Universidad de Murcia
Facultad de Matemáticas

Trabajo Fin de Grado

Espacios $C(K)$ como Álgebras de Banach

Antonia Fernández Martínez

Dirigido por Matías Raja Baño

Junio 2017

Espacios $C(K)$ como Álgebras de Banach

Memoria presentada por Antonia Fernández Martínez como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Murcia.

Dirigido por Matías Raja Baño.

Índice general

Declaración de originalidad

Antonia Fernández Martínez, autora del TFG "Espacios $C(K)$ como álgebras de Banach", bajo la tutela del profesor Matías Raja Baño, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 13 de junio de 2017.

Fdo.: Antonia Fernández Martínez.[1]

[1] Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

"Las matemáticas sirven para todo en la vida, ya que te enseñan a razonar, a resolver problemas. Pero sobre todo me han dado disciplina para mí misma, una disciplina que no es para nada opresiva si no que me facilita ser libre."

-Barbara Hendricks

Resumen

El contenido de este trabajo se puede enmarcar en el Grado en Matemáticas dentro de la asignatura de "Análisis Funcional" principalmente, usando de manera muy potente herramientas de Álgebra y Topología. La finalidad de esta memoria está centrada en la caracterización y estudio de las propiedades topológicas de un espacio compacto y Hausdorff K a partir de las propiedades, tanto algebraicas como topológicas, de su correspondiente espacio de funciones continuas, definidas en dicho conjunto. Tal conjunto se denotará usualmente como $C(K)$ cuando consideramos funciones reales o, como $C(K, \mathbb{C})$, cuando nos refiramos a funciones con valores complejos. Dentro del álgebra topológica destaca el estudio de tales espacios de funciones, por lo que se dedicará un capítulo completo a tratar sus propiedades y la estructura algebraica que adquirirán bajo ciertas condiciones. Dichas estructuras algebraicas de los espacios $C(K)$, inducidas por las topologías de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, han dado lugar a múltiples resultados de gran importancia en matemáticas como puede ser el Teorema de Stone-Weierstrass.

Puesto que en nuestro caso consideraremos el espacio topológico K como un espacio compacto, la estructura de $C(K)$ se hará mucho más rica, pudiendo ser considerado como un álgebra de Banach tomando la topología de la convergencia uniforme. Obtendremos, por tanto, diversas relaciones topológicas entre dos espacios K y H compactos Hausdorff a partir de relaciones algebraico-topológicas entre sus respectivos espacios de funciones continuas denotados respectivamente por $C(K)$ y $C(H)$. Uno de los teoremas más importantes en relación a esta temática es el resultado obtenido en 1932 por Banach, que afirma lo siguiente:

Teorema de Banach: *Sean K y H dos espacios métricos compactos, si sus espacios $C(K)$ y $C(H)$ son linealmente isométricos, entonces K y H serán homeomorfos.*

Unos años después, más concretamente en 1937, Stone generalizó dicho Teorema para espacios K y H arbitrarios, quedando así lo que hoy día conocemos como el Teorema de Banach-Stone. Se consideraron debilitaciones en las hipótesis que relacionaban de manera isométrica a los espacios $C(K)$ y $C(H)$, pero eso alejaba el homeomorfismo entre K y H cómo podemos ver en el ejemplo mostrado en el Capítulo 4. Si consideramos una relación más débil que la isometría, como puede ser la existencia de una biyección lineal ϕ tal que $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < 2$, entonces K y H serán homeomorfos. Por el contrario, si $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| = 2$ el homeomorfismo falla.

A lo largo de la memoria veremos además, otras caracterizaciones de los espacios $C(K)$ distinguiendo entre K numerable o no numerable, en el caso de que K sea metrizable y consideraremos el espacio de funciones continuas tanto reales como complejas. Resultados de gran importancia en este sentido serán los resultados de Bessaga, Pełczyński [7] y en especial el Teorema de Milutin para el caso no numerable que se puede consutar en [2]. La distinción de los espacios $C(K)$ tomando tanto el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ como $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ será abordada desde varios enfoques, teniendo mayor peso en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ el punto de vista algebraico, debido a una problemática que se comentará en breve. Será necesario introducir un nuevo concepto, denominado C^*, que resultará vital para el Teorema principal de Representación de Álgebras. Dicho Teorema, será el Teorema de Representación de Gelfand-Naimark.

Habiendo cubierto la temática principal, se mostrará a continuación una breve descripción de lo que se tratará en cada uno de los capítulos de la memoria y los principales resultados expuestos en los mismos, quedando así de manera más clara y concisa el esquema general de este Trabajo Final de Grado. El trabajo está estructurado en cuatro capítulos. Los primeros capítulos cubrirán los diferentes aspectos de las distintas ramas de las Matemáticas que confluyen en el estudio de las álgebras de Banach, mostrando en el último capítulo una generalización del Teorema de Banach-Stone.

Debido a la gran importancia que adquiere la Topología en este trabajo, dedicaremos un primer capítulo a la exposición de los conceptos que necesitaremos manejar a lo largo de la memoria. Por tanto, en el **Capítulo 1** trataremos con nociones básicas como las definiciones de espacios compactos, Hausdorff, completamente regulares, normales, etc., y obtendremos resultados que serán de gran utilidad en el estudio de los espacios de funciones continuas. Dichos resultados serán el Lema de Urysohn, el

Teorema de Extensión de Tietze y las respectivas equivalencias entre los espacios que verifican dichas propiedades y los espacios normales. Gracias a estas consecuencias de los espacios compactos Hausdorff, podremos contar con la existencia de "multitud" de funciones continuas que toman valores sobre nuestro conjunto K. También se presentarán en este capítulo dos compactos típicos, el conjunto de Cantor, definido como el conjunto $2^{\mathbb{N}}$ dotado por la topología producto y el cubo de Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$. La trascendencia de dichos espacios viene dada por su universalidad. Se demostrará que todo compacto métrico es homeomorfo a un subconjunto cerrado del cubo de Hilbert y es al mismo tiempo, imagen continua del conjunto de Cantor.

En el **Capítulo 2** *Espacios de Funciones Continuas*, como ya se puede deducir por el título, realizaremos un estudio analítico de los espacios de funciones continuas sobre un espacio K compacto. Nuestros espacios $C(K)$, tendrán estructura de espacio vectorial con las operaciones usuales de suma punto a punto y producto por escalares y lo dotaremos de estructura de espacio normado con la norma uniforme usual $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$. Se comienza el capítulo nombrando algunas de sus propiedades algebraicas tales como su estructura de álgebra conmutativa y su dimensión como espacio vectorial en función del cardinal de K. Gracias a la acotación de funciones continuas sobre compactos, podremos considerar la métrica uniforme obteniendo así, gracias al hecho de que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua, que $(C(K), d_\infty)$ es un espacio métrico completo y por tanto el espacio normado $C(K)$ será un álgebra de Banach.

Consideraremos un orden parcial inducido por el orden de $\mathbb{R}$, convirtiéndose así $C(K)$ en lo que denotaremos como *retículo*. Dicho orden se ve reflejado en un resultado muy importante en el estudio de la convergencia de sucesiones de funciones continuas conocido como el Teorema de Dini. Este nuevo concepto será de utilidad en la obtención del Teorema de Stone-Weierstrass del siguiente apartado. Partiremos de las ideas del Teorema de Aproximación de Weierstrass, reemplazando en $C[a,b]$ el intervalo cerrado $[a,b]$ por el espacio compacto Hausdorff K. Los *retículos* resultarán ser los conjuntos densos de $C(K)$ bajo ciertas condiciones. En la sección 2.4., daremos una caracterización de la metrizabilidad de K, demostrando que es equivalente al hecho de que $C(K)$ sea separable y a que K se inserta en el cubo de Hilbert, $K \hookrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}$. Continuaremos con la clasificación lineal de los espacios $C(K)$ de manera isométrica e isomorfa. Destacarán en cada clasificación, los Teoremas de Banach-Stone y Milutin respectivamente. El estudio en el caso de K numerable se hace mucho más complejo, siendo necesaria la construcción de un índice ordinal conocido como el índice de

Cantor-Bendixson. Se dará como curiosidad un resultado con el objetivo de caracterizar tales espacios en el caso de que tengan índice de Cantor-Bendixon finito.

En el **Capítulo 3** nos centraremos en la estructura algebraica de los espacios $C(K)$. Se comenzará el capítulo dando las definiciones básicas de los conceptos de álgebra de Banach, ideales, elementos regulares y singulares, etc. Definiremos el concepto de *-álgebra e introduciremos la operación de involución que serán necesarios para enunciar el Teorema de Representación de Gelfand-Naimark para C^*-álgebras conmutativas . Comenzaremos el estudio sobre $C(K, \mathbb{C})$, a través del espectro complejo, la función de Gelfand y los funcionales multiplicativos. Conseguiremos identificar cualquier álgebra compleja de Banach y conmutativa $\mathcal{A}$ con el álgebra $C(\mathcal{M})$ (donde $\mathcal{M}$ es el conjunto de sus ideales maximales) que estará a su vez en biyección con el conjunto de todos los funcionales multiplicativos. Puesto que por el Teorema 3.5 resultará ser un espacio compacto Hausdorff, obtendremos que cada álgebra de Banach conmutativa es isomorfa a un álgebra de funciones complejas continuas en un cierto espacio compacto Hausdorff. Sobre $\mathbb{R}$, no resultará tan fácil puesto que la obtención de funcionales multiplicativos será ahora más complicada, por lo que la caracterización se hará desde dos vías distintas:

1. Caracterización algebraica a través del espacio de estados. Definiremos el espacio de estados $\mathcal{S} = \{\phi \in \mathcal{A}^* : \|\phi\| = \phi(e) = 1\}$. De este conjunto obtendremos nuestros funcionales multiplicativos, pudiendo así caracterizar a $C(K)$ a través del Teorema de Arens y del Teorema de Albiac y Kalton, ambos obtenidos de manera independiente.
2. Caracterización por los Ideales Maximales. Involucrará ideas similares a las utilizadas para la caracterización a través de ideales maximales del caso complejo, pero nos centraremos en aquellos homomorfismos de $\mathcal{A}$ que tomen valores reales utilizando el espectro complejo.

Se concluye la memoria con el **Capítulo 4**, en el que se demostrará el Teorema de Amir-Camberm. Con la obtención del Teorema de Banach-Stone nos planteamos debilitar la condición a que ϕ fuera simplemente un isomorfismo lineal topológico y pudiéramos garantizar que los espacios K y H siguieran siendo homeomorfos. Por el Teorema de Amir y Camberm, se consigue demostrar que añadiendo una condición más junto a la existencia de tal isomorfismo lineal ϕ, K y H serán homeomorfos. Dicha condición vendrá dada en términos de su distancia de Banach-Mazur, por lo que será necesario definir tal concepto. Podemos considerar el Teorema, como una generalización del Teorema de Banach-Stone. Este resultado, junto con el Teorema de Milutin y los resultados de Pełczyński y Bessaga cierra la clasificación, a través de isomorfismos, de los espacios $C(K)$ para K espacio métrico compacto y Hausdorff infinito.

Abstract

The content of this project could be framed in the Degree in Mathematics, within the subject of "Functional Analysis" for the most part but using, in a very powerful way, tools from Algebra and Topology. The purpose of this report is to characterize and study the topological properties of a compact Hausdorff space K, based on the properties, both algebraic and topological, of its corresponding space of continuous functions defined on this set. Such a set will usually be denoted such as $C(K)$, when we are talking about real functions or such as $C(K, \mathbb{C})$, when we refer to complex functions.

Within the topological algebra, it highlights the study of such spaces of functions. That is the reason why a complete chapter will be dedicated to deal with its properties and with the algebraic structure that it will acquire under certain conditions. The algebraic structures of $C(K)$ spaces, induced by the topologies of $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, have led to multiple results of great importance in mathematics such as the Stone-Weierstrass Theorem. Since in our case we will consider the topological space K as a compact space, the structure of $C(K)$ would become richer. Indeed, we will prove that it could be seen as a Banach algebra taking the topology of uniform convergence. Thus, we would obtain several topological relationships between two Hausdorff compact spaces, K and H, from the algebraic-topological relations or their respective spaces of complex or real continuous functions denoted respectively by $C(K)$ and $C(H)$. One of the most important results related with this subject is the theorem obtained in 1932 by Banach, who states the following theorem:

Banach's Theorem. *Let K and H be two metric compact spaces, if their spaces $C(K)$ and $C(H)$ are linearly isometric, then K and H are homeomorphic.*

A few years later, more concretely in 1937, Stone generalized this theorem for arbitrary spaces K and H, remaining that way what is known as the Banach-Stone Theorem. It was considered to weaken the hypotheses of the isometry relations between the spaces $C(K)$ and $C(H)$, but that removed the homeomorphism between K and H as we can see in the example shown in Chapter 4. If we consider a weaker relationship than isometry, such as the existence of a linear one-to-one correspondence ϕ such that $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < 2$, then K and H will be homeomorphic, but if $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| = 2$, the homeomorphism fails.

Throughout the report, other characterizations of $C(K)$ spaces will be presented, distinguishing between countable and non-countable space K, in case K were metrizable and we will consider the space of continuous functions, both real and complex. Results of great importance in this sense will be the results of Bessaga, Pełczyński [7] and especially Milutin's Theorem for the non-countable case [2]. The representation of $C(K)$ spaces, taking both fields $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ and $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, will be approched from several ways. The algebraic point of view will have an important role in case that $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, due to a problem that will be discussed shortly in Chapter 3. It will be necessary to introduce a new concept, called C^*, which will be vital for the main algebra representation theorem which will be the Gelfand-Naimark Representation Theorem.

Having covered the main purpose of the project, let us give a brief description of the topics that will be discussed in each chapter and the main results derived from them. In this manner, the general outline of this Final Degree Project will be clearer and more concise. The worksheet consists in four chapters. The first chapters cover aspects of the different areas of Mathematics involved that would converge in the study of Banach algebras, showing in the last chapter, a generalization of the Banach-Stone Theorem.

Due to the great importance that Topology acquires in this work, we will dedicate the first chapter to expose the concepts that we will be handling throughout the memory. Therefore, in **Chapter 1** we will deal with basic notions such as the definitions of compactness, Hausdorff spaces, completely regular, normal spaces, etc., and we will obtain results that will be useful in the study of spaces of continuous functions. These results will be the Urysohn's Lemma, Tietze's Extension Theorem and the respective equivalences between the spaces which have these properties an normal spaces. Thanks to these consequences about Hausdorff compact spaces, the existence of "many" continuous functions that take values on our set K will be guaranteed. Two typical compact sets, the Cantor set and the Hilbert cube, $[0,1]^{\mathbb{N}}$, will also be presented in this chapter. The first one will be denoted as the set $2^{\mathbb{N}}$ and will be endowed with the product topology. The importance of these spaces is due to their universality property. It will be shown that every compact metric space is homeomorphic to a closed subset of the Hilbert cube and, at the same time, is continuous image of the Cantor set.

In **Chapter 2**, entitled *Continuous Function Spaces* , we will carry out an analytical study of the spaces of continuous functions on a compact space K, as we can deduce from the title. Our $C(K)$ spaces will have a vector space structure with the usual operations of addition and scalar multiplication, and we will give it a normed structure with the usual uniform norm $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$. The chapter starts naming some of its algebraic properties such as its commutative algebra structure and its dimension as a vector space. Thanks to the fact that continuous functions on compact space are bounded, we can consider the uniform metric obtaining, due to the fact that the uniform limit of continuous functions is a continuous function, that $(C(K), d_\infty)$ is a complete metric space and so it will be a Banach algebra.

We will consider a partial order induced by the order in $\mathbb{R}$, thus turning $C(K)$ in what we denote as a *lattice*. We notice the importance of this order in a very important result in the study of the convergence of continuous function sequences that we know as the Dini's Theorem. This new concept will be useful to obtain the Stone-Weierstrass Theorem. We start from the ideas used in the Weierstrass Approximation Theorem and replace the closed interval $[a, b]$ with a compact Hausdorff space K. We therefore take the result to a more general form. *Lattices* will turn out to be the dense sets of $C(K)$ under certain conditions. In section 2.4, we will give a characterization of the metrizability of K, showing that this is equivalent to the fact that $C(K)$ is separable and K can be embedded into the Hilbert cube, $K \hookrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}$. We will continue with the linear classification of $C(K)$ in an isometric and isomorphic way. It will highlight the Banach-Stone and Milutin's Theorem on each characterization respectively. The will show us the importance of the isometric isomorphism in order to conserve the homeomorfism between two compact spaces. The study in the case of countable K becomes much more difficult. We introduce the concept of derivative and the Cantor-Bendixson index. A characterization of $C(K)$ spaces is given as a couriosity, when they have a finite Cantor-Bendixon index.

In **Chapter 3** we will focus on the algebraic structure of $C(K)$ spaces. The chapter will begin giving basic definitions such as Banach algebra, ideals, regular and singular elements, etc. We will define the concept of *-algebra and introduce the involution operation that will be necessary to enunciate the Gelfand-Naimark Representation Theorem for commutative C^* -algebras. We will begin the study on $C(K, \mathbb{C})$, through the complex spectrum, the Gelfand function and the multiplicative functions. We will be able to identify any complex and commutative Banach algebra $\mathcal{A}$ with the algebra $C(\mathcal{M})$ (where $\mathcal{M}$ is the set of its maximal ideals), that will be in bijection with the set of all multiplicative functions. Since by Theorem 3.5, this set is proved to be a Hausdorff compact space, we will obtain that each commutative Banach algebra is isomorphic to an algebra of continuous complex functions on a certain Hausdorff compact space. On $\mathbb{R}$, it will not be so easy since the obtaining of multiplicative functions will be more complicated, reason why the characterization will be done from two different lines:

1. Algebraic characterization by the State Set. We will define the State Set $\mathcal{S} = \{\phi \in \mathcal{A}^* : \|\phi\| = \phi(e) = 1\}$. From this set we will obtain our multiplicative functions and we can characterize $C(K)$ through Arens' Theorem and Albiac and Kalton Theorem, both obtained independently.
2. Characterization by Maximal Ideals. It will involve similar ideas to those used for characterization through maximal ideals in the complex case, but we will focus on those homorphisms of $\mathcal{A}$ that take real values using the complex spectrum.

