Mosaicos Semirregulares

Un **mosaico** es una figura plana que se forma uniendo otras figuras planas (llamadas **teselas**) que se disponen cumpliendo las siguientes condiciones:

- Las teselas son polígonos (pueden ser otras figuras más generales, y de hecho es conveniente que lo sean a efectos decorativos).
- Las teselas se intersecan como mucho en un vértice o en un lado completo.
- La disposición indefinida de las teselas cubre completamente el plano.

Imponiendo más condiciones, se obtienen algunos tipos particulares de mosaicos:

- **Mosaico regular**: todas las teselas son polígonos regulares iguales entre sí.
- **Mosaico semirregular**: las teselas son polígonos regulares de más de un tipo, pero todos del mismo lado y con la misma configuración en cada vértice (si no se impone esta última condición se habla de mosaicos *demirregulares*).

En esta nota vamos a demostrar que **existen 3 tipos de mosaicos regulares y 8 tipos de mosaicos semirregulares**. El primer paso es el siguiente:

- El ángulo interior del n-ágono regular mide $180(n-2)/n$ (grados).

  En efecto, los segmentos que van del centro a cada vértice dividen al n-ágno en n triángulos isósceles; cada uno tiene un ángulo "central" de $360/n$ y los otros dos suman el ángulo interior del n-ágono, que mide por tanto $180 - 360/n = 180(1-2/n) = 180(n-2)/n$.

Esto nos da la siguiente tabla:

Lados	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Ángulo	60	90	108	120	128, ...	135	140	144	147, ...	150	< 180

La clasificación de los mosaicos regulares es inmediata:

- Hay exactamente 3 tipos de mosaicos regulares, en los que las teselas son o bien triángulos, o bien cuadrados o bien hexágonos.

  En efecto, los ángulos interiores de los polígonos que confluyen en un vértice deben sumar 360; para mosaicos regulares esos ángulos son iguales entre sí y por tanto deben dividir a 360. La tabla muestra que esto solo ocurre cuando n vale 3, 4 y 6.

Para mosaicos semirregulares, los juegos de polígonos regulares que pueden confluir en cada vértice se corresponden con las combinaciones de ángulos internos (ta vez repetidos) que sumen 360. Vamos a hacer un análisis de todas las posibilidades, para el que es muy útil esta observación:

- El número de polígonos en un vértice está entre 3 y 5.

  En efecto, 2 polígonos no llegan a 360 (el ángulo interior es < 180), 7 o más se pasan (el ángulo interior es ≥ 60) y con 6 solo sale la opción de 6 triángulos, que da un mosaico regular.

Así pues, debemos buscar en la tabla anterior todas las posibilidades de 3, 4 o 5 valores que sumen 360. Pero la condición necesaria de sumar 360 no siempre es suficiente: para cada posibilidad hay que repetir la construcción en otros vértices (con la misma disposición) para ver si realmente se cubre el plano sin solapamientos.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE MURCIA
f SéNeCa(+)
Agencia de Ciencia y Tecnología Región de Murcia
secyt
REGIÓN DE MURCIA

A veces no se puede. En estos casos, o bien se puede cubrir el plano pero cambiando la disposición de los polígonos en los vértices (y se obtienen los mosaicos demirregulares citados antes), o bien directamente no se forma un mosaico, y diremos entonces que esa disposición no tesla.

Hagamos el análisis de todas las posibilidades distinguiendo según el número de sumandos y según si hay varios polígonos iguales o no.

- Mosaicos semirregulares con 3 polígonos por vértice, dos de ellos iguales (3=1+2):

  Llamemos x al ángulo "desigual" e y al otro. Por tanto $x + 2y = 360$, o sea $y = (360 - x)/2$.

  Si $x = 60$ entonces $y = 150$. Al repetir esta configuración de un triángulo y dos dodecágonos se obtiene un mosaico semirregular, que llamaremos **[3,12,12]** (véase la última página para cada una de estas configuraciones).

  Si $x = 90$ entonces $y = 135$. Al repetir esta configuración de un cuadrado y dos octógonos se obtiene un mosaico semirregular, que llamaremos **[4,8,8]**.

  Si $x = 108$ entonces el valor de y (en este caso, 126) no corresponde al ángulo de un polígono regular. Y lo mismo ocurre para $x = 128, \ldots$, para $x = 135$ y para $x = 140$.

  Si $x = 120$ entonces $y = 120$ y aparece el mosaico regular con tres hexágonos por vértice. Si $x = 144$ entonces $y = 108$, pero la configuración de un decágono y dos pentágonos no tesela (véase la primera figura de la última página).

  El resto de opciones verifican $144 < x < 180$ y por tanto $108 > y > 90$, por lo que no corresponden al ángulo de un polígono regular.

- Mosaicos semirregulares con 3 polígonos por vértice, distintos entre sí (3=1+1+1):

  Ahora los ángulos $x < y < z < 180$ deben verificar $x + y + z = 360$, por lo que debe ser $x < 120$ y por tanto solo hay tres opciones:

  Para $x = 108$ debería ser $y + z = 252$, que se descarta fácilmente.

  Para $x = 90$ se tiene $y + z = 270$ con $y < z$, luego $135 < z < 180$ y por tanto $135 > y > 90$. La única opción válida es $y = 120$, $z = 150$, y al repetir esta configuración de un cuadrado, un hexágono y un dodecágono se obtiene un mosaico semirregular que llamaremos **[4,6,12]**.

  Para $x = 60$ se tiene $y + z = 300$ con $y < z$, luego $150 < z < 180$ y por tanto $150 > y > 120$. Analizando las posibilidades se ve que y, z no corresponden a la vez a polígonos regulares.

