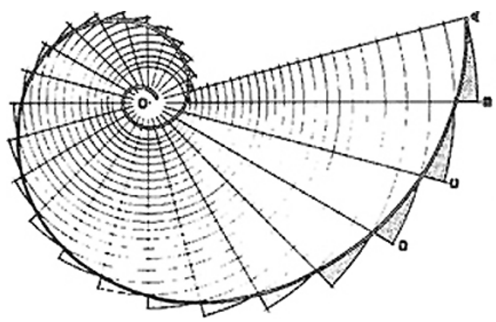
III

CONGRESO DE JÓVENES INVESTIGADORES

de la Real Sociedad Matemática Española

Universidad de Murcia, 7-11 Septiembre, 2015



SESIÓN

GEOMETRÍA ALGEBRAICA Y SINGULARIDADES

Financiado por:

Fundación Séneca-Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia, 19625/OC/14, con cargo al Programa "Jiménez de la Espada de Movilidad, Cooperación e Internacionalización"; plan propio de investigación de la Universidad de Murcia; Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Cartagena.

Comportamiento de la multiplicidad en variedades algebraicas y álgebras de Rees

Carlos Abad Reigadas[1],

Sea X una variedad algebraica sobre un cuerpo perfecto. A cada punto $x \in X$ le podemos asociar un número entero, la multiplicidad de X en x, de manera que x es regular si y solo si tiene multiplicidad 1.

En esta charla, veremos que es posible encontrar una inmersión local de X en una variedad regular, digamos $X \subset V$, y un conjunto de funciones, pongamos $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}_V$, con pesos $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$ de manera que el lugar de máxima multiplicidad de X quede descrito en términos del orden de dichas funciones:

$$\underline{\mathrm{Max}}\,\mathrm{mult}(X) = \bigcap \{x \in V \mid \mathrm{ord}_x(f_i) \geq N_i\}.$$

Además, esta caracterización se preserva por explosiones en centros regulares equimúltiples y otras transformaciones que denominaremos permisibles. Estas funciones con pesos inducen de manera natural un álgebra de Rees:

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[f_1 W^{N_1}, \ldots, f_r W^{N_r}] \subset \mathcal{O}_V[W].$$

En el caso de característica cero, existe un algoritmo que, a partir de $\mathcal{G}$, nos permite construir una secuencia de explosiones sobre X en centros equimúltiples de forma que la multiplicidad máxima de X baja. Este proceso difiere del algoritmo de resolución de singularidades de Hironaka, que utiliza la función de Hilbert-Samuel como invariante principal.

Por último, veremos que, partiendo de $\mathcal{G}$, existe un modo de definir un álgebra de Rees canónica sobre X asociada al lugar de máxima multiplicidad. Este álgebra no depende ni de la la inmersión $X \subset V$, ni de la elección de las funciones $f_1, \ldots, f_r$.

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, and Instituto de Ciencias Matemáticas CSIC-UAM-UC3M-UCM, Ciudad Universitaria de Cantoblanco, 28049 Madrid, Spain
carlos.abad@uam.es

Intersection Cohomology for Projective Contraction-Free $\mathbb{T}$-varieties of complexity one.

Marta Agustín Vicente[1],

Let $\mathbb{T}$ be an algebraic torus. A $\mathbb{T}$-variety is a normal variety with an effective $\mathbb{T}$-action. A $\mathbb{T}$-variety is said to be contraction-free if the rational quotient map given by the $\mathbb{T}$-action is a morphism. Every $\mathbb{T}$-variety has a combinatorial description involving a ?nite collection of polyhedral divisors. In this talk, we will explain briefly this combinatorial description and we will compute the intersection cohomology Betti numbers of a contraction-free $\mathbb{T}$-variety in terms of it.

Referencias

[AH06] . Altmann, J. Hausen: Polyhedral divisors and algebraic torus actions. *Math. Ann.* **334**, no. 3, 557607 (2006).

[AHS08] . Altmann, J. Hausen, H. Suess: Gluing a?ne torus actions via divisorial fans. *Transform. Groups* **13**, no. 2, 215242 (2008).

[ALan] . Agustín, K. Langlois: Intersection Cohomology for Projective Contraction-Free $\mathbb{T}$-varieties of complexity one,

arXiv:1412.7634 (2015).