The report is concluded with **Chapter 4**, where Amir-Camberm's Theorem will be proved. With the obtaining of the Banach-Stone Theorem, we propose to weaken the condition that ϕ were simply a topological linear isomorphism and we could guarantee that spaces K and H remain homeomorphic. By the Amir and Camberm's Theorem, we prove that adding a condition to the existence of such linear isomorphism ϕ, K and H will be homeomorphic. This condition will be given in terms of its Banach-Mazur distance, so it will be necessary to define such concept. We can consider the Theorem as a generalization of the Banach-Stone Theorem. This result, together with Milutin's Theorem and the results of Pełczyński and Bessaga, closes the isomorphic classification of $C(K)$ spaces for infinite compact metric spaces K.

1 Espacios Compactos

La noción de compacidad desempeña un papel central en el Análisis Matemático. El Teorema de Heine-Borel, que recordamos aquí, es la clave de la extensión de la noción de compacidad para conjuntos numéricos a ámbitos más generales.

Teorema 1.1 (Heine-Borel). *Si X es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, es decir cerrado y acotado, entonces cualquier recubrimiento de X por conjuntos abiertos posee un subrecubrimiento finito.*

El teorema de Heine-Borel tiene un gran número de aplicaciones en análisis. Muchas de ellas, nos garantizan el buen "comportamiento" de las funciones continuas definidas en conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$. Un resultado más general, será de vital importancia a la hora de trabajar con funciones continuas definidas sobre espacios métricos compactos, como se verá más adelante.

En lo que sigue se presuponen conocidas las nociones de topología básicas cubiertas por los estudios de Grado. Sólo recordaremos aquellas definiciones que sean de particular importancia en nuestro desarrollo.

Daremos a continuación la definición topológica de compacidad. Consideremos X un espacio topológico y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X, normalmente abiertos. Diremos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es un *recubrimiento* de X si $X = \cup_{i\in I} A_i$. Diremos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es un *recubrimiento abierto* de X si además de ser un recubrimiento éste está compuesto de conjuntos abiertos. Una subfamilia de un recubrimiento, que es a su vez un recubrimiento, será llamada *subrecubrimiento*.

Definición 1.1. *Se dice que un espacio topológico X es compacto si cada recubrimiento abierto suyo posee un subrecubrimiento finito.*

La bien conocida caracterización de los conjuntos compactos a través de la definición de que *"cada sucesión tiene una subsucesión convergente"*, es únicamente válida, esencialmente, para espacios métricos compactos. De hecho, existen espacios compactos donde las únicas sucesiones convergentes son las que se hacen constantes a partir de un cierto índice.

En Análisis se utilizan fundamentalmente espacios compactos Hausdorff, ya que sobre ellos hay suficientes funciones continuas distinguiendo puntos. Recordamos su definición.

Definición 1.2. *Un espacio topológico X se dice de Hausdorff si para cada par de puntos $x_1, x_2 \in X$ distintos, existen entornos disjuntos U_1 y U_2 de x_1 y x_2 respectivamente, es decir tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

A lo largo de nuestro trabajo, todos los espacios compactos serán Hausdorff, por lo que no será necesario especificarlo en cada resultado.

1.1 Nociones básicas y primeros resultados

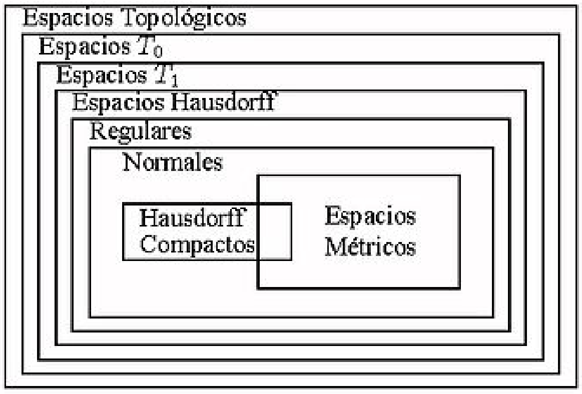
Serán necesarias las siguientes definiciones topológicas.

Definición 1.3. *Decimos que un espacio topológico X es completamente regular, si es un espacio donde cada punto es cerrado (esto se conoce como tener la propiedad de ser T_1) con la propiedad de que para un punto cualquiera $x \in X$ y F cualquier subconjunto cerrado de X que no contenga a x, existe una función $f \in C(X, \mathbb{R})$ con valores en el intervalo $[0, 1]$ y satisfaciendo $f(x) = 0$ y $f(F) = \{1\}$.*

Podemos tomar los espacios completamente regulares como espacios T_1 cuyas funciones continuas separan puntos y subespacios cerrados disjuntos.

Definición 1.4. *Un espacio normal será un espacio T_1 en el que para cada par de conjuntos cerrados disjuntos existen entornos también disjuntos.*

En la siguiente imagen se muestra la relación entre las distintas propiedades topológicas enunciadas: un espacio topológico que posea una de las propiedades, también poseerá todas las que la preceden, debido a que han sido enunciadas en orden de generalidad decreciente.



Demostremos uno de los hechos que se ilustran en la imagen.

Teorema 1.2. *Todo espacio compacto Hausdorff es normal.*

Demostración. Sea X un espacio compacto Hausdorff y sean A y B dos subconjuntos cerrados y disjuntos de X. Queremos encontrar dos abiertos G y H disjuntos tales que $A \subseteq G$ y $B \subseteq H$. En el que caso de que A (análogo si lo fuera B) fuera vacío, podríamos tomar $G = \emptyset$ y $H = X$ y ya estaría demostrado.
Supongamos entonces que estamos en el caso de que tanto A como B son no vacíos. Puesto que X es compacto y A y B son subconjuntos cerrados, se deduce que son en particular compactos considerados como subspacios. Sean $x \in A$, $y \in B$. Siendo X Hausdorff existen entornos disjuntos G_x y H_y de x e y respectivamente. Fijando x y haciendo que y recorra B conseguimos una familia $\{H_y : y \in B\}$ de abiertos que es un recubrimiento de B. Por la compacidad, existe un subrecubrimiento finito que denotaremos por $\{H_i\}_{i=1}^n$. Denotaremos por G_i el correspondiente entorno de x disjunto con H_i. Tomemos $\tilde{G}_x = \bigcap_{i=1}^n G_i$ y $H_{B,x} = \bigcup_{i=1}^n H_i$. Observemos que $\tilde{G}_x$ es un entorno de x disjunto con el abierto $H_{B,x}$ que contiene a B. Esto muestra que un cerrado y un punto fuera de él pueden ser separados por abiertos.
Partiendo de este hecho recién demostrado, seguiremos nuestra construcción de abiertos disjuntos para a A y B. Para cada punto $x \in A$ podemos considerar los abiertos construidos en el apartado anterior $\tilde{G}_x$ y $H_{B,x}$. Observemos que $\{\tilde{G}_x : x \in A\}$ es un recubrimiento abierto de A. De nuevo, por compacidad, podemos extraer un subrecubrimiento finito que denotaremos $\{\tilde{G}_i\}_{i=1}^n$ y denotaremos con $\{H_{B,i}\}_{i=1}^n$ los correspondientes abiertos conteniendo B. Observemos ahora que $G = \bigcup_{i=1}^n \tilde{G}_i$ y $H = \bigcap_{i=1}^n H_{B,i}$ son los entornos disjuntos de A y B respectivamente que andábamos buscando y llegamos así a que X es normal. $\square$

Como sugerimos en la introducción del capítulo, uno de nuestros principales propósitos es mostrar que, asumiendo que nos encontramos con un espacio topológico rico en conjuntos abiertos como lo será un espacio compacto Hausdorff, también será rico en funciones continuas. El siguiente resultado es fundamental en este sentido.

Teorema 1.3 (Lema de Urysohn). *Sea X un espacio normal, y A y B subconjuntos cerrados y disjuntos de X. Entonces existe una función real y continua f definida en X, con valores en el intervalo $[0,1]$, $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.*

Demostración. La demostración de este conocido resultado es muy técnica y la omitimos. Se puede encontrar por ejemplo en [17, Pág. 135] y en [13, Cap. 4]. □

Se tendría así la primera implicación

$$\text{Normalidad} \Rightarrow \text{Lema de Urysohn}$$

Una versión más general del Lema de Urysohn resultará de utilidad en la prueba del siguiente resultado por lo que se enuncia a continuación.

Teorema 1.4. *Sean X un espacio normal, A y B subespacios cerrados y disjuntos de X. Si $[a,b]$ es un intervalo cerrado cualquiera de la recta real $\mathbb{R}$, entonces existe una función real y continua f definida en X, que toma valores en el intervalo $[a,b]$, $f : X \to [a,b]$ tal que $f(A) = a$ y $f(B) = b$.*

Demostración. Se sigue del anterior por una simple transformación afín. □

Si se tiene una función continua definida en un subespacio de un espacio topológico, el lema de Urysohn tiene una gran importancia en el hecho de si una función puede ser extendida o no al espacio total. Veamos un teorema muy clásico con respecto a esta cuestión.

Teorema 1.5 (Teorema de Extensión de Tietze). *Sea X un espacio topológico normal, A un subespacio cerrado y f aplicación continua, $f : A \to [-1,1]$. Entonces f tiene una extensión continua $\tilde{f} : X \to [-1,1]$.*

Demostración. Consideremos los conjuntos

$$C = \{x : f(x) \leq \frac{-1}{3}\}\ ,\ D = \{x : f(x) \geq \frac{1}{3}\}.$$

Por el lema de Urysohn existe $f_1 : X \to \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ tal que $f_1(x) = \frac{-1}{3}$ para $x \in C$ y $f_1(x) = \frac{1}{3}$ para $x \in D$. De esta forma se tiene claramente que $|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}, \forall x \in A$. Sean ahora los conjuntos cerrados y disjuntos C_2 y D_2 de la forma

$$C_2 = \{x : f(x) - f_1(x) \leq \frac{-2}{9}\}\ ,\ D_2 = \{x : f(x) - f_1(x) \geq \frac{2}{9}\}.$$

Aplicando de nuevo el lema de Urysohn, $\exists\ f_2 : X \to \left[\frac{-2}{9}, \frac{2}{9}\right]$ tal que $f_2(x) = \frac{-2}{9}$ para $x \in C_2$ y $f_2(x) = \frac{2}{9}$ para $x \in D_2$ y por tanto $|f(x) - f_1 - f_2(x)| \leq \frac{4}{9}$. Se construyen así de manera inductiva los conjuntos C_n y D_n y las correspondientes funciones f_n cumpliendo

$$|f_n| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}\ ,\ |f - (f_1 + \ldots + f_n)| \leq \frac{2^n}{3^n}.$$

Si tomamos la sucesión $S_n = f_1 + \ldots + f_n$, será Cauchy y por tanto convergente a una cierta $\tilde{f}$ que será la extensión que estamos buscando. □

La idea de la prueba del teorema que acabamos de demostrar puede sintetizarse como

Lema de Urysohn $\Rightarrow$ Teorema de Extensión de Tietze

De hecho, se puede dar una equivalencia completa.

Observación 1.1. Para un espacio topológico X se tiene, que estos tres resultados son equivalentes:

(i) X es normal;

(ii) en X se verifica el Lema de Urysohn;

(iii) en X se verifica el Teorema de Extensión de Tietze.

Podemos encontrar la implicación (3) $\Rightarrow$ (1) en [14]. La idea se basa en que, si tenemos dos conjuntos cerrados y disjuntos A y B de X. Entonces $A \cup B$ es cerrado y existe una función $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ que vale constantemente 0 en A y 1 en B. Como se cumple la propiedad de extensión de Tietze podemos extender dicha función a $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ de manera que $U = \{x \in X | \tilde{f}(x) > 1/2\}$ y $V = \{x \in X | \tilde{f}(x) < 1/2\}$ son abiertos disjuntos que contienen A y B respectivamente, teniendo así la normalidad.

Puesto que a partir de ahora consideraremos nuestros espacios topológicos K compactos Hausdorff, se concluye así que contaremos con la existencia de muchas funciones continuas sobre K.

1.2 El conjunto de Cantor y el cubo de Hilbert

Dos compactos típicos que tendrán gran importancia en esta memoria serán el *conjunto de Cantor* $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ y el *cubo de Hilbert* $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Comencemos definiendo lo que entendemos por *conjunto (o espacio) de Cantor* y enunciando algunos de los resultados y propiedades más importantes del mismo.

Denotaremos por $\mathbf{2}$ al conjunto $\{0, 1\}$ dotado de la topología discreta. El conjunto de Cantor consiste en $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ dotado de la topología producto (cada factor con la topología discreta). El teorema de Tychonoff asegura que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ es compacto. Notemos que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ tiene además el cardinal del continuo. De hecho, los elementos de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ son precisamente las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $x_n \in \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ que salvo un conjunto numerable se pueden identificar con el desarrollo binario de los números en $[0, 1]$.

Además, es bien conocido que el conjunto de Cantor se puede identificar con un subconjunto del intervalo $[0, 1]$ (al que se le suele llamar como conjunto Ternario de Cantor, que denotaremos por $\mathbf{C}$), mediante el homeomorfismo :

$$\varphi\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n},$$

con $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.

La importancia de los dos compactos $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ y $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ viene dada por su carácter *universal.* En efecto, demostraremos que todo compacto métrico es homeomorfo a un subconjunto cerrado del cubo de Hilbert, y a su vez, es imagen continua del conjunto de Cantor. Por otra parte, todo compacto métrico innumerable contiene un subconjunto cerrado homeomorfo al Cantor. Del resultado relativo a la inmersión en el cubo de Hilbert nos ocuparemos en el próximo capítulo. Aquí sólo daremos los resultados mencionados relativos al conjunto de Cantor.

Teorema 1.6. *Sea K un espacio métrico, compacto y no vacío entonces existe una función continua y suprayectiva:* $T : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to K$

Demostración. Dado un espacio métrico compacto K y $r > 0$ sabemos que podemos tomar un número finito de bolas que cubran K. Podemos suponer sin pérdida de generalidad, que podemos tomar un número de bolas que sea potencia de 2. Denotaremos B_i con $i = 1, \ldots, 2^{k_1}$ a dichas bolas iniciales. Puesto que éstas son compactas, por el mismo razonamiento, podremos tomar un número finito de bolas de cada una de ellas que también sea potencia de 2, por ejemplo 2^{k_2}. Llamaremos a dichas bolas como B_{i_1,i_2} donde cada índice nos dice dentro de que bola nos encontramos. Procediendo de manera inductiva sabemos que

$$B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$$

es no vacío y se puede volver a subdividir en 2^{k_n} bolas. De esta manera, para cada elemento $c = (i_1, i_2, \ldots) \in C$ donde $i_1, i_2 \ldots$ son $k_1, k_2, \ldots$ coordenadas respectivamente, existirá un único punto de intersección en

$$\{x\} = \cap_n B_{i_1, \ldots, i_n}$$

La aplicación $\phi : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to K$ que lleva cada elemento del Cantor a la intersección de las bolas correspondientes a dichos índices será continua, puesto que las bolas se van encajando una dentro de otra. Además, también será suprayectiva, puesto que para cualquier $x \in K$ y cada n existirá un conjunto

$$\Delta_n(x) = \{ (i_1, i_2, \ldots) \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : x \in B_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \}$$

Correspondiente a una secuencia de compactos encajados no vacíos de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Por la compacidad, esta intersección será no vacía y se corresponderá a un único $s \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ de manera que $\phi(s) = x$. Llegamos así a que K es imagen continua del conjunto de Cantor. □

Teorema 1.7. *Si K es un espacio compacto metrizable no numerable, entonces contiene un subconjunto cerrado homeomorfo al* $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Un punto se dice de *condensación* de un conjunto A si cada entorno suyo contiene una cantidad no numerable de puntos de A. Primero estableceremos la existencia de puntos de condensación en K. Sea A el conjunto de los puntos de condensación de K. Afirmamos que $K \setminus A$ es numerable. En efecto, cada punto de $K \setminus A$ tendría un entorno con una cantidad a lo sumo numerable de puntos de K. Como K tiene una base numerable, eligiendo el entorno básico, un simple argumento de cardinalidad nos dará que $K \setminus A$ es numerable. Como K es no numerable por hipótesis, deducimos que A es no vacío.

Demostremos que el conjunto A es perfecto, es decir, no tiene puntos aislados. En efecto, si $x \in A$ entonces x tiene un entorno U con innumerables puntos de K. Como $K \setminus A$ es numerable, forzosamente U contiene puntos de A. Deducimos así que todo $x \in A$ es punto de acumulación de A.

Para construir el subconjunto de K homeomorfo al Cantor procedemos de la siguiente manera. Fijamos una métrica d en K. Tomamos puntos $x_0, x_1 \in A$ distintos, y entornos respectivos U_0, U_1 con clausuras disjuntas y ambos con diámetro menor que $1/2$. Como A es perfecto, U_0 y U_1 deben contener infinitos puntos. Podemos así tomar

$x_{00}, x_{01} \in U_0$ y $x_{10}, x_{11} \in U_1$ distintos y entornos $U_{00}, U_{01}, U_{10}, U_{11}$ respectivos con clausuras disjuntas, diámetros menores que $\frac{1}{4}$ y tales que $\overline{U_{00}}, \overline{U_{01}} \subset U_0, \overline{U_{10}}, \overline{U_{11}} \subset U_1$. Esta construcción se puede continuar inductivamente de manere obvia. Observemos que para cada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ la intersección

$$\phi((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

es no vacía por la compacidad y se reduce a un único punto por la condición impuesta sobre los diámetros. Podemos considerar la aplicación $\phi : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to K$. La construcción proporciona la inyectividad, por ser los conjuntos con clausuras disjuntas en cada nivel. Para la continuidad, tomemos un abierto $U \ni \phi((x_n)_{n=1}^{\infty})$. Por la definición de ϕ y la compacidad, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{x_1 x_2 \dots x_k}}$$

El entorno de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definido como los puntos de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ con las mismas n primeras coordenadas es enviado por ϕ al abierto U, probando así la continuidad. □

El resultado recién demostrado puede escribirse en forma de teorema de estructura de los compactos metrizables.

