UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Óptica y Optometría
Resúmenes
Curso 2007-2008

Logaritmos y Números complejos

Logaritmos

Si b es un número real positivo distinto de 1, se dice que $x = \log_b a$ si $b^x = a$. Al logaritmo de base e lo representaremos habitualmente por ln y se llama logaritmo neperiano. Al logaritmo de base 10 lo representaremos por log. Se cumplen las propiedades siguientes:

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c; \quad \log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c; \quad \log_b(a^c) = c\log_b a; \quad \log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$$

Números complejos

Se llama unidad imaginaria a un número $\mathbf{i}$ que verifica $\mathbf{i}^2 = -1$, aunque a veces, abusando del lenguaje escribiremos: $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$.
Un número complejo es una expresión del tipo $z = a + b\mathbf{i}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$

a se llama parte real y si $a = 0$ se dice que z es imaginario puro.

b se llama parte imaginaria y si $b = 0$ se dice que z es un número real.

El conjugado de z es el número complejo $\bar{z} = a - b\mathbf{i}$.

Operaciones

Suma y diferencia $(a + b\mathbf{i}) \pm (c + d\mathbf{i}) = (a \pm c) + (b \pm d)\mathbf{i}$.

Multiplicación $(a + b\mathbf{i})(c + d\mathbf{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathbf{i}$.

División $(a + b\mathbf{i})/(c + d\mathbf{i}) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathbf{i}$.

Potencia $(a + b\mathbf{i})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \mathbf{i}^{n-k}$.

Representación geométrica

Cada número complejo $a + b\mathbf{i}$ se puede identificar con el par (a, b) del plano real R^2; es decir con un punto del plano y se puede representar gráficamente como el extremo del vector (a, b).

El módulo de un número complejo $z = a + b\mathbf{i}$ es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y geométricamente es la longitud del vector (a, b).

Coordenadas polares

$x = \rho\cos\theta$; $y = \rho \operatorname{sen}\theta$. Donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.
Un número complejo se puede expresar en forma trigonométrica como:

$$a + b\mathbf{i} = \rho\cos\theta + \mathbf{i}\rho \operatorname{sen}\theta = \rho(\cos\theta + \mathbf{i} \operatorname{sen}\theta)$$

y también en forma polar como: $z = \rho_\theta$. Algunas operaciones se simplifican en forma polar:

Si $z = \rho_\theta$ y $w = \mu_\alpha$ entonces:

$$zw = (\rho\mu)_{\theta+\alpha}; \quad \frac{z}{w} = \left(\frac{\rho}{\mu}\right)_{\theta-\alpha}; \quad z^n = \rho^n_{n\theta}$$

Cada número complejo $z = \rho_\theta$ tiene n raíces n-ésimas:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho_\theta} = \{(\sqrt[n]{\rho})_{\alpha_k} : \alpha_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

Exponenciales y logaritmos complejos

Si $z = a + b\mathbf{i}$ se defina $e^z = e^{a+b\mathbf{i}} = e^a e^{b\mathbf{i}}$ como el número complejo $e^z = e^a(\cos b + \mathbf{i}\operatorname{sen} b)$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $e^z e^w = e^{z+w}$
2. $e^z \neq 0$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$.
3. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $|e^{\mathbf{i}x}| = 1$.
4. $e^z = 1$ si, y sólo si $z = n2\pi\mathbf{i}$ para algún n entero.
5. $e^z = e^w$ si, y sólo si $z - w = n2\pi\mathbf{i}$ para algún entero n.

Todo número complejo se puede expresar de la forma $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$, donde $\rho = |z|$ y $\theta = \arg z + 2n\pi$ con n un entero cualquiera.
Logaritmos complejos: Se define el logaritmo (en base e) de z como $\ln z = \ln |z| + \mathbf{i} \arg z + 2n\pi\mathbf{i}$; con las siguientes propiedades:

1. $\ln(-1) = \pi\mathbf{i}$, $\ln(\mathbf{i}) = \frac{\pi\mathbf{i}}{2}$.
2. $\ln(zw) = \ln z + \ln w + 2n\pi$ con n entero.
3. $\ln(z/w) = \ln z - \ln w + 2n\pi$ con n entero.
4. $e^{\ln z} = z$