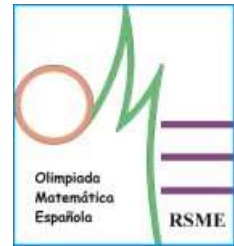




FASE LOCAL DE LA XLIV O.M.E.
REGIÓN DE MURCIA, 18/01/2008
I.E.S. JUAN CARLOS I - MURCIA



PRIMERA SESIÓN (mañana)

INSTRUCCIONES

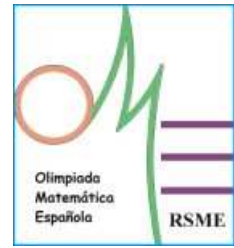
- La sesión comienza a las 10:30 y termina a las 13:00.
- No está permitido el uso de calculadoras, sí el de útiles de dibujo.
- Los problemas deben entregarse en hojas separadas: cada problema puede ocupar cuantas hojas se deseen, pero en una misma hoja no deben aparecer dos problemas distintos.

PROBLEMAS

1. Sea P un conjunto de puntos del plano con más de cuatro puntos y con la siguiente propiedad: Por cada cuatro puntos de P pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que todos los puntos de P están en la misma circunferencia?
2. Se considera un cuadrilátero cuyas diagonales están contenidas en él y no son perpendiculares entre sí. Desde cada vértice se traza la perpendicular a la diagonal que no pasa por él y se considera su intersección con esa diagonal. Demuestra que los cuatro puntos de intersección así obtenidos forman un cuadrilátero semejante al inicial.
3. Halla todas las soluciones reales de la ecuación:
$$x \left(\frac{6-x}{1+x} \right) \left(\frac{6-x}{1+x} + x \right) = 8.$$



FASE LOCAL DE LA XLIV O.M.E.
REGIÓN DE MURCIA, 18/01/2008
I.E.S. JUAN CARLOS I - MURCIA



SEGUNDA SESIÓN (tarde)

INSTRUCCIONES

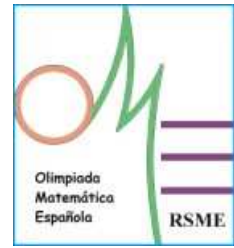
- La sesión comienza a las 16:30 y termina a las 19:00.
- No está permitido el uso de calculadoras, sí el de útiles de dibujo.
- Los problemas deben entregarse en hojas separadas: cada problema puede ocupar cuantas hojas se deseen, pero en una misma hoja no deben aparecer dos problemas distintos.

PROBLEMAS

1. Demuestra que no existen enteros a, b, c, d tales que el polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ verifique $P(4) = 1$ y $P(7) = 2$.
2. Demuestra que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es múltiplo de 7.
3. Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, da un método para inscribir en la circunferencia un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y por Q .
¿Para qué posiciones de P y de Q el problema no tiene solución?



FASE LOCAL DE LA XLIV O.M.E.
REGIÓN DE MURCIA, 18/01/2008
I.E.S. JUAN CARLOS I - MURCIA



ENUNCIADOS Y SOLUCIONES

1. Sea \mathcal{A} un conjunto de puntos del plano con más de cuatro puntos y con la siguiente propiedad: Por cada cuatro puntos de \mathcal{A} pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que todos los puntos de \mathcal{A} están en la misma circunferencia?

Solución: Consideramos cuatro puntos P, Q, R, S del conjunto \mathcal{A} . Por hipótesis hay una circunferencia α que los contiene. Si T es cualquier otro punto de \mathcal{A} , por hipótesis hay una circunferencia β que contiene a P, Q, R, T ; en particular α y β son dos circunferencias que comparten tres puntos y por tanto son iguales, de modo que T está en α . En definitiva, todos los puntos de \mathcal{A} están en la circunferencia α y por tanto la respuesta es sí.

2. Se considera un cuadrilátero cuyas diagonales están contenidas en él y no son perpendiculares entre sí. Desde cada vértice se traza la perpendicular a la diagonal que no pasa por él y se considera su intersección con esa diagonal. Demuestra que los cuatro puntos de intersección así obtenidos forman un cuadrilátero semejante al inicial.

Solución: Sean A, B, C, D los vértices del cuadrilátero, con diagonales AC y BD que se cortan en O . Podemos asumir que el ángulo $\gamma = AOB = COD$ es llano, pues de lo contrario lo sería $AOD = COB$ y actuaríamos de modo análogo.

Si A', B', C', D' son las intersecciones del enunciado, se tiene:

En el triángulo AOB , el pie de la altura por A es A' , luego $\overline{OA'}/\overline{OA} = \cos \gamma$.

Análogamente, todas las proporciones $\overline{OB'}/\overline{OB}$, $\overline{OC'}/\overline{OC}$ y $\overline{OD'}/\overline{OD}$ valen $\cos \gamma$.