Corolario 1.1. Sea K un espacio compacto metrizable. Entonces ocurre sólo una de estas dos afirmaciones:

1. K es numerable;
2. K contiene un subconjunto cerrado homemorfo a $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.

Observación 1.2. Puesto que $|\mathbf{2}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$, se dice que los espacios compactos métricos cumplen la **Hipótesis del Continuo** (CH), en el sentido de que o bien $|K| \leq \aleph_0$ o $|K| \geq 2^{\aleph_0}$.

2 Espacios de Funciones Continuas

Los espacios de funciones reales (o complejas) continuas definidas sobre un espacio compacto Hausdorff tienen un papel destacado en Análisis Funcional. Denotemos por $C(K)$ al conjunto de funciones reales continuas definidas sobre K, y por $C(K, \mathbb{C})$ a las funciones continuas con valores complejos. Como veremos más adelante, estos conjuntos pueden ser dotados con distintas estructuras algebraicas y topológicas que interactúan entre si de manera notable. En esta memoria estamos particularmente interesados por aquellas propiedades de $C(K)$ (y de su versión compleja) que determinan homeomórficamente K.

Comencemos observando que $C(K)$ (todo lo que digamos será también aplicable a $C(K, \mathbb{C})$) con las operaciones definidas punto a punto heredan algunas propiedades algebraicas de los cuerpos $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). En efecto, la suma y el producto de funciones continuas son de nuevo continuas. Esto dota de estructura de anillo a $C(K)$. Si tenemos en cuenta la multiplicación por escalares, tendremos además una estructura de *álgebra*, es decir un espacio vectorial provisto además de multiplicación que está relacionada con las otras operaciones, por ejemplo, a través de la propiedad distributiva.

Como vimos anteriormente, hay abundancia de funciones reales continuas definidas sobre un compacto Hausdorff. Esto tiene como consecuencia que la complejidad de $C(K)$ no es menor que la de K. A pesar de esto, el hecho de que la continuidad es preservada por límites uniformes permitirá dotar a $C(K)$ de estructura de espacio métrico (de hecho, normado) completo, lo que interactúa fuertemente con la estructura algebraica como veremos en los capítulos correspondientes.

2.1 Propiedades algebraicas

Las observaciones elementales hechas antes sobre la estructura algebraica de $C(K)$ pueden ser reunidas en el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Para K compacto Hausdorff $C(K)$ tiene estructura de álgebra conmutativa sobre $\mathbb{R}$ y $C(K,\mathbb{C})$ tiene estructura de álgebra conmutativa sobre $\mathbb{C}$.*

En particular $C(K)$ es un espacio vectorial y como tal es natural preguntarse sobre su dimensión.

Teorema 2.2. *$C(K)$ tiene dimensión finita si y solo si K es finito.*

Demostración. " $\Rightarrow$ " Supongamos que K es infinito. Por tanto, podemos tomar N puntos distintos $x_n \in K$. Puesto que K es Hausdorff, podemos tomar entornos U_n disjuntos de x_n. Aplicando el lema de Urysohn existen funciones continuas f_n sobre U_n de manera que $f_n\left(x_n\right) = 1$ y $f_n\left(x_m\right) = 0$ sin $n \neq m$. De esta manera, el conjunto de funciones f_n será linealmente independiente, y puesto que N es arbitrario, se tiene que $dim\left(C\left(K\right)\right) = \infty$.
" $\Leftarrow$ " Supongamos que K es finito, es decir $K = \{x_1, ..., x_n\}$. Se considera entonces, por ser K Hausdorff, que se tiene la topología discreta y por tanto $C\left(K\right)$ es el conjunto de todas las funciones de $\{x_1, ..., x_n\}$ en $\mathbb{R}$. Podemos definir las funciones f_i con $1 \leq i \leq n$ como $f_i : K \to \mathbb{R}$ tal que $f_i\left(x_j\right) = 0$ si $j \neq i$ y $f_i\left(x_i\right) = 1$. Se ve de manera trivial que estas funciones son linealmente independientes y generan todo el espacio de funciones por lo que $dim\left(C\left(K\right)\right) = n < \infty$. □

2.2 Propiedades métricas

El hecho de que las funciones continuas definidas en un compacto están acotadas permite considerar de manera natural la métrica uniforme, es decir, la métrica que describe la convergencia uniforme. En lugar de definir la métrica, podemos aprovecharnos de la estructura lineal de $C(K)$ y definir directamente la norma del supremo:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$$

El supremo es, de hecho, un máximo. La distancia uniforme entre dos funciones $f, g \in C(K)$ es simplemente $d_\infty(f,g) = \|f - g\|_\infty$. El hecho bien conocido de que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua implica el siguiente resultado de vital importancia.

Teorema 2.3. *$(C(K), d_\infty)$ es un espacio métrico completo.*

Por supuesto es más interesante considerar $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ como espacio normado completo o álgebra normada completa. La fuerte interacción entre propiedades algebraicas y topológicas a lo que eso da lugar será objeto de estudio más adelante.

Sobre $C(K)$ se puede considerar un orden parcial inducido por el orden de $\mathbb{R}$, con el que $C(K)$ se convierte en *retículo*. La estructura de retículo será interesante para nosotros como herramienta en la prueba del teorema de Stone-Weierstrass. No obstante, podemos observar como el orden interviene en el siguiente teorema de Dini.

Teorema 2.4 (Teorema de Dini). *Sea $f_n : K \to \mathcal{R}$ una sucesión monótona de funciones continuas sobre un compacto K. Si la sucesión $\left(f_n\right)_n$ converge puntualmente a una función continua f, entonces también lo hará de manera uniforme.*

Demostración. Considerando $(f - f_n)_n$ o $(f_n - f)_n$ siempre podemos ponernos en el caso de que tenemos una sucesión decreciente de funciones positivas que converge puntualmente a 0, y que sin pérdida de generalidad podemos llamar igual $(f_n)_n$. Nuestro objetivo es ver que $(f_n)_n$ converge uniformemente a 0. Fijado $\varepsilon > 0$ es fácil ver que

$$K = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in K : f_k(x) < \varepsilon\}.$$

Por compacidad, existe n tal que

$$K = \bigcup_{k=1}^{n} \{x \in K : f_k(x) < \varepsilon\}.$$

Siendo la sucesión de funciones decreciente, los conjuntos en la unión son crecientes. Así deducimos que, de hecho, $K = \{x \in K : f_n(x) < \varepsilon\}$. Luego $0 \le f_m(x) \le f_n(x) < \varepsilon$ para todo $x \in K$ y todo $m \ge n$, es decir, la convergencia uniforme a 0. □

Existe una generalización del Teorema de Dini en términos de *redes*, una generalización del concepto de sucesión, de tal manera que no necesariamente tenga una cantidad numerable de elementos. Sería un concepto más adecuado para estudiar la convergencia en un espacio topológico, pero pese a que su definición se sale de nuestro ámbito de estudio y solo utilizaremos la versión del teorema de Dini para sucesiones de funciones, no entraremos en su enunciado.

El siguiente resultado, que es clave para la prueba del teorema de Stone-Weierstrass, se demuestra fácilmente con ayuda del teorema de Dini.

Proposición 2.1. Existe una sucesión de polinomios reales en x que converge uniformemente a $\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 1]$.

Demostración. La sucesión se construye por inducción tomando $p_1(x) = 0$ y

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n^2(x))$$

La desigualdad $p_n(x) \leq \sqrt{x}$ para $x \in [0, 1]$ puede ser establecida fácilmente por inducción. Esto implica que para cada $x \in [0, 1]$, la sucesión $(p_n(x))_n$ es monótona creciente y acotada. El límite satisface una ecuación que lo identifica con $\sqrt{x}$. Finalmente, el teorema de Dini nos proporciona la convergencia uniforme. □

2.3 Teoremas de Stone-Weierstrass

Los famosos teoremas de Aproximación de Weierstrass de funciones continuas reales por polinomios algebraicos y trigonométricos fueron generalizados espectacularmente por Stone en términos de las propiedades de álgebra de $C(K)$.

Notemos que el conjunto de los polinomios reales de una variable x, que denotaremos por $\mathbb{P}$, y que podemos considerar restringidos a un intervalo $[a, b]$, es un álgebra con la operaciones habituales. También podemos ver $\mathbb{P}$ como la subálgebra de $C[a, b]$ generada por las funciones $\{1, x\}$. Weierstrass nos dice que $\mathbb{P}$ es denso uniformemente en $C[a, b]$. Como veremos, la clave de la generalización de Stone es el hecho de que una subálgebra generada por $\{1, x\}$ contiene a las funciones constantes y separa puntos de $[a, b]$.

Para comenzar, daremos unas definiciones y probaremos resultados relativos a la estructura de $C(K)$ como retículo.

Definición 2.1. *Un retículo es un conjunto parcialmente ordenado L en el cual, cada par de elementos tiene un único supremo e ínfimo. Si $x,\ y \in L$, entonces denotamos su ínfimo y su supremo como $x \wedge y$ y $x \vee y$ respectivamente. Un subretículo L' de L será un subconjunto no vacío con la propiedad de que si $x,\ y \in L'$ entonces $x \wedge y$ y $x \vee y$ también están.*

Si f y g son funciones en $C(K, \mathbb{R})$, veamos las siguientes definiciones de unión e intersección:

Definición 2.2. *Se define la unión de f y g como*

$$(f \vee g) = max\{f(x), g(x)\}$$

Se tiene igualmente para la intersección

$$(f \wedge g) = min\{f(x), g(x)\}$$

Nuestro primer lema establece condiciones que garantizan que un subretículo cerrado de $C(K, \mathbb{R})$ es igual a $C(K, \mathbb{R})$.

Lema 2.1. Sea K un espacio compacto de Hausdorff con más de un punto, y sea L un subretículo cerrado de $C(K, \mathbb{R})$ con la propiedad de que si x e y son puntos distintos de K y a y b dos números reales, entonces existe una función $f \in L$ tal que $f(x) = a$ y $f(y) = b$. Entonces L es igual $C(K, \mathbb{R})$.

Demostración. Sea f una función arbitraria de $C(K, \mathbb{R})$, queremos demostrar que $f \in L$. Sea $\varepsilon > 0$, puesto que L es cerrado, podemos construir una función $g \in L$ tal que $f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$ para todo z de K. Por tanto, se sigue que $\|f - g\| < \varepsilon$. Construyamos dicha función: sea $x \in K$ fijo, e $y \in K$ un punto distinto de x. Por hipótesis, existe una función f_y en L tal que $f_y(x) = f(x)$ y $f_y(y) = f(y)$. Consideremos el siguiente conjunto abierto

$$G_y = \{z : f_y(z) < f(z) + \varepsilon\}.$$

Claramente, x e y pertenecen a G_y, por lo que tomando las clases G_y para cada punto y distinto de x obtendremos un recubrimiento por abiertos de K. Gracias a la compacidad, extraemos un subrecubrimiento finito, que denotaremos por $\{G_1, G_2, ..., G_n\}$. Si denotamos por $f_1, f_2, ..., f_n$ a las correspondientes funciones de L, entonces $g_x = f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n$ es evidentemente una función en L tal que $g_x(x) = f(x)$ y $g_x(z) < f(z) + \varepsilon \ \forall z \in K$.

Consideramos ahora el conjunto abierto $H_x = \{z : g_x(z) > f(z) - \varepsilon\}$. Ya que $x \in H_x$, igualmente se tiene que la clase de los H_x para todo $x \in K$ es un recubrimiento de K. De nuevo, por la compacidad, obtenemos un subrecubrimiento finito $\{H_1, H_2, ..., H_m\}$. Denotando $g_1, g_2, ..., g_m$, a las correspondientes funciones de L y definiendo $g = g_1 \vee g_2 \vee ... \vee g_m$ se tiene de manera clara, que g es una función de L con la propiedad de que $f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$ para todo z de K y por tanto $f \in L$ como queríamos demostrar. □

Necesitaremos el siguiente resultado relativo a la función valor absoluto.

Lema 2.2. En cualquier intervalo acotado $[a, b]$ la función $|t|$ puede ser aproximada uniformemente por polinomios.

Demostración. Obviamente, el resultado es trivial si $0 \notin [a, b]$. Sea $m = \max\{|a|, |b|\}$ y observemos que

$$|t| = m\sqrt{\left(\frac{t}{m}\right)^2}$$

Como $\left(\frac{t}{m}\right)^2 \leq 1$ y $\sqrt{\cdot}$ puede ser aproximada uniformemente por polinomios en $[0, 1]$, ver Corolario 2.1, se deduce lo que buscamos. $\square$

Sea f una función real o compleja definida en un espacio topológico X, entonces la función $|f|$ está definida por $|f|(x) = |f(x)|$. Si f es continua, entonces $|f|$ será también continua.

Observación 2.1. Observemos que las operaciones de retículos en $C(K)$ se pueden expresar en términos de sumas, producto por escalares y valores absolutos como sigue:

$$f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2}$$
$$f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

De aquí se obtiene que cualquier subespacio lineal de $C(K)$ que contenga al valor absoluto de todas sus funciones es un subretículo de $C(K)$.

Lema 2.3. Sea K un espacio topológico arbitrario. Entonces cada subálgebra cerrada de $C(K)$ es también un subretículo cerrado de $C(K)$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra cerrada de $C(K, \mathbb{R})$. Por los comentarios hechos anteriormente, será suficiente con mostrar que si $f \in A$, entonces $|f| \in A$. Sea $\varepsilon > 0$, por el Lema 2.2 existirá un polinomio $\widehat{p}$ cumpliendo $||t| - \widehat{p}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $t \in [-\|f\|, \|f\|]$. Si p es el polinomio resultante de sustituir los términos constantes por 0, entonces p cumple la propiedad $||t| - p(t)| < \varepsilon$ para cada $t \in [-\|f\|, \|f\|]$. Puesto que $\mathcal{A}$ es un álgebra, la función $p(f) \in C(K)$ también estará en $\mathcal{A}$. Es fácil ver, que $||f(x)| - p(f(x))| < \varepsilon$ para cada $x \in K$, de donde se sigue que $\||f| - p(f)\| < \varepsilon$. Puesto que $\mathcal{A}$ es cerrado, y hemos aproximado $|f|$ por la función $p(f)$ en $\mathcal{A}$ entonces $|f| \in \mathcal{A}$. $\square$

Teorema 2.5 (Stone-Weierstrass versión Real). *Sea K un espacio compacto y Hausdorff, y sea $\mathcal{A}$ una subálgebra cerrada de $C(K, \mathbb{R})$ que separa puntos y contiene una función constante no nula. Entonces $\mathcal{A}$ es igual a $C(K, \mathbb{R})$.*

Demostración. Si K tuviera un solo punto, entonces $C(K,\mathbb{R})$ contendría solamente a las funciones contantes por lo tanto, como $\mathcal{A}$ contiene un función constante no nula y es un álgebra, entonces contiene a todas las funciones constantes y por tanto sería todo $C(K,\mathbb{R})$. Asumamos ahora, que K tiene más de un punto. Por los lemas anteriores, será suficiente con mostrar que si x e y son puntos distintos de K, y a y b son dos números reales distintos, entonces existe una función $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) = a$ y $f(y) = b$. Puesto que $\mathcal{A}$ separa puntos, existirá una función $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Si ahora definimos f como

$$f(z) = a\frac{g(z) - g(y)}{g(x) - g(y)} + b\frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)}$$

entonces f tendrá las propiedades que se buscan. □

Dando ahora un paso más, nos centraremos en el campo complejo, es decir, en las condiciones necesarias que garantizan que una subálgebra cerrada de $C(K,\mathbb{C})$ es igual a $C(K,\mathbb{C})$. En primer lugar es necesario entender que las condiciones del teorema anterior no serán suficiente puesto que sobre el plano complejo $\mathbb{C}$ no todas las funciones complejas se podrán aproximar por polinomios. En efecto, la aproximación uniforme por polinomios implica holomorfía. El Teorema de Mergelyan que se puede ver en [15, Cap. 20], nos da una caracterización de aquellas funciones continuas complejas sobre K que se pueden aproximar uniformemente por polinomios.

¿Qué se puede hacer para salvar el resultado en el caso complejo?

Si f es una función compleja definida en un espacio topológico X se define su parte real y su parte compleja como:

$$R(f) = \frac{f + \overline{f}}{2}, I(f) = \frac{f - \overline{f}}{2i} \tag{2.1}$$

Observemos que si una función compleja f tiene diferentes valores en dos puntos distintos de X, entonces al menos una de las funciones $R(f)$ y $I(f)$ también tiene diferentes valores en esos puntos.

