FASE LOCAL DE LA XLIV O.M.E.

REGIÓN DE MURCIA, 18/01/2008

I.E.S. JUAN CARLOS I - MURCIA

PRIMERA SESIÓN (mañana)

INSTRUCCIONES

- La sesión comienza a las 10:30 y termina a las 13:00.
- No está permitido el uso de calculadoras, sí el de útiles de dibujo.
- Los problemas deben entregarse en hojas separadas: cada problema puede ocupar cuantas hojas se deseen, pero en una misma hoja no deben aparecer dos problemas distintos.

PROBLEMAS

1. Sea P un conjunto de puntos del plano con más de cuatro puntos y con la siguiente propiedad: Por cada cuatro puntos de P pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que todos los puntos de P están en la misma circunferencia?

2. Se considera un cuadrilátero cuyas diagonales están contenidas en él y no son perpendiculares entre sí. Desde cada vértice se traza la perpendicular a la diagonal que no pasa por él y se considera su intersección con esa diagonal. Demuestra que los cuatro puntos de intersección así obtenidos forman un cuadrilátero semejante al inicial.

3. Halla todas las soluciones reales de la ecuación: $x\left(\dfrac{6-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{6-x}{1+x}+x\right)=8.$

FASE LOCAL DE LA XLIV O.M.E.

REGIÓN DE MURCIA, 18/01/2008

I.E.S. JUAN CARLOS I - MURCIA

SEGUNDA SESIÓN (tarde)

INSTRUCCIONES

- La sesión comienza a las 16:30 y termina a las 19:00.
- No está permitido el uso de calculadoras, sí el de útiles de dibujo.
- Los problemas deben entregarse en hojas separadas: cada problema puede ocupar cuantas hojas se deseen, pero en una misma hoja no deben aparecer dos problemas distintos.

PROBLEMAS

1. Demuestra que no existen enteros a, b, c, d tales que el polinomio $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ verifique $P(4) = 1$ y $P(7) = 2$.

2. Demuestra que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es múltipo de 7.

3. Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, da un método para inscribir en la circunferencia un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y por Q.

   ¿Para qué posiciones de P y de Q el problema no tiene solución?

FASE LOCAL DE LA XLIV O.M.E.

REGIÓN DE MURCIA, 18/01/2008

I.E.S. JUAN CARLOS I - MURCIA

ENUNCIADOS Y SOLUCIONES

1. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de puntos del plano con más de cuatro puntos y con la siguiente propiedad: Por cada cuatro puntos de $\mathcal{A}$ pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que todos los puntos de $\mathcal{A}$ están en la misma circunferencia?

   Solución: Consideramos cuatro puntos P, Q, R, S del conjunto $\mathcal{A}$. Por hipótesis hay una circunferencia α que los contiene. Si T es cualquier otro punto de $\mathcal{A}$, por hipótesis hay una circunferencia β que contiene a P, Q, R, T; en particular α y β son dos circunferencias que comparten tres puntos y por tanto son iguales, de modo que T está en α. En definitiva, todos los puntos de $\mathcal{A}$ están en la circunferencia α y por tanto la respuesta es sí.

2. Se considera un cuadrilátero cuyas diagonales están contenidas en él y no son perpendiculares entre sí. Desde cada vértice se traza la perpendicular a la diagonal que no pasa por él y se considera su intersección con esa diagonal. Demuestra que los cuatro puntos de intersección así obtenidos forman un cuadrilátero semejante al inicial.

   Solución: Sean A, B, C, D los vértices del cuadrilátero, con diagonales AC y BD que se cortan en O. Podemos asumir que el ángulo $\gamma = AOB = COD$ es llano, pues de lo contrario lo sería $AOD = COB$ y actuaríamos de modo análogo.

   Si A', B', C', D' son las intersecciones del enunciado, se tiene:

   En el triángulo AOB, el pie de la altura por A es A', luego $\overline{OA'}/\overline{OA} = \cos\gamma$.

   Análogamente, todas las proporciones $\overline{OB'}/\overline{OB}$, $\overline{OC'}/\overline{OC}$ y $\overline{OD'}/\overline{OD}$ valen $\cos\gamma$.

   Ahora la semejanza es clara. Quizás se ve mejor aún si se considera la simetría con respecto a la recta que biseca el ángulo AOB, que conserva las distancias: la imagen A'' de A' está en el segmento OA y verifica $\overline{OA''}/\overline{OA} = \cos\gamma$, y lo mismo pasa con B'', C'' y D''. Ahora es claro que el cuadrilátero $A''B''C''D''$ es por una parte igual que el $A'B'C'D'$, y por otra semejante al $ABCD$ (con constante de semejanza $\cos\gamma$).

