Mecánica Teórica

1 Dinámica newtoniana y ecuaciones de Lagrange.

- Mecánica de una partícula.
- Mecánica de un sistema de partículas.
- Ligaduras. Clasificación y coordenadas generalizadas.
- El principio de D'Alembert y las ecuaciones de Lagrange.
- Potenciales generalizados y función de disipación de Rayleight.

2 Simetrías y teoremas de conservación.

- Principio de Hamilton.
- Transformaciones de Galileo.
- Lagrangiana de una partícula libre.
- Lagrangiana de un sistema de partículas.
- Teorema de Noether.
- Teorema de conservación de la Energía.
- Traslaciones espaciales. Momento lineal o impulso.
- Rotaciones. Momento angular.
- Transformaciones de escala. Teorema del virial.
- El problema de tres cuerpos.
- El principio de la ligadura mínima de Gauss.
- El principio de Hamilton con ligaduras holonómicas y no holonómicas.
- Variables cíclicas o ignorables.
- El tiempo como variable cíclica o ignorable. El principio de la mínima acción. El principio de Jacobi.
- Pequeñas oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio.

3 Teoría de Hamilton.

- Transformaciones de Legendre.
- Transformaciones de Legendre aplicadas a la función Lagrangiana.
- Ecuaciones canónicas.
- La integral canónica.
- Corchetes de Poisson.

- El teorema de los corchetes de Poisson.
- El espacio de fases y el fluido de fases.
- Teorema de Liouville.
- El teorema de circulación de Helmholtz.
- Eliminación de coordenadas cíclicas o ignorables. La función de Routh.
- Forma paramétrica de las ecuaciones canónicas.

4 Transformaciones canónicas.

- Función generatriz.
- Transformaciones canónicas básicas.
- Ejemplos de transformaciones canónicas.
- Transformaciones de Mathieu-Lie.
- Forma diferencial invariante. Circulación.
- La forma simpléctica de las transformaciones canónicas.
- Invarianza de los paréntesis de Poisson y el volumen bajo las transformaciones canónicas.
- El movimiento de un sistema como una sucesión continua de transformaciones canónicas.
- Invariantes integrales: Teoremas de Liouville y Helmholtz.

5 Teoría de Hamilton-Jacobi.

- Familias de transformaciones canónicas uniparamétricas. Gene-radores.
- Simetrías y leyes de conservación.
- La ecuación de Hamilton-Jacobi.
- El límite semiclásico de la ecuación de Schrödinger.
- Separación de variables. Sistemas acotados.
- Variables acción-ángulo.
- El método de Hamilton-Jacobi aplicado al problema de fuerzas centrales.
- Variables acción-ángulo en el problema de fuerzas centrales.

6 Teoría de perturbaciones canónica.

- Introducción.
- Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo.
- Teoría de perturbaciones independiente del tiempo.
- Invariantes adiabáticos.

7 Introducción a la dinámica de fluidos

- Introducción. Fuerzas de cizalladura y tensor simétrico de tensiones. Teorema de Pascal.
- Descripciones de partícula y campo. Analogía con mecánica Hamiltoniana.
- Ecuación de continuidad.
- Fluidos ideales. Ecuación de Euler.
- Flujo de momento lineal.
- Flujo de energía.
- La ecuación de Bernoulli.
- El teorema de circulación de Thomson.
- Flujo irrotacional. Potencial de velocidades.
- Hidroestática. Ausencia de convección en el campo gravitatorio terrestre.
- Ondas por gravitación.
- Fluidos viscosos. Ecuación de movimiento para un fluido viscoso.
- Flujo de energía.
- Flujo estacionario en un canal o tubería.

8 Teoría clásica de campos.

- Introducción. Transición de un sistema discreto a otro continuo.
- Formulación Lagrangiana de la teoría de campos.
- Formulación de Hamilton de la teoría de campos.
- Teorema de Noether. Integrales de las ecuaciones de campo.
- Tensor de energía-momento.
- Transformaciones de Lorentz.
- Tensor de momento angular.

Bibliografía:

1. **J. A, Oller**, *Mecánica Teórica*, *https://www.um.es/oller/docencia/mt.html*

2. **Jorge V. José y Eugene Saletan**, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach* Cambridge University Press.

3. **Cornelius Lanczos**, *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Publications, Inc.

