# Aplicaciones lineales que preservan el diámetro

Montserrat Tamayo Rivera

Salobreña, Abril de 2010

# ÍNDICE

# Teorema de Banach-Stone

**Teorema**

*Sean $X$ e $Y$ dos espacios compactos Hausdorff y sean $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$ los correspondientes espacios de funciones continuas valoradas en el cuerpo de escalares. Se verifica que $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$ son linealmente isométricos si y sólo si $X$ e $Y$ son homeomorfos.*

En las condiciones del teorema, dada cualquier isometría lineal y sobreyectiva $T : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ existen un homeomorfismo $\varphi : Y \to X$ y una aplicación $g : Y \to \mathbb{K}$ unimodular tales que

$$Tf(y) = g(y)f(\varphi(y))$$

# Resultados del tipo Banach-Stone

- *Jerison (1950): Caso biyectivo vectorial*

**Teorema**

*Sean $X$ e $Y$ dos espacios topológicos compactos Hausdorff y sean $E$ y $F$ dos espacios de Banach tales que $F$ es redondo. Existe una isometría lineal y sobreyectiva $T : \mathcal{C}(X, E) \to \mathcal{C}(Y, F)$ si y sólo si existen un homeomorfismo $\varphi : Y \to X$ y una aplicación $H : Y \to \mathrm{Isom}(E, F)$ tales que*

$$Tf(y) = H(y)f(\varphi(y))$$

# Resultados del tipo Banach-Stone

- *Holsztynski (1966): Caso inyectivo escalar*

**Teorema**

*Sean $X$ e $Y$ dos espacios topológicos compactos Hausdorff. Existe una isometría lineal $T : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ si y sólo si existen un subespacio cerrado $Y_0 \subset Y$, una aplicación continua y sobreyectiva $\varphi : Y_0 \to X$ y una aplicación $g \in \mathcal{C}(Y)$ unimodular tales que*

$$Tf(y) = g(y)f(\varphi(y))$$

*si $y \in Y_0$.*

# Resultados del tipo Banach-Stone

- *Jeang y Wong (2003): Caso inyectivo vectorial*

**Teorema**

*Sean $X$ e $Y$ dos espacios topológicos compactos Hausdorff y sean $E$ y $F$ dos espacios de Banach tales que $F$ es redondo. Existe una isometría lineal $T : \mathcal{C}(X, E) \to \mathcal{C}(Y, F)$ si y sólo si existen un subespacio cerrado $Y_0 \subset Y$, una aplicación continua y sobreyectiva $\varphi : Y_0 \to X$ y una aplicación $H : Y_0 \to \mathcal{CL}(E, F)$ tales que*

$$Tf(y) = H(y)f(\varphi(y))$$

*si $y \in Y_0$.*

Si $F$ no es redondo el resultado no es cierto.

# Resultados del tipo Banach-Stone

- *Moreno-Galindo y Rodríguez-Palacios (2005): Caso bilineal*

**Teorema**

*Sean $X, Y, Z$ tres espacios topológicos compactos Hausdorff. Si existe una aplicación bilineal $T : \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(Y) \to \mathcal{C}(Z)$ tal que $\|T(f,g)\| = \|f\|\|g\|$ entonces existen una aplicación $\alpha \in \mathcal{C}(Z)$ unimodular, un subespacio cerrado $Z_0 \in Z$ y una aplicación continua $t : Z_0 \to X \times Y$ de la forma $t = (t_1, t_2)$ tales que*

$$T(f,g)(z) = \alpha(z) f(t_1(z)) g(t_2(z))$$

# El diámetro

### Definición

Sean $X$ un espacio topológico compacto, Hausdorff y V un espacio de Banach. Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$ se define el diámetro de f como $\rho(f) = sup\{\| f(x) - f(y) \| : x, y \in X\}$

$*$ **La aplicación $\rho$ es una seminorma en $\mathcal{C}(X, V)$.**

Sea $\xi_V$ el subespacio vectorial de $\mathcal{C}(X, V)$ formado por las funciones constantes.

$*$ **La aplicación $\rho$ es una norma completa en $\mathcal{C}(X, V)/\xi_V$.**

# El diámetro

**Definición**

Sean $X$ un espacio topológico compacto, Hausdorff y V un espacio de Banach. Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$ se define el diámetro de f como $\rho(f) = sup\{\| f(x) - f(y) \|: x, y \in X\}$

$*$ **La aplicación $\rho$ es una seminorma en $\mathcal{C}(X, V)$.**
Sea $\xi_V$ el subespacio vectorial de $\mathcal{C}(X, V)$ formado por las funciones constantes.
$*$ **La aplicación $\rho$ es una norma completa en $\mathcal{C}(X, V)/\xi_V$.**

# El diámetro

### Definición

Sean $X$ un espacio topológico compacto, Hausdorff y V un espacio de Banach. Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$ se define el diámetro de f como $\rho(f) = sup\{\| f(x) - f(y) \|: x, y \in X\}$

$*$ **La aplicación $\rho$ es una seminorma en $\mathcal{C}(X, V)$.**

Sea $\xi_V$ el subespacio vectorial de $\mathcal{C}(X, V)$ formado por las funciones constantes.

$*$ **La aplicación $\rho$ es una norma completa en $\mathcal{C}(X, V)/\xi_V$.**

# El diámetro

**Definición**

Sean $X$ un espacio topológico compacto, Hausdorff y V un espacio de Banach. Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$ se define el diámetro de f como $\rho(f) = sup\{\| f(x) - f(y) \| : x, y \in X\}$

$*$ **La aplicación $\rho$ es una seminorma en $\mathcal{C}(X, V)$.**
Sea $\xi_V$ el subespacio vectorial de $\mathcal{C}(X, V)$ formado por las funciones constantes.

$*$ **La aplicación $\rho$ es una norma completa en $\mathcal{C}(X, V)/\xi_V$.**

# El diámetro

### Definición

Sean $X$ un espacio topológico compacto, Hausdorff y V un espacio de Banach. Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$ se define el diámetro de f como $\rho(f) = sup\{\| f(x) - f(y) \|: x, y \in X\}$

$*$ **La aplicación $\rho$ es una seminorma en $\mathcal{C}(X, V)$.**

Sea $\xi_V$ el subespacio vectorial de $\mathcal{C}(X, V)$ formado por las funciones constantes.

$*$ **La aplicación $\rho$ es una norma completa en $\mathcal{C}(X, V)/\xi_V$.**

Sea $T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ una aplicación lineal que conserva los diámetros.

Consideremos la aplicación:

$\hat{T} : (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho) \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)$

definida por $\hat{T}([f]) = [Tf]$

$*\hat{T}$ está bien definida: $[f] = [g] \Leftrightarrow \rho(f-g) = 0 \Leftrightarrow \rho(T(f-g)) = 0 \Leftrightarrow \rho(Tf - Tg) = 0 \Leftrightarrow [Tf] = [Tg]$

$*\hat{T}$ es lineal ya que T lo es.

$*\hat{T}$ es isometría: $\rho(\hat{T}[f]) = \rho([Tf]) = \rho(Tf) = \rho(f) = \rho([f])$

$*$ Si T es sobreyectiva, $\hat{T}$ lo es.

No tiene sentido hablar de $[f](x)$, pero sí lo tiene hablar de $[f](x - x') := f(x) - f(x')$.

