma lo siguiente:

$$\text{Si } f \in L^2(\mathbb{T}) \text{ la serie de Fourier asociada a la función } f \text{ converge a } f \text{ en } \|\cdot\|_2$$

Pasamos ahora, en el **capítulo 3**, a estudiar diferentes criterios de convergencia puntual sobre las series de Fourier. Para ello, antes de pasar al estudio de la convergencia propiamente, tendremos que definir y desarrollar las propiedades del llamado **Núcleo de Dirichlet**. Se trata de polinomios trigonométricos que vienen dados por la siguiente expresión:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}$$

y que permiten escribir las sumas parciales de una Serie de Fourier como convolución

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{inx} = f * D_N(x)$$

Cabe también destacar que el núcleo de Dirichlet no es un núcleo de sumabilidad y por tanto no pueden aplicarse los resultados generales del tema 1. La convergencia de $S_N f(x)$ a $f(x)$ es una cuestión más fina que requiere hipótesis adicionales de suavidad en la función f .

Llegamos entonces a los criterios de convergencia puntual propiamente. Por un lado, tenemos el **Criterio de Dini** del cuál damos dos versiones diferentes en los teoremas 3.2.1 y 3.2.7 y extraemos algunas consecuencias. Básicamente el criterio de Dini dice:

$$\text{Sea } f \in L^1(\mathbb{T}), \text{ si la función } \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0)|}{|t|} \text{ es integrable en un entorno de } x_0 \\ \text{ entonces la serie de Fourier de } f \text{ evaluada en el punto } x_0 \text{ converge a } f(x_0)$$

Notamos que las hipótesis del criterio de Dini se cumplen si f es derivable, e incluso con hipótesis más débiles. Por ejemplo la Serie de Fourier de $f(x) = \sqrt{|x|}$ es convergente en $x = 0$ y sin embargo, $\sqrt{|x|}$ no es derivable en dicho punto.

Por otro lado, aparece el **Criterio de Dirichlet-Jordan**, cuya versión más general, afirma:

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$, si f es de variación acotada entonces para todo punto $x_0 \in \mathbb{T}$ se verifica que la serie de Fourier asociada a f evaluada en x_0 converge a $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$

Notamos que las hipótesis del criterio de Dirichlet-Jordan no tienen relación con la derivabilidad ni con la suavidad de la función. Por consiguiente, es posible encontrar funciones para las cuáles no sirva con aplicar el Criterio de Dini para la demostración de la convergencia puntual y sin embargo el Criterio de Dirichlet-Jordan sí, y de igual forma, existirán funciones para las cuales no podamos aplicar el Criterio de Dirichlet-Jordan y sí el de Dini. Por ejemplo, a la función

$$f(x) = \frac{1}{\log \frac{1}{|x|}}$$

no le podemos aplicar el Criterio de Dini en $x_0 = 0$ y sin embargo, el Criterio de Dirichlet-Jordan nos garantiza la convergencia de la Serie de Fourier en dicho punto. Para más información, vease el ejemplo 3.3.4.

Seguidamente, en el **capítulo 4**, continuamos con el estudio de la convergencia de las series de Fourier. Enunciamos y demostramos aquí un importante resultado conocido como **Teorema de Marcel Riesz** que afirma:

Sea $1 < p < \infty$, si $f \in L^p(\mathbb{T})$ entonces $S_N f$ converge a f en $\|\cdot\|_p$

Para la demostración de este resultado hemos de enunciar y demostrar una serie de lemas previos, que desarrollamos en el capítulo, y utilizar también un importante resultado de análisis conocido como **Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin**. El desarrollo de este resultado lo hemos realizado en el apéndice C y juntando ambas cosas, hemos sido capaces de demostrar dicho resultado.

Damos por concluido aquí el estudio de la convergencia de las Series de Fourier, aunque cabe nombrar también en este resumen el **Teorema de Carleson-Hunt** pues es éste la culminación del estudio de la convergencia de las Series de Fourier. Dicho teorema afirma que:

Sea $1 < p \leq \infty$, si $f \in L^p(\mathbb{T})$ entonces $S_N f$ converge a f en casi todo punto.

El estudio de este teorema se escapa a los contenidos de este trabajo y su prueba se puede ver por ejemplo en [10] que está íntegramente dedicado a ella.

Pasamos ahora a estudiar algunas series de Fourier Divergentes. En el **Capítulo 5** abordamos por un lado el **Contraejemplo de Du Bois Reymond** que afirma que

Existe una función $f \in C_{per}(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en un punto.

En 5.1.1 damos una demostración no constructiva de dicho contraejemplo basada en el uso del Teorema de Banach-Steinhaus y en 5.1.2 damos una demostración constructiva de dicho contraejemplo, mediante un ejemplo explícito de una función continua y 2π -periódica cuya serie de Fourier diverge en $x = 0$. Por otro lado, en este mismo capítulo, en el tercer apartado abordamos el **Contraejemplo de Kolmogorov** que afirma que

Existe una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto.

La demostración de este contraejemplo requerirá una serie de desarrollos previos que realizamos en el propio capítulo entre los que cabe destacar el **Teorema de Kronecker**, teorema 5.2.2.

Finalmente, en el **capítulo 6** trabajamos sobre algunas aplicaciones de las series de Fourier. Por un lado nos servimos de la utilización de las series de Fourier para la resolución del **Problema isoperimétrico**. Problema que data del siglo *VII* a.C. cuyo objetivo es encontrar la curva que, con menor longitud, engloba mayor área.

Por otro lado, resolveremos un caso sencillo de la ecuación del calor, para determinar la variación de la temperatura en las proximidades de la corteza terrestre, y deducir cuál es la profundidad adecuada para instalar una bodega. Esta segunda aplicación es más de carácter divulgativo y dicho estudio recibe el nombre de **El sótano de Fourier**.

Abstract

The aim of this Final Project is the study of Fourier Series, which is an important tool of Mathematical Analysis. Especially the study of the convergence and divergence of Fourier Series and some of its applications.

Before we turn to the mathematical development we have done a historical introduction. The objective of this introduction is to show the importance of Fourier Series in the development of Mathematical Analysis.

After this historical introduction we begin the mathematical development of the work. In **chapter 1**, we introduce the Fourier coefficients. For $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ we define the n^{th} Fourier coefficient of f as

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx$$

where $L = b - a$. Then we define the formal Fourier Series of f as

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x / L}$$

Later, in the same chapter we see some examples of Fourier Series and some applications of these examples.

When we have already defined Fourier coefficients and Fourier Series, we go on talking about some definitions and some properties which will be very important in Fourier Series study. We define the **convolution** of two functions and the concept of **Good Kernels**, as defined in 1.3.1. We also study some of its properties.

The main problem of Fourier Series is to find conditions about $f(x)$ that guarantee the convergence of

$$S_N f(x) \rightarrow f(x)$$

pointwise, uniformly or in norm, where $S_N f$ is the N^{th} partial sum of the Fourier Series of f .

In **chapter 2**, we begin to study some convergence theorems. We establish some concepts related to Césaro summability. Then we talk about **Féjer theorem**, 2.1.3, and we extract some consequences related to Fourier Series. For example, **the Riemann-Lebesgue lemma**, 2.1.8, is an important result that claims

$$\text{Let } f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ then } \lim_{|n| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(n)| = 0$$

We also prove the **Uniqueness of Fourier Series**, Theorem 2.1.7, and establish the first theorem about convergence, with appropriate smoothness hypothesis on f .

In the same chapter we study the L^2 -theory about Fourier Series. We use important Functional Analysis theorems that are developed in Appendix A. Then, in 2.2.2, we establish an important theorem about convergence

Let $f \in L^2(\mathbb{T})$ then the Fourier Series of f converge to f in $\|\cdot\|_2$

Next, in **chapter 3**, we study the pointwise convergence of Fourier Series. To do so, we have to define and study some properties of the **Dirichlet Kernel**. The N^{th} Dirichlet Kernel is a trigonometric polynomial whose expression is

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}$$

Besides, we can write

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx} = f * D_N(x)$$

Nevertheless, the Dirichlet Kernel is not a Good Kernel so we can not apply the theory that we have already developed in chapter 1. The $S_N f(x)$ convergence to $f(x)$ is more difficult. We need some extra hypothesis on f to obtain the pointwise convergence of its Fourier Series. On the one hand, we find the **Dini Criterion**. We give two different proofs in theorem 3.2.1 and theorem 3.2.7. After that, we extract some consequences. The Dini criterion claims

Let $f \in L^1(\mathbb{T})$, if the function $\frac{|f(x_0 - t) - f(x_0)|}{|t|}$ is locally integrable near x_0 then the Fourier Series of f converges to $f(x_0)$ at x_0

We note that if f is differentiable at x_0 then the hypothesis of Dini criterion is met. Even, if f isn't differentiable the Dini criterion hypothesis could hold. For example, the Fourier Series of $f(x) = \sqrt{|x|}$ converges to f at $x = 0$. Nevertheless, $\sqrt{|x|}$ isn't differentiable at this point.

On the other hand we find the **Dirichlet-Jordan Criterion**, whose most general form claims

Let $f \in L^1(\mathbb{T})$ with bounded variation on \mathbb{T} . For all $x_0 \in \mathbb{T}$ the Fourier Series of f evaluated in x_0 converges to $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$

We note that the hypothesis of the Dirichlet-Jordan criterion are not related with the differentiability or with the smoothness of the function. Therefore, it is possible to find functions for which we cannot apply the Dini criterion to demonstrate pointwise convergence and, yet, Dirichlet-Jordan criterion holds, and likewise, there will exist functions for which we cannot apply the Dirichlet-Jordan criterion but we can apply the Dini criterion. For example, let

$$f(x) = \frac{1}{\log \frac{\pi}{|x|}}$$

we can't apply Dini criterion at $x_0 = 0$, but Dirichlet-Jordan criterion gives us the convergence of the Fourier Series in that point. To more information see example 3.3.4.

Right after, in chapter 4, we continue with the study of the Fourier Series convergence, this time in L^p -norm. We state and prove an important result known as **Marcel Riesz theorem** which claims

For $1 < p < \infty$, the Fourier Series of every $f \in L^p(\mathbb{T})$ converges to f in $\|\cdot\|_p$.

To show this result we need a series of previous lemmas, that we develop in the chapter, and also use an important result known as **Riesz-Thorin theorem**. The development of this result has been carried out in appendix C.

This concludes our study about the convergence of Fourier series, although we would like to highlight here the **Carleson-Hunt theorem** because it is a fundamental result in this theory. This theorem asserts that:

For $1 < p \leq \infty$, if $f \in L^p(\mathbb{T})$, $S_N f(x)$ converges to $f(x)$ for almost every $x \in \mathbb{T}$.

The study of this theorem falls away from the contents of this work and its proof can be seen in [10], which is entirely dedicated to it.

We move now to study some examples of divergent Fourier series, which are considered in chapter 5.

On the one hand we develop the **Du Bois Reymond counterexample** that claims

There exists $f \in C_{per}(\mathbb{T})$ such that $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n f(0) = \infty$

In 5.1.1 we give a non-constructive proof based on the use of the Banach-Steinhaus theorem. In 5.1.2 we also give an explicit proof, by providing an example of a continuous and periodic function whose Fourier Series diverges at $x = 0$.

On the other hand we develop the **Kolmogorov counterexample** that claims

There exists $f \in L^1(\mathbb{T})$ whose Fourier Series diverges at almost every point.

To prove this counterexample we have to develop some previous lemmas. We also need a result known as **Kronecker theorem**, 5.2.2, which is an important application of Fourier Series.

Finally, in chapter 6, we work out some applications of Fourier Series. First we solve the **Isoperimetric problem**. This problem, which dates from VII century B.C., tries to determine a plane figure of the largest possible area whose boundary has minimum length. After that, we solve a simple version of the heat equation to study the temperature variation near the Earth's crust from which we shall deduce the proper depth to install a cellar. This second application is of a more divulgative nature, and is commonly known as the "**Fourier's cellar problem**".

Introducción histórica

En primer lugar hemos de señalar que las **Series de Fourier**, en cuya convergencia y divergencia centraremos todo el desarrollo de nuestro trabajo, deben su nombre a Jean-Baptiste Joseph Fourier, matemático y físico francés nacido en Auxerre en 1768 que falleció en París en 1830. El desarrollo de las que hoy se conocen como Series de Fourier fue realizado en 1807 por Fourier como una herramienta para tratar de resolver la ecuación que rige la propagación del calor en un cuerpo. Es decir, para encontrar lo que hoy se conoce como **Ecuación del calor**

Fourier afirmó que toda función se puede desarrollar como una serie trigonométrica, y que este tipo de series son siempre convergentes. Sin embargo, en su obra *Théorie analytique de la chaleur* Fourier no da una demostración precisa de dicha convergencia. Además, no tiene en cuenta qué tipo de hipótesis debe imponer a la función para poder definir correctamente los coeficientes de este tipo de series.

Una vez planteado el problema de la representación de funciones por series trigonométricas, los intentos de probar la convergencia de la serie de Fourier aparecieron inmediatamente. Poisson y Cauchy fueron los primeros en publicar resultados de convergencia pero sendas pruebas resultaron incompletas. Fue Dirichlet quien en 1829 inauguró una nueva época ya que publicó el primer resultado correcto de convergencia. Para ello tuvo que imponer algunas condiciones en $f(x)$, en concreto que tuviera un número finito de máximos y mínimos. En 1881 Camille Jordan extendió el criterio de Dirichlet a las funciones de variación acotada y llegamos así a lo que hoy en día se conoce como **Criterio de Dirichlet-Jordan** que estudiaremos más adelante.

De forma complementaria Rudolph Lipschitz estableció en 1864 un nuevo criterio de convergencia en términos de suavidad de la función. Más adelante, en 1880, Ulisse Dini estableció un nuevo criterio más general que engloba al criterio de Lipschitz y que a veces se denomina **Criterio de Dini-Lipschitz** o simplemente **Criterio de Dini**. Es más, utilizando ambos se suelen introducir variantes adecuadas para estudiar los casos en los que una función no sea continua.

Los criterios de Dirichlet-Jordan y de Lipschitz-Dini son los criterios de convergencia más habituales en los libros que desarrollan la teoría de Series de Fourier. A veces se suelen presentar otros de principios del siglo XX debidos a Lebesgue, de la Vallée-Poussin y Young. Sin embargo, como ya hemos dicho los más habituales son los de Dirichlet-Jordan y Dini-Lipschitz y son estos los que desarrollaremos posteriormente en nuestro trabajo.

Es prácticamente imposible tratar un tema de análisis del siglo XIX sin nombrar a Bernhard Riemann. Una primera contribución a las series de Fourier fue un importante

lema que afirmaba lo siguiente: *Los coeficientes de Fourier de una función integrable tienen a cero*

Por otro lado, Cauchy había afirmado que el límite de una sucesión de funciones continuas es una función continua. Ante la evidencia de que no era cierto, se desarrolló el concepto de convergencia uniforme. En 1870, Eduard Heine publicó un trabajo que comenzaba indicando cómo Weierstrass había demostrado que la convergencia uniforme permitía integrar término a término una serie de funciones, lo que sin esa condición podía ser falso. Por tanto quedaba así en entredicho la cuestión de la unicidad de una serie de Fourier. Otra cuestión sugerida por el planteamiento de Heine era la de determinar condiciones para la convergencia uniforme y a ello dedicó su artículo. Su teorema principal probaba que la serie de Fourier de una función continua con un número finito de máximos y mínimos converge uniformemente. Sin embargo, en ese momento apareció otra pregunta destacable, ¿Qué ocurre si sólo se conoce la continuidad de f ? Fue en 1873, sólo tres años después de la publicación del artículo de Heine, cuando Paul du Bois-Reymond anunció un contraejemplo. Demostró que la serie de Fourier de una función continua puede ser divergente en un punto. No sólo no era uniformemente convergente, ni siquiera puntualmente. Hoy en día se le conoce como **Contraejemplo de Du Bois-Reymond**.

A partir de este momento empezaron a buscarse otros tipos de convergencia. En 1900, Lipot Fejér publicó un trabajo en el que mostraba que una función continua converge uniformemente si antes de pasar al límite se toman los promedios de las sumas parciales.

El siglo XIX se cerraba con respuestas satisfactorias para las series de Fourier. Se habían establecido varios criterios de convergencia. Sin embargo, lejos de haberse terminado el problema siguió siendo un gran campo de actividad de las matemáticas en el siglo XX. Las razones fueron el nacimiento de la teoría de la medida e integración de Lebesgue y del análisis funcional. El propio Henry Lebesgue estudió las series de Fourier con la nueva herramienta que él había desarrollado y extendió el Lema de Riemann a este nuevo tipo de funciones integrables. Pasando éste a conocerse como **Lema de Riemann-Lebesgue**. De esta forma, tanto el principio de localización como el criterio de convergencia de Dini, por ejemplo, se extienden inmediatamente a la nueva clase de funciones integrables puesto que la demostración de ambas está basada en dicho lema.

En los primeros años del siglo XX se desarrollaron los conceptos que condujeron al desarrollo de los espacios de Hilbert. Frygies Riez elaboró la noción de distancia en los espacios L^2 y poco después llegó la **convergencia** de las series de Fourier sin más hipótesis que que la función fuese de **cuadrado integrable**. Se establece como consecuencia de un teorema más general de análisis funcional conocido como teorema de Riesz-Fischer.

La convergencia en L^2 de la serie de Fourier sugería el estudio del problema análogo para los espacios L^p para p finito. La primera respuesta vino en sentido negativo. Banach y Steinhauss probaron en 1918 que no hay convergencia en L^1 .

Fue **Marcel Riesz** quien consiguió demostrar en 1923 que la convergencia en norma L^p es afirmativa si $1 < p < \infty$. Se suele citar a menudo la fecha de 1927 pero ya antes había anunciado el resultado.

Aparecieron también una serie de conjeturas sobre la convergencia de las Series de Fourier. Cabe destacar la llamada **Conjetura de Lusin**. Nikolai Lusin postulaba que *La serie de Fourier de una función de L^2 converge en casi todo punto.*

Por otro lado, Andrei Kolmogorov demostró que existe una función integrable cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto. Fue en 1923. Más adelante, en 1926, fue capaz de llevar la divergencia a todo punto. Esto es lo que se conoce hoy en día como **Contraejemplo de Kolmogorov**.

Fue finalmente en 1965 cuando Lennart Carleson obtuvo un sorprendente resultado sobre series de Fourier. Demostró que cualquier función de L^2 converge en casi todo punto. El propio Carleson afirmaba que comenzó buscando un contraejemplo y encontró una prueba, es decir, demostró la conjetura de Lusin.

Poco después Richard Hunt extendió el resultado de Carleson hasta cubrir el rango de todos los espacios L^p con $p > 1$. El **teorema de Carleson con la extensión por Hunt** supuso la culminación de todo un estudio que había empezado siglo y medio antes. En cierto modo, las grandes cuestiones sobre la convergencia de las series de Fourier quedaban resueltas.

Para más información puede consultarse [8] de donde ha sido extraída esta introducción histórica así como las fechas y citas que en ella aparecen.

Capítulo 1

Primeras definiciones y preliminares a la convergencia

1.1. Definiciones y primeros ejemplos

Definición 1.1.1. Sea f una función integrable definida en un intervalo $[a, b]$ de longitud $L = b - a$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define el **n-ésimo coeficiente de Fourier de f** como

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx$$

y la **serie de Fourier asociada a f** viene dada formalmente como

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x / L} \quad (1)$$

Notación. Cabe destacar el caso en el que $[a, b] = [-\pi, \pi]$ pues desarrollaremos la mayor parte de nuestro trabajo en este intervalo. A lo largo de todo el trabajo, escribiremos en numerosas ocasiones \mathbb{T} en lugar de $[-\pi, \pi]$. Es decir, en todo el desarrollo siguiente, tendremos que $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$.

Además, si denotamos con f a una función definida en $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$, continuaremos denotando por f a cualquier extensión 2π -periódica de la misma. Es decir, al uso tendremos que para todo k

$$f(x) = f(x - k) \quad \forall x \in (k - \pi, k + \pi)$$

Con esta notación observemos que

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(x) e^{-inx} dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

para cualquier intervalo $[a, b]$ de longitud 2π .

Definición 1.1.2. Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Se define la **N-ésima suma parcial asociada a f** para cualquier $N \in \mathbb{N}$ como

$$S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}$$

Observación. La N-ésima suma parcial asociada a cualquier función f es un polinomio trigonométrico.

Nota. Como consecuencia de esta definición observamos que el estudio de la convergencia de la serie de Fourier será equivalente al estudio del límite cuando N tiende a infinito de este tipo de sumas.

Es decir, el objetivo será encontrar condiciones sobre f para que

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x)$$

en un punto $x \in [-\pi, \pi]$.

Nota. Cuando la función $f \in L^1(\mathbb{T})$ es real, es habitual utilizar su expansión en serie trigonométrica real

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (2)$$

Utilizando la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ es fácil ver que (1) implica (2). Tomamos

$$a_n = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

y

$$b_n = i(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(x) dx$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ y se obtiene el resultado.

Ejemplo 1.1.3. *Cálculo de la serie de Fourier (formal) asociada a la función $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t$.*

Resolución. En primer lugar vamos a calcular los coeficientes de Fourier asociados a f . Con tal objetivo, vamos a distinguir dos casos:

- $n = 0$

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

- $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-int}}{in} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} 2\pi \frac{\cos(n\pi)}{-in} = \frac{\cos(n\pi)}{-in} = \frac{(-1)^{n+1}}{in} \end{aligned}$$

Una vez calculados los coeficientes de Fourier, vemos que la serie de Fourier asociada a f viene dada formalmente como

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{int} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{in} [\cos(nt) + i \sin(nt)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} [\cos(nt) + i \sin(nt)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{-in} [\cos(nt) - i \sin(nt)] + \frac{(-1)^{n+1}}{in} [\cos(nt) + i \sin(nt)] \right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} i \sin(nt) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \end{aligned}$$

Veamos gráficamente cómo convergen las aproximaciones.