[1]Instituto de Ciencias Matemáticas, ICMAT

Calle Nicolás Cabrera, 13-15
28049 Madrid
martaav22@gmail.com

Estructuras especiales Kähler y superficies K3 elípticas

Giovanni Bazzoni[1], **Sönke Rollenske**[2]

El objetivo de esta charla es explicar una correspondencia entre superficies K3 elípticas, esto es, superficies K3 algebraicas con una aplicación sobreyectiva y propia a la recta proyectiva compleja tales que la fibra genérica es una curva elíptica, y estructuras especiales Kähler en la recta proyectiva pinchada. Esto es un caso especial de una correspondencia más general entre fibraciones Lagrangianas sobre variedades hyperkähler y estructuras especiales Kähler.

[1]Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 100301, 33501, Bielefeld
gbazzoni@math.uni-bielefeld.de

[2]FB 12 / Mathematik und Informatik,
Philipps-Universität Marburg
Hans-Meerwein-Str. 6 / Campus Lahnberge, 35032 Marburg
rollenske@mathematik.uni-marburg.de

F-jumping numbers of test ideals

Alberto F. Boix[1]

Given a pair $(X, \mathfrak{a})$, where $X = \operatorname{Spec}(R)$ is an affine normal algebraic variety of characteristic zero and $\mathfrak{a} \subseteq R$ is an ideal, one can associate it a decreasing chain of multiplier ideals

$$\mathcal{J}(X; \mathfrak{a}^{n_1}) \supseteq \mathcal{J}(X; \mathfrak{a}^{n_2}) \supseteq \mathcal{J}(X; \mathfrak{a}^{n_3}) \supseteq \dots$$

indexed by real numbers n_i's (where $n_i \leq n_{i+1}$). The digits where the inclusion is strict are called *jumping numbers* of the pair $(X, \mathfrak{a})$. From the existence of resolution of singularities one deduces that these digits

In prime characteristic, the analog of the multiplier ideal is the so-called *test ideal*; actually, given a pair as before $(X, \mathfrak{a})$ (where now R is a ring of positive characteristic), one can attach it a decreasing chain of test ideals

$$\tau(X; \mathfrak{a}^{n_1}) \supseteq \tau(X; \mathfrak{a}^{n_2}) \supseteq \tau(X; \mathfrak{a}^{n_3}) \supseteq \dots$$

The real numbers where the inclusion is strict are the so-called *F-jumping numbers* of $(X, \mathfrak{a})$. If X is smooth, these digits are known to form a discrete subset of rational numbers; however, if X is singular, this problem is open in general.

The purpose of this talk is to show the discreteness of F-jumping numbers of the pair $(\operatorname{Spec}(R), \mathfrak{a})$, where $R := K[\![x_1, \dots, x_d]\!]/I$, I is a squarefree monomial ideal, $\mathfrak{a}$ is any ideal of R, and K is a perfect field of prime characteristic.

The content of this communication is based in a joint work with Josep Àlvarez Montaner and Santiago Zarzuela.

[1]Department of Economics and Business
Universitat Pompeu Fabra
Jaume I Building, Ramon Trias Fargas 25-27, 08005 Barcelona, Spain.
alberto.fernandezb@upf.edu

Complejos Celulares y Curvas Algebraicas

Simón Isaza[1]

En esta charla describimos un método general para construir un complejo celular para el par $(\mathbb{PC}^2, \Omega)$, donde Ω es una curva algebráica. Esto significa construir un complejo celular para $\mathbb{PC}^2$ de tal manera que Ω sea un subcomplejo. Hacemos estoescogiendo una línea genérica en el infinito y construyendo dicho complejo para un polidisco adecuado.

En particular, describimos un complejo celular para el par

$$\left(\Delta \times \Delta, \left\{(x, y) \mid x^a y^b - 1 = 0 \text{ con } a, b \in \mathbb{N}\right\}\right).$$

A partir de dicho complejo construimos, por medio de cubiertas, una descomposición celular para la fibra de Milnor compacta de la singularidad no aislada $z^n - (x^a y^b)$, es decir, del espacio

$$\left\{(x, y, z) \in \Delta \times \Delta \times \mathbb{C} \mid z^n - (x^a y^b - 1) = 0 \text{ and } a, b, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Esto nos permite calcular la homología de dicho espacio y la monodromía de la singularidad.