$[f]$ queda determinada si fijamos $x_0$ y conocemos $f(x - x_0)$ para cada x de X.

Sea $T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ una aplicación lineal que conserva los diámetros.
Consideremos la aplicación:
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho) \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)$
definida por $\hat{T}([f]) = [Tf]$
$*\hat{T}$ está bien definida: $[f] = [g] \Leftrightarrow \rho(f - g) = 0 \Leftrightarrow \rho(T(f - g)) = 0 \Leftrightarrow \rho(Tf - Tg) = 0 \Leftrightarrow [Tf] = [Tg]$
$*\hat{T}$ es lineal ya que T lo es.
$*\hat{T}$ es isometría: $\rho(\hat{T}[f]) = \rho([Tf]) = \rho(Tf) = \rho(f) = \rho([f])$
$*$ Si T es sobreyectiva, $\hat{T}$ lo es.
No tiene sentido hablar de $[f](x)$, pero sí lo tiene hablar de $[f](x - x') := f(x) - f(x')$.
$[f]$ queda determinada si fijamos $x_0$ y conocemos $f(x - x_0)$ para cada x de X.

Sea $T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ una aplicación lineal que conserva los diámetros.
Consideremos la aplicación:
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho) \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)$
definida por $\hat{T}([f]) = [Tf]$
$*\hat{T}$ está bien definida: $[f] = [g] \Leftrightarrow \rho(f - g) = 0 \Leftrightarrow \rho(T(f - g)) = 0 \Leftrightarrow \rho(Tf - Tg) = 0 \Leftrightarrow [Tf] = [Tg]$
$*\hat{T}$ es lineal ya que T lo es.
$*\hat{T}$ es isometría: $\rho(\hat{T}[f]) = \rho([Tf]) = \rho(Tf) = \rho(f) = \rho([f])$
$*$ Si T es sobreyectiva, $\hat{T}$ lo es.
No tiene sentido hablar de $[f](x)$, pero sí lo tiene hablar de $[f](x - x') := f(x) - f(x')$.
$[f]$ queda determinada si fijamos $x_0$ y conocemos $f(x - x_0)$ para cada x de X.

Sea $T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ una aplicación lineal que conserva los diámetros.
Consideremos la aplicación:
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho) \longrightarrow \ (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)$
definida por $\hat{T}([f]) = [Tf]$
$*\hat{T}$ está bien definida: $[f] = [g] \Leftrightarrow \rho(f - g) = 0 \Leftrightarrow \rho(T(f - g)) = 0 \Leftrightarrow \rho(Tf - Tg) = 0 \Leftrightarrow [Tf] = [Tg]$
$*\hat{T}$ es lineal ya que T lo es.
$*\hat{T}$ es isometría: $\rho(\hat{T}[f]) = \rho([Tf]) = \rho(Tf) = \rho(f) = \rho([f])$
$*$ Si T es sobreyectiva, $\hat{T}$ lo es.
No tiene sentido hablar de $[f](x)$, pero sí lo tiene hablar de $[f](x - x') := f(x) - f(x')$.
$[f]$ queda determinada si fijamos $x_0$ y conocemos $f(x - x_0)$ para cada x de X.

Sea $T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ una aplicación lineal que conserva los diámetros.
Consideremos la aplicación:
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho) \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)$
definida por $\hat{T}([f]) = [Tf]$
$*\hat{T}$ está bien definida: $[f] = [g] \Leftrightarrow \rho(f - g) = 0 \Leftrightarrow \rho(T(f - g)) = 0 \Leftrightarrow \rho(Tf - Tg) = 0 \Leftrightarrow [Tf] = [Tg]$
$*\hat{T}$ es lineal ya que T lo es.
$*\hat{T}$ es isometría: $\rho(\hat{T}[f]) = \rho([Tf]) = \rho(Tf) = \rho(f) = \rho([f])$
$*$ Si T es sobreyectiva, $\hat{T}$ lo es.
No tiene sentido hablar de $[f](x)$, pero sí lo tiene hablar de $[f](x - x') := f(x) - f(x')$.
$[f]$ queda determinada si fijamos $x_0$ y conocemos $f(x - x_0)$ para cada x de X.

Sea $T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ una aplicación lineal que conserva los diámetros.
Consideremos la aplicación:
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho) \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)$
definida por $\hat{T}([f]) = [Tf]$
$*\hat{T}$ está bien definida: $[f] = [g] \Leftrightarrow \rho(f - g) = 0 \Leftrightarrow \rho(T(f - g)) = 0 \Leftrightarrow \rho(Tf - Tg) = 0 \Leftrightarrow [Tf] = [Tg]$
$*\hat{T}$ es lineal ya que T lo es.
$*\hat{T}$ es isometría: $\rho(\hat{T}[f]) = \rho([Tf]) = \rho(Tf) = \rho(f) = \rho([f])$
$*$ Si T es sobreyectiva, $\hat{T}$ lo es.
No tiene sentido hablar de $[f](x)$, pero sí lo tiene hablar de $[f](x - x') := f(x) - f(x')$.
$[f]$ queda determinada si fijamos $x_0$ y conocemos $f(x - x_0)$ para cada x de X.

Sea $T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ una aplicación lineal que conserva los diámetros.
Consideremos la aplicación:
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho) \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)$
definida por $\hat{T}([f]) = [Tf]$
$*\hat{T}$ está bien definida: $[f] = [g] \Leftrightarrow \rho(f - g) = 0 \Leftrightarrow \rho(T(f - g)) = 0 \Leftrightarrow \rho(Tf - Tg) = 0 \Leftrightarrow [Tf] = [Tg]$
$*\hat{T}$ es lineal ya que T lo es.
$*\hat{T}$ es isometría: $\rho(\hat{T}[f]) = \rho([Tf]) = \rho(Tf) = \rho(f) = \rho([f])$
$*$ Si T es sobreyectiva, $\hat{T}$ lo es.
No tiene sentido hablar de $[f](x)$, pero sí lo tiene hablar de $[f](x - x') := f(x) - f(x')$.
$[f]$ queda determinada si fijamos $x_0$ y conocemos $f(x - x_0)$ para cada x de X.

# Resultados relevantes

- *Cabello (1999)*

**Teorema**

*Sea $X$ un espacio topológico compacto Hausdorff. Existe una biyección lineal $T : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ que preserva los diámetros si y sólo si existen un homeomorfismo $\varphi : X \to X$, una aplicación lineal $\mu : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{K}$ y un escalar $\tau$ de módulo 1 tal que $\mu(1_X) + \tau \neq 0$ de forma que $Tf = \tau f \circ \varphi + \mu(f) 1_X$ para cada $f \in \mathcal{C}(X)$.*

# Resultados relevantes

- *Aizpuru y Rambla (2005)*

**Teorema**

*Sean $X, Y$ dos espacios topológicos compactos Hausdorff con al menos tres puntos y sean $V$ y $Z$ dos espacios de Banach linealmente isométricos. Existe una biyección lineal que preserva los diámetros de $\mathcal{C}(X, V)$ en $\mathcal{C}(Y, Z)$ si y sólo si $X$ e $Y$ son homeomorfos.*

# Puntos extremos

$Ex(B_{X^*})$- Puntos extremos de la bola unidad $X^*$.

$EN(B_{X^*})$- Puntos extremos que alcanzan la norma de la bola unidad de $X^*$.