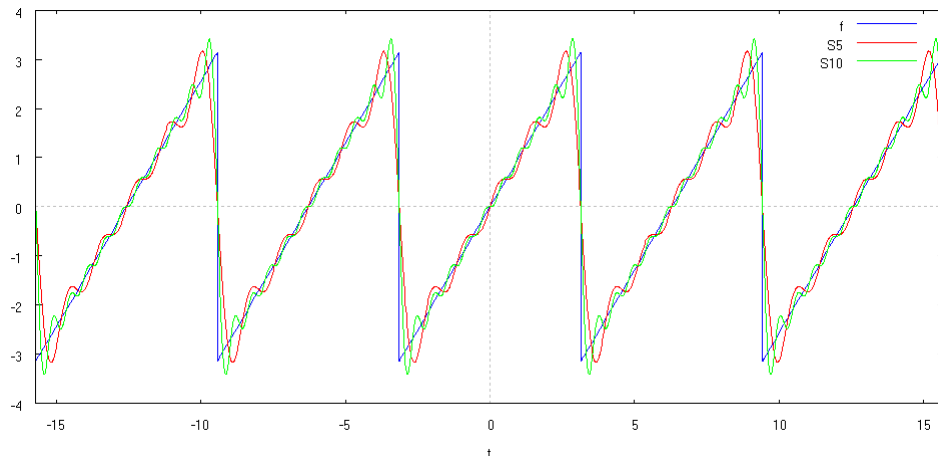


Figura 1.1: En el gráfico aparecen representadas la función, f y las aproximaciones mediante las series de Fourier asociadas con $n = 5$ y $n = 10$, $S_5(f)$ y $S_{10}(f)$

□

Ejemplo 1.1.4. *Cálculo de la serie de Fourier (formal) asociada a la función $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $f(t) = \frac{1}{4}(\pi - t)^2$.*

Resolución. En primer lugar, al igual que en el ejemplo anterior, vamos a calcular los coeficientes de Fourier asociados a f . Para ello, de nuevo hemos de distinguir dos casos:

- $n = 0$

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(\pi - t)^2 dt = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t)^2 dt \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 du = \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

- $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(\pi - t)^2 e^{-int} dt = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t)^2 e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{in(x-\pi)} dx = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{in(x-\pi)} dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{n^2} \left[x e^{in(x-\pi)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

Veamos entonces que la serie de Fourier asociada a f viene dada formalmente por

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2n^2} e^{int} &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2n^2} [\cos(nt) + i \sin(nt)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} [\cos(nt) + i \sin(nt)] \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n^2} [\cos(nt) - i \sin(nt)] + \frac{1}{2n^2} [\cos(nt) + i \sin(nt)] \right) \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2} \end{aligned}$$

Observemos ahora, que si pudiésemos comprobar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(t) = f(t) \quad 0 < t < 2\pi$$

tendríamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2} = \frac{1}{4}(\pi - t)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad \forall 0 < t < 2\pi$$

En particular, para $t = \pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

y para $t = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Finalmente, veamos gráficamente cómo convergen las aproximaciones.

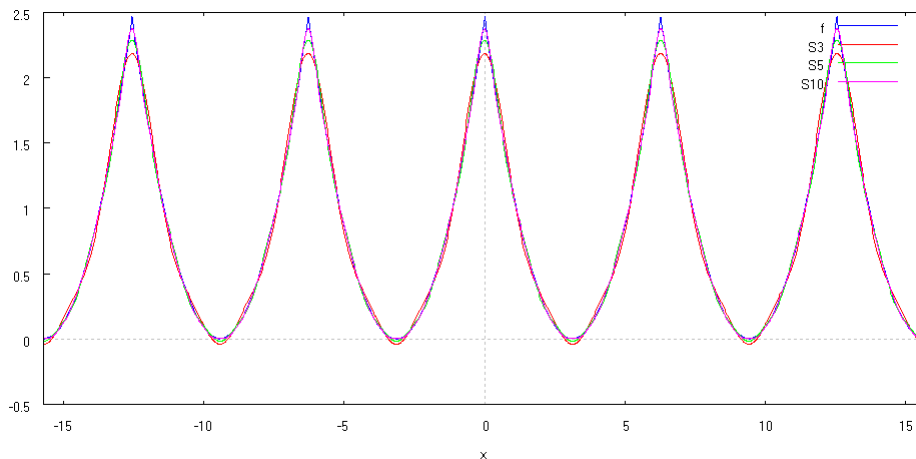


Figura 1.2: En el gráfico aparecen representadas la función, f y las aproximaciones mediante las series de Fourier asociadas con $n = 3$, $n = 5$ y $n = 10$, S_3 , S_5 y S_{10} .

□

Ejemplo 1.1.5 (Núcleo de Dirichlet). Aunque más tarde volveremos sobre este concepto mucho más ampliamente, vamos a introducir ahora su definición y a demostrar una

importante propiedad del mismo.

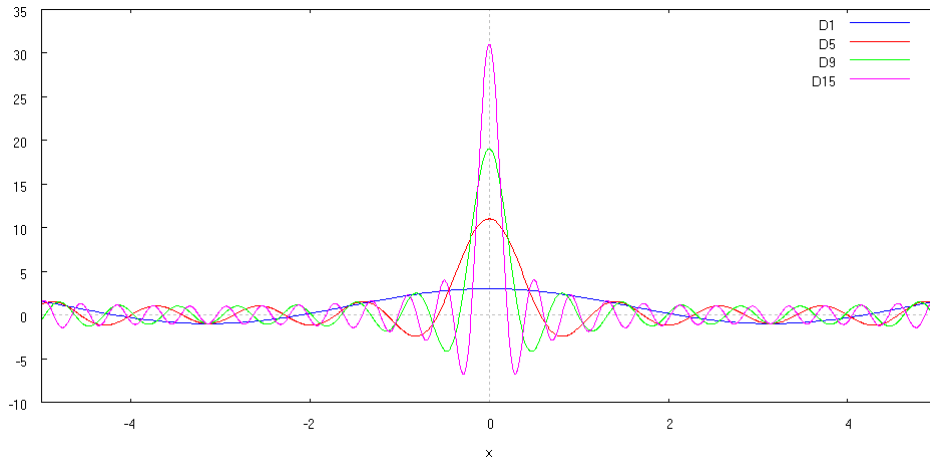
El polinomio trigonométrico dado por

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{inx} \quad x \in \mathbb{R}$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$, se conoce como ***N-ésimo núcleo de Dirichlet***. La propiedad a demostrar es que puede escribirse en forma cerrada como

$$D_N(x) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Resolución. En primer lugar hagámonos una idea de cómo es gráficamente un núcleo de Dirichlet para algunos valores de N



Consideramos $\omega = e^{ix}$ y utilizando la fórmula de sumación de una progresión geométrica veamos que

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \omega^n = \frac{\omega^{N+1} - \omega^{-N}}{\omega - 1}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{\frac{ix}{2}} \left(e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x} \right)}{e^{\frac{ix}{2}} \left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right)} \\ &= \frac{\left(e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x} \right) / 2i}{\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right) / 2i} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

□

1.2. Convolutiones

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ dos funciones integrables cualesquiera, se define la **convolución de f y g**, que denotamos por $f * g$, como la función dada por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t)dt$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que la integral existe. En nuestro trabajo sin embargo, necesitaremos adaptar esta definición a funciones definidas en \mathbb{T} .

Definición 1.2.1. Sean $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{K}$ funciones integrables y 2π -periódicas. Establecemos

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt \quad x \in \mathbb{R}$$

Proposición 1.2.2 (Propiedades de la convolución). Sean $f, g, h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{K}$ funciones integrables y 2π -periódicas. Se verifican las siguientes propiedades:

- i) $f * g(x)$ existe en casi todo punto $x \in \mathbb{R}$ y es 2π -periódica.
- ii) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- iii) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ para todo $c \in \mathbb{K}$
- iv) $f * g = g * f$
- v) $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- vi) Si g es continua entonces $f * g$ es continua.
- vii) $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$.

Demostración. i) En primer lugar recordemos que

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt$$

Veamos entonces utilizando el Teorema de Fubini que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f * g|(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt \right| dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t)|dx \right) dt \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(u)|du \right) < \infty \end{aligned}$$

Por consiguiente, para casi todo punto $x \in \mathbb{T}$ la integral que define $f * g(x)$ es finita y por consiguiente la convolución existe en dichos puntos. Por otro lado, la 2π -periodicidad es inmediata por ser f y g 2π -periódicas.

Tanto ii) como iii) son totalmente inmediatas a partir de la definición dada de la convolución y utilizando propiedades elementales de las integrales.

iv) En este caso, nos servimos de la 2π -periodicidad. Mediante un cambio de variable, $x - t = u$, y usando dicha 2π -periodicidad obtenemos el resultado. Veamos:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)g(u)du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)g(u)du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)du \\ &= g * f(x) \end{aligned}$$

v) Procediendo de manera análoga a los apartados anteriores, veamos que

$$\begin{aligned}(f * g) * h(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(t)h(x-t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(t-s)ds \right) h(x-t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(t-s)h(x-t)ds \right) dt\end{aligned}$$

por lo que utilizando Fubini

$$\begin{aligned}(f * g) * h(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(t-s)h(x-t)dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t-s)h(x-t)dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u)h(x-s-u)du \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)(g * h)(x-s)ds = f * (g * h)(x)\end{aligned}$$

luego efectivamente $(f * g) * h = f * (g * h)$ tal y como queríamos ver.

vi) En primer lugar observemos que para cualesquiera x_1, x_2 se tiene que

$$\begin{aligned}f * g(x_1) - f * g(x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x_1-t)dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x_2-t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [g(x_1-t) - g(x_2-t)] dt\end{aligned}$$

Una vez visto esto, por ser g continua, sabemos que en todo intervalo cerrado y acotado g es uniformemente continua, pero, como g es 2π -periódica, esto implica que g es uniformemente continua en todo \mathbb{R} . Por consiguiente, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|s-t| < \delta$ entonces $|g(s)-g(t)| < \epsilon$. Pues bien, como $|x_1-x_2| < \delta$ implica $|(x_1-t)-(x_2-t)| < \delta, \forall t$ entonces tenemos que

$$|f * g(x_1) - f * g(x_2)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| |g(x_1-t) - g(x_2-t)| dt \leq \frac{1}{2\pi} \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = \epsilon B$$

donde $B = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 = cte$. Deducimos entonces que efectivamente, si g es continua entonces $f * g$ es continua tal y como queríamos demostrar.

vii) Procediendo de nuevo de manera directa utilizando las definiciones y diferentes propiedades de las integrales, como son el cambio de variable y el teorema de Fubini, veamos

que

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f * g(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t) dt \right) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t) e^{-inx} dt \right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t) e^{-inx} dx \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) e^{-in(x-t)} dx \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) e^{-inu} du \right) dt \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) e^{-inu} du \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.2.3. Continuando con el N -ésimo núcleo de Dirichlet, D_N , definido en el ejemplo 1.1.5, vamos a demostrar que

$$S_N(f)(x) = f * D_N(x)$$

Resolución. Directamente establecemos la siguiente cadena de igualdades para $\forall x \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-N}^N e^{in(x-t)} \right) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt \\
&= f * D_N(x)
\end{aligned}$$

□

1.3. Núcleos de sumabilidad

Definición 1.3.1. Un **núcleo de sumabilidad** es una sucesión de funciones, $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, definidas \mathbb{T} que toman valores en \mathbb{R} o \mathbb{C} y verifican las siguientes propiedades:

- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$
- $\exists M > 0$ tal que $\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M \quad \forall n \geq 1$
- $\forall \delta > 0$ se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |x| < \pi} |K_n(x)| dx = 0$

Nota. Los núcleos de sumabilidad también son conocidos como aproximación de la identidad regular.

Antes de enunciar y demostrar el siguiente lema, vamos a añadir la definición de un “tipo” de funciones que utilizaremos en dicho lema.

Definición 1.3.2. Sea f una función 2π -periódica en \mathbb{R} , definimos para cada $t \in \mathbb{R}$ la **función trasladada** $f_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ dada, para todo $x \in \mathbb{R}$, por $f_t(x) = f(x - t)$.

Lema 1.3.3. Sea $1 \leq p < \infty$ y sea $f \in L^p(\mathbb{T})$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$ entonces $\|f_t - f\|_p < \epsilon$. Es decir, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f_t - f\|_p = 0$$

Demostración. En primer lugar, en virtud de la densidad de las funciones continuas en las funciones L^p para todo $1 < p < \infty$, podemos escoger $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ y 2π -periódica tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{3}$$

lo que implica a su vez que

$$\|f_t - g_t\|_p < \frac{\epsilon}{3}$$

donde definimos g_t de manera análoga a f_t . Además, por ser $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, en virtud de la 2π -periodicidad podemos afirmar que $g \in \mathcal{UC}(\mathbb{T})$. Existirá entonces $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$ entonces

$$|g(x - t) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

lo que implica que

$$\|g_t - g\|_p \leq \|g_t - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$$

Pues bien, juntando todas estas desigualdades podemos concluir que si $|t| < \delta$

$$\begin{aligned} \|f_t - f\|_p &= \|f_t - g_t + g_t - g + g - f\|_p \\ &\leq \|f_t - g_t\|_p + \|g_t - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3.4. Sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ un núcleo de sumabilidad y sea f definida en \mathbb{T} una función integrable y acotada. Se verifican:

- a) Si f es continua en x_0 entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f * K_n(x_0) = f(x_0)$
- b) Si $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T})$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f * K_n(x) = f(x)$ uniformemente en $x \in \mathbb{T}$.
- c) Para todo $1 \leq p < \infty$, si $f \in L^p(\mathbb{T})$ entonces $f * K_n \rightarrow f$ en $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$

Demostración. a) En primer lugar, por ser f continua en x_0 , podemos afirmar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$ entonces

$$|f(x_0 - y) - f(x_0)| < \epsilon$$

Por otro lado, como por hipótesis f es acotada, también podemos afirmar que

$$|f(t)| \leq B \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

Seguidamente, establecemos la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} & f * K_n(x_0) - f(x_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x_0 - t) dt - f(x_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x_0 - t) dt - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u) du \right) f(x_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x_0 - \pi}^{x_0 + \pi} f(x_0 - y) K_n(y) dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0) K_n(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 - y) - f(x_0)] K_n(y) dy \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} |f * K_n(x_0) - f(x_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_0 - y) - f(x_0)| |K_n(y)| dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x_0 - y) - f(x_0)| |K_n(y)| dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |f(x_0 - y) - f(x_0)| |K_n(y)| dy = (*) \end{aligned}$$

Aprovechando entonces las propiedades de la definición de un núcleo de sumabilidad podemos afirmar que existe $n_{\epsilon\delta} = n(\epsilon, \delta)$ tal que para todo $n \geq n_{\epsilon\delta}$

$$\begin{aligned} (*) &\leq \frac{1}{2\pi} \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} |K_n(y)| dy + \frac{1}{2\pi} 2B \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy \leq \frac{1}{2\pi} \epsilon M + \frac{1}{2\pi} 2B\epsilon \\ &= \epsilon \left(\frac{1}{2\pi} (M + 2B) \right) = \epsilon C \end{aligned}$$

para una cierta constante C . Deducimos entonces que, tal y como queríamos probar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f * K_n(x_0) = f(x_0)$$

b) La manera de proceder es totalmente análoga solo que en este caso se utilizaría la definición de continuidad uniforme pues sabemos que por ser $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ en virtud de la 2π -periodicidad se verifica que $f \in \mathcal{UC}(\mathbb{T})$.

c) En primer lugar, razonando como lo hacíamos en el apartado a) observamos que para cualquier $x \in [-\pi, \pi]$ se tiene que

$$f * K_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) dt$$

Veamos entonces, en virtud de la desigualdad triangular, que $\forall x \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} \|f * K_n(x) - f(x)\|_p &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) dt \right\|_p \\ &\leq \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) dt \right\|_p \\ &\quad + \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) dt \right\|_p = (*) \end{aligned}$$

Aplicando entonces la desigualdad de Minkowski

$$(*) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \|f(x-t) - f(x)\|_p |K_n(t)| dt + \frac{1}{2\pi} 2\|f\|_p \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(t)| dt = (**)$$

y finalmente, en virtud del lema 1.3.3 y de las propiedades de los núcleos de sumabilidad 1.3.1, podemos afirmar que existe $n_{\epsilon\delta} = n(\epsilon, \delta)$ tal que para todo $n \geq n_{\epsilon\delta}$

$$(**) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \epsilon |K_n(t)| dt + \frac{1}{2\pi} 2\epsilon \|f\|_p \leq C\epsilon$$

para una cierta constante C . Deducimos entonces que

$$f * K_n \rightarrow f \text{ en } (L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$$

tal y como queríamos demostrar. \square

Ejemplo 1.3.5. Como consecuencia del teorema 1.3.4, y en virtud de la igualdad probada en el ejemplo 1.2.3, es natural preguntarse si el núcleo de Dirichlet, $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, es un núcleo de sumabilidad. La respuesta es que no ya que falla la segunda de las condiciones impuestas en la definición. Para demostrar que es así nos servimos de la siguiente desigualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$$

de donde se deduce que

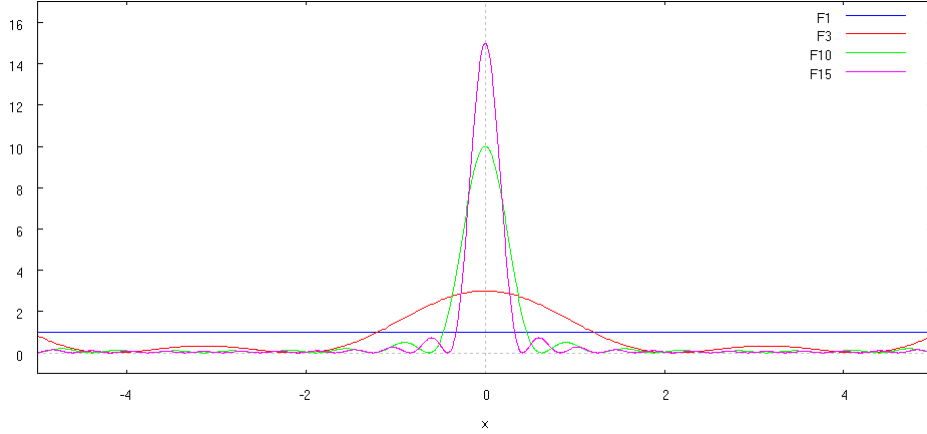
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx = \infty$$

Resolución. La haremos más adelante, cuando estudiemos más en profundidad el núcleo de Dirichlet. \square

Ejemplo 1.3.6. Denominamos **Núcleo de Féjer** a la sucesión $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ donde para cada $N \in \mathbb{N}$ y todo $y \in \mathbb{T}$ viene dado por

$$F_N(y) := \frac{D_0(y) + \dots + D_{N-1}(y)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(y)$$

Gráficamente



Veamos ahora un importante resultado relacionado con los núcleos de Féjer.

Teorema 1.3.7. Consideramos $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ el núcleo de Féjer. Se verifican entonces:

i)
$$F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}$$

ii) $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ es un núcleo de sumabilidad.

Demostración. i) En primer lugar recordemos que, tal y como los definíamos en el ejemplo 1.1.5, para cada $N \in \mathbb{N}$

$$D_N(x) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Tomando entonces $\omega = e^{ix}$ veamos que

$$\begin{aligned} NF_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=-n}^n \omega^k \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\omega^{n+1} - \omega^{-n}}{\omega - 1} \\ &= \frac{1}{\omega - 1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{n+1} - \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-n} \right) = \frac{1}{\omega - 1} \left(\frac{\omega^{N+1} - \omega}{\omega - 1} - \frac{1 - \omega^{-N}}{1 - \omega^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{\omega - 1} \left(\frac{\omega^{N+1} - \omega}{\omega - 1} + \frac{\omega^{-N+1} - \omega}{\omega - 1} \right) = \frac{1}{(\omega - 1)^2} (\omega^{N+1} - 2\omega + \omega^{-N+1}) \\ &= \frac{e^{i(N+1)x} - 2e^{ix} + e^{i(-N+1)x}}{(e^{ix} - 1)^2} = \frac{(e^{iNx} - 2 + e^{-iNx})}{\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right)^2} = \frac{\left(e^{\frac{iNx}{2}} - e^{-\frac{iNx}{2}} \right)^2}{\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right)^2} = \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

luego efectivamente $\forall N \in \mathbb{N}$

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}$$

tal y como queríamos demostrar.

ii) Para demostrar esta afirmación tendremos que comprobar que se verifican las tres condiciones de la definición de núcleo de sumabilidad:

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \right) dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 2\pi = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N} 2\pi N = 1 \end{aligned}$$

ya que

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^n e^{ikx} \right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k \neq 0} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = 2\pi$$

2. Como $F_N(x) \geq 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 2\pi \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

luego para $M = 2\pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x)| dx \leq M \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

3. Veamos que para todo $\delta > 0$

$$0 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |F_N(x)| dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} = (*)$$

Aprovechando entonces que $|\sin(x/2)| \geq |\sin(\delta/2)|$ para $\delta/2 \leq |x|/2 \leq \pi/2$

$$\begin{aligned} (*) &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} dx \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} 2\pi = 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |F_N(x)| dx = 0$$

Se verifican las tres condiciones de la definición 1.3.1 por lo que podemos afirmar que $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ es un núcleo de sumabilidad tal y como queríamos demostrar. \square

Proposición 1.3.8. *Para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$F_N * f(x) = \sum_{|n| < N} \frac{N - |n|}{N} \widehat{f}(n) e^{inx}$$

.