- Mosaicos semirregulares con 4 o 5 polígonos por vértice:

  Con 4=1+3 (4 polígonos por vértice, 3 de ellos iguales) no sale, pues 3 triángulos se quedan cortos y 3 cuadrados ya se pasan.

  Con 4=2+2 salen dos triángulos y dos hexágonos. La opción **[3,6,3,6]** tesela y la opción [3,3,6,6] no, porque al repetirla vemos que en otros vértices la disposición es distinta. Sí que se obtiene un mosaico demirregular.

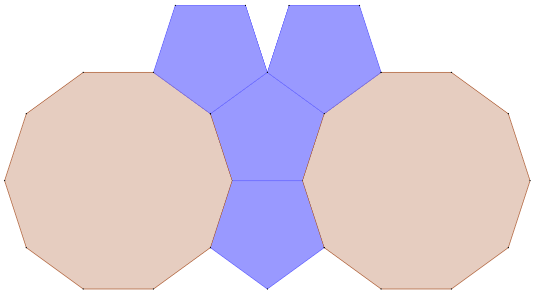
  Con 4=1+1+2 sale **[3,4,6,4]**. Otras formas de combinar un triángulo, dos cuadrados y un hexágono no teselan.

  Con 4=1+1+1+1 no salen opciones para la suma.

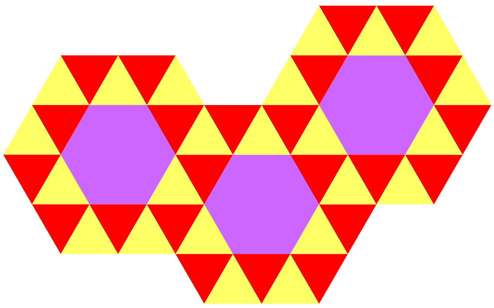
  Con 5=1+4 sale fácilmente **[3,3,3,3,6]**, que tesela.

  Con 5=2+3 salen fácilmente triángulos y cuadrados, y hay dos disposiciones que teselan: **[3,3,3,4,4]** y **[3,3,4,3,4]**.

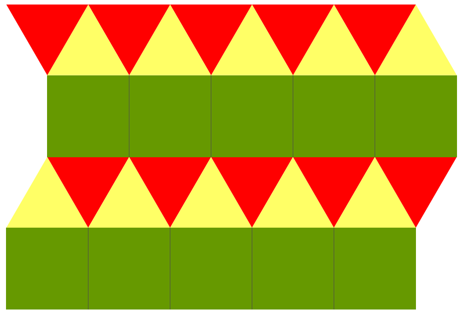
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE MURCIA
f SéNeCa(+)
Agencia de Ciencia y Tecnología Región de Murcia
secyt
REGIÓN DE MURCIA



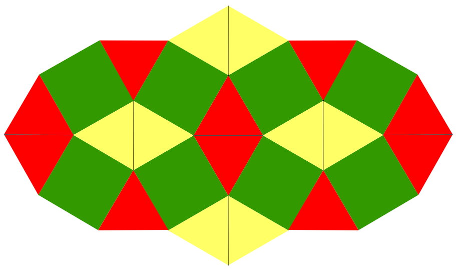
No teselan



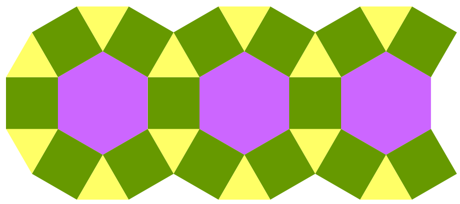
[3,3,3,3,6]



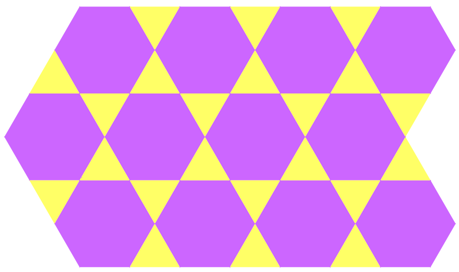
[3,3,3,4,4]



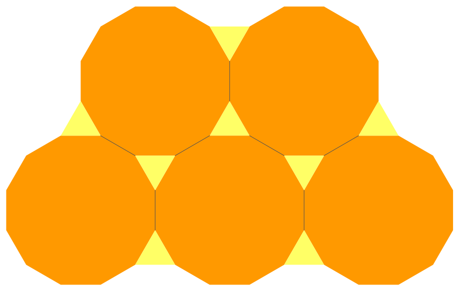
[3,3,4,3,4]



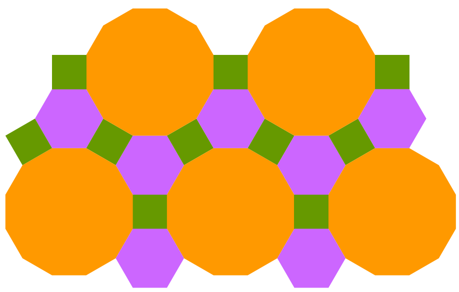
[3,4,6,4]



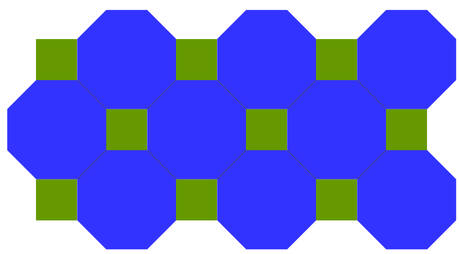
[3,6,3,6]



[3,12,12]



[4,6,12]



[4,8,8]