Teorema 2.6 (Stone-Weierstrass versión Compleja). *Sea K un espacio compacto y Hausdorff, y sea $\mathcal{A}$ una subálgebra cerrada de $C(K,\mathbb{C})$ que separa puntos, contiene una función constante no nula y contiene además a la conjugada de cada función. Entonces $\mathcal{A}$ es igual a $C(K,\mathbb{C})$.*

Demostración. Las funciones reales de $\mathcal{A}$ forman una subálgebra cerrada $\mathcal{B}$ de $C(K, \mathbb{R})$. Asumamos por un momento que $\mathcal{B} = C(K, \mathbb{R})$. Si f es una función arbitraria de $C(K, \mathbb{C})$, entonces $R(f)$ e $I(f)$ estarán en $C(K, \mathbb{R})$ y por tanto, estarán en $\mathcal{B}$. Puesto que $f = R(f) + iI(f)$ y $\mathcal{A}$ es un álgebra, f está en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A} = C(K, \mathbb{C})$. Así, será suficiente con demostrar que $\mathcal{B} = C(K, \mathbb{R})$. Lo haremos aplicando el Teorema 2.5. Veamos que $\mathcal{B}$ separa puntos. Sean x e y puntos distintos de K. Ya que $\mathcal{A}$ separa puntos, existirá una función $f \in \mathcal{A}$ que tiene distintos valores en x e y. Como vimos en las observaciones anteriores, $R(f)$ o $I(f)$ también tendrán valores distintos en x e y. Puesto que $\mathcal{A}$ es un álgebra que contiene al conjugado de cada función, las fórmulas 2.1 muestran que $R(f)$ e $I(f)$ están en $\mathcal{B}$ y por tanto $\mathcal{B}$. A continuación, mostraremos que $\mathcal{B}$ contiene alguna función constante no nula. Por hipótesis, $\mathcal{A}$ contiene al menos una función constante no nula g. $\mathcal{A}$ es un álgebra que contiene al conjugado de cada función, así que $g\overline{g} = |g|^2$ será una función constante no nula en $\mathcal{B}$. Aplicando el Teorema 2.5 sobre $\mathcal{B}$ se termina la prueba. □

Estos dos teoremas de Stone-Weierstrass están entre los más importantes resultados del análisis moderno. La teoría desarrollada en las siguientes secciones difícilmente podría existir sin ellos además de muchas otras aplicaciones.

2.4 Caracterizaciones de la metrizabilidad de K

El primer resultado para el que obtendremos beneficio del Teorema de Stone Weierstrass, será el teorema central de caracterización de espacios $C(K)$ para K metrizable. Antes de enunciarlo, veamos las siguientes propiedades que se obtienen del caso de K compacto metrizable.

Sea K compacto, denotaremos $\widehat{K} = \{\delta_k : k \in K\} \subset C(K)^*$, donde δ_k es la función de Dirac definida por el punto $k \in K$.

Lema 2.4. Sea K un espacio compacto. Entonces K es homeomorfo al conjunto $\widehat{K}$ de todas las funciones de Dirac, dotado por la topología inducida w^* en $C(K)$.

Demostración. La función $\delta : K \to C(K)$ que asocia δ_k a cada $k \in K$ es continua gracias a la topología de K y a la topología débil* de $C(K)^*$. Además, si $\left(k_n\right)_n$ es una sucesión de K convergente a cierto $k \in K$, entonces $f\left(k_i\right) \to f(k)$ para cada $f \in C(K)$. Gracias al lema de Urysohn, ésta será una función inyectiva. Puesto que K es compacto, δ es un homeomorfismo sobre $\delta(K) = \widehat{K}$. □

El siguiente resultado es en relación a la metrización del espacio $\left(B_{X^*}, w^*\right)$.

Proposición 2.2. Sea X un espacio de Banach separable, entonces $\left(B_{X^*}, w^*\right)$ es un espacio compacto y metrizable. Una métrica en B_{X^*} compatible con la topología w^* viene dada como sigue

$$\rho(f,g) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} | (f-g)\left(x_i\right) |$$

donde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_X$ es denso en S_X.

Los anteriores resultados son la clave, para la demostración de la primera equivalencia del Teorema de Caracterización de espacios K metrizables que se muestra a continuación.

Teorema 2.7. *Si K es un compacto Hausdorff entonces son equivalentes:*

1. *K es metrizable*
2. *$C(K)$ es separable*
3. *$K \hookrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}$*

Demostración. "1 $\Rightarrow$ 2 " Supongamos que K es un espacio métrico compacto. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en K. Definamos $f_{n,m}(x) = \frac{1}{m} - d\left(x, x_n\right)$ si $d\left(x, x_n\right) \leq \frac{1}{m}$ y $f_{n,m}(x) = 0$ si $d\left(x, x_n\right) > \frac{1}{m}$. Tomando la familia formada por $\{f_{n,m}\}$ y una función constante, ésta generará un álgebra separable que separa puntos de K y por tanto su clausura es $C(K)$ por el Teorema de Stone-Weierstrass 2.6.
"2 $\Rightarrow$ 1 " Supongamos ahora que $C(K)$ es separable. Por la proposición 2.2 $B_{C(K)^*}$ será metrizable en la topología débil*. Puesto que $\widehat{K} \subset \left(B_{C(K)^*}, w^*\right)$ es metrizable, también lo será K por el lema 2.4.
"1 $\Rightarrow$ 3 " Al ser compacto y metrizable, K contiene un conjunto denso, $\left(s_n\right)_{n=1}^{\infty}$. Sea ρ la métrica sobre K inducida por su topología. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \leq \rho \leq 1$. Definimos ahora la función $\theta : K \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ dada por $\theta(x) = \left(\rho\left(x, s_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$. Notemos que θ es continua ya que $x \mapsto \rho\left(x, s_n\right)$ es continua para cada n. θ será inyectiva ya que si x e y son dos puntos distintos de K entonces existe algún s_n tal que $\rho\left(x, s_n\right) < \rho\left(y, s_n\right)$(o viceversa) y, por lo tanto, $\theta(x)$ y $\theta(x)$ difieren en la n-ésima coordenada. Puesto que K es compacto y $[0,1]^{\mathbb{N}}$ es Hausdorff, se deduce que es una inmersión homeomorfa de K en su imagen. (Usamos repetidamente el hecho de que una función continua e inyectiva de un espacio compacto a un Hausdorff es un homeomorfismo en su imagen, ya que los conjuntos cerrados deben ser llevados a conjuntos compactos, y por tanto cerrados).

"$3 \Rightarrow 1$" Sabemos que el cubo de Hilbert es metrizable. Puesto que K es homeomorfo a un subconjunto suyo, entonces K también será metrizable. □

2.5 Clasificación lineal de los espacios $C(K)$

Nos ocuparemos en esta sección de discutir si las propiedades de $C(K)$ como espacio de Banach, es decir, renunciando a la estructura de álgebra, permite determinar K homeomórficamente. Desde el punto de vista de los espacios de Banach, hay dos formas importantes de clasificación:

1. Isométrica, es decir, dos espacios de Banach se consideran en la misma clase si existe entre ellos una biyección lineal que conserva la norma.
2. Isomorfa, en el caso de que exista una biyección lineal entre los espacios de Banach tal que tanto ella como su inversa son continuas.

Veremos que estas dos clasificaciones difieren enormemente entre si.

El Teorema de Banach-Stone nos dará una respuesta contundente al problema de clasificación isométrica de espacios $C(K)$.

Teorema 2.8 (Banach-Stone). *Supongamos que K y L son dos compactos Hausdorff. Entonces $C(K)$ y $C(L)$ son isométricamente isomorfos (como espacios de Banach) si y sólo si K y L son homeomorfos.*

Demostración. La demostración y los resultados previos se pueden consultar en [11].
"$\Leftarrow$" Sea ϕ el isomorfismo entre K y L. Si definimos la aplicación $T : C(K) \to C(L)$ dada por $T(f) = f \circ \phi^{-1}$, entonces resulta elemental ver que es una isometría de $C(K)$ en $C(L)$.
"$\Rightarrow$" Supongamos ahora que T es una isometría de $C(K)$ en $C(L)$. Entonces T^* también será una isometría entre los correspondientes espacios duales. Por tanto, $T\left(B_{C(K)^*}\right) = B_{C(L)^*}$. Se tiene así, que para $l \in L$ $T^*\left(\delta_l\right) = \varepsilon(l)\,\delta_{k_l}$ donde $k_l \in K$ y $\varepsilon(l) \in \{-1, 1\}$. La aplicación $\gamma : l \mapsto \varepsilon(l)\,\delta_{k_l}$ es continua por serlo T^*.
Mostremos ahora que la aplicación $\varepsilon : L \to \{-1, 1\}$ es continua. Si tomamos la función constante 1, denotada como x, podemos escribir $\varepsilon(l) = \varepsilon(l)\,\delta_{k_l}(x) = T^*\left(\delta_l\right)(x) = T(x)(l)$, así que $\varepsilon = T(x)$, así que ε es continuo. Así, la aplicación $\Gamma : L \to K$ dada por $\Gamma(l) = k_l$ es una función continua e inyectiva de L en K. □

El teorema de Banach-Stone aparece para K, L metrizables en el libro de Banach de 1932. En general, fue demostrado por M. H. Stone en 1937. De hecho, la Topología General estaba en sus comienzos en ese período, y Banach fue limitado por la falta de desarrollo de la topología no metrizable; Se tiene así, por ejemplo, el teorema de Alaoglu sobre la compacidad débil-* del dual de la bola unidad que no fue obtenido hasta 1941 porque requería del teorema de Tychonoff.

Mencionemos en este punto la importancia de los espacios $C(K)$ en la teoría isométrica de espacios de Banach.

Proposición 2.3. Todo espacio de Banach es isométrico a un subespacio de un espacio $C(K)$ para cierto compacto K.

Demostración. Basta tomar como $K = (B_{X^*}, w^*)$, la aplicación que identifica cada $x \in X$ como una función $\hat{x}(x^*) = x^*(x)$ definida sobre B_{X^*} es una isometría como consecuencia directa del teorema de Hahn-Banach. □

Proposición 2.4. Todo espacio de Banach separable es isométrico a un subespacio de $C(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ y a un subespacio de $C[0,1]$.

Demostración. Sea X un espacio de Banach separable. Por la proposición anterior sabemos que X es isométrico a un subespacio de $C(K)$, donde $K = (B_{X^*}, w^*)$ si vemos los detalles de la prueba. Siendo X separable, tenemos que K es metrizable. Por el Teorema 1.6 existe $\phi : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to K$ continua sobreyectiva. Definimos $T : C(K) \to C(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ como $T(f) = f \circ \phi$. Es obvio que $\|T(f)\| = \|f\|$, luego es una isometría de $C(K)$ sobre un subespacio de $C(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$. Deducimos que X es isométrico a un subespacio de $C(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$.

Para la isometría de X dentro de $C[0,1]$, por lo ya visto, basta encontrar una isometría de $C(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ dentro de $C[0,1]$. Para ello, identificaremos $C(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ con el conjunto ternario de Cantor en $[0,1]$, pongamos además $[0,1] \setminus \mathbf{2}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ para la descomposición única en intervalos maximales disjuntos del complementario de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Dada $f : C(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}$ continua, definimos su extensión $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ como sigue: $\tilde{f}(x) = f(x)$ para $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$; si $x \notin \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ entonces existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in I_n = \left(a_n, b_n\right)$, por lo que definiremos $\tilde{f}(x)$ como la interpolación lineal de $f\left(a_n\right)$ y $f\left(b_n\right)$. Más detalladamente, si $x = \lambda a_n + (1-\lambda) b_n$ con $\lambda \in (0,1)$ entonces

$$\tilde{f}(x) := \lambda f\left(a_n\right) + (1-\lambda) f\left(b_n\right)$$

Resulta elemental la comprobación de que $\tilde{f}$ es continua y preserva la norma de f. Además, para $f \in C\left(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}\right)$ la asignación $f \to \tilde{f}$ es lineal, por lo que la aplicación $\sim : C\left(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}\right) \to C[0,1]$ es una isometría lineal. □

Nos ocuparemos ahora de la clasificación isomorfa de espacios $C(K)$. Comencemos observando que hay espacios $C(K)$ con K infinito metrizable que no son isomorfos. En efecto, si $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, entonces $C(K)$ es isométrico a c, el espacio de sucesiones convergentes de números reales con la norma del supremo. Como c es isomorfo a c_0, se deduce que $C(K)^*$ es separable. Esto muestra que $C(K)$ no puede ser isomorfo a $C[0,1]$, puesto que este último tiene dual no separable (basta observar, por ejemplo, que $\{\delta_x : x \in [0,1]\}$ es un conjunto discreto innumerable). Este ejemplo es muy relevante puesto que para K compacto metrizable, la primera diferencia fundamental es que éste sea numerable o no. Recordemos en este punto el Corolario 1.1.

La situación para un compacto metrizable innumerable es muy interesante. Observemos que de la Proposición 2.4 se sigue que $C(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ y $C[0,1]$ son mutuamente isométricos a subespacios del otro. No es difícil hacer una cuenta similar entre $C[0,1]$ y $C([0,1]^2)$. De hecho, lo que ocurre, es que estos espacios son todos isomorfos entre si, e isomorfos a cualquier $C(K)$ con K metrizable innumerable, como afirma el teorema de Milutin.

Teorema 2.9 (Milutin). *Sea K un espacio compacto metrizable no numerable. Entonces $C(K)$ es linealmente isomorfo a $C[0,1]$.*

Demostración. No daremos aquí su demostración, que es bastante técnica, y remitimos al lector a [2, pág. 102]. □

Observe que este resultado es totalmente contrapuesto al teorema de Banach-Stone 2.8. En el marco de la teoría isométrica de $C(K)$, podemos distinguir entre compactos no homeomorfos. Sin embargo, en la teoría isomorfa de $C(K)$ todos los compactos metrizables no numerables se confunden entre sí. Más adelante veremos como enriquecer la teoría isomorfa para poder reconocer los compactos.

Milutin obtuvo este resultado en su tesis en 1952, pero no fue publicado hasta 1966. Los intereses matemáticos de Milutin cambiaron después de su tesis y al parecer no consideraba el resultado lo suficientemente importante como para merecer su publicación. De hecho, el resultado fue descubierto en la tesis de Milutin por Pełczyński en una visita a Moscú en la década de los 60 y fue sólo gracias a su insistencia el hecho de que el documento finalmente apareciera en 1966.

Finalmente, daremos una somera descripción de la clasificación isomorfa de los espacios $C(K)$ con K numerable.

El ejemplo más sencillo, comentado anteriormente bajo una forma equivalente, es

$K = \gamma\mathbb{N}$, es decir, la compactificación por un punto o **compactificación de Alexandroff**, de los números naturales $\mathbb{N}$, en cuyo caso $C(\gamma\mathbb{N}) = c \approx c_0$.

En 1960, Bessaga y Pełczyński dieron una clasificación completa de todos los espacios $C(K)$ cuando K es compacto y numerable. Para llevar a cabo esta descripción es necesaria la introducción de un *índice ordinal* cuya construcción describimos a continuación. Si K es cualquier espacio métrico compacto numerable, el Teorema de la Categoría de Baire implica que K tiene necesariamente puntos aislados. En tal caso, el conjunto de los puntos de acumulación de K será un conjunto estrictamente menor que denotamos K', y es de nuevo un compacto numerable. Análogamente, podemos definir $K'' = (K')'$ y, en general, para cualquier número natural n, $K^{(n)} = \left(K^{(n-1)}\right)'$. Se dice que K tiene un índice finito de Cantor-Bendixson si $K^{(n)}$ es finito para algún n y, por lo tanto, $K^{(n+1)}$ será vacío. Cuando esto sucede, $\sigma(K)$ denotará el primer n para el cual $K^{(n)}$ es finito. Por la observación hecha anteriormente sobre los puntos de acumulación de K, llegamos a que su índice de Cantor-Bendixson será finito. Si K no tiene índice finito entonces su índice se puede definir como un ordinal contable. Para la caracterización de los espacios, resulta importante el índice de Cantor-Bendixson. De hecho, fue utilizado por Bessaga y Pełczyński para dar una clasificación completa, hasta el isomorfismo lineal, de todo $C(K)$ para K numerable.

Daremos a continuación, un resultado curioso que puede considerarse como el primer paso en la clasificación tales espacios $C(K)$, aunque no lo demostraremos.

Teorema 2.10. *Sea K un espacio métrico y compacto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *K es numerable y tiene un índice de Cantor-Bendixson finito.*
2. *$C(K) \approx c_0$*

Podemos encontrar la demostración de estas y otras equivalencias en [2, Cap. 4].

Si K y L son espacios métricos compactos numerables, con índices de Cantor-Bendixson finitos pero diferentes, entonces K y L no son homeomorfos pero los espacios $C(K)$ y $C(L)$ son ambos isomorfos a c_0. Observemos también que si K es numerable, entonces $C(K)^*$ será isométrico a ℓ_1 y así $C(K)^*$ será separable. Por tanto, ℓ_1 será isométrico al dual de muchos espacios de Banach que sin embargo, no son isomorfos.

3 | Teoría de Álgebras

Nuestro trabajo en la primera parte de la memoria estaba más enfocado a los espacios topológicos y a las funciones continuas que conllevaban. En los siguientes capítulos, la topología y el álgebra estarán unidos en un único concepto: el de un Álgebra de Banach.

Como ya se introdujo brevemente en el capítulo anterior, los espacios de funciones continuas $C(K)$ tienen una estructura algebraica rica en propiedades cuando se considera como un álgebra normada. Un espacio lineal $\mathcal{A}$ se denomina *álgebra* si sus elementos pueden multiplicarse de tal manera que $\mathcal{A}$ sea también un anillo en el que la multiplicación escalar cumpla la siguiente propiedad en relación al producto usual:

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

El concepto de álgebra es, por lo tanto, una combinación natural de los conceptos de espacio lineal y anillo y por ello, todas las ideas desarrolladas en la sección anterior para los espacios $C(K)$ son inmediatamente aplicables. Puesto que un álgebra será también un anillo, puede ser conmutativa o no conmutativa, y puede o no tener elemento identidad.

Una *subálgebra* de un álgebra $\mathcal{A}$ es un subconjunto no vacío $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ que es un álgebra en si misma con respecto a las operaciones en $\mathcal{A}$. Esta condición implica que $\mathcal{B}$ será cerrado bajo suma, producto y producto por escalares. Un *ideal* $\mathcal{I}$ en un álgebra $\mathcal{A}$ es un subconjunto no vacío de $\mathcal{A}$ que es a la vez un subespacio cuando $\mathcal{A}$ es considerado como un espacio lineal y un ideal cuando $\mathcal{A}$ es considerado como un anillo. Un ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ se dice que es *maximal*, si es un ideal propio que no está propiamente contenido en ningún otro ideal propio de $\mathcal{A}$. El álgebra $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}}$ se llamará álgebra cociente de $\mathcal{A}$ con respecto a $\mathcal{I}$.