Demostración. Directamente veamos que

$$\begin{aligned} F_N * f(x) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=-n}^n \widehat{f}(j) e^{ijx} = \frac{1}{N} \sum_{j=-N+1}^{N-1} \sum_{n=|j|}^{N-1} \widehat{f}(j) e^{ijx} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{|n| < N} (N - |n|) \widehat{f}(n) e^{inx} = \sum_{|n| < N} \frac{N - |n|}{N} \widehat{f}(n) e^{inx} \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Primeros resultados sobre convergencia

2.1. Sumabilidad Césaró. Aplicación a las series de Fourier

2.1.1. Teorema de Féjer

Definición 2.1.1. Dada una sucesión c_0, c_1, \dots de números complejos se define la **N-ésima media de Césaró**, también conocida como **N-ésima suma de Césaró**, como

$$\sigma_N := \frac{c_0 + \dots + c_{N-1}}{N}$$

Nota. Se puede demostrar que si una sucesión converge a un determinado elemento entonces las medias de Césaró convergen al mismo elemento. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo la sucesión dada por $s_n = (-1)^n$ no converge pero

$$\sigma_N = \begin{cases} 0 & N \text{ par} \\ \frac{1}{N} & N \text{ impar} \end{cases}$$

verifica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = 0$$

Definición 2.1.2. Dada una función $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{K}$ continua y 2π -periódica se define la **N-ésima media de Césaró de la serie de Fourier** como

$$\sigma_N(f) := \frac{S_0 + \dots + S_{N-1}(f)}{N}$$

Por lo que veíamos en el ejemplo 1.2.3 sabemos que $\forall N \in \mathbb{N}$

$$S_N(f)(x) = f * D_N(x)$$

donde D_N es el N -ésimo núcleo de Dirichlet. Pues bien, veamos ahora que

$$\begin{aligned}
\sigma_N(f)(x) &= \frac{1}{N} [S_0(f)(x) + \cdots + S_{N-1}(f)(x)] \\
&= \frac{1}{N} [f * D_0(x) + \cdots + f * D_{N-1}(x)] \\
&= \frac{1}{N} f * [D_0 + \cdots + D_{N-1}](x) \\
&= f * \left[\frac{D_0 + \cdots + D_{N-1}}{N} \right](x) \\
&= f * F_N(x)
\end{aligned}$$

Podemos entonces establecer el siguiente **resultado de convergencia**.

Teorema 2.1.3. *Sea f definida en \mathbb{T} una función integrable y acotada. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

- a) Si f es continua en x_0 entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f)(x_0) = f(x_0)$
- b) Si $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T})$ entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f)(x) = f(x)$ uniformemente en $x \in \mathbb{T}$.
- c) Para todo $1 \leq p < \infty$, si $f \in L^p(\mathbb{T})$ entonces $\sigma_N(f) \rightarrow f$ en $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$

Demostración. En el teorema 1.3.7 vimos que el núcleo de Féjer, $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$, es un núcleo de sumabilidad. Aprovechando entonces que

$$\sigma_N(f)(x) = f * F_N(x) \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

podemos concluir, en virtud del teorema 1.3.4, que las tres afirmaciones dadas son ciertas. \square

2.1.2. Consecuencias

Corolario 2.1.4 (Teorema de Weierstrass). *El conjunto de los polinomios trigonométricos*

$$\mathcal{T} := \left\{ \sum_{|k| \leq N} a_k e^{ikt} : N = 0, 1, 2, \dots; a_k \in \mathbb{C}; \right\}$$

es denso en $(\mathcal{C}_{per}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{\infty})$.

Demostración. En primer lugar observemos que

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x) \quad y \quad S_n(f)(x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

de donde inmediatamente deducimos que $\sigma_N(f) \in \mathcal{T}$ para cualquier N . Por consiguiente, como en el teorema anterior (2.1.3) hemos visto que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f)(x) = f(x)$$

uniformemente en $x \in \mathbb{T}$ para toda $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T})$, podemos concluir que \mathcal{T} es denso en $(\mathcal{C}_{per}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{\infty})$ tal y como queríamos probar. \square

Corolario 2.1.5. Para todo $1 \leq p < \infty$, el conjunto de los polinomios trigonométricos

$$\mathcal{T} := \left\{ \sum_{|k| \leq N} a_k e^{ikt} : N = 0, 1, 2, \dots; a_k \in \mathbb{C}; \right\}$$

es denso en $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$.

Demostración. La demostración es totalmente análoga a la del corolario anterior utilizando en este caso el tercer apartado del teorema 2.1.3. \square

Corolario 2.1.6 (Unicidad de las series de Fourier, I). Sea f una función en $L^1(\mathbb{T})$ que verifica que $\widehat{f}(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$. Entonces $f(x) = 0$ en casi todo punto.

Demostración. En primer lugar observemos que si $\widehat{f}(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ entonces se tiene que $\sigma_N(f) = 0 \forall N \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, este resultado es consecuencia inmediata del tercer apartado del teorema 2.1.3 (con $p = 1$). \square

Corolario 2.1.7 (Unicidad de las series de Fourier, II). Sean f y g funciones en $L^1(\mathbb{T})$ tales que $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) \forall n \in \mathbb{Z}$. Entonces $f(x) = g(x)$ en casi todo punto.

Demostración. Es consecuencia inmediata de aplicar el corolario anterior (2.1.6) a la función $f - g$ pues por las propiedades de la integral se tiene que

$$\widehat{f - g}(n) = \widehat{f}(n) - \widehat{g}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

y por consiguiente que $f - g(x) = 0 \forall x \in \mathbb{T}$, o lo que es equivalente, que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{T}$. \square

Corolario 2.1.8 (Lema de Riemann-Lebesgue). Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces se verifica que $\lim_{|n| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(n)| = 0$

Demostración. En primer lugar, en virtud del corolario 2.1.5 podemos afirmar que existe $p \in \mathcal{T}$ tal que

$$\|f - p\|_1 < \epsilon$$

Además, veamos que para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - p(t)] e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) e^{-int} dt$$

luego

$$\widehat{f}(n) = (\widehat{f - p})(n) + \widehat{p}(n)$$

Por consiguiente

$$|\widehat{f}(n)| \leq |(\widehat{f - p})(n)| + |\widehat{p}(n)|$$

y como

$$|(\widehat{f - p})(n)| \leq \|f - p\|_1 < \epsilon \quad y \quad |\widehat{p}(n)| = 0 \quad \forall |n| > \text{grado}(p)$$

podemos concluir entonces que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(n)| = 0$$

tal y como queríamos demostrar. \square

Lema 2.1.9. Sea $f \in C_{per}^k(\mathbb{T})$ entonces para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se verifica que

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{(ik)^n} \widehat{f^{(k)}}(n)$$

Demostración. Probaremos solamente el caso en el que $k = 1$ pues el caso general se obtiene de manera inmediata mediante inducción. Distinguiamos para ello dos opciones:

■ $n = 0$

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{1}{2\pi} [f(t)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0 \\ &= (i0) \widehat{f}(0) \end{aligned}$$

■ $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} [f(t) e^{-int}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} in \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= in \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = (in) \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

En ambos casos se llega al resultado esperado. □

A continuación deducimos un criterio de convergencia uniforme para $S_N f(x)$, al menos cuando f es suficientemente suave.

Corolario 2.1.10. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{K}$ una función 2π -periódica. Entonces:

a) Si f es continua y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$ entonces $S_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$ en $\|\cdot\|_{\infty}$

b) Si $f \in C_{per}^1(\mathbb{T})$ entonces $S_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$ en $\|\cdot\|_{\infty}$

Demostración. a) En primer lugar, como por hipótesis $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$, en virtud del criterio de Weierstrass sobre convergencia de Series podemos afirmar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx} = g(x)$$

converge uniformemente para todo $x \in [-\pi, \pi]$ a una cierta función g continua y 2π -periódica. Observemos entonces que, como para todo n ,

$$\widehat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx = (\text{conv. unif}) = \sum_m \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(m) \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \widehat{f}(n)$$

en virtud del corolario 2.1.7 podemos concluir que $f(x) = g(x)$ en casi todo punto. Es más, por ser f y g continuas, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{T}$, de donde deducimos que

$$S_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f \text{ en } \|\cdot\|_{\infty}$$

tal y como queríamos demostrar.

b) Para demostrar el segundo apartado nos serviremos de la siguiente cadena de desigualdades. En virtud de la Identidad de Parseval, que veremos en 2.2.3, sabemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} |\widehat{f}(n)| &= \sum_{n \neq 0} |n \widehat{f}(n)| \frac{1}{|n|} \leq \left(\sum_{n \neq 0} |n \widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|^2} \right)^{1/2} \\ &\leq L \left(\sum_{n \neq 0} |\widehat{f}'(n)|^2 \right)^{1/2} = L \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2 dt \right)^{1/2} < \infty \end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$$

y en virtud del apartado anterior que

$$S_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f \text{ en } \|\cdot\|_{\infty}$$

tal y como queríamos demostrar. \square

2.2. Teoría de Series de Fourier en L^2

Nos serviremos de los resultados de Análisis Funcional sobre Espacios de Hilbert que desarrollamos en el **Apéndice A**.

Pero antes de establecer ningún resultado, hemos de observar que $L^2([-\pi, \pi])$ con el producto escalar dado por

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

es un espacio de Hilbert. Establecemos a continuación un importante resultado, y sirviéndonos del teorema A.9 podremos entonces establecer importantes resultados de convergencia para las series de Fourier.

Teorema 2.2.1. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ es una base ortonormal de $L^2([-\pi, \pi])$.

Demostración. En primer lugar vamos a demostrar que $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ es un conjunto ortonormal en $L^2([-\pi, \pi])$. Por un lado veamos que

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

y por otro lado que para todo $n \neq m$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imt} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{2\pi i(n-m)} \\ &= \frac{\sin((n-m)\pi)}{\pi(n-m)} = 0 \end{aligned}$$

luego efectivamente se tiene que $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ es un conjunto ortonormal. A continuación, observemos que

$$\text{span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \sum_{|k| \leq N} a_k e^{ikt} : N = 0, 1, 2, \dots; a_k \in \mathbb{C}; t \in [-\pi, \pi] \right\} =: \mathcal{T}$$

Por consiguiente, como en virtud del corolario 2.1.5, sabemos que \mathcal{T} es denso en $(L^2([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_2)$, podemos afirmar que

$$\overline{\text{span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\}} = L^2([-\pi, \pi])$$

y por consiguiente, en virtud del teorema A.9, que $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ es una base Hilbertiana de $L^2([-\pi, \pi])$ tal y como queríamos demostrar. \square

Corolario 2.2.2 (Convergencia en L^2). *Sea $f \in L^2([-\pi, \pi])$, se tiene que $S_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$ en $(L^2([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_2)$.*

Demostración. En primer lugar observemos que para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_N(f)(t) &= \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{int} = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{int} \\ &= \sum_{n=-N}^N \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-int} dt \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \\ &= \sum_{n=-N}^N \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \end{aligned}$$

Por consiguiente, como en virtud del teorema anterior, 2.2.1, sabemos que $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ es una base de Hilbert de $L^2([-\pi, \pi])$, en virtud del teorema A.9 podemos concluir que

$$S_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f \text{ en } (L^2([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_2)$$

tal y como queríamos demostrar. \square

Corolario 2.2.3 (Identidad de Parseval). *Sea $f \in L^2([-\pi, \pi])$, se verifica que*

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$$

Demostración. En primer lugar veamos que $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} |\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \rangle|^2 &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-int} dt \right|^2 = \left| \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right|^2 \\ &= |\sqrt{2\pi} \widehat{f}(n)|^2 = 2\pi |\widehat{f}(n)|^2 \end{aligned}$$

Aplicando entonces el teorema A.9 obtenemos que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi |\widehat{f}(n)|^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$$

o equivalentemente que

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

tal y como queríamos demostrar. □

Capítulo 3

Criterios de convergencia puntual

3.1. Núcleo de Dirichlet

Aunque a lo largo de los capítulos anteriores ya hemos trabajado con este núcleo y hemos mencionado algunas de sus propiedades, vamos a realizar en esta sección un estudio más riguroso del mismo.

Definición 3.1.1. Se denomina **N-ésimo núcleo de Dirichlet** al polinomio trigonométrico $D_N : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{inx}$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Proposición 3.1.2. Con respecto a los núcleos de Dirichlet se tiene que:

i) $D_N(x) = \frac{\sin((N + 1/2)x)}{\sin(x/2)}$ para todo $N \in \mathbb{N}$ y cualquier $x \in [-\pi, \pi]$

ii) $D_N(x) = D_N(-x)$ para todo $N \in \mathbb{N}$ y cualquier $x \in [-\pi, \pi]$

iii) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$ para todo $N \in \mathbb{N}$

iv) $S_N(f)(x) = f * D_N(x)$ para todo $N \in \mathbb{N}$ y cualquier $x \in [-\pi, \pi]$

v) Para todo $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $D_N(0) = 2N + 1$

Demostración. i) Realizamos la prueba del primer apartado en el ejemplo 1.1.5.

ii) Aplicando directamente la definición para un N cualquiera y un $x \in [-\pi, \pi]$ arbitrario veamos que

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \sum_{n=-N}^N e^{inx} = e^{-iNx} + \dots + e^{-ix} + 1 + e^{ix} + \dots + e^{iNx} \\ &= e^{iNx} + \dots + e^{ix} + 1 + e^{-ix} + \dots + e^{-iNx} = \sum_{n=-N}^N e^{-inx} = D_N(-x) \end{aligned}$$

iii) Realizamos la demostración de este apartado dentro de la prueba del teorema 1.3.7, concretamente en el segundo apartado del mismo.

iv) Realizamos la prueba de este apartado en el ejemplo 1.2.3

v) Sea $N \in \mathbb{N}$ arbitrario, veamos que

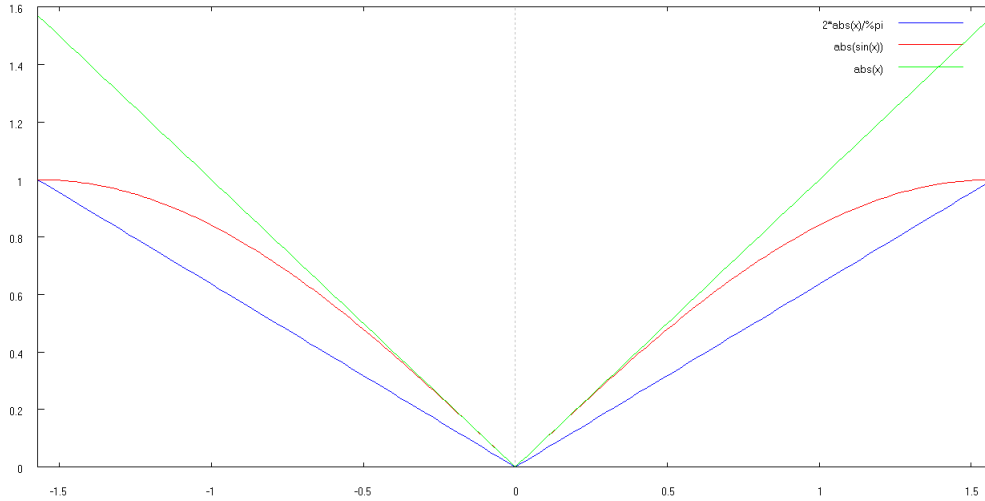
$$D_N(0) = \sum_{n=-N}^N e^{in0} = \sum_{n=-N}^N 1 = 2N + 1$$

□

Observación. Para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ se tiene que

$$\frac{2}{\pi}|x| \leq |\sin(x)| \leq |x|$$

como se aprecia en la siguiente gráfica



Proposición 3.1.3. Para todo $N \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$$

Demostración. Directamente establecemos la siguiente cadena de desigualdades sirviéndonos de algunas de las propiedades que demostrábamos en la proposición anterior, (3.1.2), y utilizando que en $(0, \pi/2)$, $|\sin(x)| \leq x$ tal y como veíamos anteriormente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \right| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \right| dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\sin((2N+1)x)}{\sin(x)} \right| dx \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\sin((2N+1)x)}{x} \right| dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2N+1}{2}} \left| \frac{\sin(\pi u)}{u} \right| du > \frac{2}{\pi} \int_0^N \left| \frac{\sin(\pi u)}{u} \right| du \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin(\pi u)}{u} \right| du = (*) \end{aligned}$$

Aprovechando entonces que $|\sin(\pi(u+k))| = |\sin(\pi u)|$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 (*) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \frac{\sin(\pi u)}{u+k} du \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \frac{\sin(\pi u)}{1+k} du = \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right) \int_0^1 \sin(\pi u) du \\
 &= \frac{2}{\pi} \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right) = \frac{4}{\pi^2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right)
 \end{aligned}$$

□

Corolario 3.1.4. Para todo $N \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq \frac{4}{\pi^2} \log(N)$$

Demostración. En primer lugar observemos que

$$\log(N) = \int_1^N \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$$

Aplicando entonces la proposición anterior podemos afirmar que para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq \frac{4}{\pi^2} \log(N)$$

tal y como queríamos demostrar.

□

Corolario 3.1.5. El núcleo de Dirichlet no es un núcleo de sumabilidad.

Demostración. Es consecuencia inmediata de cualquiera de los dos resultados anteriores y de la definición de núcleo de sumabilidad. La veracidad de cualquiera de estos dos resultados implica que no se verifique la segunda de las condiciones de la definición de núcleo de sumabilidad.

□

Lema 3.1.6. Sea $SI : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$SI(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Se tiene que:

i) $SI \in C^\infty(\mathbb{R})$

ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} SI(x) = \frac{\pi}{2}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} SI(x) = -\frac{\pi}{2}$

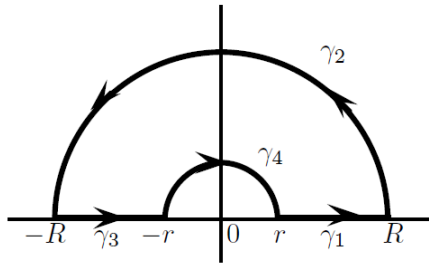
Demostración. En primer lugar observemos que, por el Teorema Fundamental del Cálculo es inmediato que $SI \in C^\infty(\mathbb{R})$. Por consiguiente, nos vamos a centrar en la demostración del segundo apartado. Observemos que

$$SI(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin(t)}{t} dt = - \int_0^x \frac{\sin(-u)}{-u} du = - \int_0^x \frac{\sin(u)}{u} du = -SI(x)$$

Por consiguiente, lo único que tendremos que demostrar es que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Con tal objetivo, nos serviremos del teorema de Cauchy, D.2. Consideramos la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ y consideramos la siguiente región



Veamos entonces que

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_r^R \frac{e^{it}}{t} dt = \int_r^R \frac{\cos(t)}{t} dt + i \int_r^R \frac{\sin(t)}{t} dt$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt = - \int_r^R \frac{\cos(t)}{t} dt + i \int_r^R \frac{\sin(t)}{t} dt$$

luego como por el citado teorema de Cauchy sabemos que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

siendo $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ podemos afirmar que

$$2i \int_r^R \frac{\sin(t)}{t} dt = - \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

A continuación, vemos que cambiando la orientación de γ_4 se tiene que

$$- \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}} rie^{it} dt = i \int_0^{\pi} e^{ir(\cos(t)+i\sin(t))} dt = i \int_0^{\pi} e^{ir \cos(t)} e^{-r \sin(t)} dt$$

Observemos ahora, que si denotamos con $f_n(t) = e^{ir_n \cos(t)} e^{-r_n \sin(t)}$, donde r_n converge a 0 cuando n tiende a infinito, en virtud del teorema de convergencia dominada, D.1, podemos concluir que

$$\lim_{r_n \rightarrow 0} \int_0^{\pi} f_n(t) dt = \int_0^{\pi} \lim_{r_n \rightarrow 0} f_n(t) dt = \int_0^{\pi} dt = \pi$$

ya que para todo $0 \leq t \leq \pi$

$$|f_n(t)| \leq 1 \quad \forall n \quad \text{y} \quad \lim_{r_n \rightarrow 0} f_n(t) = 1$$

Por consiguiente, podemos afirmar que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = i\pi$$

Razonando de manera totalmente análoga a como lo habíamos para γ_4 llegamos a que

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = i \int_0^{\pi} e^{iR \cos(t)} e^{-R \sin(t)} dt$$

Tomamos en este caso $g_n(t) = e^{iR_n \cos(t)} e^{-R_n \sin(t)}$, donde R_n converge a ∞ cuando n tiende a ∞ , y observemos que

$$|g_n(t)| \leq 1 \quad \forall n \quad \text{y} \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = 0 \text{ si } t \in (0, \pi)$$

Podemos afirmar entonces que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

Por consiguiente, llegamos a que

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = i\pi$$

de donde inmediatamente se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} SI(x) = \frac{\pi}{2}$$

tal y como queríamos probar. Aplicando entonces el razonamiento que hacíamos al principio de la demostración podemos afirmar también que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} SI(x) = -\frac{\pi}{2}$$

lo que concluye la demostración. \square

A continuación, damos una definición que nos será útil más adelante. Aunque no es la definición más general posible de este concepto, es la que nos interesa para el desarrollo de este trabajo y será ésta la que vamos a utilizar.