Ahora la semejanza es clara. Quizás se ve mejor aún si se considera la simetría con respecto a la recta que biseca el ángulo AOB , que conserva las distancias: la imagen A'' de A' está en el segmento OA y verifica $\overline{OA''}/\overline{OA} = \cos \gamma$, y lo mismo pasa con B'' , C'' y D'' . Ahora es claro que el cuadrilátero $A''B''C''D''$ es por una parte igual que el $A'B'C'D'$, y por otra semejante al $ABCD$ (con constante de semejanza $\cos \gamma$).

3. Halla todas las soluciones reales de la ecuación: $x \left(\frac{6-x}{1+x} \right) \left(\frac{6-x}{1+x} + x \right) = 8$.

Solución 1: Pongamos $\frac{6-x}{1+x} = z$, de modo que $(1+x)z = 6-x$, o sea $x+z+xz = 6$.

Como además la ecuación inicial es $xz(x+z) = 8$, resulta que los valores $x+z$ y xz tienen suma 6 y producto 8, por lo que son las raíces del polinomio $t^2 - 6t + 8$, que valen 2 y 4.

Si fuese $x+z = 2$ y $xz = 4$, los valores x y z serían las raíces del polinomio $t^2 - 2t + 4$, pero éstas no so reales. Por tanto se tiene $x+z = 4$ y $xz = 2$, por lo que x es una de las

raíces de $t^2 - 4t + 2$, que valen $2 \pm \sqrt{2}$. Como ambos valores satisfacen la ecuación inicial (como se comprueba fácilmente), éstas son sus dos únicas soluciones.

Solución 2: Para hacer más simple el denominador ponemos $a = 1 + x$, y entonces

$$8 = (a - 1) \left(\frac{7 - a}{a} \right) \left(\frac{7 - a}{a} + a - 1 \right) = -\frac{a^2 - 8a + 7}{a} \cdot \frac{a^2 - 2a + 7}{a}$$

Haciendo ahora $b = (a^2 + 7)/a$ se tiene $8 = -(b - 8)(b - 2)$, o sea $b^2 - 10b + 24 = 0$, de donde b vale 4 ó 6. La opción $b = 4$ se traduce en $a^2 - 4a + 7 = 0$, que no tiene soluciones reales, mientras que la opción $b = 6$ se traduce en $a^2 - 6a + 7 = 0$, con soluciones $a = 3 \pm \sqrt{2}$, lo que nos da las soluciones $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

4. Demuestra que no existen enteros a, b, c, d tales que el polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ verifique $P(4) = 1$ y $P(7) = 2$.

Solución 1: Si se diera esa situación, por el teorema del resto existiría un polinomio $Q(x)$ con coeficientes enteros tal que

$$P(x) = (x - 4)Q(x) + P(4) = (x - 4)Q(x) + 1$$

y entonces $2 = P(7) = 3Q(7) + 1$ con $Q(7)$ entero, lo cual es una contradicción.

De modo más general, si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y $r \neq s$ son enteros entonces existe otro polinomio con coeficientes enteros $Q(x)$ tal que $P(r) - P(s) = (r - s)Q(x)$, y en particular $P(r) - P(s)$ ha de ser múltiplo de $r - s$.

Solución 2: Para un polinomio así se tendría $P(7) - P(4) = a(7^3 - 4^3) + b(7^2 - 4^2) + c(7 - 4)$, que resulta ser múltiplo de 3, en contradicción con $P(7) - P(4) = 2 - 1 = 1$.

De manera más general, como $r^n - s^n$ es múltiplo¹ de $r - s$ para $n \geq 1$, cualquier polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros verifica que $P(r) - P(s)$ debe ser múltiplo de $r - s$.

5. Demuestra que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

Solución: Vemos que la suma vale 0 cuando trabajamos módulo 7: Se tiene $2222 \equiv 3$ y $5555 \equiv 4$, y por otra parte $3^3 = 27 \equiv -1$ (de donde $3^6 \equiv 1$) y $4^3 = 64 \equiv 1$. Por tanto

$$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 3^{5555} + 4^{2222} \equiv 3^{6 \cdot 925 + 5} + 4^{3 \cdot 740 + 2} \equiv 3^5 + 4^2 \equiv 5 + 2 \equiv 0$$

6. Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, da un método para inscribir en la circunferencia un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y por Q .

¿Para qué posiciones de P y de Q el problema no tiene solución?

Solución: Supongamos que la inscripción es posible y que R es el punto de la circunferencia correspondiente al ángulo recto del triángulo: entonces el triángulo PRQ es rectángulo en R y por tanto R está en la circunferencia de diámetro PQ .

Por tanto el "candidato a R " es la intersección de esas circunferencias: la inicial y la de diámetro PQ . La construcción será posible cuando esa intersección exista, o sea cuando la distancia entre sus centros (centro de la circunferencia dada y punto medio de PQ) más el radio de la pequeña (la mitad de la longitud PQ) sea mayor o igual que el radio de la grande; habrá una sólo solución cuando la distancia sea igual, y dos cuando sea mayor.

¹Por la igualdad $r^n - s^n = (r - s)(r^{n-1} + r^{n-2}s + \dots + rs^{n-2} + s^{n-1})$.