3.1 Preliminares

Al igual que ya se introdujo en el primer capítulo de la memoria el concepto de espacio de Banach para espacios normados, se tendrá una definición análoga para álgebras.

Definición 3.1. *Un álgebra de Banach es un espacio normado y completo (real o complejo), que es a su vez un álgebra con unidad. Su estructura multiplicativa estará relacionada con la norma mediante las siguientes propiedades:*

1. $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.
2. $\|1\| = 1$.

Se deduce de la primera que la multiplicación es continua en cualquier álgebra de Banach, es decir, que si $x_n \to x$ e $y_n \to y$, entonces $x_n y_n \to xy$.

Las subálgebras de Banach de $\mathcal{A}$ son precisamente aquellos subconjuntos de $\mathcal{A}$ que son álgebras de Banach con respecto a las mismas operaciones algebraicas, la misma identidad y la misma norma.

3.1.1 Elementos regulares, singulares y divisores de cero. El espectro.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Denotamos el conjunto de elementos regulares (aquellos elementos que tienen inverso) en $\mathcal{A}$ por $\mathcal{G}$, y su complementario, el conjunto de los elementos singulares, se denotará por $\mathcal{S}$. Es claro que $\mathcal{G}$ contiene al 1 y tiene estructura de grupo, y $\mathcal{S}$ contiene al 0. Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Cada elemento x que satisfaga $\|x - 1\| < 1$ es regular, y su inverso está dado por la expresión $x^{-1} = 1 + \sum_{n-1}^{\infty} (1 - x)^n$. De este resultado se puede concluir que $\mathcal{G}$ será un conjunto abierto y $\mathcal{S}$ un conjunto cerrado. Además la aplicación que lleva $x \to x^{-1}$ de $\mathcal{G}$ a $\mathcal{G}$ es continua y por tanto es un homeomorfismo de $\mathcal{G}$ en si mismo.*

Observación 3.1. Si x es un elemento en $\mathcal{A}$, siempre debe tenerse en cuenta que la condición de regularidad o singularidad de x depende tanto de $\mathcal{A}$ como de x en si mismo. Si x es regular en $\mathcal{A}$, y pasamos a una subálgebra de Banach $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ que también contenga a x, entonces x puede perder su inverso y convertirse en singular en $\mathcal{A}'$.

Definición 3.2. *Un elemento z en nuestro álgebra de Banach $\mathcal{A}$ se llama un divisor topológico de cero si existe una sucesión $\left(z_n\right)$ en $\mathcal{A}$ tal que $\|z_n\| = 1$ y se cumple que $zz_n \to 0$ o $z_n z \to 0$. Denotamos el conjunto de todos los divisores topológicos de cero por $\mathcal{Z}$.*

Es claro que cada divisor de cero usual es también un divisor de cero topológico y que $\mathcal{Z}$ será un subconjunto de $\mathcal{S}$.

Para comprender el significado de estos hechos, supongamos que $\mathcal{A}$ está sumergido como una subálgebra de Banach en un álgebra de Banach más grande $\mathcal{B}$. Como hemos observado anteriormente, un elemento que es singular en $\mathcal{A}$ puede dejar de serlo en $\mathcal{B}$. Sin embargo, si es un divisor topológico de cero en $\mathcal{A}$, entonces en $\mathcal{B}$ también, así que será singular en $\mathcal{B}$. Los divisores de cero topológicos en $\mathcal{A}$ serán, por tanto, "permanentemente singulares", en el sentido de que serán singulares con respecto a cada posible ampliación del álgebra de Banach que lo contiene.

Consideremos ahora, T un operador en un espacio no trivial de Hilbert. Recordemos que se definía el espectro de T como el conjunto

$$\sigma(T) = \{\lambda : T - \lambda I \text{ es singular }\}.$$

Si tomamos x, elemento de un álgebra general de Banach $\mathcal{A}$, por analogía con lo anterior se tiene la siguiente definición.

Definición 3.3. *Se define el espectro de x como el siguiente subconjunto del plano complejo:*

$$\sigma(x) = \{\lambda : x - \lambda 1 \text{ es singular }\}.$$

Observamos que la función $x - \lambda 1$ es una función continua en λ, con valores en $\mathcal{A}$. Ya que el conjunto de elementos singulares en $\mathcal{A}$ es cerrado, se sigue que $\sigma(x)$ será cerrado.

Definición 3.4. *Llamaremos resolvente de x al complementario de $\sigma(x)$ y lo denotaremos como $\rho(x)$.*

Dicho conjunto será por tanto, un conjunto abierto del plano complejo y $\rho(x)$ será una función con valores en $\mathcal{A}$ definida en el conjunto resolvente como $x(\lambda) = (x - \lambda 1)^{-1}$. Se obtiene como resultado del teorema 3.1, que dicha aplicación será continua y se tiene que $x(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$.

Si tanto λ y μ pertenecen al conjunto resolvente de x, entonces

$$x(\lambda) = x(\lambda)[x - \mu 1]\, x(\mu)$$

$$= x(\lambda)[x - \lambda 1 + (\lambda - \mu) 1]\, x(\mu)$$
$$= [1 + (\lambda - \mu) x(\lambda)]\, x(\mu)$$
$$= x(\mu) + (\lambda - \mu) x(\lambda) x(\mu).$$

Y se tiene por tanto

$$x(\lambda) - x(\mu) = (\lambda - \mu) x(\lambda) x(\mu).$$

Lo que se conoce como **ecuación resolvente**.

El número $r(x)$ definido como

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

lo denotaremos como *el radio espectral* de x. Es claro que $0 \leq r(x) \leq \|x\|$. Se tiene además la siguiente igualdad en relación al radio espectral

$$r(x) = \lim \|x^n\|^{1/n}.$$

3.1.2 Involución en Álgebras de Banach

Definición 3.5. *Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ se conoce como *-álgebra si posee una involución, es decir, si existe una aplicación $x \to x^*$ de $\mathcal{A}$ en si misma con las siguientes propiedades :*

1. $(x + y)^* = x^* + y^*$.
2. $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$.
3. $(xy)^* = y^* x^*$.
4. $x^{**} = x$.

Observación 3.2. Se tiene como consecuencia inmediata de la cuarta propiedad que la aplicación $x \to x^*$ será una biyección de $\mathcal{A}$ en si misma.

El elemento x^* se llama el elemento *adjunto* de x y una subálgebra de $\mathcal{A}$ se dice que es *auto-adjunta* si ésta contiene el adjunto de cada uno de sus elementos.

Si $\mathcal{B}$ es otra *-álgebra de Banach, se dirá que f es un *-isomorfismo si es un isomorfismo de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ y preserva las operaciones de involución de modo que $f(x^*) = f(x)^*$.

Es de interés, que la operación de involución esté relacionada con la norma de manera que obtengamos resultados de utilidad. La propiedad de que $\|x^*\| = \|x\|$ nos da que la aplicación involución será continua, es decir :
Si $x_n \to x$, entonces $\|x_n^* - x^*\| = \|\left(x_n - x\right)^*\| = \|x_n - x\|$ y por tanto $x_n^* \to x^*$.
Una relación más fuerte entre la norma y la involución nos la da la condición

$$\|x^* x\| = \|x\|^2.$$

Definición 3.6. *Llamaremos C^*-álgebra a cualquier *-álgebra de Banach que satisfaga la igualdad $\|x^*x\| = \|x\|^2$.*

Si X es cualquier espacio topológico, entonces $C(X)$ será una C^*-álgebra conmutativa con la involución definida por $f^*(x) = \overline{f(x)}$.

3.2 Estudio de $C(K, \mathbb{C})$

3.2.1 Aplicación de Gelfand. Teorema de Gelfand-Naimark

Antes de entrar en la caracterización de los espacios $C(K, \mathbb{C})$, estudiaremos el comportamiento de los funcionales multiplicativos puesto que tendrán gran relevancia en dicha caracterización e introduciremos la famosa aplicación de Gelfand.

Definición 3.7. *Un funcional multiplicativo en $\mathcal{A}$ es un funcional en el sentido ordinario es decir, un elemento del espacio dual $\mathcal{A}^*$ no nulo y que satisface la condición adicional de que*

$$f(xy) = f(x) f(y).$$

.

Teorema 3.2. *Si M es un ideal maximal en $\mathcal{A}$, entonces el álgebra de Banach $\frac{A}{M}$ es un álgebra de división, y por lo tanto es igual al álgebra de Banach $\mathbb{C}$ de los números complejos. El homomorfismo natural $x \to x + M$ de $\mathcal{A}$ sobre $\frac{A}{M} = \mathbb{C}$ asigna a cada elemento x en $\mathcal{A}$ un número complejo $x(M)$ definido por $x(M) = x + M$, con las siguientes propiedades:*

1. $(x + y)(M) = x(M) + y(M)$.
2. $(\alpha x)(M) = \alpha x(M)$.
3. $(xy)(M) = x(M)\, y(M)$.
4. $x(M) = 0 \Leftrightarrow x \in M$.
5. $1(M) = 1$.
6. $|x(M)| \leq \|x\|$.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de ideales maximales del álgebra $\mathcal{A}$. Si x es un elemento dado de $\mathcal{A}$, denotamos por $\hat{x}$ a la función definida en $\mathcal{M}$ por

$$\hat{x} = x(\mathcal{M}),$$

y llamamos $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{x} : x \in \mathcal{A}\}$. A la aplicación que lleva $x \to \hat{x}$ de $\mathcal{A}$ en $\hat{\mathcal{A}}$ la denotaremos como *la aplicación de Gelfand*. Con esta notación podemos enunciar el siguiente teorema como consecuencia prácticamente directa del anterior.

Teorema 3.3. *La aplicación de Gelfand $x \to \hat{x}$ es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $C(\mathcal{M})$ de norma decreciente con las siguiente propiedades.*

(1) La imagen $\hat{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $C(\mathcal{M})$ que separa los puntos de $\mathcal{M}$ y contiene a la identidad de $C(\mathcal{M})$.

(2) Un elemento $x \in \mathcal{A}$ es regular $\Leftrightarrow$ x no pertenece a ningún ideal maximal $\Leftrightarrow$ $\hat{x}(M) \neq 0$ para cada M.

(3) Si x es un elemento de $\mathcal{A}$, entonces $\sigma(x) = \hat{x}(C(\mathcal{M}))$ y $r(x) = \sup |\hat{x}(M)| = \|x\|$.

Demostración. Del apartado 6. del Teorema anterior se tiene que $\hat{x}$ está acotada y que $\|\hat{x}\| = \sup |\hat{x}(M)| \leq \|x\|$, por lo que $x \to \hat{x}$ será una aplicación decreciente en norma. El hecho de que sea un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $C(\mathcal{M})$ se obtiene de manera directa de los apartados 1. , 2. y 3. del teorema anterior. Puesto que $x \to \hat{x}$ es un homomorfismo, obviamente $\hat{\mathcal{A}}$ será una subálgebra de $C(\mathcal{M})$ y se sigue de los apartados 4. y 5. que separa puntos y contiene a la identidad de $C(\mathcal{M})$.

Para probar (2), de la propiedad 4. se tiene que será suficiente con mostrar que x será regular si y solo si no pertenece a ningún M. Es elemental que si un elemento es regular, entonces no puede estar contenido en ningún ideal propio. Para el recíproco, veamos que si x es singular, entonces debe estar contenido en cierto ideal M. La singularidad de x implica que $\mathcal{A}x = \{yx : y \in \mathcal{A}\}$ es un ideal propio que contiene a x y por tanto estará contenido en algún ideal maximal que también contenga a x.

Usaremos (2) para probar (3). Por la definición de espectro, se tiene que $\lambda \in \sigma(x) \Leftrightarrow x-\lambda 1$ es singular $\Leftrightarrow \widehat{(x-\lambda 1)}(M) = 0$ para cierto $M \Leftrightarrow (\widehat{x}-\lambda 1)(M) = 0 \Leftrightarrow \widehat{x}(M) = \lambda$ para cierto M, por lo que $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M})$. La propiedad del radio espectral se obtiene directamente de la definición y de lo dicho anteriormente. □

Por el Teorema 3.2, sabemos que para cada M de $\mathcal{M}$ le corresponde un funcional multiplicativo f_M definido por $f_M(x) = x(M)$. Es importante notar que $M \to f_M$ es una biyección de $\mathcal{M}$ en el conjunto de todos los funcionales multiplicativos. Para su demostración, nos facilitará el trabajo el conocimiento del siguiente lema.

Lema 3.1. Si f_1 y f_2 son funcionales multiplicativos en $\mathcal{A}$ con el mismo núcleo M, entonces $f_1 = f_2$.

Teorema 3.4. *$M \to f_M$ es una biyección del conjunto $\mathcal{M}$ de todos los ideales maximales en el conjunto de todos los funcionales multiplicativos.*

Demostración. Se ve fácilmente que la aplicación será inyectiva pues, para $M_1 \neq M_2$ digamos que por ejemplo $x \in M_1$ pero $x \notin M_2$, entonces $f_{M_1}(x) = 0$ y $f_{M_2}(x) \neq 0$. Para probar la suprayectividad, sea f un funcional multiplicativo arbitrario y consideremos su núcleo $M = \{x : f(x) = 0\}$. Es claro que M será un ideal cerrado propio de $\mathcal{A}$. Además, si estuviera contenido de manera propia en otro ideal propio I, entonces $f(I)$ sería un ideal no trivial en $\mathbb{C}$, lo cual no es posible, por tanto M será maximal. Ya que f y f_M son funcionales multiplicativos con el mismo núcleo, por el lema anterior se tiene que $f = f_M$ quedando así terminada la prueba. □

En algunas de sus aplicaciones más concretas, este teorema se utiliza para abordar el problema algebraico de determinar los ideales maximales en $\mathcal{A}$, reemplazándolo por el problema analítico de encontrar sus funcionales multiplicativos. La importancia que supone para nuestro trabajo actual demostrar que $\mathcal{M}$ es un espacio compacto y Hausdorff es que nos permitirá considerar $\mathcal{M}$ como un subconjunto de $\mathcal{A}^*$. Podemos además, decir que cada funcional multiplicativo f_M tiene norma 1 por los apartados 5 y 6 del Teorema 3.2, por lo que $\mathcal{M}$ es un subespacio de $S^* = \{f : f \in \mathcal{A}^* \text{ y } \|f\| \leq 1\}$.

Teorema 3.5. *El espacio de ideales maximales $\mathcal{M}$ es un espacio compacto Hausdorff.*

Demostración. En vista a los comentarios anteriores y puesto que $\mathcal{S}^*$ es un espacio compacto Hausdorf con respecto a la topología débil-*, será suficiente con mostrar que $\mathcal{M}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{S}^*$. Definiremos el subespacio X de $\mathcal{S}^*$ como

$$X = \bigcap_{x,y\in\mathcal{A}} \{f : f \in \mathcal{S}^* \text{ y } f(xy) = f(x)f(y)\}.$$

Evidentemente X será igual que $\mathcal{M}$ junto al funcional cero. Si llamamos $F_x(f) = f(x)$ a las funciones definidas en $\mathcal{S}^*$ se tiene:

$$\begin{aligned} X &= \bigcap_{x,y\in\mathcal{A}} \{f : f \in \mathcal{S}^* \text{ y } f(xy) - f(x)f(y) = 0\} \\ &= \bigcap_{x,y\in\mathcal{A}} \{f : f \in \mathcal{S}^* \text{ y } F_{xy}(f) - F_x(f)F_y(f) = 0\} \\ &= \bigcap_{x,y\in\mathcal{A}} \{f : f \in \mathcal{S}^* \text{ y } (F_{xy} - F_xF_y)(f) = 0\}. \end{aligned}$$

Puesto que X será cerrado en $\mathcal{S}^*$ y F_1 será continua en X valiendo 1 sobre $\mathcal{M}$ y 0 sobre el funcional cero, $\mathcal{M}$ será cerrado en X y por tanto también en $\mathcal{S}^*$.

□

Una observación que se ha de hacer es que la topología que imponemos en $\mathcal{M}$ es la única que lo convierte en un espacio compacto de Hausdorff en el que todos las funciones $\widehat{x}$ son continuas.

Cuando los Teoremas 3.3 y 3.5 se consideran juntos, el resultado se conoce como el teorema de Representación de Gelfand. En esencia, esto nos dice que cada álgebra de Banach conmutativa es isomorfa a un álgebra de funciones complejas continuas en un cierto espacio compacto Hausdorff.

Hemos comenzado el estudio de espacios de funciones continuas sobre K compacto y Hausdorff, considerando en primer lugar que las funciones toman valores en el cuerpo $\mathbb{C}$, puesto que resultará más sencillo que en el caso real.

Antes de enunciar un Teorema muy importante en relación al espectro definido en los *Preliminares* del capítulo, recordemos el siguiente resultado de Liouville para el caso complejo, que resultará de gran importancia en la demostración del mismo.

Teorema 3.6 (Liouville). *Toda función entera, o lo que es lo mismo, toda función holomorfa definida sobre todo $\mathbb{C}$ y acotada es constante.*

Teorema 3.7. *El espectro complejo $\sigma(x)$ es no vacío.*

Demostración. Sea f un funcional en $\mathcal{A}$, que es un elemento de su espacio dual $\mathcal{A}^*$, y definamos $f(\lambda) = f(x(\lambda))$, la cual será una función continua compleja definida en el conjunto resolvente $\rho(x)$. Por la ecuación resolvente

$$\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = f(x(\lambda)x(\mu)).$$

Si tomamos $\lambda \to \mu$

$$\lim_{\lambda\to\mu} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = f\left(x(\mu)^2\right).$$

Se observa que $f(\lambda)$ tiene derivada en cada punto de la resolvente. Añadiendo que $|f(\lambda)| \leq \|f\| \|x(\lambda)\|$, se tiene que $f(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$.
Como queremos demostrar que $\sigma(x)$ será no vacío, supongamos lo contrario. Por tanto $\rho(x)$ será todo $\mathbb{C}$.
Por el teorema de Liouville 3.6 para el caso complejo, concluimos que $f(\lambda) = 0$ para todo λ. Puesto que esto se tiene para un funcional f arbitrario de $\mathcal{A}$ (por un resultado obtenido del teorema de Hahn-Banach que podemos encontrar en [17, pág. 228, Teorema B]) sabemos que existe un funcional f_0 tal que $f_0\left(x_0\right) = \|x_0\|$ por lo tanto esto implicará que $x(\lambda) = 0$ para todo λ. Pero esto no es posible pues ningún inverso pude ser igual a 0. Por lo tanto llegamos a una contradicción y $\sigma(x)$ será no vacío. □

Se tiene por tanto el principal resultado de Representación de Álgebras de Banach para el cuerpo $\mathbb{C}$.