[1]Universidad de Zaragoza

Series de Hilbert, profundidad y semigrupos numéricos

Julio José Moyano-Fernández[1],

Sea M un módulo graduado finitamente generado sobre un anillo de polinomios $\mathbb{Z}$-graduado, no necesariamente estándar. Sea H_M su serie de Hilbert. En esta charla se presentará un invariante asociado a H_M, el anillo de polinomios posee dos indeterminadas. Estas ideas se basan en un proyecto conjunto con Jan Uliczka.

[1]Departamento de Matemáticas e Institut Universitari de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló.

Universitat Jaume I, Campus de Riu Sec.

12071 – Castellón de la Plana, Spain.

moyano@uji.es

La sucesión de multiplicidades de Nash y su relación con invariantes de la resolución algorítmica.

Beatriz Pascual Escudero[1]

Si consideramos una variedad algebraica definida sobre un cuerpo de característica cero, podemos encontrar [3] una sucesión de explosiones en centros cuidadosamente escogidos, de tal forma que componen una *resolución de singularidades* de nuestra variedad. La *resolución algorítmica* consiste en definir unos criterios para la elección adecuada de esos centros [5, 6, 1]. Para la definición de este criterio, se utilizan funciones que distingan entre puntos de la variedad, de manera que el conjunto de puntos en los que la función alcance su valor más alto será, en cada momento, el mejor candidato a centro de una explosión. Para construir estas funciones, utilizamos ciertos invariantes, tales como la *multiplicidad*, la *función de Hilbert-Samuel*, y variaciones de estas. Nos referimos a todos ellos como *invariantes de resolución* porque son intrínsecos a la variedad estudiada.

En otro ámbito, la *sucesión de multiplicidades de Nash* asociada a un arco en una variedad que esté centrado en un punto [4] es una sucesión decreciente de enteros positivos, que podemos calcular como las multiplicidades del punto y de sus imágenes por una sucesión particular de explosiones [2].

Presentaremos algunos invariantes construidos a partir de la sucesión de multiplicidades de Nash y su relación con invariantes de la resolución.

Referencias

[1] E. Bierstone, P. Milman: Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant, *Inv. Math.* **128** (Número/Number) (1997), 207–302.

[2] M. Hickel: Sur quelques aspects de la géométre de l'espace des arcs tracés sur un espace analytique, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques* **14** (1) (2005), 1–50.

[3] H. Hironaka: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II, *American Journal of Mathematic.* **79** (1-2) (1964), 109–326.

[4] M. Lejeune-Jalabert: Courbes Tracées sur un Germe D'Hypersurface, *Ann. of Math.* **112** (4) (1990),

[5] O. E. Villamayor U.: Constructiveness of Hironaka's resolution, *Ann. Sci. École. Norm. Sup. 4ème série* **22** (1) (1989), 1–32.

[6] O. E. Villamayor U.: Patching local uniformizations, *Ann. Sci. École. Norm. Sup. 4ème série* **25** (6) (1992), 629–677.

[1]Departmento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias, módulo 17, Ciudad Universitaria de Cantoblanco, 28049 Madrid
`beatriz.pascual@uam.es`

Monodromía combinatoria

Pablo Portilla,

Se presentan las primeras definiciones de un tipo de grafos que codifican la topología de una superficie con borde junto con un automorfismo periódico de la misma. Esta teoría nos permite estudiar de forma combinatoria la monodromía de una singularidad aislada.

Referencias

[1] Norbert A'Campo: Tête-à-tête twists and geometric monodromy,
Preprint () (2009),

[1]Office 208
ICMAT
C/ Nicolás cabrera n$^{\text{o}}$13-15
Campus de Cantoblanco, UAM
28049 Madrid SPAIN

`pablo.portilla@icmat.es`

Fórmula de Bott para fibrados proyectivos

Darío Sánchez Gómez[1],

Para el espacio proyectivo r-dimensional complejo $\mathbb{P}_r$ la llamada fórmula de Bott [1] permite calcular la dimensión de los espacios vectoriales $H^q(\mathbb{P}_r, \Omega^i(n))$, donde $\Omega^i(n) := \bigwedge^i \Omega_{\mathbb{P}_r} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)$ denota el álgebra exterior i-ésima del fibrado cotangente de $\mathbb{P}_r$ tensorializado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)$.