4. **L.D. Landau y E.M. Lifshitz**, *Curso de Fisica Teorica Vol. 1: Mecánica.* Editorial Reverté.

5. **H. Goldstein**, *Mecánica Clásica.* Editorial Reverté, Editorial Aguilar.

6. **H. Goldstein, C. Poole y J. Safko**, *Classical Mechanics, Third Edition.* Addison Wesley.

7. **L. Susskind y G. Hrabovsky**, *Classical Mechanics. The Theoretical Minimum.* Pinguin Books (2013).

8. **A. Moncho Jordá**, *101 Problemas de Mecánica Teórica*, Editorial Universidad de Granada

9. **J.V. José, E. Saletán**, *Answers to Problems of Classical Dynamics*, Cambridge University Press.

10. **A. J. Chorin and J. E. Marsden**, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics.* Springer.

11. **L.D. Landau y E.M. Lifshitz**, *Curso de Fisica Teorica Vol. 6: Mecánica de fluidos.* Editorial Reverté.

12. A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics Vol. 1: Mechanics.* Academic Press.

13. V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos de la Mecánica Clásica.* Editorial Paraninfo.

14. E.T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies.* Cambridge University Press.

15. A. Sokolov, I. Ternov, V. Zukovskii y A. Borisov, *Quantum Electrodynamics*, Ed. MIR.
La primera mitad del libro trata sobre teoría clásica de campos.

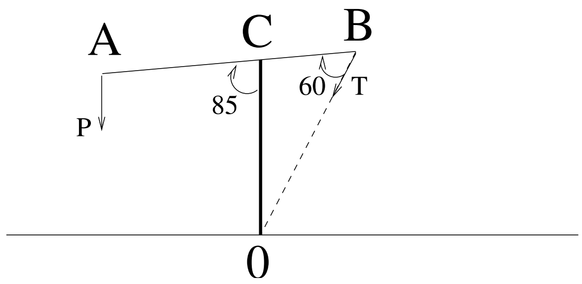

Figura 1:

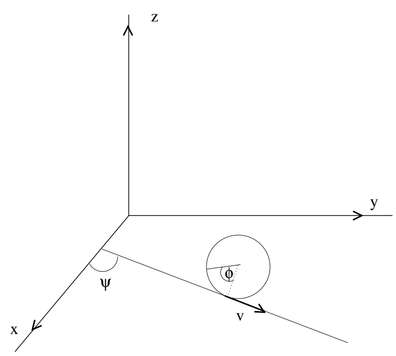

Figura 2:

Ejercicios. Primer Boletín.

1. Una varilla sin peso AB, de longitud ℓ se apoya en C sobre una columna vertical OC, estando sujeta en B por un cable al tiempo que un peso P cuelga del otro extremo A, tal y como se indica en la figura. Determinad el valor mínimo que ha de tener el coeficiente de rozamiento en C para que exista equilibrio y determinar la tensión del cable BO.

   AC=3 m ; AB=5 m ; P=2500 Kg. Aplíqueso el principio de los trabajos virtuales.

2. Considérese un disco de radio R que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, figura 2. El disco permanece siempre en posición vertical. Demuéstrese que las ligaduras sobre el sistema no se pueden integrar dada la imposibilidad de encontrar un factor integrante y, por lo tanto, son no-holonómicas.

3. Demostrad que si dos Lagrangianos conducen a las mismas ecuaciones de movimiento entonces difieren necesariamente en la derivada total respecto del tiempo de una funcion de las coordenadas generalizadas y del tiempo, $F(q,t)$.

4. Considérese el péndulo doble coplanario representado en la figura 3. Determinar su Lagrangiano, hallar las ecuaciones de movimiento. Considérese el límite de pequeñas oscilaciones y resuélvanse las ecuaciones de movimiento resultantes tomando $m_2 \to 0$.

5. En el esquema de la figura 4, el punto m_2 se mueve sobre el eje vertical, y todo el sistema gira con velocidad angular Ω alrededor de este eje. Determinar el Lagrangiano del sistema y sus ecuaciones de movimiento. Resuélvanse en el límite de pequeñas oscilaciones.