Teorema 3.8 (Gelfand-Naimark). *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach compleja, conmutativa y con uno, e tal que $\|e\| = 1$ y una involución * tal que*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \; \forall a \in \mathcal{A}. \tag{3.1}$$

Entonces $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfo como *-álgebra a un $C_{\mathbb{C}}(K)$ para cierto espacio compacto y Hausdorff K.

Demostración. Pese a haber obtenido resultados útiles para la demostración del Teorema, no probaremos este resultado ahora, si no que se demostrará en la sección siguiente a través de resultados que esquivan el análisis complejo. Aún así, podemos encontrar la demostración en [17, pg. 325] o en el Rudin de Análisis Funcional [16, pg. 289] □

Ya sabíamos, que si K es un espacio compacto Hausdorff, entonces $C(K)$ es una C^*-álgebra conmutativa. El teorema que acabamos de enunciar, y que se probará más adelante, nos dice que dichas C^*-álgebras son "idénticas" a un espacio $C(K)$ para un compacto K apropiado.

3.2.2 Caracterización de los Ideales en $C(K, \mathbb{C})$

Sea K un espacio compacto Hausdorff y consideremos la C^*-álgebra $C(K)$, donde llamaremos $\mathcal{M}$ al espacio de sus ideales maximales. En relación a la caracterización de C^*-álgebras vista en el apartado anterior, nos interesará caracterizar el conjunto de los ideales maximales de $C(K)$. Comenzaremos observando que a cada punto x en K le corresponde un ideal propio M_x en $C(K)$, definido por:

$$M_x = \{f : f \in C(K), f(x) = 0\}.$$

Se ve fácilmente que M_x será maximal y será por tanto un elemento de $\mathcal{M}$, ya que es el núcleo del funcional multiplicativo f_{M_x} definido por $f_{M_x} = f(x)$, el cual asigna a cada función de $C(K)$ su valor en x. Puesto que K es normal, el lema de Urysohn afirma que, para cada punto $x \neq y$ existe una función $f \in C(K)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) \neq 0$. Esto nos lleva a que la asignación $x \to M_x$ será una aplicación inyectiva de K en $\mathcal{M}$.

Nuestro siguiente paso será probar que esta asignación es además suprayectiva. Para ello, será suficiente con demostrar que si I es cualquier ideal maximal en $C(K)$, entonces existirá un punto en K en el que se anule toda función de I, es decir, será uno de los del conjunto M_x para un cierto x. Supongamos que no, es decir, que para cada punto x en K existe una función f en I tal que $f(x) \neq 0$. Puesto que la función f es continua, x tendrá un entorno en el que f no se anula. Variando x obtenemos un recubrimiento por abiertos de K, y por la compacidad, podemos obtener un subrecubrimiento finito. Sean $f_1, f_2, ..., f_n$ las correspondientes funciones en I correspondientes a cada x_i del subrecubrimiento. Puesto que I es un ideal, la función $g = \sum_{i=1}^{n} f_i \overline{f_i} = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2$ estará también en I. Por la forma en la que se ha construido, cumple claramente que $g(x) > 0$ para cada x. Se sigue por tanto que g es un elemento regular de $C(X)$, y esto contradice el hecho de que g pertenezca al ideal propio I. Por lo tanto, concluimos que $x \to M_x$ es una aplicación biyectiva.

Estas consideraciones nos permiten identificar $\mathcal{M}$ con el conjunto K. Consideramos a K y a $\mathcal{M}$, por tanto, como dos posibles espacios compactos y Hausdorff diferentes, construidos sobre el mismo conjunto de puntos.

Gracias a la función de Gelfand $f \to \widehat{f}$, se tendrá una biyección de $C(K)$ sobre $C(\mathcal{M})$. Se puede ya enunciar el siguiente teorema de caracterización:

Teorema 3.9. *Sea K un espacio compacto Hausdorff y $\mathcal{M}$ el espacio de los ideales maximales de la C^*-álgebra conmutativa $C(K)$. Entonces a cada punto x en K le corresponde un ideal M_x definido por*

$$M_x = \{f : f \in C(K), f(x) = 0\},$$

donde $x \to M_x$ es una biyección de K y $\mathcal{M}$. Con esta función K y $\mathcal{M}$ son iguales como espacios topológicos , $C(K) = C(\mathcal{M})$ y la función de Gelfand es la identidad de $C(K)$.

Nuestro siguiente paso será ampliar esta idea y obtener una caracterización similar de los ideales cerrados en $C(K)$.

Consideramos de nuevo el espacio K de Hausdorff compacto, y comenzaremos con la observación de que cada subconjunto cerrado no vacío F de K se corresponde con un ideal cerrado propio $I(F)$ en $C(K)$, definido como

$$I(F) = \{f : f \in C(K), f(F) = 0\}.$$

Si x es cualquier punto que no esté en F, entonces se sigue de la regularidad de K que existe una función f en $C(K)$ tal que $f(x) \neq 0$ y $f(F) = 0$. Esto muestra que $F \to I(F)$ es una aplicación inyectiva de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados de K en el conjunto de los ideales propios y cerrados de $C(K)$. Probemos que esta aplicación será además suprayectiva, es decir, que cualquier ideal cerrado propio de $C(K)$ proviene de un cierto cerrado F.

Sea I el ideal cerrado y propio de $C(K)$ y supongamos que no es vacío (en el caso de que fuera el conjunto vacío, es claro que proviene del conjunto total K). Definamos

$$F = \{x : f(x) = 0, \forall f \in I\}.$$

Es fácil ver que F es un subconjunto cerrado y propio de K y, puesto que está contenido en algún ideal maximal, se sigue que F será no vacío. Probemos ahora que

$I(F) = I$. Como es obvio que $I \subseteq I(F)$, nuestro problema principal será probar que $I(F) \subseteq I$.

Sea f es cualquier función que se anula en F, debemos mostrar entonces que f pertenece a I. Asumimos que $f \neq 0$, de modo que $\{x : f(x) = 0\}$ es un subconjunto propio de K. En la primera parte de nuestra demostración, supondremos que f se anula en algún conjunto abierto G que contenga a F. Ya que $f \neq 0$, G' no estará vacío y es, por lo tanto, un subespacio compacto de K. Para cada punto $x \in G'$, existe una función g en I tal que $g(x) \neq 0$. Un razonamiento similar al utilizado en un teorema anterior puede aplicarse ahora de nuevo, para obtener un número finito de funciones $g_1, g_2, ..., g_n$ en I con la propiedad de que al menos uno es distinto de cero en cada punto de G'. Definimos ahora una función g_0 como $g_0 = \sum_{i=1}^{n} g_i\overline{g_i} = \sum |g_i|^2$, y observamos que g_0 está en I y que $g_0(x) > 0$ para cada $x \in G'$. Por el teorema de extensión de Tietze, la función cuyos valores en G' están dados por $1/g_0$ se puede extender a una función h en $C(K)$. Vemos por tanto que $g_0 h$ está en I, que es igual a 1 en G', y $f = f g_0 h$, por lo que f está en I.

Se procede ahora a demostrar el caso general. Para cada $\varepsilon > 0$, los conjuntos J y L definidos como $J = \{x : |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$ y $L = \{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ son subconjuntos cerrados y disjuntos de K. J es claramente no vacío, y puesto que $f \neq 0$, L será también no vacío para un ε suficientemente pequeño. Supongamos elegido ε de modo que J y L constituyen un par disjunto de subespacios cerrados de K. Por el lema de Urysohn, existe una función $g \in C(K)$ tal que $g(J) = 0$, $g(L) = 1$ y $0 \leq g(x) \leq 1$ para cada x. Definamos ahora una función h en $C(K)$ como $h = fg$. Observamos que $\|f - h\| = \|f(1-g)\| \leq \varepsilon$.
Es evidente que h se anula en el conjunto $A = \{x : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\}$. Puesto que este es un conjunto abierto que contiene a F, se sigue que h estará en I. Se demuestra así que para cada ε suficientemente pequeño existe una función $h \in I$ tal que $\|f - h\| \leq \varepsilon$ y por ser I cerrado, f estará en I. Podemos enunciar:

Teorema 3.10. *Sea K un espacio compacto de Hausdorff. Entonces existe una correspondencia entre cada conjunto cerrado F de K y un ideal propio y cerrado $I(F)$ en $C(K)$, definido por $I(F) = \{f : f \in C(K), f(F) = 0\}$. Además $F \to I(F)$ es una biyección de los conjuntos no vacíos y cerrados de K en el conjunto de los ideales cerrados de $C(K)$.*

Una consecuencia prácticamente directa de este teorema es el siguiente resultado.

Teorema 3.11. *Si K es un espacio compacto Hausdorff, entonces cada ideal cerrado en $C(K)$ es la intersección de aquellos ideales maximales que lo contienen.*

Demostración. Se conoce de los cursos de álgebra, que la intersección vacía de ideales maximales es el propio $C(K)$, nos centraremos en los ideales cerrados propios. Sea I tal ideal, por el teorema 3.10, $I = I(F)$ para cierto conjunto cerrado no vacío F. Es elemental, que los ideales maximales que contienen a I son precisamente aquellos asociados a los puntos de F. Es por tanto suficiente con observar que una función en $C(K)$ se anula en F si y solo si lo hace en cada punto de F. □

Como conclusión de los teoremas anteriores se puede observar que los puntos y los abiertos de la topología de un espacio de Hausdorff compacto pueden cubrirse por los ideales maximales de $C(K)$. Ya que dichos ideales son elementos algebraicos, se sigue que un espacio como K se determina completamente, tanto como conjunto como espacio topológico, por la estructura algebraica de $C(K)$. Esto nos lleva directamente al Teorema de Banach-Stone, visto desde un punto de vista más algebraico.

Teorema 3.12 (Banach-Stone). *Dos espacios compactos y Hausdorff K y H son homeomorfos si y solo si sus correspondientes álgebras de funciones $C(K)$ y $C(H)$ son isomorfas.*

3.3 Estudio de $C(K)$

La razón por la que se comienza el estudio de las álgebras sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ es debido a la facilidad con la que podemos obtener funcionales multiplicativos gracias al hecho de que el espectro será siempre no vacío. Sobre $\mathbb{R}$ ya no tendremos dicha propiedad por lo que la obtención de funcionales multiplicativos resultará ahora más complicada.

Un Álgebra de Banach conmutativa, compleja y con 1 puede ser representada como un espacio de funciones continuas sobre un compacto Hausdorff con valores en el plano complejo a través de la función de Gelfand. Sin embargo, en general no es posible representar un álgebra de Banach real como un espacio de funciones con valores reales sobre algún espacio compacto de Hausdorff. Por tanto para que esto suceda, resulta natural exigir alguna otra condición adicional.

A continuación trataremos de representar un álgebra de Banach real y conmutativa a través de dos vías; una mediante su "Espacio de estados"; otra a través de su representación sobre el espacio de ideales maximales del álgebra.

3.3.1 Caracterización algebraica

El objetivo de esta sección es dar una caracterización de las Álgebras de Banach reales, que son isométricamente isomorfas a espacios de funciones continuas $C(K)$ para cierto compacto Hausdorff K. A través de esta caracterización algebraica, evitaremos el análisis complejo. Se mostrará, además, que un álgebra de Banach real con identidad es un espacio $C(K)$ si satisface una cierta condición adicional.

Arens, en su publicación sobre la representación de *-álgebras [5, pág. 269–282], dio el primer criterio conocido para concluir si un álgebra de Banach real y conmutativa con uno se trata de un espacio $C(K)$. Lo que se conoce como Teorema de Arens se enuncia como sigue:

Teorema 3.13 (Arens). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach real, conmutativa y con identidad e tal que $\|e\| = 1$. Entonces $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfa al álgebra $C(K)$ para un cierto compacto Hausdorff K si y solo si*

$$\|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\| \ \forall a, b \in \mathcal{A}. \tag{3.2}$$

Los autores Albiac y Kalton, en su texto *"A Characterization of Real $C(K)$-Spaces"* [3] de representación de espacios $C(K)$, establecieron otra caracterización de dichos espacios, pese a no conocer el resultado que ya había dado en en el siglo XX Arens.

Teorema 3.14. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra real de Banach conmutativa, con identidad e tal que $\|e\| = 1$. Entonces $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfa al álgebra $C(K)$ para cierto compacto Hausdorff K si y solo si*

$$\|a^2 - b^2\| \leq \|a^2 + b^2\| \ \forall a, b \in \mathcal{A}. \tag{3.3}$$

La "ventaja" de esta segunda caracterización es que su prueba solo requiere de la estructura del álgebra de Banach real y no necesita de ningún resultado de funciones complejas como lo hace el Teorema de Arens 3.13. Éste, será el Teorema de Caracterización principal de la sección. Para su demostración serán necesarios los siguientes resultados y conceptos previos:

1. La bola unidad cerrada $B_{\mathcal{A}^*}$ del espacio dual $\mathcal{A}^*$ es un conjunto convexo y compacto con la topología débil-* de $\mathcal{A}^*$.
2. Se tiene una representación natural de los elementos de $\mathcal{A}$ como funciones continuas en $B_{\mathcal{A}^*}$ a través de la aplicación dada por $\widehat{a}(\phi) = \phi(a) \ \ \forall \phi \in \mathcal{A}^*$. Esta aplicación es una isometría lineal en $C\left(B_{\mathcal{A}^*}\right)$.
3. Denotaremos por $\mathcal{A}_+ = \overline{\{a^2 : a \in \mathcal{A}\}}$.
4. Será importante en este apartado el espacio de estados de $\mathcal{A}$ que denotaremos por $\mathcal{S} = \{\phi \in \mathcal{A}^* : \|\phi\| = \phi(e) = 1\}$. Del teorema de Hahn-Banach de tiene que $\mathcal{S}$ es no vacío y en general será convexo y compacto en la topología débil-* de $\mathcal{A}^*$.

Se tienen las siguientes propiedades para el álgebra de Banach real $\mathcal{A}$, conmutativa y con identidad de norma 1.

Proposición 3.1. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach real, conmutativo y con identidad e de norma 1 entonces tiene las siguientes propiedades:

1. Si $x, y \in \mathcal{A}_+$, entonces $xy \in \mathcal{A}_+$.
2. Si $x \in \mathcal{A}_+$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda x \in \mathcal{A}_+$.
3. Si $x \in \mathcal{A}$ es tal que $\|x\| \leq 1$, entonces $e + x \in \mathcal{A}_+$.
4. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$.

Lema 3.2. Supongamos que $\mathcal{A}$ satisface la condición del Teorema 3.14. Entonces $\varphi(x) \geq 0$ para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}$ y $x \in \mathcal{A}_+$.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{A}_+$ con $\|x\| = 1$. Por la Proposición 3.1 anterior, $e - x \in \mathcal{A}_+$ y por tanto $\|e - x\| \leq \frac{1}{2}(\|(e-x) - x\| + \|(e-x) + x\|) \leq \|(e-x) + x\| = 1$. Así que, para $\varphi \in \mathcal{S}$ se tiene

$$1 = \|\varphi\| \geq \varphi(e - x) = 1 - \varphi(x),$$

de donde se obtiene $\varphi(x) \geq 0$. □

Diremos que un punto x de un conjunto convexo de $\mathcal{S}$ es un punto extremo de $\mathcal{S}$ se cumple que si $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ con $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$ y $0 < \lambda < 1$, entonces $x = x_1 = x_2$. Denotaremos el conjunto de puntos extremos como $\partial_e \mathcal{S}$. Por el Teorema de Krein-Milman que podemos encontrar en [16, pág. 75], dicho conjunto de puntos extremos de $\mathcal{S}$ será no vacío.

Lema 3.3. Supongamos que $\mathcal{A}$ satisface las condiciones del Teorema 3.14. Sea K el conjunto de todos los estados multiplicativos de $\mathcal{A}$. Entonces K es un espacio compacto y Hausdorff en la topología débil-* de $\mathcal{A}^*$ que contiene al conjunto $\partial_e \mathcal{S}$.

Demostración. Es trivial que el conjunto K es un subespacio cerrado de la bola unidad de $\mathcal{A}^*$, por lo que K resulta ser compacto para la topología débil-*.