Definición 3.1.7. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$. Decimos que $f(t) = \mathcal{O}(t^\alpha)$ cuando $t \rightarrow 0$ si se verifican:

- i) $f \in \mathcal{C}^\infty(-\pi, \pi)$
- ii) Existe una constante $C > 0$ tal que $|f(t)| \leq C|t|^\alpha \quad \forall t \in \mathbb{T}$

Proposición 3.1.8. Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ y todo intervalo $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ se verifica que

$$\left| \int_a^b D_N(x) dx \right| \leq C$$

Demostración. En primer lugar, por lo probado en el primer apartado de la proposición 3.1.2 sabemos que para todo $N \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [-\pi, \pi]$

$$D_N(x) = \frac{\sin((N + 1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \int_a^b D_N(x) dx &= \int_a^b \frac{\sin((N + 1/2)x)}{\sin(x/2)} dx \\ &= \int_a^b \frac{\sin((N + 1/2)x)}{x/2} dx + \int_a^b \sin((N + 1/2)x) \left(\frac{1}{\sin(x/2)} - \frac{1}{x/2} \right) dx \end{aligned}$$

Veamos entonces por un lado que

$$\left| \int_a^b \frac{\sin((N + 1/2)x)}{x/2} dx \right| = \left| 2 \int_{(N + \frac{1}{2})a}^{(N + \frac{1}{2})b} \frac{\sin(u)}{u} du \right| = 2 \left| SI[(N + \frac{1}{2})b] - SI[(N + \frac{1}{2})a] \right|$$

donde

$$SI(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Pero por lo probado en el lema anterior (lema 3.1.6) sabemos que SI es continuo y converge a $\pm \frac{\pi}{2}$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ luego

$$\left| \int_a^b \frac{\sin((N+1/2)x)}{x/2} dx \right| \leq K_1$$

para una cierta constante K_1 . Veamos ahora por otro lado que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \sin((N+1/2)x) \left(\frac{1}{\sin(x/2)} - \frac{1}{x/2} \right) dx \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{1}{\sin(x/2)} - \frac{1}{x/2} \right| dx \\ &= \int_{a/2}^{b/2} \left| \frac{1}{\sin(u)} - \frac{1}{u} \right| du = \int_{a/2}^{b/2} \left| \frac{u - \sin(u)}{u \sin(u)} \right| du = (*) \end{aligned}$$

Realizando entonces el desarrollo de Taylor de la función seno tenemos que

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{a/2}^{b/2} \left| \frac{u - (u - \frac{u^3}{3!} + \mathcal{O}(u^5))}{u \sin(u)} \right| du \\ &= \int_{a/2}^{b/2} \left| \frac{u(\frac{1}{3!} + \mathcal{O}(u^2))}{\frac{\sin(u)}{u}} \right| du \leq \int_{a/2}^{b/2} K_2 du = K_3 \end{aligned}$$

ya que, por estar $\frac{u}{\sin(u)}$ acotado cuando $-\pi/2 < a/2 \leq u \leq b/2 < \pi/2$, tenemos que

$$\left| \frac{u(\frac{1}{3!} + \mathcal{O}(u^2))}{\frac{\sin(u)}{u}} \right| \leq K_2$$

para una cierta constante K_2 . Juntando entonces ambas acotaciones concluimos que

$$\left| \int_a^b D_N(x) dx \right| \leq K_1 + K_3 =: C$$

tal y como queríamos probar. □

3.2. Criterio de Dini

Directamente establecemos el siguiente criterio. Para ello, nos serviremos de algunos resultados anteriores. Cabe destacar el **Lema de Riemann-Lebesgue** (2.1.8) que fue demostrado como un corolario anteriormente.

Teorema 3.2.1 (Criterio de Dini, I). *Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$ y sea $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Si existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_{|t|<\delta} \left| \frac{f(x_0-t) - f(x_0)}{t} \right| dt < \infty$$

entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = f(x_0)$.

Demostración. En primer lugar, consideramos $\{D_N\}_{N=1}^{\infty}$ el núcleo de Dirichlet y aprovechando que en la proposición 3.1.2 demostrábamos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1 \quad y \quad S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} f * D_N(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

podemos establecer la siguiente cadena de igualdades razonando de manera análoga a como lo habíamos en el teorema 1.3.4

$$\begin{aligned} S_N(f)(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x_0 - t) dt - f(x_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x_0 - t) dt - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt \right) f(x_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 - t) - f(x_0)] D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x_0 - t) - f(x_0)] D_N(t) dt + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} [f(x_0 - t) - f(x_0)] D_N(t) dt \\ &=: A_N(f)(x_0) + B_N(f)(x_0) \end{aligned}$$

Por consiguiente, nuestro objetivo será demostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N(f)(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} B_N(f)(x_0) = 0$$

Comenzaremos entonces estudiando que ocurre con $B_N(f)(x_0)$. Para ello, observemos que

$$\begin{aligned} B_N(f)(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} [f(x_0 - t) - f(x_0)] D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} [f(x_0 - t) - f(x_0)] \frac{\sin((N + 1/2)t)}{\sin(t/2)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} [f(x_0 - t) - f(x_0)] \frac{e^{i(N+1/2)t} - e^{-i(N+1/2)t}}{2i \sin(t/2)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_+(t) e^{iNt} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_-(t) e^{-iNt} dt = \widehat{B}_+(-N) + \widehat{B}_-(N) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} B_+(t) &:= [f(x_0 - t) - f(x_0)] \frac{e^{it/2}}{2i \sin(t/2)} \chi_{\{y: \delta \leq |y| \leq \pi\}}(t) \\ B_-(t) &:= [f(x_0 - t) - f(x_0)] \frac{e^{-it/2}}{2i \sin(t/2)} \chi_{\{y: \delta \leq |y| \leq \pi\}}(t) \end{aligned}$$

Observemos entonces que B_+, B_- son medibles y además

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |B_{\pm}(t)| dt &= \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{2 \sin(t/2)} \right| dt \leq \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{2 \sin(\delta/2)} \right| dt \\ &= \frac{1}{2 \sin(\delta/2)} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x_0 - t) - f(x_0)| dt < +\infty \end{aligned}$$

ya que $f \in L^1([-\pi, \pi])$ por hipótesis. Deducimos entonces que $B_+, B_- \in L^1([-\pi, \pi])$ y por consiguiente en virtud del Lema de Riemann-Lebesgue que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{B}_+(-N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{B}_-(N) = 0$$

y por consiguiente que

$$B_N(f)(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

Pasamos ahora a estudiar $A_N(f)(x_0)$. De manera análoga a como procedíamos anteriormente observemos que

$$\begin{aligned} A_N(f)(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_+(t) e^{iNt} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_-(t) e^{-iNt} dt \\ &= \widehat{A}_+(-N) + \widehat{A}_-(N) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_+(t) &:= [f(x_0 - t) - f(x_0)] \frac{e^{it/2}}{2i \sin(t/2)} \chi_{\{y: 0 \leq |y| \leq \delta\}}(t) \\ A_-(t) &:= [f(x_0 - t) - f(x_0)] \frac{e^{-it/2}}{2i \sin(t/2)} \chi_{\{y: 0 \leq |y| \leq \delta\}}(t) \end{aligned}$$

Claramente A_+, A_- son medibles, es más veamos que son integrables. Para ello nos serviremos de la siguiente desigualdad que se cumple para todo $t \in [-\pi, \pi]$, $\sin(t/2) \geq \frac{2}{\pi} \frac{t}{2} = \frac{t}{\pi}$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |A_{\pm}(t)| dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{2 \sin(t/2)} \right| dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{2(t/\pi)} \right| dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right| dt < +\infty \end{aligned}$$

pues por hipótesis $f \in L^1([-\pi, \pi])$ y $\int_{|t| < \delta} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right| dt < \infty$. Podemos afirmar entonces que $A_+, A_- \in L^1([-\pi, \pi])$ y de nuevo en virtud de Lema de Riemann-Lebesgue concluimos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{A}_+(-N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{A}_-(N) = 0$$

de donde se deduce en este caso que

$$A_N(f)(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (2)$$

Podemos concluir entonces juntando (1) y (2) que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = f(x_0)$$

tal y como queríamos demostrar. □

Definición 3.2.2. Sea $0 < \alpha \leq 1$, una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ se dice que es **Hölder-continua de orden α** en $[a, b]$, $f \in \mathcal{C}^\alpha[a, b]$, si existe una constante $C > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in (a, b)$

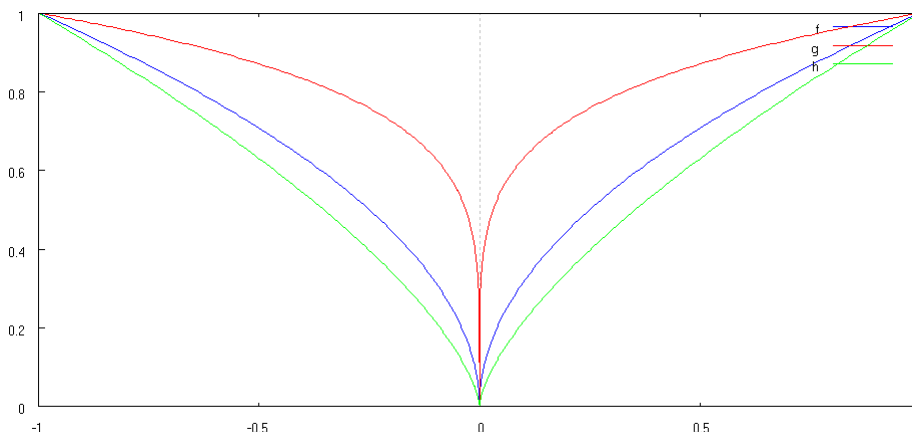
$$|f(x) - f(y)| < C|x - y|^\alpha$$

Diremos que f es **Hölder-continua de orden α** en un punto x_0 , $f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)$, si existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < C|x - x_0|^\alpha$$

Nota. Un caso particular de las funciones **Hölder-continuas** son las funciones Lipschitzianas. Una función decimos que es **Lipschitziana** en $[a, b]$ si es Hölder-continua de orden 1 en $[a, b]$.

Ejemplo 3.2.3. La función dada por $f(x) = \sqrt{|x|}$ es Hölder-continua de orden $1/2$ en $x_0 = 0$ y sin embargo, no es derivable en dicho punto. Es más, cualquier función de la forma $g(x) = |x|^\alpha$ con $0 < \alpha \leq 1$ es Hölder-continua de orden α en el origen y no son derivables en el origen. Gráficamente, veamos cómo son algunas de estas funciones, por ejemplo, para $\alpha = 1/2, 1/5, 2/3$.



Corolario 3.2.4. Sea $0 < \alpha \leq 1$ y sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Si f es Hölder-continua de orden α en $x_0 \in (-\pi, \pi)$ entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = f(x_0)$$

Demostración. En primer lugar, por ser f Hölder-continua de orden α podemos afirmar que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|f(x_0 - t) - f(x_0)| < C|t|^\alpha \quad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

Veamos entonces que

$$\int_{|t| < \delta} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right| dt \leq C \int_{|t| < \delta} \frac{|t|^\alpha}{|t|} dt = 2C \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt = \frac{2}{\alpha} \delta^\alpha < +\infty$$

Podemos entonces aplicar el criterio de Dini I, teorema 3.2.1, y así concluir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = f(x_0)$$

tal y como queríamos demostrar □

Corolario 3.2.5. Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$, si f es Lipschitziana en $x_0 \in (-\pi, \pi)$ entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = f(x_0)$$

Demostración. No es más que un caso particular del corolario anterior. Concretamente con $\alpha = 1$ □

Corolario 3.2.6. Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$, si f es derivable en $x_0 \in (-\pi, \pi)$ entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = f(x_0)$$

Demostración. Supongamos que f es derivable en $x_0 \in (-\pi, \pi)$ entonces es inmediato observar que f es Lipschitziana en un entorno de dicho punto y por consiguiente en virtud del corolario anterior tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = f(x_0)$$

tal y como queríamos ver. □

Teorema 3.2.7 (Criterio de Dini, II). *Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$ y sea $x_0 \in (-\pi, \pi)$. Si existen $f'(x_0^+)$ y $f'(x_0^-)$ entonces se tiene que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$$

Demostración. En primer lugar, sirviéndonos de las propiedades del núcleo de Dirichlet demostradas en la proposición 3.1.2 veamos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(x) dx = \frac{1}{2}$$

y por consiguiente

$$\frac{1}{2}f(x_0^+) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x_0^+) D_N(t) dt \quad y \quad \frac{1}{2}f(x_0^-) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x_0^-) D_N(t) dt$$

Veamos entonces que

$$\begin{aligned} S_N(f)(x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x_0 - t) - f(x_0^+)] D_N(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 - t) - f(x_0^-)] D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) [e^{i(N+1)t} - e^{-iNt}] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{i(N+1)t} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-iNt} dt \\ &= \widehat{g}(-(N+1)) - \widehat{g}(N) \end{aligned}$$

donde la función g viene dada por

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0^+)}{e^{it} - 1} & -\pi < t < 0 \\ \frac{f(x_0 - t) - f(x_0^-)}{e^{it} - 1} & 0 < t < \pi \end{cases}$$

Obviamente se observa que $g \in L^1([-\pi, \pi])$, salvo quizás en $t = 0$, pero observemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = \frac{-f'(x_0^+)}{i} \quad y \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \frac{-f'(x_0^-)}{i}$$

luego, como por hipótesis hemos supuesto la existencia de dichas derivadas laterales, podemos afirmar que $g \in L^1([-\pi, \pi])$, lo que en virtud de lema de Riemann-Lebesgue, implica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{g}(-(N+1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{g}(N) = 0$$

y por tanto que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$$

como queríamos demostrar. \square

Corolario 3.2.8. *Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Si f es de clase C^1 a trozos, para todo $x \in [-\pi, \pi]$ se verifica que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$$

Demostración. Se trata de una consecuencia inmediata del teorema anterior. \square

3.3. Criterio de Dirichlet-Jordan

Teorema 3.3.1 (Criterio de Dirichlet-Jordan). *Sea $f \in L^1[-\pi, \pi]$ una función creciente en un entorno de un punto $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Entonces se verifica que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

Demostración. Sea $\delta > 0$, supongamos que f es creciente en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Veamos entonces que

$$\begin{aligned} S_N f(x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x_0 - t) dt - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t) dt - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) D_N(t) dt - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + t) - f(x_0^+)] D_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x_0 + t) - f(x_0^-)] D_N(t) dt \\ &= I + II \end{aligned}$$

Por un lado veremos qué ocurre con I y por otro lado qué ocurre con II . Observemos que

$$\begin{aligned} |I| &\leq \left| \int_0^{\delta} [f(x_0 + t) - f(x_0^+)] D_N(t) dt \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi} [f(x_0 + t) - f(x_0^+)] D_N(t) dt \right| \\ &= |A| + |B| \end{aligned}$$

En primer lugar, de manera inmediata, razonando como en la demostración del criterio de Dini, en virtud del lema de Riemann-Lebesgue (lema 2.1.8), podemos afirmar que si

$N \rightarrow \infty$ entonces $|B| \rightarrow 0$.

Por otro lado, si aplicamos el lema B.3, podemos escoger $\eta \in (0, \delta)$ tal que

$$\left| \int_0^\delta [f(x_0 + t) - f(x_0^+)] D_N(t) dt \right| = |f(x_0 + \delta) - f(x_0^+)| \left| \int_\eta^\delta D_N(t) dt \right|$$

y en virtud de la proposición 3.1.8 podemos afirmar entonces que

$$|f(x_0 + \delta) - f(x_0^+)| \left| \int_\eta^\delta D_N(t) dt \right| \leq C |f(x_0 + \delta) - f(x_0^+)|$$

De esta manera, nos basta con escoger δ de manera que

$$|f(x_0 + \delta) - f(x_0^+)| < \frac{\epsilon}{2C}$$

y tendremos que cuando $N \rightarrow \infty$, $|A| \rightarrow 0$ y por consiguiente $|I| \rightarrow 0$. El razonamiento con II es totalmente análogo por lo que no lo vamos a desarrollar. \square

Aunque existen otras definiciones de función de variación acotada daremos aquí la que nos interesa para poder enunciar un corolario consecuencia del Criterio de Dirichlet-Jordan.

Definición 3.3.2. Diremos que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de **variación acotada** si la podemos escribir como diferencia de dos funciones es crecientes. Es decir, si $f = g - h$ con g y h funciones crecientes en $[a, b]$. En caso de que f sea de variación acotada escribiremos $f \in BV[a, b]$.

Corolario 3.3.3. Sea $f \in L^1[-\pi, \pi]$. Si $f \in BV[-\pi, \pi]$ entonces para todo $x_0 \in [-\pi, \pi]$ se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

Es más, si $f \in BV[-\pi, \pi]$ y es continua y periódica en \mathbb{T} entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}$$

Demostración. Es consecuencia inmediata del criterio de Dirichlet-Jordan, 3.3.1, y de la definición dada de función de variación acotada. \square

Ejemplo 3.3.4. Veamos en este ejemplo que habrá funciones a las que no podremos aplicarles el criterio de Dini y sin embargo sí podremos aplicarles el criterio de Dirichlet-Jordan y de igual forma, existirán funciones a las que no podremos aplicarle el criterio de Dirichlet-Jordan y sí el de Dini.

Demostración.

i) Consideramos la función

$$f(x) = \frac{1}{\log \frac{\pi}{|x|}}$$

y observemos que en $x_0 = 0$ no le podemos aplicar el criterio de Dini pues

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{dt}{t \log(\pi/t)} &= \int_0^\delta \frac{dt}{t(\log(\pi) - \log(t))} = - \int_{-\infty}^{\log \pi/\delta} \frac{du}{u} \\ &= [-\log |u|]_{-\infty}^{\log \pi/\delta} = -\log |\log \pi/\delta| + \log |-\infty| = +\infty \end{aligned}$$

Sin embargo, $f \in BV[-\pi, \pi]$ (pues f decrece en $(-\pi, 0)$ y crece en $(0, \pi)$) por lo que el criterio de Dirichlet-Jordan nos asegura que en $x_0 = 0$ la serie de Fourier asociada converge a la función f .

ii) Consideramos ahora la función

$$g(t) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & |x| \leq \pi \\ 0 & x_0 = 0 \end{cases}$$

y observemos que g es una función Lipschitziana en $x_0 = 0$ ya que

$$|f(x) - f(0)| \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

Por consiguiente, podemos aplicar el criterio de Dini. Sin embargo, no se puede aplicar el criterio de Dirichlet-Jordan pues $g \notin BV[-\pi, \pi]$. Para demostrarlo, basta con encontrar una partición $-\pi = x_0 < \dots < x_n = \pi$ tal que

$$\sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Consideramos entonces $x_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ y vemos que $g(x_k) = \frac{2/\pi}{2k+1} (-1)^k$ luego

$$\sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \frac{4}{\pi} \frac{1}{2k+1} \approx \log n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Podemos afirmar entonces que efectivamente g no es de variación acotada. □

Nota. En este ejemplo hemos utilizado la siguiente propiedad

$$g \in BV(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \exists M > 0 : \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq M$$

para cada partición $-\pi < x_0 < \dots < x_n < \pi$. Para más información consultar [6].

Capítulo 4

Teorema de Marcel Riesz

4.1. Introducción y resultados previos

Nuestro objetivo en este capítulo será demostrar que, si $1 < p < \infty$, para cualquier función $f \in L^p(\mathbb{T})$, cuando $N \rightarrow \infty$, se verifica que

$$S_N f \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$$

Con tal objetivo, tendremos que desarrollar una serie de resultados previos que nos llevarán a alcanzar la demostración de este teorema. En primer lugar, definimos las siguientes funciones que se verán involucradas en la prueba del teorema

- $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) e^{ikx}$
- $\mathbb{P}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$
- $\tilde{f}(x) = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} - \frac{1}{i} \sum_{k=-\infty}^{-1} \widehat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(k)}{i} \widehat{f}(k) e^{ikx}$

Enunciamos y demostramos entonces los siguientes lemas pero antes recordemos que \mathcal{T} denota al conjunto de los polinomios trigonométricos. Además, en el corolario 2.1.5, demostramos que los polinomios trigonométricos son densos en L^p lo que nos será de gran utilidad en este capítulo.

Lema 4.1.1. *Sea $f \in \mathcal{T}$ un polinomio trigonométrico. Se verifica que:*

- i) Para todo N $S_N f = e^{-iNx} \mathbb{P}(e^{iNx} f) - e^{i(N+1)x} \mathbb{P}(e^{-i(N+1)x} f)$.*
- ii) Para N suficientemente grande $\mathbb{P}f = e^{-iNx} S_{2N}(e^{iNx} f) - e^{-iNx} S_{N-1}(e^{iNx} f)$.*

Demostración. *i)* En primer lugar, sin pérdida de generalidad, escribimos

$$f(x) = \sum_{k=-L}^L \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

para $L > N$ y observemos que para

$$e^{iNx} f(x) = \sum_{k=-L}^L \widehat{f}(k) e^{i(k+N)x} = \sum_{l=-L+N}^{L+N} \widehat{f}(l-N) e^{ilx}$$

por lo que

$$\mathbb{P}(e^{iNx} f(x)) = \sum_{l=0}^{L+N} \widehat{f}(l-N) e^{ilx}$$

y

$$e^{-iNx} \mathbb{P}(e^{iNx} f(x)) = \sum_{l=0}^{L+N} \widehat{f}(l-N) e^{i(l-N)x} = \sum_{k=-N}^L \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

De manera totalmente análoga llegamos a que

$$e^{i(N+1)x} \mathbb{P}(e^{-i(N+1)x} f(x)) = \sum_{k=N+1}^L e^{ikx}$$

por lo que efectivamente

$$e^{-iNx} \mathbb{P}(e^{iNx} f) - e^{i(N+1)x} \mathbb{P}(e^{-i(N+1)x} f) = \sum_{k=-N}^L \widehat{f}(k) e^{ikx} - \sum_{k=N+1}^L \widehat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) e^{ikx} = S_N f$$

tal y como queríamos demostrar.

ii) En primer lugar observemos que para cualquier N

$$\widehat{e^{iNx} f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iNt} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i(k-N)t} dt = \widehat{f}(k-N)$$

Por consiguiente

$$e^{-iNx} S_{2N}(e^{iNx} f) = \sum_{k=-2N}^{2N} \widehat{f}(k-N) e^{i(k-N)x} = \sum_{l=-3N}^N \widehat{f}(l) e^{ilx}$$

y

$$e^{-iNx} S_{N-1}(e^{iNx} f) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \widehat{f}(k-N) e^{i(k-N)x} = \sum_{l=-2N+1}^{-1} \widehat{f}(l) e^{ilx}$$

Eligiendo entonces N suficientemente grande para que $\widehat{f}(r) = 0$ para todo r con $|r| > 2(N+1)$, lo cual es posible ya que $f \in \mathcal{T}$, tendremos que

$$e^{-iNx} S_{2N}(e^{iNx} f) - e^{-iNx} S_{N-1}(e^{iNx} f) = \sum_{l=0}^N \widehat{f}(l) e^{ilx} = \mathbb{P}f$$

tal y como queríamos demostrar. □

Lema 4.1.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) $\|S_N f\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad \forall f \in \mathcal{T}, \forall N = 1, 2, \dots$
- ii) $\|\mathbb{P}f\|_p \leq C'_p \|f\|_p \quad \forall f \in \mathcal{T}$
- iii) $\|\widetilde{f}\|_p \leq C''_p \|f\|_p \quad \forall f \in \mathcal{T}$

Demostración. Tendremos que demostrar por un lado que $ii) \Leftrightarrow iii)$ y por otro lado que $i) \Leftrightarrow ii)$. Observemos en primer lugar que $f + i\tilde{f} = 2\mathbb{P}f - \widehat{f}(0)$ y utilizando esto probaremos $ii) \Leftrightarrow iii)$.