### Proposición

*Si* $M = (\mathcal{C}(X, V), \|\cdot\|_\infty)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) = \{v^*\delta_x : v^* \in Ex(B_{V^*}), x \in X\}$.

*Si M es un subespacio de* $(\mathcal{C}(X, V), \|\cdot\|_\infty)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) \subseteq \{v^*\delta_x|_M : v^* \in Ex(B_{V^*}), x \in X\}$.

### Proposición

*Si* $M = (\mathcal{C}(X, V)/\xi_V, \rho)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) = \{v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2}) : v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$.

*Si M es un subespacio de* $(\mathcal{C}(X, V)/\xi_V, \rho)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) \subseteq \{v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})|_M : v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$.

# PUNTOS EXTREMOS

$Ex(B_{X^*})$- Puntos extremos de la bola unidad $X^*$.
$EN(B_{X^*})$- Puntos extremos que alcanzan la norma de la bola unidad de $X^*$.

### PROPOSICIÓN

*Si* $M = (\mathcal{C}(X,V), \|\cdot\|_\infty)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) = \{v^*\delta_x : v^* \in Ex(B_{V^*}), x \in X\}$.
*Si M es un subespacio de* $(\mathcal{C}(X,V), \|\cdot\|_\infty)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) \subseteq \{v^*\delta_x|_M : v^* \in Ex(B_{V^*}), x \in X\}$.

### PROPOSICIÓN

*Si* $M = (\mathcal{C}(X,V)/\xi_V, \rho)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) = \{v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2}) : v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$.
*Si M es un subespacio de* $(\mathcal{C}(X,V)/\xi_V, \rho)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) \subseteq \{v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})|_M : v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$.

# Puntos extremos

$Ex(B_{X^*})$- Puntos extremos de la bola unidad $X^*$.
$EN(B_{X^*})$- Puntos extremos que alcanzan la norma de la bola unidad de $X^*$.

## Proposición

*Si $M = (\mathcal{C}(X, V), \|\cdot\|_\infty)$, entonces*
$Ex(B_{M^*}) = \{v^*\delta_x : v^* \in Ex(B_{V^*}), x \in X\}$.
*Si $M$ es un subespacio de $(\mathcal{C}(X, V), \|\cdot\|_\infty)$, entonces*
$Ex(B_{M^*}) \subseteq \{v^*\delta_x|_M : v^* \in Ex(B_{V^*}), x \in X\}$.

## Proposición

*Si $M = (\mathcal{C}(X, V)/\xi_V, \rho)$, entonces*
$Ex(B_{M^*}) = \{v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2}) : v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$.
*Si $M$ es un subespacio de $(\mathcal{C}(X, V)/\xi_V, \rho)$, entonces*
$Ex(B_{M^*}) \subseteq \{v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})|_M : v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$.

# Puntos extremos

$Ex(B_{X^*})$- Puntos extremos de la bola unidad $X^*$.
$EN(B_{X^*})$- Puntos extremos que alcanzan la norma de la bola unidad de $X^*$.

## Proposición

*Si $M = (\mathcal{C}(X, V), \|\cdot\|_\infty)$, entonces $Ex(B_{M^*}) = \{v^*\delta_x : v^* \in Ex(B_{V^*}), x \in X\}$.*
*Si $M$ es un subespacio de $(\mathcal{C}(X, V), \|\cdot\|_\infty)$, entonces $Ex(B_{M^*}) \subseteq \{v^*\delta_x|_M : v^* \in Ex(B_{V^*}), x \in X\}$.*

## Proposición

*Si $M = (\mathcal{C}(X, V)/\xi_V, \rho)$, entonces $Ex(B_{M^*}) = \{v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2}) : v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$.*
*Si $M$ es un subespacio de $(\mathcal{C}(X, V)/\xi_V, \rho)$, entonces $Ex(B_{M^*}) \subseteq \{v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})|_M : v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$.*

# Puntos extremos

$Ex(B_{X^*})$- Puntos extremos de la bola unidad $X^*$.
$EN(B_{X^*})$- Puntos extremos que alcanzan la norma de la bola unidad de $X^*$.

**Proposición**

*Si* $M = (\mathcal{C}(X,V), \|\cdot\|_\infty)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) = \{v^*\delta_x : v^* \in Ex(B_{V^*}), x \in X\}$.
*Si* $M$ *es un subespacio de* $(\mathcal{C}(X,V), \|\cdot\|_\infty)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) \subseteq \{v^*\delta_x|_M : v^* \in Ex(B_{V^*}), x \in X\}$.

**Proposición**

*Si* $M = (\mathcal{C}(X,V)/\xi_V, \rho)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) = \{v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2}) : v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$.
*Si* $M$ *es un subespacio de* $(\mathcal{C}(X,V)/\xi_V, \rho)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) \subseteq \{v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})|_M : v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$.

## Puntos extremos

$Ex(B_{X^*})$- Puntos extremos de la bola unidad $X^*$.
$EN(B_{X^*})$- Puntos extremos que alcanzan la norma de la bola unidad de $X^*$.

### Proposición

*Si* $M = (\mathcal{C}(X, V), \|\cdot\|_\infty)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) = \{v^*\delta_x : v^* \in Ex(B_{V^*}), x \in X\}$.
*Si* $M$ *es un subespacio de* $(\mathcal{C}(X, V), \|\cdot\|_\infty)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) \subseteq \{v^*\delta_x|_M : v^* \in Ex(B_{V^*}), x \in X\}$.

### Proposición

*Si* $M = (\mathcal{C}(X, V)/\xi_V, \rho)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) = \{v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2}) : v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$.
*Si* $M$ *es un subespacio de* $(\mathcal{C}(X, V)/\xi_V, \rho)$, *entonces* $Ex(B_{M^*}) \subseteq \{v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})|_M : v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$.

# Caso biyectivo vectorial

**Teorema**

*Sean* $\mathrm{X}$, $\mathrm{Y}$ *dos espacios topológicos compactos, Hausdorff y sean* $\mathrm{V}$, $\mathrm{Z}$ *dos espacios de Banach tales que* $\mathrm{Z}$ *es redondo y verifica que si* $z_1^*, z_2^* \in EN(B_{\mathrm{Z}^*})$ *y* $\|z_1^* + z_2^*\| = 2$ *entonces* $\|z_1^* - z_2^*\| < 1$. *Existe una biyección lineal que preserva los diámetros* $T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ *si y sólo si* $\mathrm{X}$ *e* $\mathrm{Y}$ *son homeomorfos y* $\mathrm{V}$, $\mathrm{Z}$ *son isométricos. En esta situación existen un homeomorfismo* $\varphi : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$, *una isometría lineal y sobreyectiva* $G : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{Z}$ *y una aplicación lineal* $L : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathrm{Z}$ *tales que si* $f \in \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})$ *e* $y \in \mathrm{Y}$ *entonces* $Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + L(f)$.

# Ideas principales de la demostración

$T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ lineal, sobreyectiva, conserva diámetros.

Consideremos $\hat{T}^* : (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)^* \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho)^*$

$\hat{T}^*$ es isometría lineal y sobreyectiva

$z^* \in Ex(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$, existen $v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X$:

$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})$

$z^* \in EN(B_{Z^*}) \Leftrightarrow v^* \in EN(B_{V^*})$.