3. Halla todas las soluciones reales de la ecuación: $x\left(\dfrac{6-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{6-x}{1+x}+x\right)=8.$

   Solución 1: Pongamos $\dfrac{6-x}{1+x} = z$, de modo que $(1+x)z = 6-x$, o sea $x+z+xz=6$. Como además la ecuación inicial es $xz(x+z)=8$, resulta que los valores $x+z$ y xz tienen suma 6 y producto 8, por lo que son las raíces del polinomio t^2-6t+8, que valen 2 y 4.

   Si fuese $x+z=2$ y $xz=4$, los valores x y z serían las raíces del polinomio t^2-2t+4, pero éstas no so reales. Por tanto se tiene $x+z=4$ y $xz=2$, por lo que x es una de las raíces de t^2-4t+2, que valen $2\pm\sqrt{2}$. Como ambos valores satisfacen la ecuación inicial (como se comprueba fácilmente), ésas son sus dos únicas soluciones.

Solución 2: Para hacer más simple el denominador ponemos $a=1+x$, y entonces

$$8=(a-1)\left(\frac{7-a}{a}\right)\left(\frac{7-a}{a}+a-1\right)=-\frac{a^2-8a+7}{a}\cdot\frac{a^2-2a+7}{a}$$

Haciendo ahora $b=(a^2+7)/a$ se tiene $8=-(b-8)(b-2)$, o sea $b^2-10b+24=0$, de donde b vale 4 ó 6. La opción $b=4$ se traduce en $a^2-4a+7=0$, que no tiene soluciones reales, mientras que la opción $b=6$ se traduce en $a^2-6a+7=0$, con soluciones $a=3\pm\sqrt{2}$, lo que nos da las soluciones $x=2\pm\sqrt{2}$.

4. Demuestra que no existen enteros a, b, c, d tales que el polinomio $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ verifique $P(4)=1$ y $P(7)=2$.

   Solución 1: Si se diera esa situación, por el teorema del resto exixtiría un polinomio $Q(x)$ con coeficientes enteros tal que

$$P(x)=(x-4)Q(x)+P(4)=(x-4)Q(x)+1$$

   y entonces $2=P(7)=3\,Q(7)+1$ con $Q(7)$ entero, lo cual es una contradicción.

   De modo más general, si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y $r\neq s$ son enteros entonces existe otro polinomio con coeficientes enteros $Q(x)$ tal que $P(r)-P(s)=(r-s)\,Q(x)$, y en particular $P(r)-P(s)$ ha de ser múltiplo de $r-s$.

   Solución 2: Para un polinomio así se tendría $P(7)-P(4)=a(7^3-4^3)+b(7^2-4^2)+c(7-4)$, que resulta ser múltiplo de 3, en contradicción con $P(7)-P(4)=2-1=1$.

   De manera más general, como r^n-s^n es múltiplo[1] de $r-s$ para $n\geq 1$, cualquier polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros verifica que $P(r)-P(s)$ debe ser múltiplo de $r-s$.

5. Demuestra que $2222^{5555}+5555^{2222}$ es múltipo de 7.

   Solución: Vemos que la suma vale 0 cuando trabajamos módulo 7: Se tiene $2222\equiv 3$ y $5555\equiv 4$, y por otra parte $3^3=27\equiv -1$ (de donde $3^6\equiv 1$) y $4^3=64\equiv 1$. Por tanto

$$2222^{5555}+5555^{2222}\;\equiv\;3^{5555}+4^{2222}\;\equiv\;3^{6\cdot 925+5}+4^{3\cdot 740+2}\;\equiv\;3^5+4^2\;\equiv\;5+2\;\equiv\;0$$

6. Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, da un método para inscribir en la circunferencia un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y por Q.

   ¿Para qué posiciones de P y de Q el problema no tiene solución?

   Solución: Supongamos que la inscripción es posible y que R es el punto de la circunferencia correspondiente al ángulo recto del triángulo: entonces el triángulo PRQ es rectángulo en R y por tanto R está en la circunferencia de diámetro PQ.

   Por tanto el "candidato a R" es la intersección de esas circunferencias: la inicial y la de diámetro PQ. La construcción será posible cuando esa intersección exista, o sea cuando la distancia entre sus centros (centro de la circunferencia dada y punto medio de PQ) más el radio de la pequeña (la mitad de la longitud PQ) sea mayor o igual que el radio de la grande; habrá una sóla solución cuando la distancia sea igual, y dos cuando sea mayor.

[1]Por la igualdad $r^n-s^n=(r-s)(r^{n-1}+r^{n-2}s+\cdots+rs^{n-2}+s^{n-1})$.