" $iii) \Rightarrow ii)$ " Supongamos en primer lugar que $\|\tilde{f}\|_p \leq C'_p \|f\|_p \forall f \in \mathcal{T}$. Observemos entonces despejando en la igualdad anterior que

$$\mathbb{P}f = \frac{f + i\tilde{f}}{2} + \frac{\widehat{f}(0)}{2}$$

de donde se obtiene la siguiente cadena de desigualdades

$$\|\mathbb{P}f\|_p \leq \frac{\|f\|_p}{2} + \frac{|\widehat{f}(0)|}{2} + \frac{\|\tilde{f}\|_p}{2} = (*)$$

Aprovechando entonces que por la desigualdad de Hölder

$$|\widehat{f}(0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} (*) &\leq \frac{1}{2} (\|f\|_p + \|f\|_p + C''_p \|f\|_p) \\ &= \left(1 + \frac{C''_p}{2} \right) \|f\|_p = C'_p \|f\|_p \end{aligned}$$

" $ii) \Rightarrow iii)$ " De manera análoga, supongamos que $\|\mathbb{P}f\|_p \leq C'_p \|f\|_p \forall f \in \mathcal{T}$ y veamos que

$$\tilde{f} = \frac{1}{i} (2\mathbb{P}f - f - \widehat{f}(0))$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_p &\leq 2\|\mathbb{P}f\|_p + \|f\|_p + |\widehat{f}(0)| \\ &\leq 2\|\mathbb{P}f\|_p + 2\|f\|_p \\ &\leq 2C_p \|f\|_p + 2\|f\|_p \\ &= 2(1 + C'_p) \|f\|_p = C''_p \|f\|_p \end{aligned}$$

$ii) \Rightarrow i)$ Suponemos ahora que $\|\mathbb{P}f\|_p \leq C'_p \|f\|_p \forall f \in \mathcal{T}$. Aprovechando entonces lo probado en el primer apartado del lema anterior

$$S_N f = e^{-iNx} \mathbb{P}(e^{iNx} f) - e^{i(N+1)x} \mathbb{P}(e^{-i(N+1)x} f)$$

de manera inmediata se obtiene que

$$\|S_N f\|_p \leq 2C'_p \|f\|_p = C_p \|f\|_p$$

tal y como queríamos ver.

$i) \Rightarrow ii)$ Finalmente, supongamos que $\|S_N f\|_p \leq C_p \|f\|_p \forall f \in \mathcal{T}, \forall N = 1, 2, \dots$ y utilizando en este caso el segundo apartado del mismo lema, lema 4.1.1

$$\mathbb{P}f = \sum_{k=0}^N \widehat{f}(k) e^{ikx} = e^{-iNx} S_{2N}(e^{iNx} f) - e^{-iNx} S_{N-1}(e^{iNx} f)$$

veamos que

$$\|\mathbb{P}f\|_p \leq 2C_p \|f\|_p = C'_p \|f\|_p$$

Queda así demostrado que las tres afirmaciones son equivalentes. \square

Corolario 4.1.3. *Supongamos que $\|S_N f\|_p \leq C_p \|f\|_p \forall f \in \mathcal{T}$ y $\forall N = 1, 2, \dots$. Entonces*

$$\|S_N f\|_p \leq C_p \|f\|_p \forall f \in L^p(\mathbb{T})$$

Demostración. En primer lugar, utilizando la densidad de \mathcal{T} en $L^p(\mathbb{T})$ y la definición de norma del operador S_N , observemos que

$$\begin{aligned} \|S_N\|_p &= \sup\{\|S_N f\|_p : f \in L^p(\mathbb{T}), \|f\|_p = 1\} \\ &= \sup\{\|S_N f\|_p : f \in \mathcal{T}, \|f\|_p = 1\} \leq C_p \end{aligned}$$

Por consiguiente, de manera inmediata se obtiene que para cualquier función $f \in L^p(\mathbb{T})$ se verifica que

$$\|S_N f\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

tal y como queríamos demostrar. \square

4.2. Convergencia en L^p

Proposición 4.2.1. *Supongamos que se verifican las siguientes afirmaciones:*

$$i) S_N f \xrightarrow{L^p} f \quad \forall f \in \mathcal{T}$$

$$ii) \|S_N f\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{T})$$

Entonces se tiene que $S_N f \xrightarrow{L^p} f \quad \forall f \in L^p(\mathbb{T})$.

Demostración. Dados $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $\epsilon > 0$ sabemos que existe $g \in \mathcal{T}$ tal que $\|f - g\|_p < \epsilon$. Es más, por $i)$, sabemos que existe $N_0 := N_0(\epsilon, g)$ tal que si $N \geq N_0$ entonces $\|g - S_N g\|_p < \epsilon$. Establecemos entonces la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} \|f - S_N f\|_p &\leq \|f - g\|_p + \|g - S_N g\|_p + \|S_N(g - f)\|_p \\ &\leq \epsilon + \|g - S_N g\|_p + \epsilon C_p \leq (C_p + 2)\epsilon \end{aligned}$$

con lo que se concluye la demostración. \square

Recopilando entonces toda la información que tenemos, observemos, que la demostración del teorema de Marcel Riesz, ha quedado reducida a la demostración del siguiente enunciado.

Teorema 4.2.2. Si $1 < p < \infty$ entonces existe $C_p > 0$ tal que

$$\|\tilde{f}\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad \forall f \in \mathcal{T}$$

Observación. Realizaremos primero la prueba para p par y a continuación, utilizando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin y la dualidad de los espacios L^p la extenderemos al resto de casos.

Demostración. En primer lugar, sin pérdida de generalidad suponemos que $f(t) \in \mathbb{R}$ y que $\widehat{f}(0) = 0$. Consideramos entonces

$$F(t) := f(t) + i\tilde{f}(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

Como podemos observar, $F(t)$ solamente tiene frecuencias positivas y lo mismo ocurrirá con $F(t)^{2m}$ para cualquier m , de donde deducimos que $\widehat{F^{2m}}(0) = 0 \forall m = 1, 2, \dots$. Por consiguiente

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) + i\tilde{f}(t))^{2m} dt = \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^j [i\tilde{f}(t)]^{2m-j} dt$$

y su parte real será también nula, es decir, podemos quedarnos solamente con los índices j que sean pares y tendremos que

$$0 = \sum_{j=0}^m \binom{2m}{2j} (-1)^{m-j} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^{2j} \tilde{f}(t)^{2(m-j)} dt$$

Despejando entonces el caso en el que $j = 0$ obtenemos que

$$\|\tilde{f}\|_{2m}^{2m} \leq \sum_{j=1}^m \binom{2m}{2j} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^{2j} \tilde{f}(t)^{2(m-j)} dt = (*)$$

y aplicando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{m}{j}, q = \frac{m}{m-j}$

$$(*) \leq \sum_{j=1}^m \binom{2m}{2j} \|f\|_{2m}^{2j} \|\tilde{f}\|_{2m}^{2(m-j)}$$

A continuación, llamamos $R := \frac{\|\tilde{f}\|_{2m}}{\|f\|_{2m}}$ y multiplicando en ambos lados de la desigualdad anterior por $\frac{1}{\|f\|_{2m}^{2m}}$ obtenemos que

$$R^{2m} \leq \sum_{j=1}^m \binom{2m}{2j} R^{2(m-j)}$$

Denotamos entonces $P_{2m}(x) = x^{2m} - \sum_{j=1}^m \binom{2m}{2j} x^{2(m-j)}$, que es un polinomio que verifica que $P_{2m}(0) = -1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} P_{2m}(x) = \infty$ por lo que tendrá alguna raíz real. Llamamos entonces $C_{2m} := \max\{x : P_{2m}(x) = 0\}$ y tendremos que

$$R \leq C_{2m}$$

de donde deducimos la siguiente desigualdad

$$\|\tilde{f}\|_{2m} \leq C_{2m} \|f\|_{2m}$$

que concluye la demostración para $p \in 2\mathbb{Z}$. Aplicando entonces el teorema de interpolación de Riesz-Thorin (apéndice C) inductivamente podemos afirmar que para todo $2 \leq p < \infty$ se verifica que

$$\|\tilde{f}\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad \forall \in \mathcal{T}$$

Finalmente, mediante un argumento de análisis funcional, por dualidad demostraremos que para $1 < p < 2$ también se verifica y podremos así concluir la demostración del teorema.

Sea $p \in (1, 2)$ directamente veamos que

$$\|\tilde{f}\|_p = \sup\{|\langle \tilde{f}, g \rangle| : g \in (L^p)^*, \|g\|_{(L^p)^*} = 1\} = (1)$$

Aplicando entonces el teorema de Frigyes Riesz, es decir, que $(L^p)^* = L^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, y utilizando la densidad de \mathcal{T} en los espacios L^p para cualquier p tenemos que

$$\begin{aligned} (1) &= \sup\{|\langle \tilde{f}, g \rangle| : g \in L^{p'}, \|g\|_{L^{p'}} = 1\} = \sup\{|\langle \tilde{f}, g \rangle| : g \in \mathcal{T}, \|g\|_{L^{p'}} = 1\} \\ &= \sup\{|\langle f, \tilde{g} \rangle| : g \in \mathcal{T}, \|g\|_{L^{p'}} = 1\} = (2) \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, g \rangle &= \sum_n \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} = \sum_n \frac{\text{sign}(n)}{i} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} \\ &= - \sum_n \widehat{f}(n) \overline{\left(\frac{\text{sign}(n)}{i} \widehat{g}(n) \right)} = - \sum_n \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} = -\langle g, \tilde{g} \rangle \end{aligned}$$

A continuación, aplicando la desigualdad de Hölder, se obtiene que

$$(2) \leq \sup\{\|f\|_p \|\tilde{g}\|_{p'} : g \in \mathcal{T}, \|g\|_{L^{p'}} = 1\} = (3)$$

y finalmente, aprovechando que $2 < p' < \infty$, por lo probado anteriormente, tenemos que

$$(3) \leq C_{p'} \sup\{\|f\|_p \|g\|_{p'} : g \in \mathcal{T}, \|g\|_{L^{p'}} = 1\} = C_{p'} \|f\|_p$$

□

Capítulo 5

Series de Fourier Divergentes

5.1. Contraejemplo de Du Bois Reymond

5.1.1. Contraejemplo de Du Bois Reymond. Versión I

Teorema 5.1.1. *Existe una función $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T})$ tal que no existe*

$$\lim_N S_N f(0)$$

Demostración. Supongamos mediante reducción al absurdo que para cualquier $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T})$

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(0) \quad (*)$$

Definimos entonces el operador

$$\begin{aligned} S_{N0} : \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longrightarrow S_N f(0) \end{aligned}$$

que obviamente es un operador lineal. Además, veamos que

$$|S_{N0} f(0)| = \left| \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) \right| \leq 2\pi(2N+1) \|f\|_\infty$$

ya que

$$|\widehat{f}(n)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty dt = 2\pi \|f\|_\infty$$

Por consiguiente, podemos afirmar que S_{N0} es un operador lineal y continuo. Utilizando entonces (*) observamos que para cualquier f fijo se verifica que

$$\sup_N |S_N f(0)| = C_f < \infty$$

por lo que aplicando el teorema de Banach-Steinhaus, teorema A.11, a la familia de operadores S_{N0} , $N = 1, 2, \dots$, podemos afirmar que existe una constante $C < \infty$ tal que, para cualquier $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T})$ y cualquier $N \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$|S_N f(0)| \leq C \|f\|_\infty$$

Aprovechando entonces que

$$S_N f(0) = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(t) dt \right|$$

lo que tenemos es que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(t) dt \right| \leq C \|f\|_{\infty}$$

Tomamos entonces para cada N , $f_N(t) = \sin((2N+1)\pi t) \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T})$ y veamos que por la definición dada del núcleo de Dirichlet se tiene que

$$S_N f_N(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} dt$$

Razonando entonces como en la proposición 3.1.3 llegamos a que

$$\begin{aligned} S_N f_N(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin^2((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \right| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin^2((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \right| dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin^2((2N+1)x)}{\sin(x)} \right| dx \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin^2((2N+1)x)}{x} \right| dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2N+1}{2}} \left| \frac{\sin^2(\pi u)}{u} \right| du > \frac{2}{\pi} \int_0^N \left| \frac{\sin^2(\pi u)}{u} \right| du \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin^2(\pi u)}{u} \right| du \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \frac{\sin^2(\pi u)}{u+k} du \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \frac{\sin^2(\pi u)}{1+k} du = \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right) \int_0^1 \sin^2(\pi u) du \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f_N(0) = \infty$$

entrando en contradicción con que

$$|S_N f_N(0)| \leq C \|f_N\|_{\infty} \leq C$$

Queda así demostrada la existencia de una serie de Fourier continua y periódica que diverge en un punto. \square

5.1.2. Contraejemplo de Du Bois Reymond. Versión II

A continuación, desarrollaremos en esta sección una demostración del contraejemplo de Du Bois Reymond que realiza una construcción explícita de una función $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en un punto. Desarrollaremos antes de pasar a la demostración propiamente una serie de lemas que nos serán necesarios.

Lema 5.1.2. *Sea $h_N(s) = \text{sign}(D_N(-s))$ donde D_N es el N -simo núcleo de Dirichlet. Entonces*

- i) h_N es constante en los intervalos de la forma $\left(\frac{r\pi}{2N+1}, \frac{(r+1)\pi}{2N+1} \right)$ para todo $|r| \leq N$.
- ii) $|h_N(s)| \leq 1 \quad \forall s \in \mathbb{T}$.
- iii) $S_N h_N(0) \geq C \log(N)$ para N suficientemente grande.

Demostración. Tanto *i)* como *ii)* son totalmente inmediatas a partir de la fórmula obtenida en el ejemplo 1.1.5. Por consiguiente, demostraremos solamente *iii)*. Directamente, sirviéndonos de la simetría del núcleo de Dirichlet y de la acotación dada por el corolario 3.1.4, veamos que

$$\begin{aligned} S_N h_N(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_N(x) D_N(-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(-x)| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq C \log N \end{aligned}$$

□

Lema 5.1.3. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces

$$\begin{aligned} i) \quad |\widehat{g}(r) - \widehat{h}(r)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - h(t)| dt \quad \forall r. \\ ii) \quad |S_N g(x) - S_N h(x)| &\leq \frac{2N+1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - h(t)| dt \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Demostración. *i)* Directamente observemos que

$$\begin{aligned} |\widehat{g}(r) - \widehat{h}(r)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g(t) - h(t)) e^{-irt} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(g(t) - h(t)) e^{-irt}| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - h(t)| dt \end{aligned}$$

ii) Sirviéndonos del apartado anterior veamos que

$$\begin{aligned} |S_N g(x) - S_N h(x)| &= \left| \sum_{r=-N}^N (\widehat{g}(r) - \widehat{h}(r)) e^{irx} \right| \leq \sum_{r=-N}^N |(\widehat{g}(r) - \widehat{h}(r)) e^{irx}| \\ &= \sum_{r=-N}^N |\widehat{g}(r) - \widehat{h}(r)| \leq \sum_{r=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - h(t)| dt \\ &= \frac{2N+1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - h(t)| dt \end{aligned}$$

□

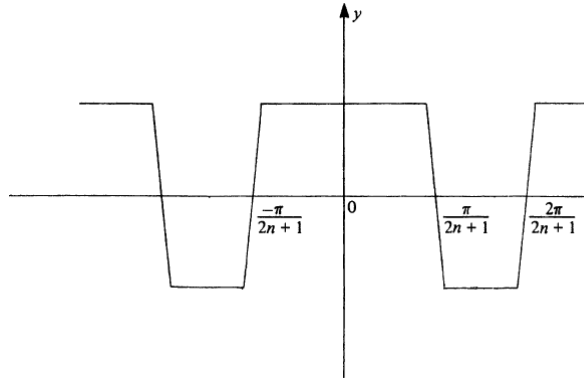
Lema 5.1.4. Para cada $n \geq 2$ existe una función continua $g_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} i) \quad |g_n(s)| &\leq 1 \quad \forall s \\ ii) \quad |S_n g_n(0)| &\geq C \log n \end{aligned}$$

Demostración. Solamente construimos una función g_n continua tal que $|g_n(s)| \leq 1$ para todo s y

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_n(s) - h_n(s)| ds \leq \frac{1}{4(2n+1)}$$

Gráficamente, una función de la forma



Es más, en virtud del segundo apartado del lema anterior, sabemos que podemos escoger g_n de forma que

$$\|S_n g_n - S_n h_n\|_\infty \leq \frac{2n+1}{2\pi} \|g_n - h_n\|_1 \leq \frac{1}{4}$$

de donde deducimos que

$$|S_n g_n(0)| \geq |S_n h_n(0)| - |S_n g_n(0) - S_n h_n(0)| \geq C \log n - \frac{1}{4} \geq C' \log n$$

lo que concluye la demostración. \square

Lema 5.1.5. Para cada $n \geq 2$ existe un polinomio trigonométrico $G_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$i) |G_n(s)| \leq 2 \quad \forall s \in \mathbb{T}$$

$$ii) |S_n G_n(0)| \geq C \log n - 1$$

Demostración. En virtud del corolario 2.1.4 sabemos que el conjunto de los polinomios trigonométricos, \mathcal{T} , es denso en las funciones continuas por lo que podemos encontrar un polinomio trigonométrico G_n de manera que

$$|G_n(s) - g_n(s)| \leq \frac{1}{2n+1} \quad \forall s \in \mathbb{T}$$

Veamos entonces que

$$|G_n(s)| \leq |G_n(s) - g_n(s)| + |g_n(s)| \leq 2 \quad \forall s \in \mathbb{T}$$

luego efectivamente se verifica *i*). Pasamos ahora a ver *ii*). Veamos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_n(s) - g_n(s)| ds \leq \frac{1}{2n+1}$$

por lo que en virtud de los lemas anteriores

$$|S_n G_n(0)| \geq |S_n g_n(0)| - |S_n G_n(0) - S_n g_n(0)| \geq C \log n - 1$$

tal y como queríamos ver. \square

Recopilando todo lo anterior y simplificando el resultado para que nos sea más útil tenemos el siguiente lema

Lema 5.1.6. Dados $M_1, M_2 > 0$ existen un polinomio trigonométrico $G : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ y un número $N := N(M_1, M_2)$ con $N > M_1$ y tal que

$$i) |G(s)| \leq 1 \quad \forall s \in \mathbb{T}$$

$$ii) |S_N G(0)| \geq M_2$$

Demostración. Es inmediato a partir del resultado anterior. \square

Una vez enunciados todos estos lemas, vamos a desarrollar propiamente el enunciado y la construcción del contraejemplo de Du Bois Reymond.