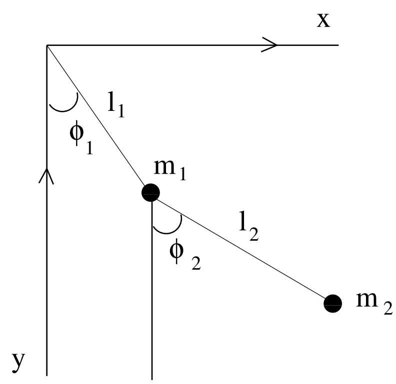

Figura 3:

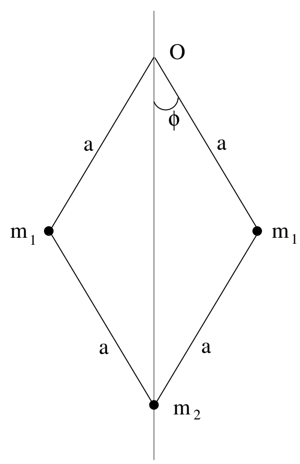

Figura 4:

6. El campo electromagnético es invariante bajo una transformación de gauge:

$$\vec{A}(\vec{r},t) \to \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\psi(\vec{r},t) \ ,$$
$$\phi(\vec{r},t) \to \phi(\vec{r},t) - \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} \ ,$$

donde $\psi(\vec{r},t)$ es arbitrario (diferenciable). ¿Qué efecto tiene esta transformación de gauge sobre el Lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético?. ¿Se ven afectadas las ecuaciones de movimiento?.

7. Considérese el movimiento libre en el plano (x,y) de un punto material de masa m. Mediante el empleo del principo de Hamilton resolved dicho movimiento en un sistema de referencia (X,Y) que gira respecto al sistema original con una frecuencia angular ω.

Ejercicios. Segundo Boletín.

1.- Deducid las constantes de movimiento que se siguen de aplicar una transformación de Galileo a un sistema cuyo Lagrangiano viene dado por

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 - V(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell) \ .$$

2.- Para el Lagrangiano

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 - V(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell|) \ ,$$

discutid si las transformaciones de paridad e inversión temporal son simetrías.

Paridad:

$$\mathbf{r}_i' = -\mathbf{r}_i \ ,$$
$$t' = t \ .$$

Inversión temporal:

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i \ ,$$
$$t' = -t \ .$$

3.- Hallar el cociente de los tiempos en la misma trayectoria para partículas de diferentes masas pero igual energía potencial.

4.- Hallar el cociente de los tiempos en la misma trayectoria para partículas que tienen la misma masa, pero su energía potencial difiere en un factor constante.

5.- Consideremos aquellas coordenadas que aparecen en el Lagrangiano pero no sus velocidades generalizadas. Muestra que una variable de esta naturaleza puede ser eliminada *algebraicamente* en función del resto de variables, con lo que el problema dinámico queda reducido a un número menor de variables.

6.- Considerad el pendulo simple no lineal de modo que se satisface la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = f(x) \ .$$

Utilizad la nueva variable $\theta = \Omega t$, siendo Ω el periodo real del movimiento. Haciendo un desarrollo en serie de potencias de la amplitud a tanto de la solución como de Ω

$$x(t) = a\, x^{(1)} + a^2\, x^{(2)} + a^3\, x^{(3)} + \ldots$$
$$\Omega = \omega_0 + a\, \omega^{(1)} + a^2\, \omega^{(2)} + \ldots$$

Obtened la solución hasta tercer orden, esto es, hasta $x^{(3)}(t)$.

Particularizad los resultados obtenidos empleando

$$f(x) = -\alpha x^2 - \beta x^3 \ .$$

7.- El mismo sistema que el ejercicio anterior pero ahora se ha de resolver realizando el desarrollo en serie de potencias solo en la solución

$$x(t) = a\, x^{(1)} + a^2\, x^{(2)} + a^3\, x^{(3)} + \dots$$

Obtened el resultado hasta tercer orden, $x^{(3)}$. Se obtiene un término de incremento secular que aumenta linealmente en el tiempo. Dicho término se puede reabsorber introduciendo una dependencia de la frecuencia en la amplitud a, demostradlo. Mostrad que la frecuencia que resulta es la misma que la obtenida en el ejercicio 6, $\Omega = \omega_0 + a^2\, \omega^{(2)}$.

