Diseños proyectivos siguiendo a Bondarenko, Radchenko y Viazovska

Joaquim Ortega-Cerdà

VII Encuentro de Análisis Funcional y Aplicaciones

9 de Abril de 2011

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Inmersiones isométricas

Una motivación para estudiar diseños proyectivos son las inmersiones isométricas de $\ell_q^m(\mathbb{C})$ en $\ell_p^n(\mathbb{C})$.

Inmersiones isométricas

Una motivación para estudiar diseños proyectivos son las inmersiones isométricas de $\ell_q^m(\mathbb{C})$ en $\ell_p^n(\mathbb{C})$.

Teorema (Lyubich)

Si existe una inmersión isométrica de $\ell_q^m(\mathbb{C})$ en $\ell_p^n(\mathbb{C})$ entonces $q = 2$ y $p \in 2\mathbb{N}$

Inmersiones isométricas

Una motivación para estudiar diseños proyectivos son las inmersiones isométricas de $\ell_q^m(\mathbb{C})$ en $\ell_p^n(\mathbb{C})$.

Teorema (Lyubich)

Si existe una inmersión isométrica de $\ell_q^m(\mathbb{C})$ en $\ell_p^n(\mathbb{C})$ entonces $q = 2$ y $p \in 2\mathbb{N}$

Dada una isometría f de $\ell_2^m(\mathbb{C})$ en $\ell_p^n(\mathbb{C})$ entonces

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k \langle u_k, x \rangle$$

y se cumple

$$\sum |\langle u_k, x \rangle|^p = \langle x, x \rangle^{p/2}$$

Fórmulas de cuadratura

Una identidad elemental nos da:

$$\langle x, x\rangle^{p/2} = C_{m,p} \int_{\mathbb{S}} |\langle y, x\rangle|^p d\sigma(y),$$

Fórmulas de cuadratura

Una identidad elemental nos da:

$$\langle x, x\rangle^{p/2} = C_{m,p} \int_{\mathbb{S}} |\langle y, x\rangle|^p d\sigma(y),$$

y por tanto

Teorema

Existe una inmersión isométrica de $\ell_2^m(\mathbb{C})$ en $\ell_p^n(\mathbb{C})$ si y solo si existe una colección de n puntos $\{v_k\}_1^n \in \mathbb{S}$ y unos coeficientes positivos ω_k tales que

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v_k, x\rangle|^p \omega_k = \int_{\mathbb{S}} |\langle y, x\rangle|^p d\sigma(y) \qquad x \in \ell_2^m,$$

Esta fórmula es exacta para los polinomios de la forma $p_x(y) = |\langle y, x\rangle|^p$

El espacio proyectivo y sus vectores propios

Identificamos el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^{m-1}$ con los puntos $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}^m : \|z\| = 1\}$ con la relación de equivalencia $z \sim w$ si $z = \alpha w$ con $\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = 1$.

El espacio proyectivo y sus vectores propios

Identificamos el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^{m-1}$ con los puntos $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}^m : \|z\| = 1\}$ con la relación de equivalencia $z \sim w$ si $z = \alpha w$ con $\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = 1$.
Los polinomios p_x son funciones en $\mathbb{CP}^{m-1}$. Denotamos por $\Phi(m, p)$ al espacio de funciones generado por los polinomios p_x.

El espacio proyectivo y sus vectores propios

Identificamos el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^{m-1}$ con los puntos $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}^m : \|z\| = 1\}$ con la relación de equivalencia $z \sim w$ si $z = \alpha w$ con $\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = 1$.
Los polinomios p_x son funciones en $\mathbb{CP}^{m-1}$. Denotamos por $\Phi(m, p)$ al espacio de funciones generado por los polinomios p_x.
Hay dos descripciones del espacio $\Phi(m, p)$:

- Son polinomios en $\mathbb{R}^{2m}$ absolutamente homogéneos de grado p, es decir, $p(\alpha x) = p(x)|\alpha|^p \; \forall x \in \mathbb{C}^m$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

El espacio proyectivo y sus vectores propios

Identificamos el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^{m-1}$ con los puntos $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}^m : \|z\| = 1\}$ con la relación de equivalencia $z \sim w$ si $z = \alpha w$ con $\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = 1$.
Los polinomios p_x son funciones en $\mathbb{CP}^{m-1}$. Denotamos por $\Phi(m, p)$ al espacio de funciones generado por los polinomios p_x.
Hay dos descripciones del espacio $\Phi(m, p)$:

- Son polinomios en $\mathbb{R}^{2m}$ absolutamente homogéneos de grado p, es decir, $p(\alpha x) = p(x)|\alpha|^p \ \forall x \in \mathbb{C}^m$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
- Es el subespacio de funciones en $L^2(\mathbb{CP}^{m-1})$ generado por los vectores propios del Laplaciano en $\mathbb{CP}^{m-1}$ con valor propio inferior a p.

