Ejercicios Voluntarios de Mecánica II

Profesor: José Antonio Oller
Departamento de Física, Universidad de Murcia

Primer conjunto:

1. Demuéstrese que la energía potencial interna de un sólido rígido permanece constante a lo largo del movimiento de éste.

2. Dado un disco de radio R que rueda sin deslizar sobre una línea en un plano horizontal, se trata de dar la posición de cada punto del disco en función del tiempo.

3. Dada la forma de la energía cinética en coordenadas generalizadas hay que deducir las ecuaciones de Lagrange para un potencial $V(q, \dot{q}, t)$.

4. Obtened el Hamiltoniano para una partícula en un campo electromagnético externo.

5. Expresad el producto vectorial de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en términos del tensor completamente antisimétrico ϵ_{ijk}. Hay que deducir:

   i) $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$

   ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

6. Sea una transformación $q'_\alpha(q,t)$, $t'(t)$, $\alpha = 1, \ldots, n$, tal que $\det\left(\frac{\partial q'_\beta}{\partial q_\alpha}\right) \neq 0$. Demostrad que entonces $\det\left(\frac{\partial \dot{q}'_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \neq 0$.

Segundo conjunto:

1. Dada la expresión de $\delta q_\alpha(t) = \bar{\delta} q_\alpha(t) + \dot{q}_\alpha \delta t$ deducid que para la variación de la velocidad se cumple que

$$\delta \dot{q}_\alpha(t) = \frac{d}{dt}\bar{\delta} q_\alpha(t) + \ddot{q}_\alpha \delta t \ .$$

2. Demostrad que si el Lagrangiano solo es función de las coordenadas relativas, $L = L(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_i, t)$, siendo $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, entonces se verifica que $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0$ con $i = 1, \ldots, n$.

3. En el ejercicio [1.5] del primer boletín con tres masas, dos de ellas de masa m_1 y la tercera de masa m_2, en el dispositivo de brazos rígidos de longitud a que gira con una velocidad angular constante Ω [Figura 4], hay que explicar el punto de equilibrio con $\theta \neq 0$ a partir de las ecuaciones de Newton.

4. Demostrad que en lugar de los $\mathbf{r}_i$ se pueden emplear las variables $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ y $\mathbf{R}$. Para ello expresad los $\mathbf{r}_i$ en función de estas últimas variables ($\mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{R}$). Aquí $\mathbf{R}$ es el vector de posición del CM. De este modo

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = L(\mathbf{r}'_i, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{r}}'_i, \dot{\mathbf{R}}, t)$$

   Invarianza bajo traslaciones. Empleando el resultado anterior demostrad que la conservación del momento lineal total surge también de

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)}{\partial \mathbf{R}} = 0 \ .$$

   Aplicad para ello las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

5. Considérese el Lagrangiano de una partícula de carga e en un campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, siendo $\hat{\mathbf{z}}$ el vector unitario a lo largo del eje z y B una constante. Demostrad que el Lagrangiano es invariante bajo una rotación alrededor del eje z y obtened, aplicando el teorema de Nöther, la constante de movimiento asociada.

Tercer conjunto:

1. Considérese el campo gravitatorio terrestre con aceleración constante g y una partícula de masa m. Demostrad que entre dos trayectorias geométricamente equivalentes se tiene la relación $z'_{\text{max}} = \alpha z_{\text{max}}$, $t'_{\text{max}} = \sqrt{\alpha} t_{\text{max}}$. Hágase la demostración mediante el cálculo explícito de las trayectorias.

2. Sea q_n una variable ignorable. Mediante la aplicación adecuada del teorema de Nöther demostrad que $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$ es una constante de movimiento.

3. Resolved el movimiento para el oscilador armónico bidimensional,

$$L = \frac{m}{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \ ,$$

mediante el uso del principio de la mínima acción y del principio de Jacobi.