Puesto que $\mathcal{S}$ es un conjunto convexo y compacto, el Teorema de Krein-Milman nos garantiza que $\partial_e \mathcal{S}$ será no vacío. Supongamos que $\varphi \in \partial_e \mathcal{S}$, entonces podemos afirmar que $\varphi \in K$. Ya que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$, bastará con mostrar que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para cualesquiera $x \in \mathcal{A}_+$ e $y \in \mathcal{A}$.
Consideramos $x \in \mathcal{A}_+$ con $\|x\| \leq 1$ e $y \in \mathcal{A}$ con $\|y\| \leq 1$. Por la Proposición 3.1, $e \pm y \in \mathcal{A}_+$. Por tanto, de nuevo por la Proposición 3.1 y el Lema 3.2,

$$\varphi(x(e \pm x)) \geq 0,$$

lo cual implica que

$$|\varphi(xy)| \leq \varphi(x). \tag{3.4}$$

De manera similar, $e - x \in \mathcal{A}_+$, por lo que

$$|\varphi((e-x)y)| \leq 1 - \varphi(x). \tag{3.5}$$

Notemos, que ambas desigualdades 3.4 y 3.5 sirven para un $y \in \mathcal{A}$ arbitrario.
Si $\varphi(x) = 0$, de la desigualdad 3.4 se obtiene que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. De manera similar ocurre si $\varphi(x) = 1$, usando la desigualdad 3.5 se obtiene $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Si $0 < \varphi(x) < 1$, definimos ψ_1 y ψ_2 en $\mathcal{A}$ como sigue

$$\psi_1(y) = \varphi(x)^{-1}\varphi(xy)$$

$$\psi_2(y) = (1 - \varphi(x))^{-1}\varphi((e-x)y).$$

Usando 3.4 y 3.5 vemos que ψ_1 y ψ_2 son estados. Podemos escribir

$$\varphi = \varphi(x)\psi_1 + (1 - \varphi(x))\psi_2.$$

Puesto que φ lo hemos considerado como un punto extremo de $\mathcal{S}$, se tendrá que $\psi_1 = \varphi$ y, por tanto,

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \text{ con } x \in \mathcal{A}_+, \ y \in \mathcal{A}.$$

□

Después de enunciar estas propiedades ya estamos en condiciones de probar el Teorema 3.14.

Demostración (Teorema 3.14). Claramente, todo espacio $C(K)$ verifica la desigualdad 3.3 por lo que nos centraremos en la otra dirección de la desigualdad.
Veamos en primer lugar dos deducciones directas de las hipótesis:

$$\|x-y\| \leq \|x+y\| \ \left(x, y \in \mathcal{A}_+\right).$$

Así que, si $x, y \in \mathcal{A}_+$ también se tiene que

$$\|x\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x-y\|+\|x+y\|\right) \leq \|x+y\|.$$

Supongamos por tanto que $\mathcal{A}$ satisface la condición del enunciado.
Definamos la aplicación $J : \mathcal{A} \to C(K)$ dada por

$$Jx(\varphi) = \varphi(x).$$

Claramente, J es un homomorfismo de álgebras, $J(e) = 1$, y $\|J\| = 1$. Para probar que J será una isometría necesitamos el siguiente resultado.

Lema 3.4. Supongamos que $x \in \mathcal{A}$ es tal que $\|Jx\| \leq 1$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $t_\varepsilon > 0$ que satisface

$$\|e - t_\varepsilon(1+\varepsilon)e - t_\varepsilon x\| \leq 1.$$

Si este fuera falso, existiría $x \in \mathcal{A}$ con $\|Jx\|_{C(K)} \leq 1$ de manera que para cierto $\varepsilon > 0$ tendríamos

$$\|e - t(1+\varepsilon)e - tx\| \geq 1 \text{ para } t \geq 0.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach, podemos encontrar un funcional lineal φ con $\|\varphi\| = 1$ y

$$\varphi(e - t(1+\varepsilon)e - tx) \geq 1 \text{ para } t \geq 0.$$

En particular, $\varphi \in \mathcal{S}$ y $\varphi((1+\varepsilon)e + x) \leq 0$. Por tanto $|\varphi(x)| \geq 1+\varepsilon$. Ahora, usando el teorema de Krein-Milman y el Lema 3.3 , deducimos que existirá $\tilde{\varphi} \in K$ cumpliendo $|\tilde{\varphi}(x)| \geq 1+\varepsilon$. Esto contradice el hecho de que $\|Jx\|_{C(K)} \leq 1$.

Utilizando este resultado junto a la Proposición 3.1 vemos que si $\|Jx\| \leq 1$ implica que $(1+\varepsilon)e + x \in \mathcal{A}_+$ para todo $\varepsilon > 0$, así que $e + x \in \mathcal{A}_+$. Aplicando el mismo razonamiento a $-x$ se tiene que $e - x \in \mathcal{A}_+$. Por tanto:

$$\|x\| = \frac{1}{2}\| (e + x) - (e - x) \| \leq \frac{1}{2}\| (e + x) + (e - x) \| = 1.$$

Por lo que finalmente J es un isomorfismo isométrico ya que $J(\mathcal{A})$ será todo $C(K)$ por el Teorema de Stone-Weierstrass 2.5. □

3.3.2 Representación a través de Ideales Maximales

Como hemos comentado al comienzo de la sección y al contrario de lo que ocurría en el caso complejo, un elemento del álgebra de Banach real no tiene por que tener espectro no vacío. Sin embargo, el espectro complejo definido como

$$\sigma_{\mathbb{C}}(x) = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : (x-s)^2 + t^2 \text{ singular en } \mathcal{A}\}$$

vimos que sí será siempre no vacío en $\mathcal{A}$.

Nos interesarán los homomorfismos en $\mathcal{A}$, especialmente aquellos que tengan valores reales. Supongamos que ϕ es un homomorfismo real no nulo con valores reales, entonces su núcleo M, es un ideal maximal en $\mathcal{A}$. Recíprocamente, si M es un ideal maximal, el álgebra cociente $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{M}}$ es un álgebra de división (es decir, cada elemento distinto de cero tiene un inverso) y por lo tanto será isomorfo a $\mathbb{R}$ como se demuestra en el Teorema 3.2.

El espacio de homomorfismos X, viene dado por la topología usual de Gelfand y $\mathcal{A}$ se representa como un espacio de funciones continuas en X a través de $a \to \widehat{a}$ donde $\widehat{a}(x) = x(a)$. Estamos interesados en encontrar condiciones en $\mathcal{A}$ donde esta representación proporcione funciones reales. Es por ello que necesitamos enunciar los siguientes resultados previos que se utilizan para demostrar el Teorema de Representación de este apartado.

Lema 3.5. Para cada homomorfismo en $\mathcal{A}$ se tiene que toma valores reales si y solo si $\sigma_{\mathbb{C}}(a) = \sigma(a)$ para cada a en $\mathcal{A}$. Además $(s,t) \in \sigma_{\mathbb{C}}(a)$ si y solo si $\phi(a) = s + it$ para un cierto homomorfismo ϕ, y

$$\sup_{(s,t)\in\sigma_{\mathbb{C}}(a)} \left(s^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\widehat{a}\|_{\infty,X} = r(a),$$

donde $\|\widehat{a}\|_{\infty,X} = \sup_{x\in X} |\widehat{a}(x)|$.

Demostración. Supongamos que $\phi(a) = s + it$, donde $t \neq 0$ para cierto homomorfismo ϕ y $a \in \mathcal{A}$, entonces

$$\phi\left((a-s)^2 + t^2\right) = (\phi(a) - s)^2 + t^2 = 0,$$

por lo que $(a-s)^2 + t^2$ no será invertible en $\mathcal{A}$. Recíprocamente, supongamos que $(a-s)^2 + t^2$ con $t \neq 0$ es no invertible. El ideal $\left((a-s)^2 + t^2\right)\mathcal{A}$ está contenido en un ideal maximal y por tanto, existe un homomorfismo ϕ en $\mathcal{A}$, que se anula en dicho ideal maximal. En particular

$$\phi\left((a-s)^2\right) + t^2 = \phi\left((a-s)^2 + t^2\right) = 0.$$

Por lo que $\phi(a-s)$ no es real.
Si $(a-s)^2 + t^2$ es no invertible, el ideal $\left((a-s)^2 + t^2\right)\mathcal{A}$ es un ideal en $\mathcal{A}$ por lo que $\phi\left((a-s)^2 + t^2\right) = 0$ para un cierto homomorfismo ϕ. Se sigue inmediatamente que $\phi(a-s) = it$ por lo que $\phi(a) = s + it$. La última propiedad se sigue de lo anterior y de la igualdad del radio espectral

$$\sup_{(s,t)\in\sigma_{\mathbb{C}}(a)} \left(s^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}} = r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

□

Proposición 3.2. Supongamos que $\mathcal{A}$ satisface la desigualdad

$$\|a^2\| \leq k\|a^2 + b^2\| \;\forall a, b \in \mathcal{A}.$$

con k una constante positiva. Entonces

$$\|a\|^2 \leq 4k^2\|a^2\| \;\forall a \in \mathcal{A}.$$

Demostración. Para $a \in \mathcal{A}$ se tiene la siguiente cadena de desigualdades

$$\|a\| = \frac{1}{4}\|(e+a)^2 - (e-a)^2\| \leq \frac{1}{4}\|(e+a)^2 + (e-a)^2\|$$

$$\leq \frac{k}{4}(\|(e+a)^2 - (e-a)^2\| + \|(e-a)^2 - (e+a)^2\|) \leq \frac{1}{4}\|(e+a)^2 + (e-a)^2\|$$

$$= k\|e + a^2\|) \leq k(1 + \|a^2\|).$$

Si reemplazamos a por ta, donde t es cualquier número positivo, vemos que $a^2 = 0$ implica que $a = 0$. Por tanto, si $\|a^2\| \leq 1$ entonces $\|a\|^2 \leq 4k^2$ y por tanto se tiene la desigualdad que buscábamos. □

Lema 3.6. Supongamos que se tiene un elemento $a \in \mathcal{A}$ cuyo espectro complejo no es un subconjunto de la recta real. Entonces existe un subconjunto F de X y elementos b y c en $\mathcal{A}$ tales que $\widehat{b} = 1$ en F, $|\widehat{b}| < 1$ en $X \setminus F$, y $1 + \widehat{c}^2 = 0$ en F.

Demostración. Podemos consultar la demostración en el artículo de Albiac y Briem [1] □

Proposición 3.3. Supongamos que $\mathcal{A}$ satisface

$$r\left(a^2\right) \leq kr\left(a^2 + b^2\right)\ \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Entonces el espectro complejo de a será un subconjunto no vacío del intervalo $(-r\left(a\right), r\left(a\right))$.

Demostración. Resulta prácticamente directo del lema anterior. Supongamos que el espectro no cumple la condición del enunciado. Entonces, sean F, b y c como en el lema 3.6. De la desigualdad del enunciado obtenemos que

$$r(b^{2n}) \leq kr(b^{2n} + u^2 b^{2n}) = kr(b^{2n}(1 + c^2)).$$

Puesto que $1 + \widehat{c}^2 = 0$ en F, y $|\widehat{b}| < 1$ en $X \setminus F$, deducimos que el lado izquierdo de la desigualdad tiende a cero cuando n aumenta. Sin embargo, el lado derecho es igual a 1 puesto que $r(b) = 1$, por lo que llegamos a una contradicción. □

Tendremos así una representación de $\mathcal{A}$ como un espacio de funciones continuas con valores reales en el espacio X de homomorfismos en $\mathcal{A}$ si se cumple la Proposición 3.2. Si se satisface $\|a^2\| \leq k\|a^2 + b^2\|$ podemos afirmar el siguiente teorema.

Teorema 3.15. *Supongamos que $\mathcal{A}$ satisface*

$$\|a^2\| \leq k\|a^2 + b^2\|\ \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Entonces $\mathcal{A}$ es isomorfo a un cierto espacio $\mathbf{C}\left(K\right)$.

Demostración. Debemos mostrar que la transformación de Gelfand es un isomorfismo. Por el Teorema de Stone-Weierstrass, puesto que $r\left(a\right) = \sup_{x \in X} |\widehat{a}\left(x\right)|$, es suficiente con probar que la semi-norma del radio espectral es equivalente a la norma dada. Tomemos $a \in \mathcal{A}$. Por la Proposición 3.2

$$\|a\|^{2^n} \leq \left(4k^2\right)^{2^n} \|a^{2^n}\|.$$

Tomando raíces y tendiendo $n \to \infty$, obtenemos

$$\|a\| \leq 4k^2 r\left(a\right).$$

Puesto que $r\left(a\right) \leq \|a\|$ se tiene lo que buscamos. □

3.3.3 Representación de Gelfand-Naimark

En el artículo de Albiac y Kalton de caracterización de espacios $C(K)$ reales [3], se muestra que la representación de Gelfand-Naimark de C*-álgebras conmutativas y complejas se puede obtener como resultado del Teorema 3.14 visto en la caracterización algebraica. Se tiene el siguiente enunciado para el cuerpo $\mathbb{C}$.

Teorema 3.16 (Gelfand-Naimark 3.8). *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach compleja, conmutativa y con uno, e tal que $\|e\| = 1$ y una involución * tal que*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \ \forall a \in \mathcal{A}. \tag{3.6}$$

Entonces $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfo como *-álgebra a un $C_{\mathbb{C}}(K)$ para cierto espacio compacto y Hausdorff K.

Demostración. Observemos en primer lugar que la ecuación 3.6 implica que la involución es una isometría en $\mathcal{A}$:

$$\|a^*\|^2 = \|(a^{**})\,a^*\| = \|aa^*\| = \|a\|^2.$$

Sea $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ la subálgebra cerrada de $\mathcal{A}$ que contiene a todos los elementos *auto-adjuntos* de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ será un álgebra de Banach real. Mostremos que satisface las condiciones del Teorema 3.14. Se tiene que si $a, b \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ entonces $\|(a+ib)^2\| = \|(a-ib)^2\|$, de lo que se sigue que

$$\|a^2 - b^2\| = \frac{1}{2}\|(a+ib)^2 + (a-ib)^2\| \le \|(a+ib)^2\| \le \|(a+ib)\|^2$$

$$= \|(a+ib)(a-ib)\| = \|a^2+b^2\|.$$

Por tanto podemos obtener un isomorfismo isométrico de álgebras de Banach reales $J : \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \to C(K) = C_{\mathbb{R}}(K)$ para cierto K espacio compacto. La aplicación J se puede extender trivialmente a un isomorfismo de $*$-álgebras $\tilde{J} : \mathcal{A} \to C_{\mathbb{C}}(K)$. Finalmente, si $x = a + ib$ con $a, b \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ se tiene

$$\|x\|^2 = \|a^2+b^2\| = \|\tilde{J}\left(a^2+b^2\right)\| = \|\tilde{J}x\|^2,$$

por lo que $\tilde{J}$ es una isometría. □

La prueba de este Teorema dada en [3] , también funciona si requerimos en su lugar que la norma solo sea multiplicativa para productos a^*a, es decir

$$\|a^*a\| = \|a\|\|a^*\| \ \forall a \in \mathcal{A}. \tag{3.7}$$

Se tiene fácilmente que 3.6 $\Rightarrow$ 3.7 ya que para $a \in \mathcal{A}$, $\|a\|^2\|a^*\|^2 = \|a^*a\|\|(a^*)^*\, a^*\| = \|aa^*\|^2$. La implicación contraria resulta más complicada.
Sin embargo, la ventaja de 3.6 frente a la condición C*-débil más natural de 3.7 es que la primera da inmediatamente que $\|a\| = \|a^*\|$ para cada $a \in \mathcal{A}$, y de aquí la prueba del Teorema puede ser completada, evitando el uso de análisis complejo.

Obsérvese que la condición de que sea C^* no es suficiente para garantizar la representación de la *-álgebra de Banach real $\mathcal{A}$ como un espacio $C(K)$. El problema es que, al contrario de lo que ocurría en el caso complejo, no se puede deducir la invertibilidad de los elementos de la forma $1 + x^*x$ de los axiomas, por lo que debe ser incluido en sus hipótesis.

4 Teorema de Amir-Camberm

Introducción

Sean K y H espacios compactos Hausdorff y $C(K)$ y $C(H)$, los correspondientes espacios de Banach de las funciones continuas tomando valores reales definidas sobre K y H con la correspondiente norma del máximo. Supongamos que existe un isomorfismo lineal ϕ de $C(K)$ en $C(H)$. Si ϕ es una isometría, entonces por el teorema de Banach-Stone 2.8, K y H serán homeomorfos. No podemos debilitar la condición a que ϕ sea simplemente un isomorfismo lineal topológico, pues en ese caso K y H no tendrían por que ser homeomorfos. Se ve claro en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Supongamos K el intervalo $[0,1]$ y H el círculo unidad $H = \{\exp^{2\pi i x} : 0 \leq x < 1\}$ junto con el punto aislado 0.
Para $f \in C(K)$ definimos ϕf como:

$$(\phi f)(0) = f(1) - f(0),$$

$$(\phi f)\left(\exp^{2\pi i x}\right) = f(x) + \left(\frac{1}{2} - x\right)[f(1) - f(0)].$$

ϕ será un isomorfismo de $C(K)$ en $C(H)$, sin embargo K y H no son homeomorfos. ($\|\phi\| = 2$, $\|\phi^{-1}\| = \frac{3}{2}$.)

En este capítulo veremos, que si añadimos alguna otra condición además de la existencia de un isomorfismo lineal ϕ de $C(K)$ en $C(H)$, podremos conservar que K y H sean homeomorfos.

4.1 Distancia de Banach-Mazur. Teorema de Amir-Camberm

Definición 4.1. *Si X e Y son dos espacios Banach isomorfos, se define su distancia de Banach-Mazur como:*

$$d(X,Y) = \text{ínf}\{\|T\|\|T^{-1}\| : T : X \to Y \text{ es un isomorfismo }\}.$$

Pese que en su definición, nos referimos a ella como distancia, realmente no satisface la desigualdad triangular.
Sin embargo, d, satisface la siguiente desigualdad triangular multiplicativa

$$d(X,Z) \leq d(X,Y)\, d(Y,Z)$$

cuando X, Y y Z son isomorfos.
Si X e Y son espacios isométricos entonces $d(X,Y) = 1$. El recíproco, por el contrario no será cierto para espacios de dimensión infinita pero sí lo será para dimensión finita.

Proposición 4.1. Si X tiene dimensión finita y $d(X,Y) = 1$ entonces X es isométrico a Y.

