CONGRESO DE JÓVENES INVESTIGADORES
Real Sociedad Matemática Española
Universidad de Murcia, del 7 al 11 de Septiembre de 2015

Clasificación de supersoluciones y teoremas de Liouville para ecuaciones elípticas con términos gradiente

M. Á. Burgos-Pérez[1], **J. García-Melián**[1], **A. Quaas**[2]

El clásico resultado de [5] establece que no hay soluciones positivas (clásicas) del problema

$$-\Delta u = u^p \text{ en } \mathbb{R}^N \tag{1}$$

para $N \geq 3$ y $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$. Además, como consecuencia de [4], el problema (1) tampoco admite supersoluciones positivas si $1 < p \leq \frac{N}{N-2}$. Este último resultado sigue siendo válido cuando $\mathbb{R}^N$ es reemplazado por un dominio exterior $\mathbb{R}^N \setminus B_{R_0}$ (ver [2], donde se tiene en cuenta una amplia clase de operadores elípticos y no linealidades).

Importantes investigaciones han continuado con el trabajo pionero [5] para obtener resultados de no existencia (teoremas de Liouville) más generales. En ellos, generalmente se estudia la ecuación (1) donde el Laplaciano es sustituido por otro operador elíptico y el lado derecho por otras funciones, las cuales se comportan básicamente como una potencia.

Un ejemplo de este tipo de ecuaciones fue considerado en [1], donde el laplaciano es perturbado con un término gradiente, es decir:

$$-\Delta u + |\nabla u|^q \geq \lambda f(u) \text{ en } \mathbb{R}^N \setminus B_{R_0},$$

donde $N \geq 3$, $q > 1$ y $\lambda > 0$. La función f es positiva y está controlada por una potencia u^p cerca de cero. Se obtienen algunas regiones de no existencia en términos de N, q, p y λ.

Nuestro interés en este trabajo es conocer cómo cambian los teoremas de no existencia cuando (1) es perturbada con un término gradiente pero de diferente naturaleza. De forma más precisa, nuestro objetivo es analizar la existencia y no existencia de supersoluciones positivas para la ecuación

$$-\Delta u \geq f(u)|\nabla u|^q \text{ en } \mathbb{R}^N \setminus B_{R_0}, \tag{2}$$

donde $N \geq 3$, $q > 0$ y f es una fución positiva y continua.

Notemos que las constantes positivas son siempre supersoluciones de (2). Por lo tanto, queremos encontrar condiciones que nos garanticen la existencia de supersoluciones positivas no triviales o, por el lado contrario, condiciones bajo las cuales las únicas supersoluciones positivas de (2) sean las constantes. El caso donde $f(u) = u^p$, con algunos operadores más generales en lugar del laplaciano, ya fue tratado en [3].

Es posible clasificar las supersoluciones positivas no triviales en términos de ciertas propiedades sobre la monotonía de estas funciones. Con esta clasificación, la ecuación (2) admite hasta tres tipos distintos de supersoluciones positivas no triviales. Además, se dan condiciones que caracterizan la existencia de supersoluciones de cada uno de los tipos. Como consecuencia de esta caracterización, obtenemos el siguiente teorema de Liouville:

Theorem. *Si* $0 < q < 1$ *y existe* $\delta > 0$ *tal que* $\displaystyle\int_0^\delta \frac{f(t)}{t^{\frac{(2-q)(N-1)}{N-2}}}\,dt = +\infty$, *entonces las únicas supersoluciones positivas de* (2) *son las constantes.*

Referencias

[1] S. Alarcón, J. García-Melián, A. Quaas: Nonexistence of positive supersolutions to some nonlinear elliptic problems. *J. Math. Pures Appl.* **99** (2013), 618-634.

[2] S. N. Armstrong, B. Sirakov: Nonexistence of positive supersolutions of elliptic equations via the maximum principle. *Comm. Partial Differential Equations* **36** (2011), no. 11, 2011-2047.

[3] R. Filippucci: Nonexistence of positive weak solutions of elliptic inequalities, *Nonlinear Anal*. **70** (2009), 2903-2916.

[4] B. Gidas: *Symmetry properties and isolated singularities of positive solutions of nonlinear elliptic equations*. In “Nonlinear partial differential equations in Engineering and Applied Science", R. Sternberg, A. Kalinowski, J. Papadakis Eds. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **54**, Marcel Dekker, New York, 1980, pp. 255-273.

[5] B. Gidas, J. Spruck: Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math*. **34** (1981), 525-598.

[1]Departamento de Análisis Matemático,
Universidad de La Laguna.
c/. Astrofísico Francisco Sánchez s/n, 38271 La Laguna, Santa Cruz de Tenerife.
miguelburgosperez@gmail.com, jjgarmel@ull.edu.es

[2]Departamento de Matemática,
Universidad Técnica Federico Santa María.
Avenida España 1680, Región V. Chile alexander.quaas@usm.cl