Fórmulas de cuadratura proyectivas y diseños proyectivos

Tenemos pues que la existencia de una inmersión isométrica de ℓ_2^m en ℓ_q^n es equivalente a la existencia de una formula de cuadratura con n puntos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{CP}^{m-1}$,

$$\int_{\mathbb{CP}^{m-1}} f = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\omega_k,$$

para todo $f \in \Phi(m, p)$.

Fórmulas de cuadratura proyectivas y diseños proyectivos

Tenemos pues que la existencia de una inmersión isométrica de ℓ_2^m en ℓ_q^n es equivalente a la existencia de una formula de cuadratura con n puntos $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{CP}^{m-1}$,

$$\int_{\mathbb{CP}^{m-1}} f = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\omega_k,$$

para todo $f \in \Phi(m,p)$.

Definición

Un diseño proyectivo es una fórmula de cuadratura proyectiva donde todos los pesos son iguales, es decir

$$\int_{\mathbb{CP}^{m-1}} f = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Diseños en variedades de Riemann

Nos planteamos un problema de construir diseños en una variedad de Riemann compacta M.

Definición

Una colección de puntos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ *es un p-diseño si*

$$\int_M f(x)\, dV(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k),$$

para toda función $f \in \Phi(M, p)$*, donde* $\Phi(M, p)$ *es el subespacio de* $L^2(M)$ *generado por vectores propios del Laplaciano con valor propio menor que* p*.*

El objetivo es construir diseños para cada M y p con control sobre el número de puntos n en función de p y M.

El esquema de Bondarenko, Radchenko y Viazovska

Los autores mencionados construyen diseños en la esfera $M = \mathbb{S}^d$, con las buenas cotas de n. Veamos como su esquema se adapta también a $M = \mathbb{CP}^{m-1}$.

El esquema de Bondarenko, Radchenko y Viazovska

Los autores mencionados construyen diseños en la esfera $M = \mathbb{S}^d$, con las buenas cotas de n. Veamos como su esquema se adapta también a $M = \mathbb{CP}^{m-1}$.
Sea $\mathcal{H}$ el subespacio de $\Phi(M, p)$ de funciones con integral 0. Un conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ es un p-diseño si

$$0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k), \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

El esquema de Bondarenko, Radchenko y Viazovska

Los autores mencionados construyen diseños en la esfera $M = \mathbb{S}^d$, con las buenas cotas de n. Veamos como su esquema se adapta también a $M = \mathbb{CP}^{m-1}$.
Sea $\mathcal{H}$ el subespacio de $\Phi(M, p)$ de funciones con integral 0. Un conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ es un p-diseño si

$$0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k), \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Como $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor para todo $x \in M$, existe un único $G_x \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = \langle f, G_x \rangle$.
Buscamos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ tales que

$$G_{x_1} + \cdots + G_{x_m} \equiv 0.$$

Un resultado de topología

Un teorema de la teoría del grado de Brouwer:

Teorema

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado t.q. $0 \in \Omega$ y $L : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es continua tal que $\langle x, L(x) \rangle > 0$ para toda $x \in \partial\Omega$ entonces existe un $x \in \Omega$ con $L(x) = 0$.

Un resultado de topología

Un teorema de la teoría del grado de Brouwer:

Teorema

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *es un abierto acotado t.q.* $0 \in \Omega$ *y* $L : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *es continua tal que* $\langle x, L(x) \rangle > 0$ *para toda* $x \in \partial\Omega$ *entonces existe un* $x \in \Omega$ *con* $L(x) = 0$*.*

Aplicaremos este teorema al conjunto

$$\Omega = \{f \in \mathcal{H};\ \int_M |\nabla f| < 1\}.$$

La estrategia

Intentaremos construir una aplicación continua $X : \mathcal{H} \to M^n$ tal que para todo $f \in \partial\Omega$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} f(X_k(f)) > 0.$$

La estrategia

Intentaremos construir una aplicación continua $X : \mathcal{H} \to M^n$ tal que para todo $f \in \partial\Omega$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} f(X_k(f)) > 0.$$