Consideramos $\hat{T}^{*-1}$. Si $x, x', x_1 \in X$ y $v^* \in EN(B_{V^*})$:

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z_1^*(\delta_y - \delta_{y_1})$

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_{x'} - \delta_{x_1}) = z_2^*(\delta_{y_2} - \delta_{y_3})$

$y, y_1, y_2, y_3 \in Y, z_1^*, z_2^* \in EN(B_{Z^*})$

**Dados $x_1 \in X, v^* \in EN(B_{V^*})$, existen $y_1 \in Y, z^* \in EN(B_{Z^*})$, tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$ existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ que verifica $\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z^*(\delta_y - \delta_{y_1})$**

# Ideas principales de la demostración

$T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ lineal, sobreyectiva, conserva diámetros.

Consideremos $\hat{T}^* : (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)^* \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho)^*$

$\hat{T}^*$ es isometría lineal y sobreyectiva

$z^* \in Ex(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$, existen $v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X$:

$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})$

$z^* \in EN(B_{Z^*}) \Leftrightarrow v^* \in EN(B_{V^*})$.

Consideramos $\hat{T}^{*-1}$. Si $x, x', x_1 \in X$ y $v^* \in EN(B_{V^*})$:

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z_1^*(\delta_y - \delta_{y_1})$

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_{x'} - \delta_{x_1}) = z_2^*(\delta_{y_2} - \delta_{y_3})$

$y, y_1, y_2, y_3 \in Y, z_1^*, z_2^* \in EN(B_{Z^*})$

**Dados $x_1 \in X, v^* \in EN(B_{V^*})$, existen $y_1 \in Y, z^* \in EN(B_{Z^*})$, tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$ existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ que verifica $\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z^*(\delta_y - \delta_{y_1})$**

# Ideas principales de la demostración

$T : \mathcal{C}(\mathrm{X},\mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ lineal, sobreyectiva, conserva diámetros.
Consideremos $\hat{T}^* : (\mathcal{C}(\mathrm{Y},\mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)^* \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{X},\mathrm{V})/\xi_V, \rho)^*$
$\hat{T}^*$ es isometría lineal y sobreyectiva
$z^* \in Ex(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$, existen $v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X$:
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})$
$z^* \in EN(B_{Z^*}) \Leftrightarrow v^* \in EN(B_{V^*})$.
Consideramos $\hat{T}^{*-1}$. Si $x, x', x_1 \in X$ y $v^* \in EN(B_{V^*})$:
$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z_1^*(\delta_y - \delta_{y_1})$
$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_{x'} - \delta_{x_1}) = z_2^*(\delta_{y_2} - \delta_{y_3})$
$y, y_1, y_2, y_3 \in Y, z_1^*, z_2^* \in EN(B_{Z^*})$
**Dados** $x_1 \in X, v^* \in EN(B_{V^*})$**, existen** $y_1 \in Y, z^* \in EN(B_{Z^*})$**, tales que para cada** $x \in X \setminus \{x_1\}$ **existe** $y \in Y \setminus \{y_1\}$ **que verifica** $\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z^*(\delta_y - \delta_{y_1})$

# Ideas principales de la demostración

$T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ lineal, sobreyectiva, conserva diámetros.

Consideremos $\hat{T}^* : (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)^* \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho)^*$

$\hat{T}^*$ es isometría lineal y sobreyectiva

$z^* \in Ex(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$, existen $v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X$:

$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})$

$z^* \in EN(B_{Z^*}) \Leftrightarrow v^* \in EN(B_{V^*})$.

Consideramos $\hat{T}^{*-1}$. Si $x, x', x_1 \in X$ y $v^* \in EN(B_{V^*})$:

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z_1^*(\delta_y - \delta_{y_1})$

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_{x'} - \delta_{x_1}) = z_2^*(\delta_{y_2} - \delta_{y_3})$

$y, y_1, y_2, y_3 \in Y, z_1^*, z_2^* \in EN(B_{Z^*})$

**Dados** $x_1 \in X, v^* \in EN(B_{V^*})$**, existen** $y_1 \in Y, z^* \in EN(B_{Z^*})$**, tales que para cada** $x \in X \setminus \{x_1\}$ **existe** $y \in Y \setminus \{y_1\}$ **que verifica** $\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z^*(\delta_y - \delta_{y_1})$

# Ideas principales de la demostración

$T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ lineal, sobreyectiva, conserva diámetros.

Consideremos $\hat{T}^* : (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)^* \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho)^*$

$\hat{T}^*$ es isometría lineal y sobreyectiva

$z^* \in Ex(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$, existen $v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X$:

$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})$

$z^* \in EN(B_{Z^*}) \Leftrightarrow v^* \in EN(B_{V^*})$.

Consideramos $\hat{T}^{*-1}$. Si $x, x', x_1 \in X$ y $v^* \in EN(B_{V^*})$:

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z_1^*(\delta_y - \delta_{y_1})$

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_{x'} - \delta_{x_1}) = z_2^*(\delta_{y_2} - \delta_{y_3})$

$y, y_1, y_2, y_3 \in Y, z_1^*, z_2^* \in EN(B_{Z^*})$

**Dados** $x_1 \in X, v^* \in EN(B_{V^*})$**, existen** $y_1 \in Y, z^* \in EN(B_{Z^*})$**, tales que para cada** $x \in X \setminus \{x_1\}$ **existe** $y \in Y \setminus \{y_1\}$ **que verifica** $\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z^*(\delta_y - \delta_{y_1})$

# Ideas principales de la demostración

$T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ lineal, sobreyectiva, conserva diámetros.

Consideremos $\hat{T}^* : (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)^* \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho)^*$

$\hat{T}^*$ es isometría lineal y sobreyectiva

$z^* \in Ex(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$, existen $v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X$:

$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})$

$z^* \in EN(B_{Z^*}) \Leftrightarrow v^* \in EN(B_{V^*})$.

Consideramos $\hat{T}^{*-1}$. Si $x, x', x_1 \in X$ y $v^* \in EN(B_{V^*})$:

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z_1^*(\delta_y - \delta_{y_1})$

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_{x'} - \delta_{x_1}) = z_2^*(\delta_{y_2} - \delta_{y_3})$

$y, y_1, y_2, y_3 \in Y, z_1^*, z_2^* \in EN(B_{Z^*})$

**Dados $x_1 \in X, v^* \in EN(B_{V^*})$, existen $y_1 \in Y, z^* \in EN(B_{Z^*})$, tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$ existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ que verifica $\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z^*(\delta_y - \delta_{y_1})$**

# Ideas principales de la demostración

$T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ lineal, sobreyectiva, conserva diámetros.

Consideremos $\hat{T}^* : (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)^* \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho)^*$

$\hat{T}^*$ es isometría lineal y sobreyectiva

$z^* \in Ex(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$, existen $v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X$:

$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})$

$z^* \in EN(B_{Z^*}) \Leftrightarrow v^* \in EN(B_{V^*})$.

Consideramos $\hat{T}^{*-1}$. Si $x, x', x_1 \in X$ y $v^* \in EN(B_{V^*})$:

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z_1^*(\delta_y - \delta_{y_1})$

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_{x'} - \delta_{x_1}) = z_2^*(\delta_{y_2} - \delta_{y_3})$

$y, y_1, y_2, y_3 \in Y, z_1^*, z_2^* \in EN(B_{Z^*})$

**Dados $x_1 \in X, v^* \in EN(B_{V^*})$, existen $y_1 \in Y, z^* \in EN(B_{Z^*})$, tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$ existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ que verifica $\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z^*(\delta_y - \delta_{y_1})$**

# Ideas principales de la demostración

$T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ lineal, sobreyectiva, conserva diámetros.