Teorema 5.1.7. *Existe una función $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T})$ tal que no existe*

$$\lim_N S_N f(0)$$

Demostración. En primer lugar, en virtud del lema anterior, lema 5.1.6, podemos encontrar una sucesión de polinomios trigonométricos H_1, H_2, \dots y una sucesión creciente de enteros positivos $n(1), n(2), \dots$ tales que

$$i) |H_k(s)| \leq 1 \quad \forall s \in \mathbb{T}$$

$$ii) |S_{n(k)} H_k(0)| \geq 2^{2k}$$

Denotamos ahora con $q(k)$ el grado de H_k . De esta forma,

$$H_k(t) = \sum_{r=-q(k)}^{q(k)} a_{kr} e^{irt}$$

y obviamente $q(k) > n(k)$ pues de lo contrario $|S_{n(k)} H_k(0)| = |H_k(0)| \leq 1$ y esto entraría en contradicción con *ii*). Supondremos entonces sin pérdida de generalidad que $n(k+1) > q(k)$, tomamos $p(k) = \sum_{j=1}^k (2q(j) + 1)$ y definimos

$$f_m(t) := \sum_{k=1}^m 2^{-k} e^{ip(k)t} H_k(t)$$

Observemos entonces que (para $m \geq n+1$)

$$\begin{aligned} |f_m(t) - f_n(t)| &= \left| \sum_{k=n+1}^m 2^{-k} e^{ip(k)t} H_k(t) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |2^{-k} e^{ip(k)t} H_k(t)| \\ &= \sum_{k=n+1}^m |2^{-k} H_k(t)| \leq \sum_{k=n+1}^m 2^{-k} \leq 2^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Aplicando entonces el M-test de Weierstrass podemos afirmar que f_m convergen uniformemente a una función f que vendrá dada por

$$f(t) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} e^{ip(k)t} H_k(t)$$

y, por ser las f_m continuas sabemos que f será también continua. Es más, tendremos que

$$e^{-irt} f_m(t) \longrightarrow e^{-irt} f(t)$$

uniformemente por lo que

$$\widehat{f_m}(r) \longrightarrow \widehat{f}(r)$$

A continuación, observemos que

$$e^{ip_k(t)} H_k(t) = \sum_{r=-q_k}^{q_k} a_{kr} e^{i(p_k+r)t} \quad (1)$$

tiene frecuencias entre $[p_k - q_k, p_k + q_k]$ y por la elección realizada de los p_k éstas serán disjuntas con las frecuencias de

$$e^{ip_{k+1}(t)} H_{k+1}(t) = \sum_{r=-q_{k+1}}^{q_{k+1}} a_{(k+1)r} e^{i(p_{k+1}+r)t} \quad (2)$$

En efecto veamos que la frecuencia mayor de (1) que es

$$p_k + q_k \leq p_k + q_{k+1} = \sum_{j=1}^k (2q_j + 1) + q_{k+1} = p_{k+1} - q_{k+1} - 1 < p_{k+1} - q_{k+1}$$

que es la frecuencia menor de (2). Por consiguiente, para $|u| \leq q_k$ se tiene que

$$\widehat{f}(p(k) + u) = 2^{-k} \widehat{H}_k(u)$$

Mediante un argumento similar llegamos a que

$$\widehat{f}(r) = 0 \quad \forall r < 0$$

Veamos entonces que

$$\begin{aligned} |S_{p(k)+n(k)} f(0) - S_{p(k)-n(k)} f(0)| &= \left| \sum_{u=-n(k)}^{n(k)} 2^{-k} \widehat{H}_k(u) \right| \\ &= 2^{-k} |S_{n(k)} H_k(0)| \geq 2^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

luego

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (\max(|S_{p(k)+n(k)} f(0)|, |S_{p(k)-n(k)} f(0)|)) = \infty$$

de donde se deduce que $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n f(0) = \infty$ y por tanto que

$$\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(0)$$

tal y como queríamos demostrar. □

5.2. Contraejemplo de Kolmogorov

El objetivo en esta sección será demostrar que existe una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier no es convergente. Demostraremos el siguiente enunciado.

Existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n f(x)| = \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{T}$

Sin embargo, para abordar la demostración de este teorema tendremos que trabajar en una serie de resultados previos. Dividiremos la prueba en tres secciones:

- Sección 1: Teorema de Kronecker.
- Sección 2: Resultados previos.
- Sección 3: Contraejemplo.

5.2.1. Teorema de Kronecker.

Lema 5.2.1. *Supongamos que $\{\pi, \theta_1, \dots, \theta_d\}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} . Es decir, supongamos que si $q_0\pi + q_1\theta_1 + \dots + q_d\theta_d = 0$ con $q_1, \dots, q_d \in \mathbb{Q}$ entonces $q_1 = \dots = q_d = 0$. Entonces para cualquier $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\theta_1, \dots, n\theta_d) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$$

Demostración. Para abordar esta demostración distinguiremos tres casos posibles: En primer lugar consideramos que f viene dada por

$$f(x_1, \dots, x_d) = e^{i(k_1x_1 + \dots + k_dx_d)} \quad \text{con} \quad k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}$$

y distinguimos dos opciones. En primer lugar consideramos $(k_1, \dots, k_d) = (0, \dots, 0)$ y en ese caso tendremos que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\theta_1, \dots, n\theta_d) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1 = 1$$

y

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d = \int_{\mathbb{T}^d} 1 dx_1 \dots dx_d = 1$$

por lo que efectivamente el enunciado se verifica.

Supongamos entonces que $(k_1, \dots, k_d) \neq (0, \dots, 0)$. Sin pérdida de generalidad supongamos por ejemplo que $k_d \neq 0$. Veamos entonces que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} e^{i(k_1x_1 + \dots + k_dx_d)} dx_1 \dots dx_d &= \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{\mathbb{T}} e^{ik_1x_1} \dots e^{ik_dx_d} dx_1 \dots dx_d \\ &= \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{\mathbb{T}} e^{ik_1x_1} \dots e^{ik_{d-1}x_{d-1}} \left(\int_{\mathbb{T}} e^{ik_dx_d} dx_d \right) dx_1 \dots dx_{d-1} = 0 \end{aligned}$$

ya que para cualquier k no nulo

$$\int_{\mathbb{T}} e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{ikx}}{ik} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} (e^{i\pi k} - e^{-i\pi k}) = 0$$

Por otro lado se tiene que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i(nk_1\theta_1 + \dots + nk_d\theta_d)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(e^{i(k_1\theta_1 + \dots + k_d\theta_d)} \right)^n = \frac{1}{N} \frac{e^{i(N+1)(k_1\theta_1 + \dots + k_d\theta_d)} - e^{i(k_1\theta_1 + \dots + k_d\theta_d)}}{e^{i(k_1\theta_1 + \dots + k_d\theta_d)} - 1}$$

luego

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i(nk_1\theta_1 + \dots + nk_d\theta_d)} - \int_{\mathbb{T}^d} e^{i(k_1x_1 + \dots + k_dx_d)} dx_1 \dots dx_d \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i(nk_1\theta_1 + \dots + nk_d\theta_d)} - 0 \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \left| \frac{e^{i(N+1)(k_1\theta_1 + \dots + k_d\theta_d)} - e^{i(k_1\theta_1 + \dots + k_d\theta_d)}}{e^{i(k_1\theta_1 + \dots + k_d\theta_d)} - 1} \right| \leq \frac{1}{N} \frac{2}{|e^{i(k_1\theta_1 + \dots + k_d\theta_d)} - 1|} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar. Pues por ser $\{\pi, \theta_1, \dots, \theta_d\}$ linealmente independientes y $(k_1, \dots, k_d) \neq (0, \dots, 0)$, $k_1\theta_1 + \dots + k_d\theta_d \notin 2\pi\mathbb{Z}$ y por tanto el denominador es una constante no nula.

A continuación, si suponemos que f es un polinomio trigonométrico en d dimensiones tenemos que la demostración se extiende de manera inmediata por la linealidad del operador S_N .

Finalmente, supongamos que $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T}^d)$. Por la densidad de los polinomios trigonométricos en las funciones continuas y periódicas sabemos que existe $g \in \mathcal{T}^d$ tal que $\|f - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$. Veamos entonces que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\theta_1, \dots, n\theta_d) - \int_{\mathbb{T}^d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d \right| \\ &= \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\theta_1, \dots, n\theta_d) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(n\theta_1, \dots, n\theta_d) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(n\theta_1, \dots, n\theta_d) \right. \\ & \quad \left. - \int_{\mathbb{T}^d} g(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d + \int_{\mathbb{T}^d} g(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d - \int_{\mathbb{T}^d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f - g|(n\theta_1, \dots, n\theta_d) + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(n\theta_1, \dots, n\theta_d) - \int_{\mathbb{T}^d} g(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d \right| + \|f - g\|_1 \\ &\leq 2\|f - g\|_\infty + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(n\theta_1, \dots, n\theta_d) - \int_{\mathbb{T}^d} g(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d \right| = (*) \end{aligned}$$

Sirviéndonos entonces de que $g \in \mathcal{T}^d$ tenemos que existe $N_0 := N_0(g, \epsilon)$ tal que para $N > N_0$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(n\theta_1, \dots, n\theta_d) - \int_{\mathbb{T}^d} g(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Por consiguiente tendremos que

$$(*) < 2\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

lo que concluye la demostración. \square

Teorema 5.2.2 (Teorema de Kronecker). *Supongamos que $\{\pi, \theta_1, \dots, \theta_d\}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} . Entonces $\{(n\theta_1, \dots, n\theta_d) \bmod \mathbb{Z}^d : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T}^d$ es denso en \mathbb{T}^d .*

Demostración. Supongamos mediante reducción al absurdo que $\{\pi, \theta_1, \dots, \theta_d\}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} pero que

$$\mathcal{A} = \{(n\theta_1, \dots, n\theta_d) \bmod \mathbb{Z}^d : n \in \mathbb{N}\}$$

no es denso en \mathbb{T}^d . Existirá entonces un abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{T}^d$ tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Definimos entonces una función $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T}^d)$ no nula con $f \geq 0$ tal que $\text{sop}(f) \subset \mathcal{U}$ y aplicando el lema previo tendremos que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\theta_1, \dots, n\theta_d) = 0 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d$$

por lo que

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d = 0$$

lo cual es una contradicción pues habíamos supuesto $f \geq 0$ y no nula. \square

Corolario 5.2.3. *Supongamos que $\{\pi, \theta_1, \dots, \theta_d\}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} . Entonces $\{e^{in\theta_1}, \dots, e^{in\theta_d}\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en $S^1 \times \cdots \times S^1$.*

Demostración. En virtud del teorema de Kronecker, teorema 5.2.2, sabemos que si $\{\pi, \theta_1, \dots, \theta_d\}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} entonces $\{(n\theta_1, \dots, n\theta_d) \bmod \mathbb{Z}^d : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T}^d$ es denso en \mathbb{T}^d . Aprovechando entonces que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{T} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{ikt} \end{aligned}$$

es un homeomorfismo se deduce de manera inmediata que, bajo estas hipótesis, $\{e^{in\theta_1}, \dots, e^{in\theta_d}\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en $S^1 \times \cdots \times S^1$. \square

Corolario 5.2.4. *Supongamos que $\{\pi, \theta_1, \dots, \theta_d\}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} . Entonces $\{e^{i(n+1/2)\theta_1}, \dots, e^{i(n+1/2)\theta_d}\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en $S^1 \times \cdots \times S^1$.*

Demostración. Sea $(e^{ix_1}, \dots, e^{ix_d}) \in S^1 \times \cdots \times S^1$ un punto arbitrario. Consideramos $(e^{i(x_1 - \theta_1/2)}, \dots, e^{i(x_d - \theta_d/2)}) \in S^1 \times \cdots \times S^1$ y por el corolario anterior, sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=1}^d \left| e^{i(x_j - \theta_j/2)} - e^{in\theta_j} \right| < \epsilon$$

Veamos entonces que

$$\sum_{j=1}^d \left| e^{i(x_j - \theta_j/2)} - e^{in\theta_j} \right| = \sum_{j=1}^d \left| e^{ix_j} - e^{i(n+1/2)\theta_j} \right| < \epsilon$$

de donde se deduce que

$$\{e^{i(n+1/2)\theta_1}, \dots, e^{i(n+1/2)\theta_d}\}_{n=1}^{\infty}$$

es denso en $S^1 \times \cdots \times S^1$ tal y como queríamos demostrar. \square

Corolario 5.2.5. *Si $\theta \notin \pi\mathbb{Q}$ existen infinitos n tales que $\sin(\theta(n+1/2)) \geq 1/2$.*

Demostración. En virtud de los corolarios obtenidos a partir del teorema de Kronecker sabemos que, bajo estas hipótesis, $\{e^{i(n+1/2)\theta}\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en S^1 . Existirán entonces infinitos n tales que

$$\text{Im}(e^{i(n+1/2)\theta}) \geq \frac{1}{2}$$

luego como $\text{Im}(e^{i(n+1/2)\theta}) = \sin((n+1/2)\theta)$ existen infinitos n tales que

$$\sin((n+1/2)\theta) \geq \frac{1}{2}$$

tal y como queríamos demostrar. \square

Corolario 5.2.6. *Supongamos que $\{\pi, \theta_1, \dots, \theta_d\}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} . Entonces existen infinitos n tales que $\sin(\theta_j(n+1/2)) \geq 1/2$ para cualquier j .*

Demostración. Se trata simplemente de una generalización del corolario anterior para d dimensiones. La demostración es totalmente análoga. \square

5.2.2. Resultados previos.

Lema 5.2.7. *Sea a una constante positiva. Para todo $u \in [-\pi, \pi]$ se tiene que*

$$\frac{\sin(au)}{\sin(u)} = \frac{\sin(a|u|)}{|\sin(u)|}$$

Demostración. Distinguimos dos posibilidades:

i) $u \in [0, \pi]$: Por un lado

$$\sin(u) \geq 0 \Rightarrow |\sin(u)| = \sin(u)$$

y por otro lado

$$u \geq 0 \Rightarrow u = |u| \Rightarrow au = a|u| \Rightarrow \sin(au) = \sin(a|u|)$$

luego efectivamente, en este caso, tendremos que

$$\frac{\sin(au)}{\sin(u)} = \frac{\sin(a|u|)}{|\sin(u)|}$$

ii) $u \in [-\pi, 0]$: Por un lado se tiene que

$$\sin(u) \leq 0 \Rightarrow |\sin(u)| = -\sin(u)$$

y por otro lado que

$$u \leq 0 \Rightarrow u = -|u| \Rightarrow \sin(au) = \sin(-a|u|) = -\sin(a|u|)$$

luego tendremos que

$$\frac{\sin(au)}{\sin(u)} = \frac{-\sin(a|u|)}{-|\sin(u)|} = \frac{\sin(a|u|)}{|\sin(u)|}$$

En ambos casos se verifica luego el resultado es cierto. □

Lema 5.2.8. *Sean $\{x_{j,N}\}_{j=-N}^N \subset \mathbb{R}$ tales que $\{\pi, x_{-N,N}, \dots, x_{N,N}\}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} . Entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}$ existe $n := n(x)$ tal que*

$$\sin((n+1/2)|x - x_{j,N}|) \geq \frac{1}{2}$$

para todo $j = -N, \dots, N$.

Demostración. En primer lugar consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned} A_N &:= \{x \in [-\pi, \pi] : \{\pi\} \cup \{x - x_{j,N}\}_{j=-N}^N \text{ l.dep. en } \mathbb{Q}\} \\ &\subseteq \{x = \tilde{q}_0\pi + \sum_{|j| \leq N} q_j x_{j,N} : \tilde{q}_0, q_i \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

que son numerables para cada N y elegimos

$$A := \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$$

que será también numerable. Tomamos entonces $x \in \mathbb{T} - A$ y tendremos que

$$\{\pi\} \cup \{|x - x_{j,N}|\}_{j=-N}^N$$

son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} , para todo $N = 1, 2, \dots$. Por consiguiente, fijado N arbitrario, en virtud del corolario 5.2.6, tendremos que existe $n := n(x)$ tal que, para todo $j = -N, \dots, N$

$$\sin((n + 1/2)|x - x_{j,N}|) \geq \frac{1}{2}$$

tal y como queríamos demostrar. \square

Teorema 5.2.9. *Para cada $N = 1, 2, \dots$ existen medidas $\mu_N \geq 0$ tales que*

i) $\|\mu_N\| = 1$

ii) *Para casi todo $x \in \mathbb{T}$ se tiene que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n \mu_N(x)| > C_0 \log(N)$ donde C_0 es una constante positiva.*

Demostración. En primer lugar definimos

$$\mu_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N \delta_{\{x_{j,N}\}}$$

donde escogemos los $x_{j,N}$ de manera que $\{\pi, x_{-N,N}, \dots, x_{N,N}\}$ son linealmente independientes y

$$|x_{j,N} - \frac{j\pi}{N}| < \frac{\pi}{4N}$$

para todo $j = -N, \dots, N$ lo que implicará que para todo $j \neq l$

$$|x_j - x_l| \leq C \frac{|j-l|}{N} \quad (*)$$

Observemos entonces que, para cada $N = 1, 2, \dots$, $\mu_N \geq 0$ y

$$\begin{aligned} \|\mu_N\| &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N d\delta_{\{x_{j,N}\}} = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N \int_{\mathbb{T}} 1 d\delta_{\{x_{j,N}\}} \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N 1 = 1 \end{aligned}$$

luego solamente nos faltará demostrar el segundo apartado. Veamos que

$$\begin{aligned} S_n \mu_N(x) &= D_n * \mu_N(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N D_n * \delta_{\{x_{j,N}\}}(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N \int_{\mathbb{T}} D_n(x-t) d\delta_{\{x_{j,N}\}}(t) \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N D_n(x - x_{j,N}) = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N \frac{\sin((n+1/2)(x - x_{j,N}))}{\sin(\frac{1}{2}(x - x_{j,N}))} = (1) \end{aligned}$$

aplicando entonces el lema 5.2.7 tenemos que

$$(1) = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N \frac{\sin((n+1/2)|x - x_{j,N}|)}{|\sin(\frac{1}{2}(x - x_{j,N}))|} = (2)$$

y, si $x \in A$, en virtud del lema 5.2.8 sabemos que existe $n := n(x)$ tal que

$$(2) \geq \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N \frac{1/2}{\left| \sin\left(\frac{1}{2}(x - x_{j,N})\right) \right|} = (3)$$

Aprovechando entonces que $|\sin(u)| \leq |u|$

$$(3) \geq \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N \frac{1/2}{\frac{1}{2}|x - x_{j,N}|} = (4)$$

y por la elección realizada de los $\{x_{j,N}\}$, en virtud de (*) tenemos que, para el n elegido anteriormente,

$$(4) \geq \frac{1}{2N+1} \sum_{l=1}^N \frac{1}{l/N} \geq \frac{N}{3N} \sum_{l=1}^N \frac{1}{l} \geq C_0 \log(N)$$

de donde deducimos que, tal y como queríamos demostrar

$$\sup_{n \geq 1} |S_n \mu_N(x)| \geq C_0 \log(N) \quad x \in A$$

□

5.2.3. Contraejemplo.

Lema 5.2.10. *Para cada $N = 1, 2, \dots$ existen $E_N \subseteq \mathbb{T}$ y $k_N \in \mathbb{N}$ tales que*

$$i) |E_N| \geq 2\pi - \frac{1}{N}$$

ii) *Para todo punto $x \in E_N$ se tiene que $\sup_{1 \leq n \leq k_N} |S_n \mu_N(x)| \geq C_0 \log(N)$ donde C_0 es una constante positiva.*

Demostración. En primer lugar tomamos

$$\mathcal{U}_N := \{x \in \mathbb{T} : \sup_{1 \leq n \leq \infty} |S_n \mu_N(x)| > C_0 \log(N)\}$$

y en virtud del teorema 5.2.9 se tiene que $|\mathcal{U}_N| = 2\pi$. Consideramos ahora para cada k

$$\mathcal{U}_{N,k} := \{x \in \mathbb{T} : \sup_{1 \leq n \leq k} |S_n \mu_N(x)| > C_0 \log(N)\}$$

y obsevemos que

$$\mathcal{U}_N = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{U}_{N,k}$$

Además, como obviamente $\mathcal{U}_{N,1} \subset \mathcal{U}_{N,2} \subset \dots$, se tiene que

$$2\pi = |\mathcal{U}_N| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\mathcal{U}_{N,k}|$$

Existirá por tanto k_N (dependiente de N) tal que

$$|\mathcal{U}_{N,k}| \geq 2\pi - \frac{1}{N} \quad \forall k \geq k_N$$

Nos basta entonces con definir $E_N := \mathcal{U}_{N,k_N}$ para concluir la demostración del lema. □

Definición 5.2.11. Sea F_M el M -ésimo núcleo de Féjer, para cada $M \in \mathbb{N}$ se define el M -ésimo núcleo de la Vallée-Poussin como $V_M(x) = 2F_{2M}(x) - F_M(x)$.