Si lo conseguimos, entonces definimos $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ así

$$L(f) = \sum_{k=1}^{n} G_{X_k(f)}.$$

La estrategia

Intentaremos construir una aplicación continua $X : \mathcal{H} \to M^n$ tal que para todo $f \in \partial\Omega$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} f(X_k(f)) > 0.$$

Si lo conseguimos, entonces definimos $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ así

$$L(f) = \sum_{k=1}^{n} G_{X_k(f)}.$$

Como $\langle f, L(f) \rangle = \sum_{k=1}^{n} f(X_k(f)) > 0$ para funciones $f \in \partial\Omega$ entonces existe $g \in \Omega$ tal que $L(g) = 0$. Los puntos $y_k = X_k(g)$ son un diseño pues

$$G_{y_1} + \cdots + G_{y_n} = L(g) = 0.$$

La estrategia II

Para cada $f \in \partial\Omega$ hemos de encontrar puntos $X_k(f)$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} f(X_k(f)) > 0.$$

La estrategia II

Para cada $f \in \partial\Omega$ hemos de encontrar puntos $X_k(f)$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} f(X_k(f)) > 0.$$

Empezamos encontrando puntos universales $x_1, \dots, x_n$ tales que para toda $f \in \partial\Omega$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \right|$$

sea pequeño. Esto se consigue haciendo una partición de M en n regiones de igual volumen y diámetro del orden de $n^{-1/d}$ y tomando un punto en cada región.

La perturbación codiciosa

Finalmente perturbamos los puntos $x_1, \ldots, x_n$ hacía unos puntos $X_1(f), \ldots, X_n(f)$, integrando el campo $Y = \nabla f / |\nabla f|$ durante un tiempo corto tomando como puntos iniciales $x_1, \ldots, x_n$.

La perturbación codiciosa

Finalmente perturbamos los puntos $x_1, \ldots, x_n$ hacía unos puntos $X_1(f), \ldots, X_n(f)$, integrando el campo $Y = \nabla f / |\nabla f|$ durante un tiempo corto tomando como puntos iniciales $x_1, \ldots, x_n$.Esto consigue incrementar la cantidad

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(y_k(s))$$

La perturbación codiciosa

Finalmente perturbamos los puntos $x_1, \ldots, x_n$ hacía unos puntos $X_1(f), \ldots, X_n(f)$, integrando el campo $Y = \nabla f / |\nabla f|$ durante un tiempo corto tomando como puntos iniciales $x_1, \ldots, x_n$.Esto consigue incrementar la cantidad

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(y_k(s))$$

Si el tiempo es corto, entonces los puntos perturbados $y_1(s), \ldots, y_n(s)$ todavía están en la partición en regiones de igual volumen inicial. Esto es crucial, pues en dicho caso si n es suficientemente grande tenemos que $y_1(s), \ldots, y_n(s)$ satisfacen:

$$\frac{1}{n} \sum_{k} |\nabla f(y_k)| \simeq \int_M |\nabla f| = 1.$$

Conclusiones

Si hacemos las cuentas, vemos que podemos construir diseños proyectivos siempre que $n > C \dim H = C \dim \Phi(m, p)$. Esto mejora la cota conocida con mucho, pero . . .

Conclusiones

Si hacemos las cuentas, vemos que podemos construir diseños proyectivos siempre que $n > C \dim H = C \dim \Phi(m, p)$. Esto mejora la cota conocida con mucho, pero ...

Se sabe que existen formulas de cuadratura *con pesos desiguales* cuando $n = \dim \Phi(m, p)$ de manera que no aportamos mejoras al problema de las inclusiones isométricas, .

Conclusiones

Si hacemos las cuentas, vemos que podemos construir diseños proyectivos siempre que $n > C \dim H = C \dim \Phi(m, p)$. Esto mejora la cota conocida con mucho, pero ...
Se sabe que existen formulas de cuadratura *con pesos desiguales* cuando $n = \dim \Phi(m, p)$ de manera que no aportamos mejoras al problema de las inclusiones isométricas, .

Yu. I. Lyubich, O. A. Shatalova, Isometric embeddings of finite-dimensional ℓ_p-spaces over the quaternions. Algebra i Analiz, 2004, Volume 16, Issue 1, Pages 15–32

A. Bondarenko, D. Radchenko, and M. Viazovska, Optimal asymptotic bounds for spherical designs, eprint arXiv:1009.4407