CONGRESO DE JÓVENES INVESTIGADORES
Real Sociedad Matemática Española
Universidad de Murcia, del 7 al 11 de Septiembre de 2015

Comportamiento de la multiplicidad en variedades algebraicas y álgebras de Rees

Carlos Abad Reigadas[1]

Sea X una variedad algebraica sobre un cuerpo perfecto. A cada punto $x \in X$ le podemos asociar un número entero, la multiplicidad de X en x, de manera que x es regular si y solo si tiene multiplicidad 1.

En esta charla, veremos que es posible encontrar una inmersión local de X en una variedad regular, digamos $X \subset V$, y un conjunto de funciones, pongamos $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_V$, con pesos $N_1, \dots, N_r \in \mathbb{N}$ de manera que el lugar de máxima multiplicidad de X quede descrito en términos del orden de dichas funciones:

$$\underline{\mathrm{Max}}\,\mathrm{mult}(X) = \bigcap \{x \in V \mid \mathrm{ord}_x(f_i) \geq N_i\}.$$

Además, esta caracterización se preserva por explosiones en centros regulares equimúltiples y otras transformaciones que denominaremos permisibles. Estas funciones con pesos inducen de manera natural un álgebra de Rees:

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[f_1 W^{N_1}, \dots, f_r W^{N_r}] \subset \mathcal{O}_V[W].$$

En el caso de característica cero, existe un algoritmo que, a partir de $\mathcal{G}$, nos permite construir una secuencia de explosiones sobre X en centros equimúltiples de forma que la multiplicidad máxima de X baja. Este proceso difiere del algoritmo de resolución de singularidades de Hironaka, que utiliza la función de Hilbert-Samuel como invariante principal.

Por último, veremos que, partiendo de $\mathcal{G}$, existe un modo de definir un álgebra de Rees canónica sobre X asociada al lugar de máxima multiplicidad. Este álgebra no depende ni de la la inmersión $X \subset V$, ni de la elección de las funciones $f_1, \dots, f_r$.

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid
and Instituto de Ciencias Matemáticas CSIC-UAM-UC3M-UCM
Ciudad Universitaria de Cantoblanco, 28049 Madrid, Spain
carlos.abad@uam.es