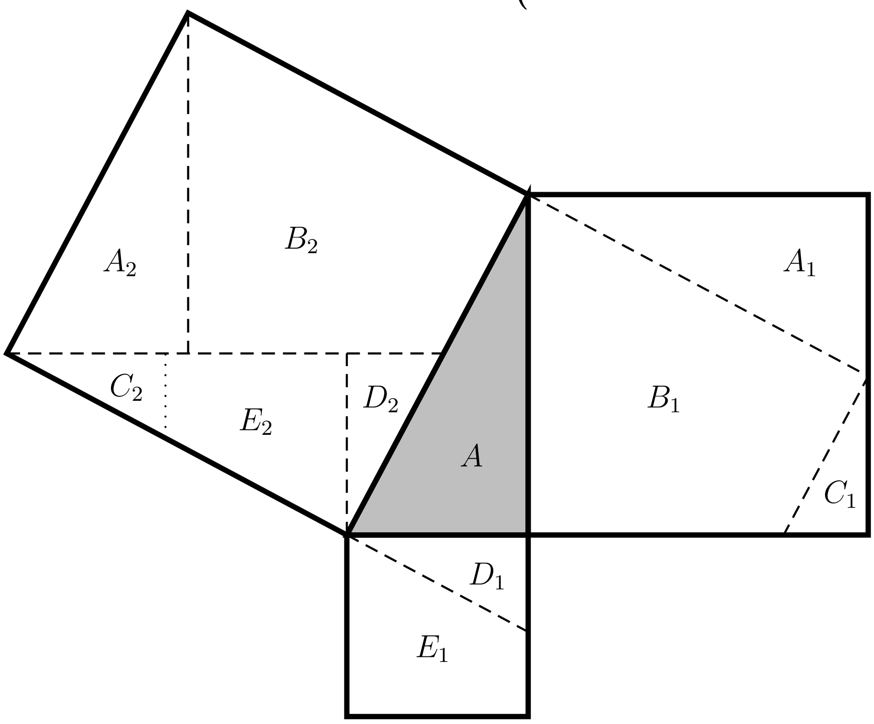
Una demostración del Teorema de Pitágoras

(de autor desconocido)



Este famoso teorema afirma que, dado un triángulo rectángulo, el área del cuadrado levantado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos.

Existen numerosas demostraciones distintas del teorema. Muchas se basan en descomponer los cuadrados sobre los catetos en piezas con las que se reconstruye el cuadrado sobre la hipotenusa.

La actividad ilustra una de ellas con un puzle en madera. En esta nota vemos que la descomposición que se propone funciona sobre cualquier triángulo rectángulo A, o sea que (con la notación de la figura) se tiene $A_1 = A_2$, $B_2 = B_2$, etcétera. Lo hacemos en los siguientes pasos:

- Todas las líneas del dibujo son paralelas o perpendiculares a los lados de A, y la que separa a C_2 de E_2 se traza de manera que en E_2 los dos lados que forman ángulo recto sean iguales.

  Por tanto, todos los ángulos que se forman son los de A (o sus suplementarios) y las figuras con la misma letra son semejantes. Así, solo hay que justificar que tienen uno de sus lados iguales.

- Como $A = A_1$ (mismo cateto mayor) y $A = A_2$ (misma hipotenusa), deducimos que $A_1 = A_2$.

  Entonces $B_1 = B_2$ (el lado más largo es la hipotenusa de A).

  También $A = C_2 + E_2$ (misma hipotenusa), por lo que el lado que separa a E_2 y D_2 coincide con el cateto menor de A y en consecuencia $D_1 = D_2$ (mismo cateto mayor) y $E_1 = E_2$ (igual longitud de los lados que forman su ángulo recto).

  Finalmente, $C_1 = C_2$ pues en ambos el cateto mayor es la diferencia entre los catetos de A.

- Por tanto ... ¡hemos demostrado el teorema de Pitágoras!