Consideremos $\hat{T}^* : (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)^* \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho)^*$

$\hat{T}^*$ es isometría lineal y sobreyectiva

$z^* \in Ex(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$, existen $v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X$:

$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})$

$z^* \in EN(B_{Z^*}) \Leftrightarrow v^* \in EN(B_{V^*})$.

Consideramos $\hat{T}^{*-1}$. Si $x, x', x_1 \in X$ y $v^* \in EN(B_{V^*})$:

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z_1^*(\delta_y - \delta_{y_1})$

$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_{x'} - \delta_{x_1}) = z_2^*(\delta_{y_2} - \delta_{y_3})$

$y, y_1, y_2, y_3 \in Y, z_1^*, z_2^* \in EN(B_{Z^*})$

**Dados $x_1 \in X, v^* \in EN(B_{V^*})$, existen $y_1 \in Y, z^* \in EN(B_{Z^*})$, tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$ existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ que verifica $\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z^*(\delta_y - \delta_{y_1})$**

# IDEAS PRINCIPALES DE LA DEMOSTRACIÓN

$T : \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ lineal, sobreyectiva, conserva diámetros.
Consideremos $\hat{T}^* : (\mathcal{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})/\xi_Z, \rho)^* \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{V})/\xi_V, \rho)^*$
$\hat{T}^*$ es isometría lineal y sobreyectiva
$z^* \in Ex(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$, existen $v^* \in Ex(B_{V^*}), x_1, x_2 \in X$:
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = v^*(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})$
$z^* \in EN(B_{Z^*}) \Leftrightarrow v^* \in EN(B_{V^*})$.
Consideramos $\hat{T}^{*-1}$. Si $x, x', x_1 \in X$ y $v^* \in EN(B_{V^*})$:
$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z_1^*(\delta_y - \delta_{y_1})$
$\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_{x'} - \delta_{x_1}) = z_2^*(\delta_{y_2} - \delta_{y_3})$
$y, y_1, y_2, y_3 \in Y, z_1^*, z_2^* \in EN(B_{Z^*})$
**Dados $x_1 \in X, v^* \in EN(B_{V^*})$, existen $y_1 \in Y, z^* \in EN(B_{Z^*})$, tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$ existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ que verifica $\hat{T}^{*-1} v^*(\delta_x - \delta_{x_1}) = z^*(\delta_y - \delta_{y_1})$**

En la situación anterior, si denotamos $y_1 = t(x_1), y = t(x)$, tenemos:

- t es una biyección de X en Y. Llamemos $\varphi$ a su inversa (Es sencillo demostrar que $\varphi$ es continua).
- t no depende de $v^*$.
- $F : EN(B_{Z^*}) \to EN(B_{V^*})$ biyección.

Si $z^* \in EN(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})$.
Sean $f, f' \in \mathcal{C}(X, V)$ tales que
$f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = f'(\varphi(y_1)) - f'(\varphi(y_2))$ para $y_1, y_2 \in Y$.
Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f =$
$F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f' = \hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f'$.
Así pues, $Tf(y_1) - Tf(y_2) = Tf'(y_1) - Tf'(y_2)$.
Definimos $G : V \to Z$ por $G(v) = Tf(y_1) - Tf(y_2)$ si y sólo si $f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = v$.

En la situación anterior, si denotamos $y_1 = t(x_1), y = t(x)$, tenemos:

- t es una biyección de X en Y. Llamemos $\varphi$ a su inversa (Es sencillo demostrar que $\varphi$ es continua).
- t no depende de $v^*$.
- $F : EN(B_{Z^*}) \to EN(B_{V^*})$ biyección.

Si $z^* \in EN(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})$.
Sean $f, f' \in \mathcal{C}(X, V)$ tales que
$f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = f'(\varphi(y_1)) - f'(\varphi(y_2))$ para $y_1, y_2 \in Y$.
Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f =$
$F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f' = \hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f'$.
Así pues, $Tf(y_1) - Tf(y_2) = Tf'(y_1) - Tf'(y_2)$.
Definimos $G : V \to Z$ por $G(v) = Tf(y_1) - Tf(y_2)$ si y sólo si $f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = v$.

En la situación anterior, si denotamos $y_1 = t(x_1), y = t(x)$, tenemos:

- t es una biyección de X en Y. Llamemos $\varphi$ a su inversa (Es sencillo demostrar que $\varphi$ es continua).
- t no depende de $v^*$.
- $F : EN(B_{Z^*}) \to EN(B_{V^*})$ biyección.

Si $z^* \in EN(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})$.
Sean $f, f' \in \mathcal{C}(X, V)$ tales que
$f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = f'(\varphi(y_1)) - f'(\varphi(y_2))$ para $y_1, y_2 \in Y$.
Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f =$
$F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f' = \hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f'$.
Así pues, $Tf(y_1) - Tf(y_2) = Tf'(y_1) - Tf'(y_2)$.
Definimos $G : V \to Z$ por $G(v) = Tf(y_1) - Tf(y_2)$ si y sólo si $f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = v$.

En la situación anterior, si denotamos $y_1 = t(x_1), y = t(x)$, tenemos:

- t es una biyección de X en Y. Llamemos $\varphi$ a su inversa (Es sencillo demostrar que $\varphi$ es continua).
- t no depende de $v^*$.
- $F : EN(B_{Z^*}) \to EN(B_{V^*})$ biyección.

Si $z^* \in EN(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})$.
Sean $f, f' \in \mathcal{C}(X, V)$ tales que
$f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = f'(\varphi(y_1)) - f'(\varphi(y_2))$ para $y_1, y_2 \in Y$.
Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f =$
$F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f' = \hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f'$.
Así pues, $Tf(y_1) - Tf(y_2) = Tf'(y_1) - Tf'(y_2)$.
Definimos $G : V \to Z$ por $G(v) = Tf(y_1) - Tf(y_2)$ si y sólo si $f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = v$.

En la situación anterior, si denotamos $y_1 = t(x_1), y = t(x)$, tenemos:

- t es una biyección de X en Y. Llamemos $\varphi$ a su inversa (Es sencillo demostrar que $\varphi$ es continua).
- t no depende de $v^*$.
- $F : EN(B_{Z^*}) \to EN(B_{V^*})$ biyección.

Si $z^* \in EN(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})$.
Sean $f, f' \in \mathcal{C}(X, V)$ tales que
$f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = f'(\varphi(y_1)) - f'(\varphi(y_2))$ para $y_1, y_2 \in Y$.
Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f =$
$F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f' = \hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f'$.
Así pues, $Tf(y_1) - Tf(y_2) = Tf'(y_1) - Tf'(y_2)$.
Definimos $G : V \to Z$ por $G(v) = Tf(y_1) - Tf(y_2)$ si y sólo si
$f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = v$.

En la situación anterior, si denotamos $y_1 = t(x_1), y = t(x)$, tenemos:

- t es una biyección de X en Y. Llamemos $\varphi$ a su inversa (Es sencillo demostrar que $\varphi$ es continua).
- t no depende de $v^*$.
- $F : EN(B_{Z^*}) \to EN(B_{V^*})$ biyección.

