



Un modelo reducido Galerkin/POD aplicado al cálculo de bifurcaciones en un problema de convección de Rayleigh-Bénard en un dominio 2-dimensional

Francisco Pla¹, Henar Herrero¹, José Manuel Vega²

En este trabajo, un método reducido de tipo *Galerkin/POD*, es decir, Galerkin basado en *proper orthogonal decomposition* (POD), es aplicado al problema de convección de Rayleigh-Bénard tal que el número de Prandtl tiende a infinito y el número de Rayleigh será nuestro parámetro de bifurcación. El fluido se encuentra confinado entre una pared sólida inferior y una superficie libre no deformable superior en un dominio 2-dimensional (2-D) acotado $[0, \Gamma] \times [0, 1]$ con $\Gamma = L/d$ la relación de aspecto entre el ancho L y la profundidad d del dominio. Se supone que los perfiles del fluido confinado son periódicos en la dirección horizontal y consideraremos la aproximación de Boussinesq. Las ecuaciones y condiciones de contorno adimensionalizadas son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } \Omega = [0, \Gamma] \times [0, 1], \quad (1)$$

$$\theta \mathbf{e}_z - \nabla P + \frac{1}{\sqrt{R}} \Delta \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2)$$

$$\partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta - w = \frac{1}{\sqrt{R}} \Delta \theta \quad \text{in } \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \theta = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad \theta = \partial_z u = w = 0 \quad \text{at } z = 1, \quad (4)$$

$$\partial_x \theta = \partial_x w = u = 0 \quad \text{at } x = 0 \text{ and at } x = \Gamma. \quad (5)$$

Donde, $\mathbf{u} = (u, w)$ es el vector de la velocidad en 2-D, P y θ son los campos de la presión y temperatura respectivamente, \mathbf{e}_z es el vector unitario en la dirección vertical y R es el número de Rayleigh. Este problema presenta una simetría horizontal exacta y una simetría vertical no exacta (aproximada), la cuál es debido a valores grandes del número de Rayleigh en un régimen físicamente relevante.

Se presentará un modelo de orden reducido con dos ingredientes principales: (i) las simetrías se contabilizan en el cálculo de los modos POD y (ii) se aprovecha de la propiedad (ya probada en problemas de bifurcación relacionados) de que las bases POD obtenidas de los snapshots correspondientes a iterantes no convergentes de Newton o a pasos temporales antes de que el problema temporal correspondiente converja para un determinado valor del número de Rayleigh, también contienen buenas aproximaciones de los estados estacionarios para otros valores de R . Con el método de continuación en el modelo de orden reducido, el diagrama de bifurcación se calcula en un coste computacional bastante bajo.

¹Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias y Tecnologías
Universidad de Castilla-La Mancha Químicas
13071 Ciudad Real, Spain
Francisco.Pla@uclm.es
Henar.Herrero@uclm.es

²Escuela de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid
28040 Madrid, Spain
josemanuel.vega@upm.es