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

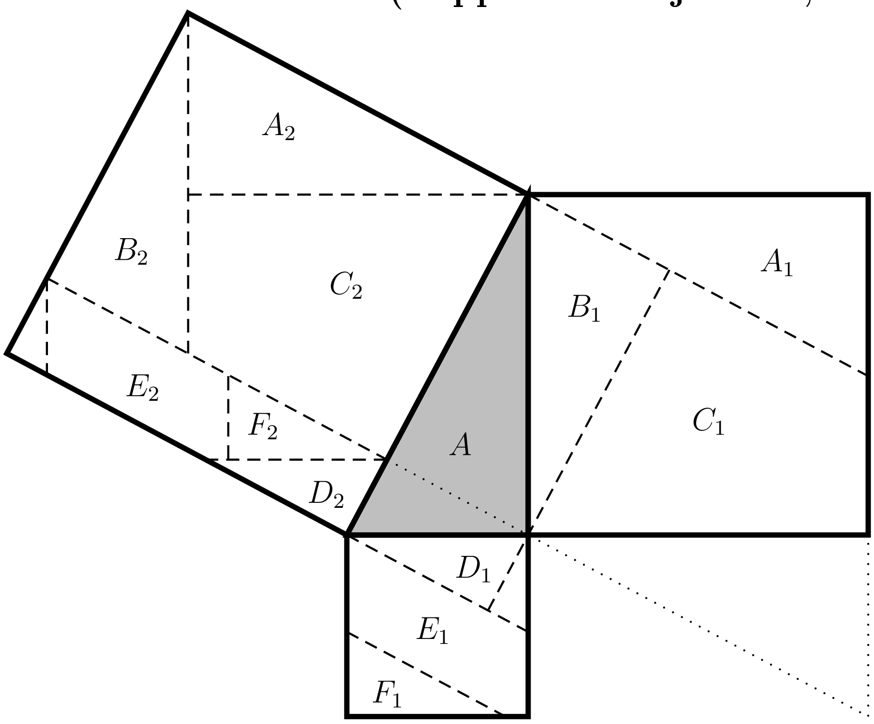
UNIVERSIDAD DE MURCIA

f SéNeCa(+)
Agencia de Ciencia y Tecnología Región de Murcia

secyt REGIÓN DE MURCIA

Otra demostración del Teorema de Pitágoras

(Pappus de Alejandría, s. IV)



- La idea es la misma de antes: Los cortes son paralelos o perpendiculares a los lados de A (en E_1 y E_2 el corte de abajo empieza a la altura a la que acaba el de arriba), por lo que las piezas A_1, B_1, ... son semejantes a las A_2, B_2, ... (las más pequeñas no se han marcado).

  Se espera que el lector busque argumentos, similares a los anteriores, que le permitan afirmar que son de hecho iguales.

- Además esta demostración pone de manifiesto lo siguiente: la prolongación de la altura de A por su ángulo recto divide el cuadrado sobre la hipotenusa en dos rectángulos, y el área de cada uno es igual al área del cuadrado sobre el correspondiente cateto.

- Veamos un argumento que demuestra la igualdad entre las áreas del rectángulo y el cuadrado mayores (para los menores es similar) usando sólo las igualdades $A_1 = A = A_2$.

  Pensemos en el paralelogramo determinado por el cateto mayor de A y la hipotenusa de A_1 (formado por B_1, C_1 y la copia de A_1 punteada bajo C_1). Su área es la longitud de una base por la correspondiente altura, y vamos a ver que calculándola de dos formas (para dos elecciones de la base) resulta ser igual a cada una de las áreas cuya igualdad queremos establecer:

  Cuando tomamos como base el cateto mayor de A la altura tiene esa misma longitud, luego el área del paralelogramo coincide con la del cuadrado sobre el cateto mayor.

  Pero cuando tomamos como base la hipotenusa de A_1 (igual a la de A_2), la altura es la misma que la del rectángulo mayor ($A_2 + B_2 + C_2$), por lo que todas estas áreas son iguales.