8.- Péndulo de Ehrenfest. Un péndulo simple cuelga de una polea fija. El otro extremo de la cuerda está en la mano de un observador que tira hacia arriba de la cuerda LENTAMENTE, recortando la longitud del péndulo con velocidad uniforme. Despreciando la fricción, hallar el cambio en la energía total desde la posición $\theta = 0$ a la siguiente posición $\theta = 0$. Tomar la velocidad de cambio de la longitud del péndulo como parámetro pequeño y calcular el primer orden no nulo de la perturbación.

9.- Sean

a) Un oscilador armónico unidimensional:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} k^2 q^2 \ ,$$

b) La reflexión elástica de una partícula entre dos paredes rígidas.

Dibujar las líneas de movimiento para ambos casos en el espacio de fases (q, p).

Reemplazar el potencial del oscilador armónico por:

$$V = \frac{1}{2} k^2 q^{2r} \ ,$$

donde r varía entre 1 e infinito. Mostrar que las elipses concéntricas del oscilador armónico se deforman y para $r \to \infty$ recuperamos el caso b) donde las'paredes' están en $q = \pm 1$.

10.- **(Ejercicio voluntario)**. Sea un pénulo coplanario, ejercicio 3^0 de la primera hoja de problemas, en el que $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = l$.

a) Da la expresión del Lagrangiano del sistema.

b) Demuestra que los dos ejes Q_1 y Q_2 de las coordenadas curvilíneas forman un ángulo de 45^0.

c) Muestra que las frecuencias conectadas con los dos ejes principales son:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \sqrt{2 + \sqrt{2}}\, \nu \ , \\ \nu_2 &= \sqrt{2 - \sqrt{2}}\, \nu \ , \end{aligned}$$

donde ν es la frecuencia natural de cada uno de los péndulos simples.

d) Mostrar que los dos ejes principales $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ biseccionan el ángulo entre Q_1 y Q_2 y su ángulo suplementario.

e) Resolver el problema en las coordenadas originales haciéndolo primero en las coordenadas asociadas a los ejes principales.

Ejercicios. Tercer Boletín.

1.- Una partícula en un campo gravitatorio uniforme sólo se puede mover sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía con el tiempo según una función conocida $r(t)$. Obtener el Hamiltoniano y las ecuaciones canónicas de movimiento. Discutir la variación de la energía con el tiempo. ¿Es el Hamiltoniano la energía total?.

2.- Considera el Hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} e^{-q/a} \ ,$$

con un grado de libertad. Hallar $q(t)$ y $p(t)$. La ecuación para d^2q/dt^2 parece corresponder a la ecuación de una fuerza disipativa proporcional a $\dot{q}^2$, pero no es así. Sólo lo es para $\dot{q} > 0$. Disicutir por qué. Consideremos que este es el caso, $\dot{q} > 0$. Entonces podemos pensar que este Hamiltoniano corresponde a un problema unidimensional con una fuerza disipativa en el que q es una coordenada cartesiana. Hallar entonces la velocidad de disipación de la energía cinética. Determinar la variación temporal del Hamiltoniano, dH/dt. ¿Corresponde el Hamiltoniano a la energía cinética de la partícula?.

3.- Dado el Hamiltoniano:

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2 \ ,$$

donde a y b son constantes. Mostrar que:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{p_2 - b q_2}{q_1} \ , \\ F_2 &= q_1 q_2 \ , \\ F_3 &= q_1 \, e^{-t} \ , \end{aligned}$$

son constantes de movimiento. Discutir su independencia y si existen otras constantes de movimiento que sean independientes. Si existen, darlas hasta obtener el mayor número posible de constantes independientes. Mostrar explícitamente que $[F_i, F_j]$ son constantes de movimiento.

4.- Sean las variables canónicas p y q cuya evolución viene generada por el Hamiltoniano $H = (p^2 + q^2)/2$. Considérese el cambio de variables $Q = q$ y $P = p^{1/2} - q^2$. Aplicando el teorema de los corchetes de Poisson hay que demostrar que dicho cambio de variables no es canónico.

5.- Probar que la transformación:

$$\begin{aligned} Q_1 = q_1^2 \qquad & Q_2 = q_2/\cos p_2 \\ P_1 = \frac{p_1 \cos p_2 - 2q_2}{2q_1 \cos p_2} \quad & P_2 = \mathrm{sen} p_2 - 2q_1 \ , \end{aligned} \tag{1}$$

es canónica. Encuentra una función generatriz adecuada que de lugar a dicha transformación canónica.