Demostración. Tomemos $T_n : X \to Y$ tal que $\|T_n\|\|T_n^{-1}\| \to 1$. Multiplicando T_n por un escalar apropiado, podemos asumir que $\|T_n\| = 1$ para $n = 1, 2, \ldots$. Puesto que $L(X,Y)$ y $L(Y,X)$ son espacios de Banach de dimensión finita, tomando una subsucesión podemos asumir que $\|T_n - T\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\|T_n^{-1} - S\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ para ciertas $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,X)$. Obviamente T será invertible y $T^{-1} = S$. Además, $\|T\| = \|S\| = 1$ y por tanto T es la isometría que andábamos buscando. □

Amir, en el año en el que escrbió su artículo desconocía la existencia de espacios no homeomorfos K y H tales que su distancia de Banach-Mazur satisficiera $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < 3$. En el artículo de 1975 [9], Cohen dio ejemplos de tales espacios con distancia de Banach-Mazur $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| = 2$. A pesar de no conocer en ese momento ejemplos concretos, pudo enunciar el siguiente resultado, generalización del teorema de Stone, al que también llego independientemente Camberm [8] en 1967.

Teorema 4.1. *Si K y H son espacios de Hausdorff compactos, y ϕ es un isomorfismo lineal de $C(K)$ en $C(H)$ satisfaciendo $d(K,H) < 2$, entonces K y H son homeomorfos.*

Seguiremos la prueba de Amir. Tanto en la demostración del teorema, como en los siguientes resultados ϕ será un isomorfismo de $C(K)$ en $C(H)$ y se denotará $\|\phi\| = \alpha$, $\|\phi^{-1}\| = \beta$ asumiendo que $\alpha\beta < 2$. Denotaremos también $C_+(K) = \{f \in C(K) : f \geq 0, \|f\| = 1\}$ y de manera similar se define $C_+(H)$. $\mathbb{1}$ será la función constantemente 1.

Antes de ser capaces de demostrar el teorema necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 4.1. Existe un isomorfismo $\widehat{\phi}$ de $C(K)$ en $C(H)$ satisfaciendo:

1. $\|\widehat{\phi}\| = \alpha$
2. $\|\widehat{\phi}^{-1}\| = \beta$
3. $\left(\widehat{\phi}\right)(y) \geq \alpha(2 - \alpha\beta)$ para cada $y \in H$
4. $\left(\widehat{\phi}^{-1}\right)(x) \geq \beta(2 - \alpha\beta)$ para cada $x \in K$.
5. Para cada $f \in C_+(K)$ existe algún $y \in H$ tal que $\left(\widehat{\phi} f\right)(y) \geq \dfrac{1}{\beta}$.
6. Para cada $g \in C_+(H)$ existe algún $x \in K$ tal que $\left(\widehat{\phi}^{-1} g\right)(x) \geq \dfrac{1}{\alpha}$.

Demostración. Podemos encontrar la demostración del lema en el artículo de Amir [4]. □

Observación 4.1. Amir ilustra mediante un ejemplo la necesidad de que $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < 2$ para garantizar que $|\phi\mathbb{1}| > 0$.

Sean K, H , $\widehat{\phi}$ como en el lema 4.1 , definiremos para $f \in C_+(K)$ el siguiente conjunto:

$$Pf = \{y \ : \widehat{\phi}\left(f - \frac{1}{2}\right)(y) \geq -\frac{1}{12}\alpha(2 - \alpha\beta)\}.$$

De manera análoga se define para $g \in C_+(H)$:

$$Qg = \{x \ : \widehat{\phi}^{-1}\left(g - \frac{1}{2}\right)(x) \geq -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)\}.$$

Lema 4.2. Si $f_1, f_2 \in C_+(K)$ y $f_1 \leq f_2$, entonces $\{y \ : \left(\widehat{\phi} f_1\right)(y) \geq \dfrac{1}{\beta}\} \subset int\ Pf_2$

Demostración. Asumamos que $\left(\widehat{\phi} f_1\right)(y_0) \geq 1/\beta$.
Si $\widehat{\phi}\left(1 - f_2\right)(y_0) < \left(\widehat{\phi}\frac{1}{2}\right)(y_0)$, entonces tenemos que

$$\widehat{\phi}\left(f_2 - \frac{1}{2}\right)(y_0) = \widehat{\phi}\left[\frac{1}{2} - (1 - f_2)\right](y_0) > 0.$$

Si $\widehat{\phi}\left(1 - f_2\right)(y_0) \geq \left(\widehat{\phi}\frac{1}{2}\right)(y_0)$, consideramos la función $F = 1 - 2\left(f_2 - f_1\right)$ que tiene norma ≤ 1. Se tiene entonces que

$$\alpha \geq \widehat{\phi} F(y_0) = \widehat{\phi}\left[f_1 - (f_2 - f_1) + (1 - f_2)\right](y_0) \geq \frac{1}{\beta} + \left(\widehat{\phi}\frac{1}{2}\right)(y_0) - \widehat{\phi}\left(f_2 - f_1\right)(y_0).$$

Por lo tanto

$$\widehat{\phi}\left(f_2 - \frac{1}{2}\right)(y_0) = \widehat{\phi}\left[f_1 + (f_2 - f_1) - \frac{1}{2}\right](y_0) \geq \frac{2}{\beta} - \alpha > 0.$$

Y se tiene que en ambos casos $\widehat{\phi}\left(f_2 - \frac{1}{2}\right)(y_0) > 0$. □

Lema 4.3. Dado cualquier $x_0 \in int\, Qg$, existe cierta $f \in C_+(K)$ tal que :

1. $f(K \setminus Qg) = 0$
2. $f = 1$ en un entorno de x_0
3. $\{y : g(y) = 1\} \subset \operatorname{int} Pf$
4. $Pf \subset \{y : g(y) > 0\}$

Demostración. Sea $f_1 \in C_+(K)$ tal que $f_1(K \setminus Qg) = 0$ y $f_1 = 1$ en un entorno de x_0. Definimos $f = \max\{f_1; \frac{2}{\beta}\widehat{\phi}^{-1}\left(g - \frac{1}{2}\right)\}$. f obviamente satisface el primer y segundo apartado y pertenece a $C_+(K)$. Puesto que

$$0 \leq \frac{1}{2}\beta f - \widehat{\phi}^{-1}\left(g - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta),$$

Se tiene lo siguiente:

$$|\frac{1}{2}\beta\left(f - \frac{1}{2}\right) - \widehat{\phi}^{-1}\left(g - \frac{1}{2}\right)| \leq \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$$

$$|\frac{1}{2}\beta\widehat{\phi}\left(f - \frac{1}{2}\right) - \left(g - \frac{1}{2}\right)| \leq \frac{1}{4}\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha\beta(2 - \alpha\beta).$$

Así que, si $g(y) = 1$, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\beta\widehat{\phi}\left(f - \frac{1}{2}\right)(y) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha\beta - \frac{1}{12}\alpha\beta(2 - \alpha\beta) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\alpha\beta\right)(2 - \alpha\beta) > 0.$$

Quedando el tercer apartado probado. Si $g(y) = 0$

$$\frac{1}{2}\beta\widehat{\phi}\left(f - \frac{1}{2}\right)(y) \leq -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\alpha\beta\right)(2 - \alpha\beta) < -\frac{1}{2}\beta\frac{1}{12}\alpha(2 - \alpha\beta),$$

completando la prueba. $\square$

Después de enunciar todos los lemas anteriores, ya estamos en condiciones de probar el Teorema de Amir-Cambern 4.1.

Demostración (Teorema 4.1). Para $x \in K$ se define:

$$\sigma(x) = \cap\{Pf : f \in C_+(K), f = 1 \text{ en un entorno de } x\}$$

Si $f_i(x) = 1$ para $i = 1, ..., n$ entonces, gracias al lema 4.2

$$\{y : \left(\widehat{\phi}\,\text{mín}\, f_i\right)(y) \geq \frac{1}{\beta}\} \subset \cap\{Pf_i : i = 1, ..., n\}$$

y por la compacidad, $\sigma(x)$ es no vacío. Sea $y_1 \neq y_0$ tomamos $g \in C_+(H)$ tal que $g(y_1) = 1, g(y_0) = 0$. Si $\widehat{\phi}^{-1}\left(g - \frac{1}{2}\right)(x) > -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$ aplicando el lema 4.3 obtenemos $f \in C_+(K)$ que vale 1 en un entorno de x, y por el apartado 4, $y_0 \notin Pf$.
Si $\widehat{\phi}^{-1}\left(g - \frac{1}{2}\right)(x) \leq -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$ aplicando el lema 4.3 a la función $1 - g$ para obtener $f \in C_+(K)$ que vale 1 en un entorno de x e $y_1 \notin Pf$. Así probamos que $\sigma(x)$ se compone de un solo punto. Dado un entorno N de $\sigma\left(x_0\right)$ usamos el hecho de que es un conjunto compacto para encontrar $f_1, ..., f_n \in C_+(K)$ tales que $f_i = 1$ en ciertos entornos U_i de x_0 y $\cap\{Pf_i : i = 1, ..., n\} \subset N$. Si $x \in \cap\{U_i : i = 1, ..., n\}$ entonces $\sigma(x) \subset \cap\{Pf_i : i = 1, ..., n\} \subset N$. Se muestra así que σ es continua.

Sea ρ la función análoga de H en K. Si $g \in C_+(Y)$ vale 1 en un entorno de $\sigma(x)$, entonces $x \in Qg$. En otro caso, $x \in intQ(1 - g)$, y por el lema 4.3 se obtiene $f \in C_+(x)$ tal que $\sigma(x) \in Pf$ y $(1 - g)Pf > 0$ lo cual es imposible. Por tanto se tiene que $x = \rho\sigma(x)$ y así σ será inyectiva, suprayectiva y homemorfismo. $\square$

Observación 4.2. Junto con el teorema de Milutin en el que se demuestra que si K y H son espacios métricos compactos no numerables, entonces $C(K)$ y $C(H)$ son isomorfos, se completaría la clasificación de las clases de isomorfismos de los espacios $C(K)$ para K espacio métrico compacto numerable con Bessaga y Pełczyński.

5 Conclusiones y Propuestas de Futuro

5.1 Principales Resultados

En el estudio realizado, se han abarcado las ramas del Álgebra, Análisis Matemático y Topología, y se han obtenido numerosos resultados en torno a los espacios de funciones continuas sobre compactos. Para sintetizar todas las ideas y conclusiones que se derivan de este proyecto, se tratará de reunir en unas líneas aquellos resultados más importantes, obtenidos a lo largo del mismo.

1. Cuando el espacio K es considerado como un espacio compacto Hausdorff, automáticamente K es normal. De este hecho, se obtienen las equivalencias entre espacios normales y aquellos que cumplan la propiedad del lema de Urysohn 1.3 y del Teorema de Extensión de Tietze 1.5. Se deriva de este resultado la existencia de multitud de funciones continuas sobre K.

2. $C(K)$, con la norma uniforme usual $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$, adquiere un estructura de álgebra de Banach.

3. Gracias al teorema de Stone-Weierstrass podemos identificar, de manera isomorfa, cualquier subálgebra cerrada de $C(K)$ que separe puntos y contenga una función constante no nula con el espacio completo $C(K)$. En el caso complejo, se debe añadir la condición de que el álgebra además contenga a la conjugada de cada función f.

4. Para K espacio métrico compacto, podemos establecer ciertas relaciones entre éste y dos compactos muy socorridos, el conjunto de Cantor $2^{\mathbb{N}}$ y el cubo de

Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Se muestra así, que K puede ser encajado en el cubo de Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$ con Γ numerable y, además, es imagen continua del conjunto de Cantor. Serán equivalentes las propiedades de K metrizable, $C(K)$ separable y $K \hookrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}$.

5. Los espacios compactos métricos anteriores, satisfacen la hipótesis del continuo. En el caso no numerable, $C(K)$ será universal para los espacios separables. De esta idea se obtiene el conocido Teorema de Milutin 2.9 que se contrapone con el Teorema de Banach-Stone 2.8 en el sentido de que, si se "suaviza" la condición de isomorfismo isométrico a ismorfismo lineal, los espacios K y L no tendrán por que ser homeomorfos. Gracias a los Teoremas de Amir y Camberm, añadiendo las condición adicional $d(K,L) < 2$, se mantendrá el homeomorfismo.

6. Del estudio algebraico de $C(K)$ y $C(K,\mathbb{C})$ a través de la aplicación de Gelfand podremos determinar K a partir de los ideales maximales y los ideales cerrados de su espacio de funciones continuas. Resultados importantes en este sentido son los Teoremas de Representación de Albiac y Kalton para el caso real y el Teorema de Representación de Gelfand-Naimark para el caso complejo.

5.2 Trabajos Futuros

Debido a la limitación en la extensión de esta memoria y al hecho de que involucra conocimientos que se alejan demasiado de las enseñanzas del Grado, se ha considerado hacer simplemente, una breve mención de los siguientes resultados. La razón por la que merecen dicha mención se debe al gran interés que tienen, en relación al estudio de Álgebras de Banach y a la Representación de los espacios $C(K)$ que se ha llevado a cabo en este proyecto.

5.2.1 El espacio $\mathcal{L}_\infty(\mu)$. Lifting

Si (Ω, Σ, μ) es cualquier espacio de medida, entonces el espacio de Banach $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ de las clases de funciones medibles esencialmente acotadas es un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Puesto que podemos aplicarle los teoremas de caracterización de álgebras de Banach conmutativas vistos anteriormente, nos interesará representar el espacio $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ como espacio $C(K)$. Se puede obtener dicha caracterización a través del Teorema de Kelley, utilizando los conceptos de espacio de Banach isométricamente inyectivo y de orden completo.

Teorema 5.1 (Kelley 1952). *Un espacio de Banach X es isométricamente inyectivo si y solo si es isométricamente isomorfo a un espacio $C(K)$ con orden completo.*[1]

Precisamente, si (Ω, Σ, μ) es cualquier espacio de medida σ-finito , entonces $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ es isométricamente inyectivo, por lo que se obtiene de una forma alternativa, que $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ es isométricamente isomorfo a un espacio $C(K)$ con orden completo. Una consecuencia de la caracterización de los espacios $C(K)$ entre las álgebras de Banach es que el espacio de funciones medibles $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ es de tipo $C(K)$, aplicando el teorema de Albiac y Kalton, por ejemplo para el caso real. La identificación de tal compacto K no es sencilla porque las evaluaciones en puntos ya no son funcionales "bien definidos". Una herramienta de Teoría de la Medida que describimos a continuación resuelve el problema de definir funcionales a partir de la evaluación en puntos.

Un *lifting* en un espacio de medida $(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$ es una aplicación del álgebra $\mathcal{A}$ en si misma, $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, tal que cumple:

1. $T(f) = f$.
2. $f = g$ implica $T(f) = T(g)$.
3. $T(1) = 1$.
4. Si $f \geq 0$ entonces $T(f) \geq 0$.
5. $T(rf + sg) = rT(f) + sT(g)$.
6. $T(f \cdot g) = T(f) \cdot T(g)$.

El término, que se conoce en inglés como *Lifting Theory*, se introdujo por primera vez por John Von Neumann en 1931, seguido por Dorothy Maharam en 1958 y por Alexandra y C. Ionescu Tulcea en 1961. Esta teoría fue motivada en parte por sus llamativas aplicaciones, como las que se pueden observar en el libro de Ionescu Tulcea [12], que es hoy en día considerado como una referencia estándar sobre este tema. En nuestro estudio, resultará de gran utilidad, puesto que nos proporcionará funcionales multiplicativos en los espacios $\mathcal{L}_\infty$ bajo ciertas condiciones.
Se enuncia el siguiente resultado en relación a la existencia de dicha aplicación sobre espacios de medida completos.

[1] Si interesa, se puede consultar la demostración de este teorema en [10].

Teorema 5.2 (von Neumann-Maharam). *Siempre existe un lifting para espacios de medida completos.*

Gracias al teorema de John von Neumann-Maharam sobre la existencia de lifting en espacios de probabilidad completos [12], nuestro espacio $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ admitirá un lifting, por lo que podremos representarlo a través de su espacio de funcionales multiplicativos.

Bibliografía

[1] Albiac, F. y Briem, E. *Representations of Real Banach Algebras*, 2010.

[2] Albiac, F. y Kalton, N.J., *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics vol. 233, Springer-Verlag, Nueva York, 2006.

[3] Albiac, F. y Kalton, N.J., *A Characterization of Real C(K)-Spaces*, University of Missouri,Columbia, 2007.

[4] Amir, D., *On Isomorphisms of Continuous Function Spaces*, Israel, 1965.

[5] Arens, R. *Representation of *-algebras* , Duke Math., 1947.

[6] Banach, S. y traducido por Jellett, F. *Theory of Linear Operations* , Volumen 38, United Kingdom, 1932.

[7] Bessaga, C. y Pelczynski, A. *Spaces of Continuos function (IV),(On isomorphical classification of spaces of continuous functions)*, Studia Mathematica XIX , 1960.

[8] Cambern, M. *On Isomorphisms With Small Bound* , Proc. Amer. Math. Soc., 1967.

[9] Cohen, H. B. *A Bound-Two Isomorphism between* $C(X)$ *Banach Spaces.*, Proc. Amer. Math. Soc., 1975.

[10] Conway, J. B. , *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics vol. 96, Springer-Verlag, Nueva York, 1985.

[11] Fabian, M., Habala, P., Hájek, P., Montesinos, V. y Zizler, V. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis* , Springer, 2010.

[12] Ionescu Tulcea, A. y Ionescu Tulcea, C., *Topics in the Theory of Lifting*, Springer-Verlag, Nueva York, 1969.

[13] Kelley, J. L. , *General Topology*, Graduate Texts in Mathematics vol. 27, Springer-Verlag, Nueva York, 1955.

[14] Nel, L. , *Continuity Theory*, Springer International Publishing Switzerland, 2016.

[15] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Tercera Edición, 1987.

[16] Rudin W., *Functional Analysis*, Segunda Edición, McGraw-Hill, 1991.

[17] Simmons, G.F. , *Introduction to Topology and Modern Analysis*, edición re-impresa, McGraw-Hill, Florida, 1983.

[18] Willard, S. , *General Topology*, Addison-Wesley Series in Mathematics, 1970.

[19] Wojtaszczyk P. , *Banach spaces for analysts*, University of Cambridge, 1991.