Si $z^* \in EN(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})$.
Sean $f, f' \in \mathcal{C}(X, V)$ tales que
$f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = f'(\varphi(y_1)) - f'(\varphi(y_2))$ para $y_1, y_2 \in Y$.
Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f =$
$F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f' = \hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f'$.
Así pues, $Tf(y_1) - Tf(y_2) = Tf'(y_1) - Tf'(y_2)$.
Definimos $G : V \to Z$ por $G(v) = Tf(y_1) - Tf(y_2)$ si y sólo si $f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = v$.

En la situación anterior, si denotamos $y_1 = t(x_1), y = t(x)$, tenemos:

- t es una biyección de X en Y. Llamemos $\varphi$ a su inversa (Es sencillo demostrar que $\varphi$ es continua).
- t no depende de $v^*$.
- $F : EN(B_{Z^*}) \to EN(B_{V^*})$ biyección.

Si $z^* \in EN(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})$.
Sean $f, f' \in \mathcal{C}(X, V)$ tales que
$f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = f'(\varphi(y_1)) - f'(\varphi(y_2))$ para $y_1, y_2 \in Y$.
Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f =$
$F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f' = \hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f'$.
Así pues, $Tf(y_1) - Tf(y_2) = Tf'(y_1) - Tf'(y_2)$.
Definimos $G : V \to Z$ por $G(v) = Tf(y_1) - Tf(y_2)$ si y sólo si $f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = v$.

En la situación anterior, si denotamos $y_1 = t(x_1), y = t(x)$, tenemos:

- t es una biyección de X en Y. Llamemos $\varphi$ a su inversa (Es sencillo demostrar que $\varphi$ es continua).
- t no depende de $v^*$.
- $F : EN(B_{Z^*}) \to EN(B_{V^*})$ biyección.

Si $z^* \in EN(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})$.
Sean $f, f' \in \mathcal{C}(X, V)$ tales que
$f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = f'(\varphi(y_1)) - f'(\varphi(y_2))$ para $y_1, y_2 \in Y$.
Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f =$
$F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f' = \hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f'$.
Así pues, $Tf(y_1) - Tf(y_2) = Tf'(y_1) - Tf'(y_2)$.
Definimos $G : V \to Z$ por $G(v) = Tf(y_1) - Tf(y_2)$ si y sólo si $f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = v$.

En la situación anterior, si denotamos $y_1 = t(x_1), y = t(x)$, tenemos:

- t es una biyección de X en Y. Llamemos $\varphi$ a su inversa (Es sencillo demostrar que $\varphi$ es continua).
- t no depende de $v^*$.
- $F : EN(B_{Z^*}) \to EN(B_{V^*})$ biyección.

Si $z^* \in EN(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})$.
Sean $f, f' \in \mathcal{C}(X, V)$ tales que
$f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = f'(\varphi(y_1)) - f'(\varphi(y_2))$ para $y_1, y_2 \in Y$.
Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f =$
$F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f' = \hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f'$.
Así pues, $Tf(y_1) - Tf(y_2) = Tf'(y_1) - Tf'(y_2)$.
Definimos $G : V \to Z$ por $G(v) = Tf(y_1) - Tf(y_2)$ si y sólo si $f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = v$.

En la situación anterior, si denotamos $y_1 = t(x_1), y = t(x)$, tenemos:

- t es una biyección de X en Y. Llamemos $\varphi$ a su inversa (Es sencillo demostrar que $\varphi$ es continua).
- t no depende de $v^*$.
- $F : EN(B_{Z^*}) \to EN(B_{V^*})$ biyección.

Si $z^* \in EN(B_{Z^*}), y_1, y_2 \in Y$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2}) = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})$.
Sean $f, f' \in \mathcal{C}(X, V)$ tales que
$f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = f'(\varphi(y_1)) - f'(\varphi(y_2))$ para $y_1, y_2 \in Y$.
Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$,
$\hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f = F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f =$
$F(z^*)(\delta_{\varphi(y_1)} - \delta_{\varphi(y_2)})f' = \hat{T}^* z^*(\delta_{y_1} - \delta_{y_2})f'$.
Así pues, $Tf(y_1) - Tf(y_2) = Tf'(y_1) - Tf'(y_2)$.
Definimos $G : V \to Z$ por $G(v) = Tf(y_1) - Tf(y_2)$ si y sólo si $f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)) = v$.

Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$, se tiene:

$z^*(G(v)) = z^*(Tf(y_1) - Tf(y_2)) = F(z^*)(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2))) = F(z^*)(v)$.

G es una isometría lineal y sobreyectiva tal que $G^*(z^*) = F(z^*)$.

G no depende de $y_1, y_2$.Para cada $f \in \mathcal{C}(X, V), y_1, y_2 \in Y$

$$Tf(y_1) - Tf(y_2) = G(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)))$$

Definimos $S : \mathcal{C}(X, V) \to \mathcal{C}(Y, Z)$ por $Sf(y) = G(f(\varphi(y)))$

Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$, entonces $[Tf] = [Sf]$, así pues, existirá $z \in Z$, que denotaremos por Lf, tal que, para cada $y \in Y$:

$$\mathbf{Tf(y)} = \mathbf{G(f(}\varphi\mathbf{(y)))} + \mathbf{Lf}$$

L es una aplicación lineal de $\mathcal{C}(X, V)$ en Z que será continua si y sólo si T lo es.

Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$, se tiene:
$z^*(G(v)) = z^*(Tf(y_1) - Tf(y_2)) = F(z^*)(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2))) = F(z^*)(v)$.
G es una isometría lineal y sobreyectiva tal que $G^*(z^*) = F(z^*)$.
G no depende de $y_1, y_2$. Para cada $f \in \mathcal{C}(X, V), y_1, y_2 \in Y$

$$Tf(y_1) - Tf(y_2) = G(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)))$$

Definimos $S : \mathcal{C}(X, V) \to \mathcal{C}(Y, Z)$ por $Sf(y) = G(f(\varphi(y)))$
Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$, entonces $[Tf] = [Sf]$, así pues, existirá $z \in Z$, que denotaremos por Lf, tal que, para cada $y \in Y$:

$$\mathbf{Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf}$$

L es una aplicación lineal de $\mathcal{C}(X, V)$ en Z que será continua si y sólo si T lo es.

Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$, se tiene:
$z^*(G(v)) = z^*(Tf(y_1) - Tf(y_2)) = F(z^*)(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2))) = F(z^*)(v)$.
G es una isometría lineal y sobreyectiva tal que $G^*(z^*) = F(z^*)$.
G no depende de $y_1, y_2$. Para cada $f \in \mathcal{C}(X, V)$, $y_1, y_2 \in Y$

$$Tf(y_1) - Tf(y_2) = G(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)))$$

Definimos $S : \mathcal{C}(X, V) \to \mathcal{C}(Y, Z)$ por $Sf(y) = G(f(\varphi(y)))$
Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$, entonces $[Tf] = [Sf]$, así pues, existirá $z \in Z$, que denotaremos por Lf, tal que, para cada $y \in Y$:

$$\mathbf{Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf}$$

L es una aplicación lineal de $\mathcal{C}(X, V)$ en Z que será continua si y sólo si T lo es.

Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$, se tiene:
$z^*(G(v)) = z^*(Tf(y_1) - Tf(y_2)) = F(z^*)(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2))) = F(z^*)(v)$.
G es una isometría lineal y sobreyectiva tal que $G^*(z^*) = F(z^*)$.
G no depende de $y_1, y_2$.Para cada $f \in \mathcal{C}(X, V), y_1, y_2 \in Y$

$$Tf(y_1) - Tf(y_2) = G(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)))$$

Definimos $S : \mathcal{C}(X, V) \to \mathcal{C}(Y, Z)$ por $Sf(y) = G(f(\varphi(y)))$
Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$, entonces $[Tf] = [Sf]$, así pues, existirá $z \in Z$, que denotaremos por Lf, tal que, para cada $y \in Y$:

$$\mathbf{Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf}$$

L es una aplicación lineal de $\mathcal{C}(X, V)$ en Z que será continua si y sólo si T lo es.

Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$, se tiene:
$z^*(G(v)) = z^*(Tf(y_1) - Tf(y_2)) = F(z^*)(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2))) = F(z^*)(v)$.
G es una isometría lineal y sobreyectiva tal que $G^*(z^*) = F(z^*)$.
G no depende de $y_1, y_2$.Para cada $f \in \mathcal{C}(X, V), y_1, y_2 \in Y$

$$Tf(y_1) - Tf(y_2) = G(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)))$$

Definimos $S : \mathcal{C}(X, V) \to \mathcal{C}(Y, Z)$ por $Sf(y) = G(f(\varphi(y)))$
Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$, entonces $[Tf] = [Sf]$, así pues, existirá $z \in Z$, que denotaremos por Lf, tal que, para cada $y \in Y$:

$$\mathbf{Tf(y)} = \mathbf{G(f(\varphi(y)))} + \mathbf{Lf}$$

L es una aplicación lineal de $\mathcal{C}(X, V)$ en Z que será continua si y sólo si T lo es.

Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$, se tiene:
$z^*(G(v)) = z^*(Tf(y_1) - Tf(y_2)) = F(z^*)(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2))) = F(z^*)(v)$.
G es una isometría lineal y sobreyectiva tal que $G^*(z^*) = F(z^*)$.
G no depende de $y_1, y_2$.Para cada $f \in \mathcal{C}(X, V), y_1, y_2 \in Y$

$$Tf(y_1) - Tf(y_2) = G(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)))$$

Definimos $S : \mathcal{C}(X, V) \to \mathcal{C}(Y, Z)$ por $Sf(y) = G(f(\varphi(y)))$
Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$, entonces $[Tf] = [Sf]$, así pues, existirá $z \in Z$, que denotaremos por Lf, tal que, para cada $y \in Y$:

$$\mathbf{Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf}$$

L es una aplicación lineal de $\mathcal{C}(X, V)$ en Z que será continua si y sólo si T lo es.

Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$, se tiene:
$z^*(G(v)) = z^*(Tf(y_1) - Tf(y_2)) = F(z^*)(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2))) = F(z^*)(v)$.
G es una isometría lineal y sobreyectiva tal que $G^*(z^*) = F(z^*)$.
G no depende de $y_1, y_2$.Para cada $f \in \mathcal{C}(X, V), y_1, y_2 \in Y$

$$Tf(y_1) - Tf(y_2) = G(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)))$$

Definimos $S : \mathcal{C}(X, V) \to \mathcal{C}(Y, Z)$ por $Sf(y) = G(f(\varphi(y)))$
Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$, entonces $[Tf] = [Sf]$, así pues, existirá $z \in Z$, que denotaremos por Lf, tal que, para cada $y \in Y$:

$$\mathbf{Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf}$$

L es una aplicación lineal de $\mathcal{C}(X, V)$ en Z que será continua si y sólo si T lo es.

Para cada $z^* \in EN(B_{Z^*})$, se tiene:
$z^*(G(v)) = z^*(Tf(y_1) - Tf(y_2)) = F(z^*)(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2))) = F(z^*)(v)$.
G es una isometría lineal y sobreyectiva tal que
$G^*(z^*) = F(z^*)$.
G no depende de $y_1, y_2$.Para cada $f \in \mathcal{C}(X, V), y_1, y_2 \in Y$

$$Tf(y_1) - Tf(y_2) = G(f(\varphi(y_1)) - f(\varphi(y_2)))$$

Definimos $S : \mathcal{C}(X, V) \to \mathcal{C}(Y, Z)$ por $Sf(y) = G(f(\varphi(y)))$
Si $f \in \mathcal{C}(X, V)$, entonces $[Tf] = [Sf]$, así pues, existirá $z \in Z$, que denotaremos por Lf, tal que, para cada $y \in Y$:

$$\mathbf{Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf}$$

L es una aplicación lineal de $\mathcal{C}(X, V)$ en Z que será continua si y sólo si T lo es.

# Caso localmente compacto

## Teorema

*Sean* $\mathrm{X}, \mathrm{Y}$ *dos espacios topológicos localmente compactos, no compactos, Hausdorff y sean* $\mathrm{V}, \mathrm{Z}$ *espacios de Banach tales que* $\mathrm{Z}$ *es redondo y verifica que si* $z_1^*, z_2^* \in EN(z^*)$ *y* $\|z_1^* + z_2^*\| = 2$ *entonces* $\|z_1^* - z_2^*\| < 1$*. Entonces existe una biyección lineal que preserva los diámetros* $T : \mathcal{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ *si y sólo si* $\gamma\mathrm{X}$ *y* $\gamma\mathrm{Y}$ *son homeomorfos y* $\mathrm{V}, \mathrm{Z}$ *son linealmente isométricos.*
*En esta situación existen un homeomorfismo* $\varphi : \gamma\mathrm{Y} \longrightarrow \gamma\mathrm{X}$ *y una isometría lineal y sobreyectiva* $G : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{Z}$ *tales que si* $y \in \mathrm{Y}$ *y* $f \in \mathcal{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{V})$ *entonces* $Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$*.*

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# IDEAS PRINCIPALES DE LA DEMOSTRACIÓN

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.

$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.

$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.

Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.

$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 T f]$.

$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:

Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.

Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.

Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.

$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.

Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:

$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\overline{f} : \gamma X \to V$ por $\overline{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\overline{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\overline{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\overline{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\overline{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\overline{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\overline{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva. Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# IDEAS PRINCIPALES DE LA DEMOSTRACIÓN

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.

$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.

$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.

Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\overline{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.

$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.

$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:

Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.

Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.

Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.

$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.

Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:

$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\overline{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\overline{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

# Ideas principales de la demostración

Si $f \in \mathcal{C}_0(X, V)$. Definimos: $\bar{f} : \gamma X \to V$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
$q_1 : (\mathcal{C}_0(X, V), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
$q_1$ es una isometría lineal y sobreyectiva.
Análogamente, si $g \in \mathcal{C}_0(Y, Z)$, definimos $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y, Z)$ y $q_2$.
$\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X, V)/\xi_V, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y, Z)/\xi_Z, \rho)$ , $\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
$\hat{T}$ es una isometría lineal y sobreyectiva.Por el teorema anterior, existen:
Un homeomorfismo $\varphi : \gamma Y \to \gamma X$.
Una isometría lineal y sobreyectiva $G : V \to Z$.
Una aplicación lineal $L : \mathcal{C}_0(X, V) \to Z$.
$Tf(y) = G(f(\varphi(y))) + Lf$ , si $f \in \mathcal{C}_0(X, V), y \in \gamma Y$.
Tenemos $0 = G(f(\varphi(\infty))) + Lf$, así pues:
$Tf(y) = G(f(\varphi(y)) - f(\varphi(\infty)))$.