Lema 5.2.12. Para cada $M \in \mathbb{N}$ se tiene que $V_M(x) = \sum_{|m|<M} e^{imx} + 2 \sum_{M \leq |m| < 2M} \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) e^{imx}$

Demostración. Por definición sabemos que $V_M(x) = 2F_{2M}(x) - F_M(x)$ y en virtud de la proposición 1.3.8 tendremos que

$$2F_{2M}(x) - F_M(x) = 2 \sum_{|m|<2M} \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) e^{imx} - \sum_{|m|<M} \left(1 - \frac{|m|}{M}\right) e^{imx} = (1)$$

Veamos entonces que

$$\begin{aligned} (1) &= 2 \sum_{|m|<2M} e^{imx} - \sum_{|m|<2M} \frac{|m|}{M} e^{imx} - \sum_{|m|<M} e^{imx} + \sum_{|m|<M} \frac{|m|}{M} e^{imx} \\ &= 2 \sum_{|m|<M} e^{imx} + 2 \sum_{M \leq |m| < 2M} e^{imx} - \sum_{|m|<M} \frac{|m|}{M} e^{imx} - \sum_{M \leq |m| < 2M} \frac{|m|}{M} e^{imx} \\ &\quad - \sum_{|m|<M} e^{imx} + \sum_{|m|<M} \frac{|m|}{M} e^{imx} = \sum_{|m|<M} e^{imx} + 2 \sum_{M \leq |m| < 2M} \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) e^{imx} \end{aligned}$$

luego efectivamente

$$V_M(x) = \sum_{|m|<M} e^{imx} + 2 \sum_{M \leq |m| < 2M} \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) e^{imx}$$

tal y como queríamos demostrar. \square

Lema 5.2.13. Para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $f_N := \mu_N * V_{k_N}$, donde V_{k_N} es el k_N -ésimo núcleo de la Vallée-Poussin, cumple que

$$f_N = \sum_{|m|<k_N} \widehat{\mu}_N(m) e^{imx} + 2 \sum_{k_N \leq |m| < 2k_N} \widehat{\mu}_N \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) e^{imx}$$

Demostración. De nuevo establecemos directamente una cadena de igualdades

$$\begin{aligned} f_N &= \mu_N * \left(\sum_{|m|<M} e^{imx} + 2 \sum_{M \leq |m| < 2M} \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) e^{imx} \right) \\ &= \mu_N * \sum_{|m|<M} e^{imx} + 2\mu_N * \sum_{M \leq |m| < 2M} \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) e^{imx} \\ &= \sum_{|m|<M} \mu_N * e^{imx} + 2 \sum_{M \leq |m| < 2M} \mu_N * \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) e^{imx} \\ &= \sum_{|m|<M} \int_{\mathbb{T}} e^{im(x-t)} d\mu_N(t) + 2 \sum_{M \leq |m| < 2M} \int_{\mathbb{T}} e^{im(x-t)} \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) d\mu_N(t) \\ &= \sum_{|m|<M} e^{imx} \int_{\mathbb{T}} e^{-imt} d\mu_N(t) + 2 \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) e^{imx} \int_{\mathbb{T}} e^{-imt} d\mu_N(t) \\ &= \sum_{|m|<k_N} \widehat{\mu}_N(m) e^{imx} + 2 \sum_{k_N \leq |m| < 2k_N} \widehat{\mu}_N \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) e^{imx} \end{aligned}$$

□

Lema 5.2.14. *Continuando con la notación del lema 5.2.10, para cada $N = 1, 2, \dots$ existe $f_N \in \mathcal{T}$ tal que*

i) $\|f_N\|_1 \leq 3$

ii) *Para todo punto $x \in E_N$ se tiene que $\sup_{1 \leq n \leq k_N} |S_n f_N(x)| \geq C_0 \log(N)$ donde C_0 es una constante positiva.*

Demostración. En primer lugar consideramos el núcleo de la Vallée-Poussin y en virtud del 5.2.12 se tiene que

$$V_M(x) = \sum_{|m| < M} e^{imx} + 2 \sum_{M \leq |m| < 2M} \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) e^{imx} \in \mathcal{T}_{2M}$$

Cumpléndose además que

$$\|V_M\|_1 \leq 2\|F_M\|_1 + \|F_M\|_1 = 3$$

Consideramos entonces $f_N := \mu_N * V_{k_N}$ y en virtud del lema 5.2.13

$$f_N = \sum_{|m| < k_N} \widehat{\mu}_N(m) e^{imx} + 2 \sum_{k_N \leq |m| < 2k_N} \widehat{\mu}_N(m) \left(1 - \frac{|m|}{2M}\right) e^{imx}$$

Observemos entonces que

- $f \in \mathcal{T}_{2k_N}$
- $\|f_N\|_1 \leq \|\mu_N\|_1 \|V_{k_N}\|_1 \leq 3$ pues $\|\mu_N\|_1 = 1$ y $\|V_{k_N}\|_1 \leq 3$.

luego solamente nos faltará demostrar el segundo apartado, pero observemos que, para $n \leq k_N$ se tiene que

$$S_n f_N = S_n \mu_N$$

luego en virtud del lema 5.2.10 podemos afirmar que se verifica también el segundo apartado. □

Estamos ya en disposición de abordar la demostración del contraejemplo de Kolmogorov.

Teorema 5.2.15. *Existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n f(x)| = \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{T}$.*

Demostración. En primer lugar definimos

$$f := \sum_{N=1}^{\infty} \frac{e^{i\nu_N x}}{N^2} f_{2N^3}$$

donde f_{2N^3} , definido en el lema 5.2.14, es un polinomio trigonométrico de grado $d_N = 2k_{2N^3}$ y elegimos los $\{\nu_N\}_{N=1}^{\infty}$ de manera que

$$\nu_N + d_N < \nu_{N+1} - d_{N+1}$$

es decir, de manera que los bloques de frecuencia de cada sumando de f sean disjuntos dos a dos. Observemos entonces que

$$\|f\|_1 \leq \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \|f_{2N^3}\|_1 \leq 3 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} < \infty$$

luego $f \in L^1(\mathbb{T})$. A continuación, veamos que si $|n| \leq d_N$ entonces

$$|S_{\nu_N+n}f(x) - S_{\nu_N-n}f(x)| = \frac{1}{N^2} |S_n f_{2^{N^3}}(x)|$$

Tomando entonces el supremo sobre n con $|n| \leq k_{2^{N^3}} \leq d_N$ veamos que para todo $x \in E_{2^{N^3}}$ existe $n_N := n_N(x)$ tal que

$$|S_{\nu_N+n_N}f(x) - S_{\nu_N-n_N}f(x)| \geq \frac{1}{N^2} C_0 \log(2^{N^3}) = C_0 N$$

por lo que al menos uno de los términos será mayor que $C_0 \frac{N}{2}$. Tendremos entonces que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n f(x)| = \infty \quad \text{para todo } x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{N \geq j} E_{2^{N^3}} =: E$$

pero observemos que

$$|E| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \bigcup_{N \geq j} E_{2^{N^3}} \right| \geq \lim_{j \rightarrow \infty} |E_{2^{j^3}}| = 2\pi$$

luego podemos afirmar que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n f(x)| = \infty$$

para casi todo $x \in \mathbb{T}$ tal y como queríamos demostrar. □

Capítulo 6

Aplicaciones

6.1. La desigualdad isoperimétrica

Sea Γ una curva cerrada en el plano sin autointersecciones y sean l la longitud de dicha curva y \mathcal{A} el área de la región de \mathbb{R}^2 encerrada por Γ . El objetivo del problema isoperimétrico es encontrar, para una longitud dada l la curva Γ que maximice \mathcal{A} .

A simple vista somos capaces de intuir que la solución debe ser un círculo. Sin embargo, la demostración no es tan sencilla. Antes de pasar a demostrar que efectivamente la solución es un círculo hemos de definir algunos conceptos, lo haremos todo en \mathbb{R}^2 pues es el caso que nos interesa pero se pueden generalizar más. Véase [11].

Definición 6.1.1. Una **curva parametrizada diferenciable** en el plano es una aplicación $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que es de clase $\mathcal{C}^1[a, b]$. La imagen de α es un conjunto de puntos en el plano a los que llamaremos **curva** y los denotaremos por Γ .

Definición 6.1.2. Se dice que una curva parametrizada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es **regular** si su vector derivada verifica que $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$.

Definición 6.1.3. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva parametrizada, se denomina **cambio de parámetro** a cualquier aplicación biyectiva y de clase \mathcal{C}^1 , $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$. La curva $\beta := \alpha \circ h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se llama **reparametrización** de α .

Definición 6.1.4. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada. Se define la **longitud** de α entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ como

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

Definición 6.1.5. Se dice que una curva parametrizada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ está **parametrizada por la longitud de arco** si $|\alpha'(t)| = 1 \forall t \in [a, b]$.

Definición 6.1.6. Una curva parametrizada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se dice que es **simple** si no posee autointersecciones y se dice que es **cerrada** si $\alpha(a) = \alpha(b)$ y $\alpha(s) \neq \alpha(t)$ para cualesquiera $s, t \in (a, b)$ distintos.

Lema 6.1.7 (Desigualdad de Wirtinger). Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ una función periódica de periodo 2π y de clase \mathcal{C}^1 que verifica que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$$

entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt$$

Demostración. En primer lugar, por la condición integral que verifica f , observemos que $\widehat{f}(0) = 0$. Considerando entonces la serie de Fourier formal asociada a f y a f' , en virtud de la identidad de Parseval, 2.2.3, tendremos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \neq 0} |\widehat{f}(n)|^2$$

y como consecuencia del lema 2.1.9 tendremos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt = \sum_{n \neq 0} |\widehat{f}'(n)|^2 = \sum_{n \neq 0} n^2 |\widehat{f}(n)|^2$$

Por consiguiente, como

$$\sum_{n \neq 0} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \sum_{n \neq 0} n^2 |\widehat{f}(n)|^2$$

podemos afirmar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt$$

de donde se deduce que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt$$

tal y como queríamos demostrar. \square

Corolario 6.1.8. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función periódica de periodo $b - a$ y de clase C^1 que verifica que

$$\int_a^b f(t) dt = 0$$

entonces

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

Demostración. En primer lugar definimos la biyección

$$\begin{aligned} \gamma : [-\pi, \pi] &\longrightarrow [a, b] \\ s &\longmapsto a + (b-a) \frac{s + \pi}{2\pi} \end{aligned}$$

y observemos que la función g dada por $g(s) = f(\gamma(s))$ es 2π -periódica y verifica las hipótesis del lema 6.1.7 por lo que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(s)|^2 ds \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g'(s)|^2 ds \quad (*)$$

Planteando entonces el cambio de variable $t = \gamma(s)$ observemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(s)|^2 ds = \frac{2\pi}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2 dt$$

Por otro lado veamos que

$$g'(s) = \frac{d}{ds}(f(\gamma(s))) = f'(\gamma(s))\gamma'(s) = f'(t)\frac{b-a}{2\pi}$$

por lo que utilizando el mismo cambio de variable llegamos a que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g'(s)|^2 dt = \frac{2\pi}{b-a} \int_a^b \left| f'(t)\frac{b-a}{2\pi} \right|^2 dt$$

luego en virtud de (*) podemos concluir que

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

tal y como queríamos demostrar. \square

Una vez introducidos todos estos conceptos previos, estamos en condiciones de proceder a la resolución del problema isoperimétrico.

Teorema 6.1.9 (Desigualdad Isoperimétrica). *Sea Γ una curva parametrizada diferenciable, simple y cerrada de longitud l y sea \mathcal{A} el área del recinto \mathcal{C} encerrado por dicha curva. Entonces se tiene que*

$$\mathcal{A} \leq \frac{l^2}{4\pi}$$

Dándose la igualdad sí, y sólo sí Γ es una circunferencia.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que la curva cerrada $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\Gamma(s) = (x(s), y(s))$ es una curva parametrizada por la longitud de arco y orientada positivamente, pues por el teorema D.4 sabemos que toda curva se puede reparametrizar por la longitud de arco. Además, sin pérdida de generalidad, suponemos también que (tras realizar una traslación si fuese necesario) por ser cerrada

$$\int_a^b x(s) ds = \int_a^b y(s) ds = 0$$

Pues bien, en primer lugar, observemos como consecuencia del teorema de Green (teorema D.5) que

$$\mathcal{A} = \left| \iint_{\mathcal{C}} dx dy \right| = \left| \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt \right|$$

Aplicando entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz, A.3, veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left| \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt \right| = \frac{1}{2} \left| \text{Im} \left(\int_a^b (x(t) + iy(t)) \overline{(x'(t) + iy'(t))} dt \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \int_a^b (x(t) + iy(t)) \overline{(x'(t) + iy'(t))} dt \right| = \frac{1}{2} |\langle x + iy, x' + iy' \rangle_{L^2}| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x + iy\|_{L^2} \|x' + iy'\|_{L^2} = \frac{1}{2} \left(\int_a^b x^2(t) + y^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b x'^2(t) + y'^2(t) dt \right)^{1/2} \\ &= \frac{l^{1/2}}{2} \left(\int_a^b (x^2(t) + y^2(t)) dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

o lo que es equivalente

$$\frac{(2\mathcal{A})^2}{l} \leq \int_a^b (x^2(t) + y^2(t))dt$$

Aplicando entonces el corolario de la desigualdad de Wirtinger (6.1.8) tenemos que

$$\frac{(2\mathcal{A})^2}{l} \leq \frac{l^2}{4\pi^2} \int_a^b (x'^2(t) + y'^2(t))dt = \frac{l^3}{4\pi^2}$$

o equivalentemente que

$$\mathcal{A} \leq \frac{l^2}{4\pi}$$

tal y como queríamos demostrar. Nos faltará demostrar a continuación que efectivamente se da la igualdad en el caso en el que Γ sea una circunferencia.

En primer lugar veamos que la igualdad en la desigualdad de Wirtinger, 6.1.7, se dará en el caso en el que solamente sean no nulos $\hat{f}(1)$ y $\hat{f}(-1)$ por lo que la curva ha de ser de la forma

$$\Gamma(t) = x(t) + iy(t) := ae^{it} + be^{-it} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{C}$$

Por otro lado, para que la desigualdad de Cauchy-Schwarz sea una igualdad necesitamos que

$$x(t) + iy(t) = k(x'(t) + iy'(t))$$

Por consiguiente, juntando ambas cosas tendremos que

$$a = iak \quad \text{y} \quad b = -ikb$$

Distinguimos entonces dos opciones:

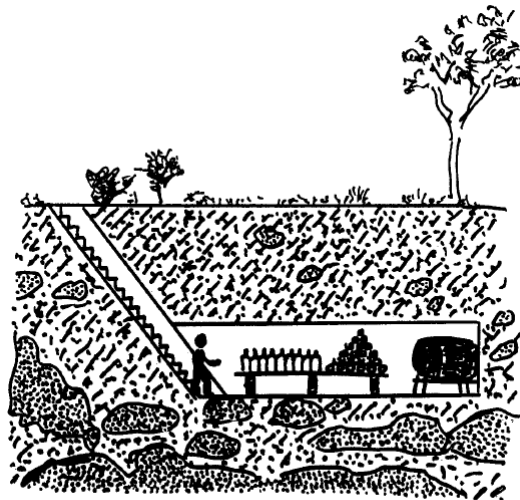
- $a \neq 0 \implies k = \frac{1}{i} \implies b = -b \implies b = 0 \implies \Gamma(t) = ae^{it}$
- $a = 0 \implies \Gamma(t) = be^{-it}$

En ambos casos llegamos a que Γ ha de ser necesariamente una circunferencia. Podemos concluir por tanto que la desigualdad isoperimétrica será una igualdad si, y sólo si, Γ es una circunferencia. □

6.2. La ecuación del calor: El sótano de Fourier

El problema de la difusión del calor atrajo la atención de Fourier así como la otros muchos matemáticos de la época. No era un problema solamente interesante desde un punto de vista teórico, relativo por ejemplo al cálculo de la temperatura en el interior de la tierra, sino también desde un punto de vista práctico, como por ejemplo para el trabajo con metales.

Para ilustrar este problema de manera sencilla vamos a resolver el siguiente problema que es parte del trabajo original de Fourier. Supongamos que queremos construir un sótano, es lógico preguntarse a qué profundidad debemos situarlo para que las variaciones de temperatura en la corteza terrestre afecten lo menos posible.



FOURIER'S CELLAR

Nos planteamos entonces el siguiente problema. En él $u(t, h)$ representa la temperatura a profundidad h en tiempo t y los datos que tenemos proceden del tiempo en el exterior y vendrán dados por

$$u(t, 0) = T_0 + T_e \cos(2\pi t) + T_d \cos(2\pi 365t)$$

donde T_0 representa la temperatura media anual, T_e la variación media de la temperatura al cambio estacional y T_d representa la variación media de la temperatura en un día. El problema que nos planteamos entonces es el siguiente

$$(*) \equiv \begin{cases} u_t(t, h) &= k u_{hh}(t, h) \\ u(t, 0) &= T_0 + T_e \cos(2\pi t) + T_d \cos(2\pi 365t) \end{cases}$$

siendo k la conductividad térmica del medio, una constante que dependerá del suelo en el que nos encontremos.

Buscamos la solución a este problema mediante separación de variables, es decir, buscamos una solución de la forma

$$u(t, h) = A(t)B(h)$$

Supongamos primero que el dato de frontera es $u(t, 0) = e^{it\omega}$, es decir, que $A(t)B(0) = e^{it\omega}$. Tendremos entonces que

$$A'(t)B(h) = kA(t)B''(h)$$

o equivalentemente que

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = k \frac{B''(h)}{B(h)} = cte$$

Deducimos entonces que

$$A(t) = A_0 e^{cte t}$$

pero como $A(t) = \frac{e^{it\omega}}{B(0)}$ necesariamente $cte = i\omega$ por lo que

$$A(t) = A_0 e^{i\omega t}$$

y

$$k \frac{B''(h)}{B(h)} = i\omega$$

de donde se deduce que

$$B(h) = \alpha e^{\sqrt{\frac{i\omega}{k}}h} + \beta e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{k}}h} = (**)$$

Es más, aprovechando que $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ llegamos a que

$$(**) = \alpha e^{(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}h} + \beta e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}h}$$

A continuación, como se tiene que $|\alpha e^{(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}h}| \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \infty$ descartamos esta parte de la solución y concluimos que para cualquier ω la solución de este problema será de la forma

$$u(t, h) = \alpha_\omega e^{i\omega t} e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}h} = \alpha_\omega e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}h} e^{i(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2k}}h)}$$

Además, como $u(t, 0) = e^{i\omega t}$ deducimos que $\alpha_\omega = 1$. Tomando entonces partes reales obtenemos que

$$u(t, h) = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}h} \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2k}}h)$$

es solución de

$$\begin{cases} u_t(t, h) &= k u_{hh}(t, h) \\ u(t, 0) &= \cos(t\omega) \end{cases}$$

Finalmente, procediendo de manera análoga y utilizando la linealidad de las Ecuaciones Diferenciales y el dato de frontera adecuado obtenemos que la solución de (*) debe ser

$$u(t, h) = T_0 + T_e \cos\left(2\pi t - \sqrt{\frac{\pi}{k}}h\right) e^{-\sqrt{\frac{\pi}{k}}h} + T_d \cos\left(2\pi t 365 - \sqrt{\frac{365\pi}{k}}h\right) e^{-\sqrt{\frac{365\pi}{k}}h}$$

Veamos algunos ejemplos en los que aplicamos este desarrollo. Supongamos que queremos calcular la profundidad h_0 a la que las fluctuaciones diarias de la temperatura dejan de notarse. Si escogemos h_0 tal que

$$e^{-\sqrt{\frac{365\pi}{k}}h_0} = 0,01$$

las fluctuaciones diarias de temperatura solamente se notarán a esa profundidad en un 1%. Obviamente esto dependerá de k que a su vez depende del medio. Supongamos por ejemplo que $k = 5,67648$ que es la constante de conductividad térmica en m^2 por año para un suelo de tipo arenoso. Tendremos entonces que

$$h_0 = -\log(0,01) \sqrt{\frac{5,67648}{365\pi}} = 0,32 \text{ m}$$

Es decir, que las variaciones diarias de temperatura en un suelo arenoso dejarán de notarse a 32 cm. Trabajando de manera totalmente análoga con diferentes constantes de conductividad térmica para diferentes superficies obtenemos los siguientes resultados

	Suelo arenoso	Suelo arcilloso	Roca	Nieve perpetua
$k(m^2 \text{ por año})$	5,67648	3,15	45,09648	1,5765
h_0	0,32 m	0,23 m	0,92 m	0,18 m

Por otro lado, trabajando de manera totalmente análoga con el otro término veamos que las fluctuaciones anuales en la temperatura dejan de notarse a las siguientes profundidades

	Suelo arenoso	Suelo arcilloso	Roca	Nieve perpetua
$k(m^2 \text{ por segundo})$	5,67648	3,15	45,09648	1,5765
h_0	6,348 m	4,6 m	17,434 m	3,26 m

Supongamos ahora que queremos encontrar la profundidad a la que debemos construir un sótano para que se produzca un desfase estacional con respecto a la temperatura en la superficie. Es decir, buscamos cuál es la profundidad adecuada para que en el momento en el que la temperatura sea mayor en la superficie en el sótano sea menor y viceversa. Necesitaremos entonces h_1 tal que

$$\sqrt{\frac{\pi}{k}} h_1 = \pi$$

pues el término de la variación de temperatura diaria prácticamente no tiene influencia cuando descendamos. Además, en este caso la variación estacional de la temperatura solamente afectará en un 4%. Pues bien, tendremos que

$$h_1 = \sqrt{k\pi}$$

Pongamos que el suelo es arcilloso y las temperaturas “mediterráneas”. Por ejemplo:

- $T_0 = 20$ grados
- $T_e = 12$ grados
- $T_d = 5$ grados

En verano, $t = 0$, la temperatura máxima en la superficie, $h = 0$, es

$$u(0, 0) = T_0 + T_e + T_d = 37 \text{ grados}$$

mientras en el sótano, $h = h_1 = \sqrt{k\pi} = 3,146 \text{ m}$, la temperatura es

$$u(0, h_1) = T_0 - T_e e^{-\pi} + \cos\left(-\sqrt{\frac{365\pi}{3,15}} h_1\right) e^{-h_1 \sqrt{\frac{365\pi}{3,15}}} \approx 19,48 \text{ grados}$$

Por tanto, el sótano está más fresco que el exterior (de hecho, casi medio grado más fresco que la temperatura media anual $T_0 = 20$).

En invierno, 6 meses después ($t = 1/2$) tendremos en la superficie una temperatura mínima de

$$u(1/2, 0) = T_0 - T_e - T_d = 3 \text{ grados}$$

Sin embargo, en el sótano, la temperatura será

$$u(1/2, h_1) = T_0 + T_e e^{-\pi} + \cos\left(365\pi - \sqrt{\frac{365\pi}{3,15}} h_1\right) e^{-h_1 \sqrt{\frac{365\pi}{3,15}}} \approx 20,52 \text{ grados.}$$

Por tanto, en el sótano se está más cálido (de hecho, medio grado por encima de la media anual).

Nota. Los datos para las constantes de conductividad térmica han sido obtenidos de [12].

Apéndice A

Espacios de Hilbert

En este capítulo no demostraremos ninguno de los resultados que enunciamos pues se considera que son resultados conocidos pues se han estudiado con anterioridad. Concretamente en la asignatura de **Análisis Funcional** correspondiente al cuarto curso del Grado en Matemáticas. La información sobre Espacios de Hilbert ha sido extraída de [1].