En esta charla mostraremos un modo de generalizar esta fórmula cuando, en lugar de un espacio proyectivo, consideramos el fibrado proyectivo asociado a un fibrado vectorial.

Esto es un trabajo en progreso, en colaboración con Björn Andreas (Freie Universität, Berlín) y Fernando Sancho de Salas (Universidad de Salamanca).

Referencias

[1] R. Bott: Homogeneous vector bundles, *Ann. of Math* (66) (1957), 203–248.

[1]Departamento de Matemáticas
Universidad de Salamanca
Plaza de la Merced 1-4, 37008, Salamanca.
dario@usal.es

Caracterización Cohomológica de Fibrados Universales de la Grassmanniana de rectas

Alicia Tocino Sánchez[1],

Sea $G(1,n)$ la Grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^n$ y sea Q el fibrado vectorial universal de rango dos. Daremos una caracterización cohomológica de las sumas directas de twist de $O, Q, S^2Q, \ldots, S^iQ$ con $i \leq n-2$. Para llegar a este resultado tenemos que hacer inducción en el orden del producto simétrico, i. El caso $i = 0$ está hecho por Arrondo y Malaspina [1]. En cada paso de la inducción tenemos que quitar una hipótesis particular y añadir algunas más. Para la prueba, las principales técnicas que usaremos serń los complejos de Eagon-Northcott y la dualidad de Serre.

Referencias

[1] Arrondo, E.; Malaspina F. Cohomological Characterization of Vector Bundles on Grassmannians of Lines *Journal of Algebra, 323 (2010), 1098-1106*

[1]Departmento de Álgebra
Universidad Complutense de Madrid
Plaza Ciencias, 3, 28040 Madrid
aliciatocinosanchez@ucm.es

Sobre el número de rectas en una superficie cuártica K3

Davide C. Veniani[1],

Uno de los resultados clásicos más famosos en geometría algebraica es que una superficie cúbica en el espacio proyectivo complejo contiene siempre 27 rectas. B. Segre probó en 1943 que una superficie cuártica puede contener cómo máximo 64 rectas. Su prueba contenía un error y fue corregida 70 años más tarde por Rams y Schütt. En este seminario presentaré una nueva prueba del teorema de Segre-Rams-Schütt que se aplica también al caso más general de cuárticas con puntos dobles racionales aislados.

[1]Institut für Algebraische Geometrie
Leibniz Universität Hannover
Welfengarten 1, 30167 Hannover (Germany)
veniani@math.uni-hannover.de

Una reducción semicanónica para periodos de Kontsevich-Zagier

Juan Viu Sos[1],

Un número complejo es un *periodo de Kontsevich-Zagier* si sus partes real e imaginaria pueden expresarse como integrales absolutamente convergentes de funciones racionales a coeficientes en $\mathbb{Q}$ sobre dominios $\mathbb{Q}$–semialgebraicos en el espacio real. En su introducción a los periodos ([KZ01]), M. Kontsevich y D. Zagier conjeturaron que podemos pasar entre dos representaciones integrales distintas de un periodo real usando únicamente tres operaciones sobre la integral: sumas por dominios o integrandos, cambio de variables o fórmula de Stokes.

Usando resolución de singularidades, probaremos que todo periodo real puede expresarse como el volumen de un $\mathbb{Q}$–semialgebraico afín mediante un proceso algorítmico que satisface las tres operaciones precedentes; haremos hincapié en en el caso de semialgebraicos planos y mostraremos algunas de sus aplicaciones dentro del estudio de la conjetura de Kontsevich-Zagier.

Referencias

[KZ01] M. Kontsevich and D. Zagier: Periods,
Mathematics unlimited–2001 and beyond, pages 771–808 (2001).

[Yos08] M. Yoshinaga: Periods and elementary real numbers,
arXiv:0805.0349 (2008).

[VS15] J. Viu-Sos: A semi-canonical reduction for periods of Kontsevich-Zagier,
preprint (2015).

[1]Équipe Algèbre et Géométrie

Université de Pau et des Pays de l'Adour

Bureau 3 - Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications, IPRA - Université de Pau et des Pays de l'Adour,
Avenue de l'Université - BP 1155, 64013 PAU CEDEX (FRANCE)

juan.viusos@univ-pau.fr