6.- Encontrar una transformación canónica tal que el Hamiltoniano de un cuerpo que cae libremente en un campo gravitatorio uniforme con un único grado de libertad sea $H(Q, P) = P$. Resolver el problema en términos de Q, P y volver a transformar a las variables originales q, p.

7.- Sea:

$$
\begin{aligned}
Q_1 = q_1^2 \quad & P_1 = P_1(q_1, q_2, p_1, p_2)\ , \\
Q_2 = q_1 + q_2 \quad & P_2 = P_2(q_1, q_2, p_1, p_2)\ ,
\end{aligned}
$$

una transformación canónica. Completar la transformación encontrando la expresión más general para P_1 y P_2. Mostrar que una elección particular para P_1 y P_2 reducirá el Hamiltoniano de:

$$
H = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2\ ,
$$

a

$$
H = P_1^2 + P_2\ .
$$

Utilizar esta transformación para obtener q_1 y q_2 como funciones del tiempo.

8.- Considera la transformación de punto:

$$
Q \ = \ \mathrm{Arctan}(\lambda q/p)\ .
$$

Complétala para formar una transformación canónica, mostrando que:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{p^2 + \lambda^2 q^2}{2\lambda} + \frac{p^2 + \lambda^2 q^2}{\lambda q} G(p, q, t)\ , \\
G &= \frac{\partial R(q, p, t)}{\partial p}\ ,
\end{aligned} \tag{2}
$$

siendo $R(q, p, t)$ una función diferenciable sujeta a ciertas condiciones que hay que determinar.

Aplicar esta transformación al problema del oscilador armónico simple de masa m y frecuencia angular $w = \lambda/m$. (Elegir G para simplificar el problema, resolverlo en función de las nuevas variables y volver a las variables originales q, p.)

9.- Considera una partícula sometida a la fuerza:

$$
F \ = \ -kq - \frac{\alpha}{q^3}\ .
$$

Mostrar que este sistema se puede describir con el Hamiltoniano:

$$
H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 + A\frac{p}{q}\ .
$$

Expresar A en función de α y emplear la transformación del problema anterior para resolver este problema. Es decir, resolverlo en las nuevas variables Q, P y volver a las originales q, p.

Ejercicios. Cuarto Boletín.

1. Sea:

$$\phi = \arctan\frac{x_1}{x_2} ,$$

la variable de rotación alrededor del eje 3. Sea $G(\vec{x},\vec{p})$ una variable canónicamente conjugada a ϕ, definida por $[\phi, G] = 1$. Discutir cualquier diferencia entre G y ℓ_3, siendo ℓ_3 la componente de momento angular en la dirección 3. Encontrar las θ-órbitas generadas por G.

2. Considerar el oscilador armónico simple bidimensional cuyo Hamiltoniano viene dado por $H = \frac{1}{2}\sum_\alpha \xi_\alpha\xi_\alpha$, con α variando de 1 a 4. Sea $G = \sum_{\mu\nu} w_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu$, tal que $w_{\mu\nu} = w_{\nu\mu}$, el generador infinitesimal de una familia continua de transformaciones canónicas bajo las cuales H es invariante. Dar la forma más general de la matriz Ω, cuyos elementos de matriz son $w_{\mu\nu}$.

   Mostrar que Ω se puede expresar como la combinación lineal de cuatro matrices $\Omega^{(\beta)}$ básicas y dar las θ-órbitas generadas por los generadores infinitesimales $G^{(\beta)} = \sum_{\mu\nu} w^{(\beta)}_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu$.

3. *Coordenadas parabólicas* ξ, η, ϕ. Discutir la aplicación de las coordenadas parabólicas para obtener una ecuación de Hamilton-Jacobi separable con el potencial:

$$V = \frac{\alpha}{r} - F\,z .$$

Dar una expresión cerrada de la función principal de Hamilton S y reexpresar las constantes de integración en variables canónicas cilíndricas ρ (p_ρ), z (p_z), ϕ (p_ϕ).
Ayuda: Consultar p.e. Landau y Lifshitz, Vol. I, Mecánica.