Definición A.1. Sea H un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Un **producto escalar sobre H** es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ que verifica:

- i) $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in H \text{ y } \forall a, b \in \mathbb{K}$
- ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- iii) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H \text{ y } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Definición A.2. Se llama **espacio prehilbertiano** a un espacio vectorial H dotado de un producto escalar. Lo denotaremos por $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ o simplemente por H .

Teorema A.3. Si H es un espacio prehilbertiano entonces:

- i) $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \forall x, y \in H$ [Desigualdad de Cauchy-Schwarz]
- ii) La función $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ define una norma en H .

Definición A.4. Sea H un espacio prehilbertiano, decimos que H es un **espacio de Hilbert** si $(H, \|\cdot\|)$ es un espacio completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy en H es convergente en H .

Definición A.5. Sea H un espacio prehilbertiano:

- i) Dos vectores $x, y \in H$ se dice que son **ortogonales** si $\langle x, y \rangle = 0$.
- ii) Una **familia** de vectores $\{x_i\}_{i \in I}$ se dice que es **ortogonal** si $x_i \perp x_j$ para todo $i \neq j$. Diremos que es una **familia ortonormal** si es una familia ortogonal y además $\|x_i\| = 1 \quad \forall i \in I$.

Proposición A.6. Sea H un espacio prehilbertiano:

- i) Sean $x, y \in H$, si $x \perp y$ entonces $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ [Regla de Pitágoras]
- ii) Si $\{x_i\}_{i \in I}$ es una familia ortonormal y $x_i \neq 0 \quad \forall i \in I$ entonces $\{x_i\}_{i \in I}$ es un conjunto linealmente independiente.

Proposición A.7 (Desigualdad de Bessel). Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio prehilbertiano y sea $(e_n)_{n=1}^\infty$ un conjunto ortonormal en H . Para cada $x \in H$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^m |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

y por consiguiente se verifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Definición A.8. Sea H un espacio de Hilbert. Un subconjunto S de H se dice que es **total** si $\overline{\text{span}S} = H$

Teorema A.9. Sea H un espacio de Hilbert y sea $(e_n)_{n=1}^\infty$ un conjunto ortonormal en H . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) $(e_n)_{n=1}^\infty$ es un conjunto ortonormal maximal.
- ii) $(e_n)_{n=1}^\infty$ es total.
- iii) Si $x \in H$ verifica que $\langle x, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$.
- iv) Para cada $x \in H$ se tiene que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad [\text{Desarrollo de Fourier}]$$

- v) Para cada $x, y \in H$ se tiene que

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$$

- vi) Para cada $x \in H$ se tiene que

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \quad [\text{Identidad de Parseval}]$$

Definición A.10. Sea H un espacio de Hilbert. Un conjunto ortonormal $(e_n)_{n=1}^\infty$ se dice que es una **base ortonormal** ó **base de Hilbert** si verifica cualquiera de las condiciones equivalentes del teorema anterior.

Aunque no coincide en su totalidad con el contenido que hemos desarrollado en este capítulo enunciamos aquí el siguiente importante resultado de análisis funcional.

Teorema A.11 (Banach-Steinhaus). Sea $(S_N)_N$ una sucesión de aplicaciones lineales y continuas de un espacio de Banach X en \mathbb{C} tal que para todo $x \in X$ verifica que $\sup_N |S_N(x)| < \infty$. Existe entonces una constante C tal que

$$\sup_N \|S_N\| \leq C$$

Apéndice B

Un teorema de valor medio para Integrales

Introducimos primero el concepto de **Integral de Riemann-Stieltjes**, que nos será necesaria en la demostración de un resultado que se conoce como *segundo teorema del valor medio para integrales*, el cuál enunciamos y demostramos en este apéndice.

Definición B.1. Sea α una función monótona creciente en $[a, b]$, es decir, si $x < y \implies \alpha(x) \leq \alpha(y)$. Correspondiéndose a cada partición \mathcal{P} , $a = x_0 < \dots < x_n = b$, del intervalo $[a, b]$ escribimos

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geq 0$$

A continuación, para cualquier función f acotada en $[a, b]$ definimos

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \alpha_i$$
$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$$

donde

$$M_i = \sup f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$
$$m_i = \inf f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$

Consideramos entonces

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \inf_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha)$$
$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha)$$

para cada una de las particiones \mathcal{P} . Si ambos valores coinciden entonces decimos que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ y denotaremos a dicha integral como

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

que es lo que se conoce como **Integral de Riemann-Stieltjes** de f con respecto a α en el intervalo $[a, b]$. Cuando una función f sea integrable en este sentido escribiremos $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Teorema B.2 (Regla de integración por partes). Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x)$$

Para más información, consúltese [15] capítulo 6.

Teorema B.3 (Segundo teorema del valor medio para integrales). Sean $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que ϕ es monótona creciente en $[a, b]$ y que ψ es continua en $[a, b]$. Existe entonces una constante $\eta \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)dx = \phi(a^+) \int_a^\eta \psi(x)dx + \phi(b^-) \int_\eta^b \psi(x)dx$$

Demostración. En primer lugar observemos que si en la expresión

$$\int_a^b \tilde{\phi}(x)\psi(x)dx = \tilde{\phi}(b^-) \int_\eta^b \psi(x)dx$$

reemplazamos $\tilde{\phi}$ por $\phi - \phi(a^+)$ entonces obtenemos que

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)dx - \phi(a^+) \int_a^b \psi(x)dx = \phi(b^-) \int_\eta^b \psi(x)dx - \phi(a^+) \int_\eta^b \psi(x)dx$$

de donde despejando se obtiene

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)dx = \phi(a^+) \int_a^\eta \psi(x)dx + \phi(b^-) \int_\eta^b \psi(x)dx$$

que es lo que queremos demostrar. Por consiguiente, nos limitaremos a demostrar que

$$\int_a^b \tilde{\phi}(x)\psi(x)dx = \tilde{\phi}(b^-) \int_\eta^b \psi(x)dx$$

Es decir, vamos a suponer que $\phi(a^+) = 0$. Consideramos

$$\Psi(x) = \int_x^b \psi(t)dt$$

y observemos que Ψ es derivable y se verifica que $\Psi'(x) = -\psi(x)$. Aplicando entonces integración por partes para la integral de Riemann-Stieltjes obtenemos que

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)dx = [-\phi(x)\Psi(x)]_a^b + \int_a^b \Psi(x)d\phi(x) = \int_a^b \Psi(x)d\phi(x)$$

puesto que $\phi(a^+) = \Psi(b) = 0$. Consideramos entonces m y M el mínimo y el máximo respectivamente que toma Ψ en $[a, b]$ y tendremos que

$$m\phi(b^-) \leq \int_a^b \Psi(x)d\phi(x) \leq M\phi(b^-)$$

Aplicando entonces el teorema del valor medio para la función continua Ψ podemos asegurar que existe $\eta \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b \Psi(x)d\phi(x) = \phi(b^-)\Psi(\eta)$$

de donde se sigue que

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)dx = \int_a^b \Psi(x)d\phi(x) = \Psi(\eta)\phi(b^-) = \phi(b^-) \int_\eta^b \psi(x)dx$$

tal y como queríamos demostrar. □

Apéndice C

Teorema de interpolación de Riesz-Thorin

Lema C.1 (Lema de las tres líneas). Sea $F : S \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y acotada donde $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re z \leq 1\}$. Supongamos que F es holomorfa en $\text{Int}(S)$. Para $0 \leq \theta \leq 1$ consideramos

$$M_\theta := \sup_{y \in \mathbb{R}} |F(\theta + iy)|$$

se verifica entonces que

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

Demostración. Para la demostración del teorema vamos a distinguir dos casos. En un primer caso consideraremos $M_0, M_1 \leq 1$ y en un segundo caso consideraremos M_0, M_1 arbitrarias.

Caso 1. En primer lugar, como ya hemos dicho, consideramos $M_0, M_1 \leq 1$ y vamos a probar que $|F(z_0)| \leq 1$ para todo $z_0 = x_0 + iy_0 \in \text{Int}(S)$ y sea $\epsilon > 0$. Definimos

$$F_\epsilon(z) := \frac{F(z)}{1 + \epsilon z}$$

Observemos que esta función es también continua y acotada en S y holomorfa en $\text{Int}(S)$. Además, observemos que

$$|F_\epsilon(x + iy)| \xrightarrow{|y| \rightarrow \infty} 0$$

uniformemente para todo $x \in [0, 1]$ ya que

$$|F_\epsilon(x + iy)| \leq \frac{|F(x + iy)|}{\epsilon|y| - 1}$$

y F es acotada.

Consideramos ahora $r > |y_0|$ de manera que $|F_\epsilon(x + iy)| \leq 1 \forall x \in [0, 1]$ y todo y con $|y| = r$. Sea entonces R el rectángulo compacto $[0, 1] \times i[-r, r]$, como $|F_\epsilon(z)| \leq 1$ para todo $z \in \partial R$, aplicando el principio del máximo para funciones holomorfas podemos afirmar que $|F_\epsilon(z)| \leq 1 \forall z \in R$. En particular, $|F_\epsilon(z_0)| \leq 1$ y por tanto

$$|F(z_0)| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |F_\epsilon(z_0)| \leq 1$$

lo que concluye con el primer caso.

Caso 2. Consideramos ahora M_0, M_1 arbitrarios y tomamos

$$G(z) := \frac{F(z)}{\alpha^{1-z}\beta^z}$$

donde $\alpha := M_0 + \epsilon$ y $\beta := M_1 + \epsilon$. Observemos que de nuevo G es continua, acotada y holomorfa en $\text{Int}(S)$. Además, por la definición dada de α y β tenemos que en ∂S

$$|F(z)| < \alpha \quad \text{si} \quad \Re z = 0$$

y

$$|F(z)| < \beta \quad \text{si} \quad \Re z = 1$$

luego en ∂S tenemos que

$$|G(z)| < 1$$

Aplicando entonces el caso anterior tenemos que $M_\theta \leq \alpha^{1-\theta}\beta^\theta$ de donde se deduce que

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta}M_1^\theta$$

tal y como queríamos demostrar. □

Teorema C.2 (Riesz-Thorin). Sean $1 < p_0, p_1 < \infty$ y $0 < \theta < 1$. Consideramos p y tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

Si T es una aplicación lineal tal que

$$T : L^{p_0} \longrightarrow L^{p_0} \quad \text{con} \quad \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{p_0}} = N_0$$

y

$$T : L^{p_1} \longrightarrow L^{p_1} \quad \text{con} \quad \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{p_1}} = N_1$$

Entonces se tiene que

$$\|Tf\|_p \leq N_0^{1-\theta}N_1^\theta\|f\|_p$$

para cualquier $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$. En particular, el operador T se puede extender a una aplicación lineal y continua $T : L^p \rightarrow L^p$ con

$$\|T\| \leq N_0^{1-\theta}N_1^\theta$$

Demostración. En primer lugar, aprovechando que el conjunto de las funciones simples, \mathcal{D} , es denso en todos los espacios L^p , observemos que será suficiente con demostrar el resultado para funciones simples. Tomamos p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y sean

$$f = \sum_{j=1}^J a_j \mathbb{1}_{A_j} \quad \text{y} \quad g = \sum_{k=1}^K b_k \mathbb{1}_{B_k}$$

funciones tales que

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p d\mu = \sum_{j=1}^J |a_j|^p \mu(A_j) = 1$$

y

$$\|g\|_{p'}^{p'} = \int |g|^{p'} d\mu = \sum_{k=1}^K |b_k|^{p'} \mu(B_k) = 1$$

donde μ es la medida de Lebesgue y A_j y B_k son disjuntos dos a dos. Tendremos que ver que

$$\|Tf\|_p \leq C_p \|f\| \quad \forall f \in \mathcal{D}$$

lo que mediante densidad nos permitirá demostrar que

$$\|Tf\|_p \leq C'_p \|f\| \quad \forall f \in L^p$$

Puesto que $\|Tf\|_p = \sup\{\langle Tf, g \rangle : g \in \mathcal{D}, \|g\|_{L^{p'}}\}$, en realidad lo que hemos de demostrar es que para cualesquiera funciones $f, g \in \mathcal{D}$ con $\|f\|_p = 1$ y $\|g\|_{p'} = 1$ se tiene que

$$\left| \int (Tf)g d\mu \right| \leq C_p$$

Para cada $z \in \mathbb{C}$ tomamos $p(z)$ definido como

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

y observemos que $p(0) = p_0$, $p(\theta) = p$ y $p(1) = p_1$. A continuación, consideramos

$$f_z := |f|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{f}{|f|} \quad \text{y} \quad g_z := |g|^{\frac{p'}{p'(z)}} \frac{g}{|g|}$$

y veamos que ambas son funciones simples e integrables. Observemos que $f_z \in L^{p_1}$ lo cual implica que $T f_z$ está bien definida. Finalmente, tomamos $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \int (Tf_z)g_z d\mu$$

y veamos que

$$\begin{aligned} F(z) &= \int (Tf_z)g_z d\mu = \int T \left(\sum_{j=1}^J |a_j|^{p/p(z)} \frac{a_j}{|a_j|} \mathbf{1}_{A_j} \right) \left(\sum_{k=1}^K |b_k|^{p'/p'(z)} \frac{b_k}{|b_k|} \mathbf{1}_{B_k} \right) d\mu \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K |a_j|^{p/p(z)} |b_k|^{p'/p'(z)} \frac{a_j b_k}{|a_j| |b_k|} \int T(\mathbf{1}_{A_j}) \mathbf{1}_{B_k} d\mu \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K |a_j|^{p/p(z)} |b_k|^{p'/p'(z)} \frac{a_j b_k}{|a_j| |b_k|} \int_{B_k} T(\mathbf{1}_{A_j}) d\mu \end{aligned}$$

por lo que podemos afirmar que F holomorfa en $\text{Int}(S)$, continua en S y acotada. A continuación, tomamos $z = iy$ y veamos que

$$\begin{aligned} |F(z)| &= \left| \int T f_{iy} g_{iy} d\mu \right| \leq \|T f_{iy}\|_{p_0} \|g_{iy}\|_{p'_0} \\ &\leq N_0 \|f_{iy}\|_{p_0} \|g_{iy}\|_{p'_0} = N_0 \|g_{iy}\|_{p'_0} = (*) \end{aligned}$$

ya que

$$|f_{iy}|^{p_0} = |f|^{\Re(p/p(iy))p_0} = |f|^p$$

y por consiguiente

$$\|f_{iy}\|_{p_0}^{p_0} = \int |f_{iy}^{p_0}| d\mu = \int |f|^p d\mu = 1$$

De igual forma se obtiene que

$$\|g_{iy}\|_{p'_0}^{p'_0} = 1$$

luego

$$(*) \leq N_0$$

Consideramos ahora $z = 1 + iy$ y veamos que

$$\begin{aligned} |F(z)| &= \left| \int T f_{1+iy} g_{1+iy} d\mu \right| \leq \|T f_{1+iy}\|_{p_1} \|g_{1+iy}\|_{p'_1} \\ &\leq N_1 \|f_{1+iy}\|_{p_1} \|g_{1+iy}\|_{p'_1} = N_1 \end{aligned}$$

ya que, en general, $|a^z| = a^{\Re z}$. Aplicando entonces el lema de la 3 lineas, lema anterior, tenemos que

$$|F(z)| \leq N_0^{1-\Re z} N_1^{\Re z}$$

Finalmente, si tomamos $z = \theta$ tenemos que

$$f_\theta = |f|^{p/p(\theta)} \frac{f}{|f|} = |f| \frac{f}{|f|} = f$$

y

$$g_\theta = g$$

por lo que como

$$F(\theta) = \int T f_\theta g_\theta d\mu = \int T f g d\mu$$

podemos concluir que

$$\left| \int T f g d\mu \right| \leq N_0^{1-\theta} N_1^\theta = C_p$$

tal y como queríamos demostrar. □

Apéndice D

Resultados Auxiliares

Comenzaremos enunciando algunos resultados clásicos del análisis que hemos utilizado en la memoria. Al igual que en el apéndice anterior, no realizaremos ninguna demostración pues son resultados vistos en el Grado que no pertenecen estrictamente al desarrollo de nuestro trabajo.

Teorema D.1 (Teorema de la Convergencia Dominada). *Sea $F \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones tales que $|f_n(t)| \leq F(t) \forall t$ y existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ para casi todo punto t . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$$

Para más información consúltese [6].

Aunque no desarrollamos la teoría de residuos y sólo enunciamos el teorema que vamos a utilizar, asumimos que el lector tiene conocimiento sobre Análisis Complejo y simplemente citamos el resultado que utilizamos.

Teorema D.2 (Teorema de Cauchy). *Sean Γ y Δ ciclos regulares a trozos, Ω -homólogos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces se verifica que*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Delta} f(z) dz$$

para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. En particular, si Γ es Ω -homólogo a 0 se cumple que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Para más información consúltese [5] capítulo 5.

Con respecto al problema de la desigualdad isoperimétrica, estudiado en el capítulo 4, necesitamos una serie de resultados que enunciamos a continuación.

Proposición D.3. *La longitud de una curva parametrizada es independiente de su parametrización*

Teorema D.4. *Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.*

Para más información consúltese [11] capítulo 1.

Teorema D.5 (Teorema de Green). *Sea \mathcal{C} una curva cerrada simple, positivamente orientada y diferenciable a trozos que da frontera a la región \mathcal{A} . Si P y Q son funciones reales de clase C^1 en un conjunto abierto que contiene a \mathcal{A} entonces*

$$\iint_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{\mathcal{C}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Para más información sobre este teorema consúltese [9] página 208.

Nota. Bajo las hipótesis del teorema de Green sabemos que el área encerrada por la curva \mathcal{C} se calcula como

$$\iint_{\mathcal{A}} dx dy$$

Pues bien, en virtud de dicho teorema, si la región \mathcal{A} viene delimitada por una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, tendremos que el área de \mathcal{A} viene dada por

$$\frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt$$

En efecto, basta con aplicar el teorema de Green con $P(x, y) = -y$ y $Q(x, y) = x$. Esta fórmula que hemos obtenido nos será muy útil en la demostración de la desigualdad isoperimétrica.

Bibliografía

- [1] B. Cascales, J. M. Mira, J. Orihuela y Matías Raja, *Análisis Funcional*, Ediciones Electolibris S.L., 2012
- [2] Bernardo Cascales, *Series de Fourier (y EDP)*, RECURSO WEB: <http://webs.um.es/beca/Docencia/1314.fourier/NotasDeClase.pdf>, 2014. Consultado Marzo 2015
- [3] Elena Prestini, *The evolution of Applied Harmonic Analysis: Models of the Real World*, Birkhauser, 2004
- [4] Elias M. Stein y Rami Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, 2002
- [5] Gabriel Vera Botí, *Variable Compleja. Problemas y Complementos*, Ediciones Electolibris S.L. , 2013
- [6] Gerald B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, 1999
- [7] Javier Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Addison-Wesley, 1995
- [8] Javier Duoandikoetxea, *200 años de convergencia de las series de Fourier*, La gaceta de la RSME vol 10.3 (2007) páginas 651-688
- [9] J. Antonio Facenda Aguirre y F. José Freniche Ibáñez, *Integración de Funciones de Varias Variables*, Ediciones Pirámide (Grupo Anaya), 2002
- [10] Juan Arias de Reyna *Pointwise Convergence of Fourier Series*, Springer, 2002
- [11] M^a Ángeles Hernández Cifre y J. Antonio Pastor, *Un curso de Geometría Diferencial*, Editorial CSIC - CSIC Press, 2010
- [12] Matt Siegfried y Rachel Marcuson *The Wine Cellar Problem*, RECURSO WEB: http://topex.ucsd.edu/geodynamics/HW3_2010-presentations/C_wine_cellar.pdf. Consultado Abril 2015
- [13] Nathalie Tassotti y Arno Mayrhofer *Interpolation of operators on L^p Spaces*, RECURSO WEB: <http://alko.mat.univie.ac.at/stein/teaching/SoSem08/Interpolation.pdf>, 2008. Consultado Abril 2015
- [14] T.W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988
- [15] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis, Third Edition*, McGraw-Hill, 1976
- [16] Yitzhak Katznelson, *An Introduction To Harmonic Analysis, Third Edition*, Cambridge University Press, 2004

Índice alfabético

- Coeficiente de Fourier, 1
- Contraejemplo de Du Bois Reymond, I, 41
- Contraejemplo de Kolmogorov, 46
- Contraejemplo de Du Bois Reymond, II, 42
- Convolución, 6
- Criterio de Dini, I, 27
- Criterio de Dini, II, 31
- Criterio de Dirichlet-Jordan, 32
- Curva, 56
- Curva Cerrada, 56
- Curva parametrizada, 56
- Curva regular, 56
- Curva Simple, 56

- Desigualdad de Wirtinger, 56
- Desigualdad Isoperimétrica, 58

- El sótano de Fourier, 59

- Hölder-continuidad, 29

- Identidad de Parseval, 20
- Integral de Riemann-Stieltjes, 65

- Lema de las tres líneas, 67
- Lema de Riemann-Lebesgue, 17
- Longitud de curva, 56

- Media de Césaró, 15
- Media de Césaró de una Serie de Fourier, 15

- Núcleo de Dirichlet, 4, 22
- Núcleo de Féjer, 12
- Núcleo de la Vallée-Poussin, 53
- Núcleo de Sumabilidad, 8

- Reparametrización, 56

- Segundo TVM para integrales, 66
- Serie de Fourier, 1
- Suma de Césaró, 15
- Suma parcial de una serie de Fourier, 1

- Teorema de Cauchy, 71
- Teorema de Green, 72
- Teorema de Kronecker, 48
- Teorema de la Convergencia Dominada, 71
- Teorema de Marcel Riesz, 35
- Teorema de Riesz-Thorin, 68
- Teorema de unicidad I, 17
- Teorema de unicidad II, 17
- Teorema de Weierstrass, 16

- Variación acotada, 33