4. Sea una esfera de radio R. Calcúlese la geodésica que sobre la esfera une dos puntos designados por P_1 y P_2.

5. Para el Lagrangiano $L' = Lt'$ que resulta de tomar el tiempo como otra coordenada más, y todas ellas en función de un parámetro τ, demostrad que

$$p_i = \frac{\partial L'}{\partial q'_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ , \ i = 1, \ldots, n \ ,$$

con $q'_i = dq_i/d\tau$ y $\dot{q}_i = dq_i/dt$.

6. Demostrad que

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \neq 0 \leftrightarrow \det \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \neq 0 \ .$$

7. Dado un flujo en el espacio de fases:

$$\frac{d\xi_\alpha}{dt} = f_\alpha(\xi, t) \ , \ \alpha = 1, \ldots, 2n \ .$$

Derivad cómo se pueden obtener las ecuaciones diferenciales de segundo orden para las coordenadas,

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = g_i(q, \dot{q}_i, t) \ , \ i = 1, \ldots, n \ .$$

Cuarto conjunto:

1. Aplicando el teorema de los corchetes de Poisson demostrad que la evolución temporal para el cambio de variables

$$
\begin{aligned}
Q &= q \ , \\
P &= p^{1/2} - q^2 \ ,
\end{aligned}
$$

no es canónica para el Hamiltoniano $H = (p^2 + q^2)/2$.

2. Resolved $q(t)$ y $p(t)$ para el sistema cuyo flujo en el espacio de fases viene dado por

$$
\begin{aligned}
\dot{p} &= -pq \ , \\
\dot{q} &= pq \ .
\end{aligned}
$$

3. Ejercicio **(2.10)** del segundo boletín de problemas.

4. Demostrad que las variables elegidas en las transformaciones canónicas básicas de tipos III y IV son independientes si se require que los determinantes de las matrices $\partial A_i/\partial q_j$ y $\partial B_i/\partial q_j$, respecitvamente, sean no nulos.

5. Obtened la transformación canónica que deja el Hamiltoniano del oscilador harmónico,

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2) \ ,$$

igual a

$$H = \alpha \ .$$

En este caso α es la nueva coordenada y φ el nuevo momento.

6. Sea la transformación canónica básica de tipo II,

$$F_2(q, B, t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(q, t) B_i + g(q, t) \ .$$

Obtened las nuevas coordenadas canónicas. ¿Cuál sería el correspondiente Lagrangiano $\tilde{L}(A, \dot{A}, t)$ supuesto conocido el Hamiltoniano $H(q, p, t)$?.

7. Calcúlese el generador infinitesimal de una transformación de Galileo y su variable canónicamente conjugada.

Quinto conjunto:

1. Dadas las matrices $n \times n$ M y N, tal que $M = I + \varepsilon N$, demostrad que a primer orden en ε el determinante de M viene dado por la expresión

$$\mathrm{Det} M = I + \varepsilon \mathrm{Tr} N + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ .$$

2. Empleando la definición de producto vectorial y rotacional en términos del tensor completamente antisimétrico, ε_{ijk}, demostrad que se verifica:

$$\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{v} - \mathbf{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{v}) \ .$$

3. Linearizando las ecuaciones de la dinámica de fluidos, rehaced el problema de propagación del sonido que se origina debido a las pequeñas oscilaciones transversales del plano yz, pero tomando la ecuación de estado de tipo politrópico en lugar de la de gases ideales. Dicha ecuación de estado viene dada por

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \alpha = \text{constante} \ .$$

¿Cuál es el valor del exponente γ tal que la velocidad de propagación del sonido sea la experimental de 343 m/s?. Suponed las condiciones ambientales dadas en clase. [El resultado es $\gamma = 1{,}4$, tal y como también se puede encontrar en la literatura científica.]

Sexto conjunto:

1. Transformación bajo una rotación del producto vectorial de dos vectores: Dados los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y R una rotación arbitraria de determinante unidad, demostrad que se verifica que

$$R\mathbf{a} \times R\mathbf{b} = R\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}\ .$$