4. Considerar el Hamiltoniano:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2 .$$

Resolver el movimiento del sistema por el método de Hamilton-Jacobi. ¿A qué sistema físico podría corresonder?. Resolver adicionalmente el movimiento del sistema de los siguientes tres modos:
a) Resolviendo las ecuaciones canónicas.
b) Haciendo una transformación canónica con:

$$Q_1 = Ap_1\,;\; P_1 = B(p_2 - kq_1) ,$$

eligiendo Q_2 y P_2 convenientemente, así como las constantes A y B. Resolver para Q_α, P_α y volver a las variables originales.
c) Empleando el método de las variables acción-ángulo.

5. De la defininción de las variables acción J_α, demostrar que:

$$\det\left(\partial J_\alpha/\partial Q_\beta\right) \neq 0 .$$

Ayuda: En el curso de la demostración argumentar que (no suma):

$$\det\left(\oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_\alpha \partial Q_\beta}\right) = \oint ... \oint \det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_\alpha \partial Q_\beta}\right) dq_1...dq_n .$$

6. Resolver el oscilador armónico simple mediante los métodos relacionados de Hamilton-Jacobi y variables acción-ángulo.

7. Resolver el problema del péndulo de Ehrenfest, ejercicio 5^0 del boletín segundo, haciendo uso de la teoría de invariantes adiabáticos.

8. Consideremos un gas como una colección de esferas confinadas en una caja sin interacción mutua, salvo posibles choques. Tomemos una sola partícula de masa m confinada en un intervalo finito del eje x (caja unidimensional), moviéndose muy rápidamente adelante y atrás entre los dos extremos opuestos del intervalo. Suponer invarianza adiabática y determinar como varía la presión como función de la longitud de la caja. ¿Cómo variará la temperatura?. En un proceso adiabático PV^γ=constante. Determinar γ en este caso y comparar con el valor obtenido en la teoría cinética de los gases.

Ejercicios. Quinto Boletín.

1. Escribid las ecuaciones para el movimiento de un fluido unidimensional en términos de las variables a y t, donde a (llamada variable Lagrangiana) es la coordenada x de un partícula de fluido en un instante inicial $t = t_0$.

2. Determinad la forma de la superficie de un fluido incompresible sujeto a un campo gravitatorio y que está contenido en un recipiente cilíndrico que gira sobre su eje vertical con una velociad angular constante Ω.

3. Un burbuja esférica de radio a se forma repentinamente en un fluido incompresible que llena todo el espacio. Determinad el tiempo que necesita el fluido para rellenar de líquido dicha burbuja.

4. Una esfera de radio R sumergida en un fluido incompresible se expande de acuerdo a una función dada $R = R(t)$. Determinad la presión del fluido en la superficie de la esfera.

5. Mostrad que para un flujo que no sea isentrópico ($s \neq$ constante), pero que siga cumpliendo la condición adiabática $ds/dt = 0$ como corresponde a un fluido ideal, se satisface que cualquier partícula de fluido al evolucionar tiene un valor constante del producto

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}s \cdot \mathbf{rot}\vec{v}$$

6. Una esfera de radio R se mueve con velocidad $\vec{u}$ en un fluido ideal incompresible. Determinad el potencial de velocidades para el fluido.

7. Lo mismo que en el problema anterior pero para un cilindro infinito que se mueve en la dirección perpendicular a su eje.

8. Determinad el potencial de velocidades de un fluido ideal incompresible contenido en una jarra elipsoidal que gira alrededor de un eje principal con una velocidad angular constante Ω. Calculad el momento angular total del fluido alrededor de dicho eje.

9. Determinad el potencial de velocidades cerca del ángulo formado por dos planos que se intersectan.

10. Considerad un fluido que llena el espacio y una región dentro del mismo que en $t = 0$ corresponde a D_0. En un tiempo posterior t dicha región corresponde a D_t y viene dada por la actuación sobre D_0 de la aplicación $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$ y dicha aplicación no tiene porque coincidir con la aplicación de flujo del fuido. Se define la correspondiente velocidad asociada a la transformación como:

$$\mathbf{v}_c(\mathbf{f}, t) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \ .$$

    Determinad la derivada con respecto al tiempo del momento lineal $\mathbf{P}(t)$ contenido en dicha región en el instante de tiempo t suponiendo el caso de fluido ideal sin fuerzas de cuerpo.