### Teorema

*Sean* $\mathrm{X}, \mathrm{Y}$ *dos espacios topológicos compactos Hausdorff. Son equivalentes:*

1.- *Existe una aplicación lineal que preserva los diámetros* $T : \mathcal{C}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y})$ *tal que* $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ *es un sistema libre* $M^*$ *donde* $M = T(\mathcal{C}(\mathrm{X}))$.

2.- $\mathrm{X}$ *es homeomorfo a un subespacio* $\mathrm{Y}_0 \subset \mathrm{Y}$ *y existe un operador lineal de extensión que preserva los diámetros* $H : \mathcal{C}(\mathrm{Y}_0) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Y})$ *tal que* $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ *es un sistema libre en* $M_0^*$ *donde* $M_0 = H(\mathcal{C}(\mathrm{Y}_0))$.

# Ideas principales de la demostración

$\hat{T} : (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(Y)/\xi, \rho)$. Sea $M = \hat{T}(\mathcal{C}(X)/\xi)$.

Consideramos $\hat{T}^* : M^* \to (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho)^*$.

Dados $x_1, x_2 \in X$, existen $\beta \in S_{\mathbb{K}}, y_1, y_2 \in Y$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_{x_2} - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_{y_2} - \delta_{y_1})_{|M}$$

Usando la independencia lineal de $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ se obtiene que fijado $x_1 \in X$, existe $y_1 \in Y, \beta \in S_{\mathbb{K}}$ tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$, existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_x - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_y - \delta_{y_1})_{|M}$$

Obtenemos $t : X \to Y$ inyectiva. No depende de $x_1$.

Llamemos $Y_0 = t(X), \varphi : Y_0 \to X, \varphi = t^{-1}, \alpha = \frac{1}{\beta}$. Si $y, y' \in Y_0$:

$$Tf(y) - Tf(y') = \alpha(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y')))$$

Se puede demostrar que $\varphi$ es continua y que $Y_0$ es un subespacio cerrado de $Y$.

# Ideas principales de la demostración

$\hat{T} : (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(Y)/\xi, \rho)$. Sea $M = \hat{T}(\mathcal{C}(X)/\xi)$.
Consideramos $\hat{T}^* : M^* \to (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho)^*$.

Dados $x_1, x_2 \in X$, existen $\beta \in S_{\mathbb{K}}, y_1, y_2 \in Y$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_{x_2} - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_{y_2} - \delta_{y_1})_{|M}$$

Usando la independencia lineal de $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ se obtiene que fijado $x_1 \in X$, existe $y_1 \in Y, \beta \in S_{\mathbb{K}}$ tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$, existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_x - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_y - \delta_{y_1})_{|M}$$

Obtenemos $t : X \to Y$ inyectiva. No depende de $x_1$.
Llamemos $Y_0 = t(X), \varphi : Y_0 \to X, \varphi = t^{-1}, \alpha = \frac{1}{\beta}$. Si $y, y' \in Y_0$:

$$Tf(y) - Tf(y') = \alpha(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y')))$$

Se puede demostrar que $\varphi$ es continua y que $Y_0$ es un subespacio cerrado de $Y$.

# Ideas principales de la demostración

$\hat{T} : (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(Y)/\xi, \rho)$. Sea $M = \hat{T}(\mathcal{C}(X)/\xi)$.
Consideramos $\hat{T}^* : M^* \to (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho)^*$.
Dados $x_1, x_2 \in X$, existen $\beta \in S_{\mathbb{K}}, y_1, y_2 \in Y$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_{x_2} - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_{y_2} - \delta_{y_1})_{|M}$$

Usando la independencia lineal de $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ se obtiene que fijado $x_1 \in X$, existe $y_1 \in Y, \beta \in S_{\mathbb{K}}$ tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$, existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_x - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_y - \delta_{y_1})_{|M}$$

Obtenemos $t : X \to Y$ inyectiva. No depende de $x_1$.
Llamemos $Y_0 = t(X), \varphi : Y_0 \to X, \varphi = t^{-1}, \alpha = \frac{1}{\beta}$. Si $y, y' \in Y_0$:

$$Tf(y) - Tf(y') = \alpha(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y')))$$

Se puede demostrar que $\varphi$ es continua y que $Y_0$ es un subespacio cerrado de $Y$.

# IDEAS PRINCIPALES DE LA DEMOSTRACIÓN

$\hat{T} : (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(Y)/\xi, \rho)$. Sea $M = \hat{T}(\mathcal{C}(X)/\xi)$.
Consideramos $\hat{T}^* : M^* \to (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho)^*$.
Dados $x_1, x_2 \in X$, existen $\beta \in S_{\mathbb{K}}, y_1, y_2 \in Y$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_{x_2} - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_{y_2} - \delta_{y_1})_{|M}$$

Usando la independencia lineal de $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ se obtiene que fijado $x_1 \in X$, existe $y_1 \in Y, \beta \in S_{\mathbb{K}}$ tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$, existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_x - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_y - \delta_{y_1})_{|M}$$

Obtenemos $t : X \to Y$ inyectiva. No depende de $x_1$.
Llamemos $Y_0 = t(X), \varphi : Y_0 \to X, \varphi = t^{-1}, \alpha = \frac{1}{\beta}$. Si $y, y' \in Y_0$:

$$Tf(y) - Tf(y') = \alpha(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y')))$$

Se puede demostrar que $\varphi$ es continua y que $Y_0$ es un subespacio cerrado de $Y$.

# Ideas principales de la demostración

$\hat{T} : (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(Y)/\xi, \rho)$. Sea $M = \hat{T}(\mathcal{C}(X)/\xi)$.
Consideramos $\hat{T}^* : M^* \to (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho)^*$.
Dados $x_1, x_2 \in X$, existen $\beta \in S_{\mathbb{K}}, y_1, y_2 \in Y$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_{x_2} - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_{y_2} - \delta_{y_1})_{|M}$$

Usando la independencia lineal de $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ se obtiene que fijado $x_1 \in X$, existe $y_1 \in Y, \beta \in S_{\mathbb{K}}$ tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$, existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_x - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_y - \delta_{y_1})_{|M}$$

Obtenemos $t : X \to Y$ inyectiva. No depende de $x_1$.
Llamemos $Y_0 = t(X), \varphi : Y_0 \to X, \varphi = t^{-1}, \alpha = \frac{1}{\beta}$. Si $y, y' \in Y_0$:

$$Tf(y) - Tf(y') = \alpha(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y')))$$

Se puede demostrar que $\varphi$ es continua y que $Y_0$ es un subespacio cerrado de $Y$.

# IDEAS PRINCIPALES DE LA DEMOSTRACIÓN

$\hat{T} : (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(Y)/\xi, \rho)$. Sea $M = \hat{T}(\mathcal{C}(X)/\xi)$.
Consideramos $\hat{T}^* : M^* \to (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho)^*$.
Dados $x_1, x_2 \in X$, existen $\beta \in S_{\mathbb{K}}, y_1, y_2 \in Y$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_{x_2} - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_{y_2} - \delta_{y_1})_{|M}$$

Usando la independencia lineal de $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ se obtiene que fijado $x_1 \in X$, existe $y_1 \in Y, \beta \in S_{\mathbb{K}}$ tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$, existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_x - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_y - \delta_{y_1})_{|M}$$

Obtenemos $t : X \to Y$ inyectiva. No depende de $x_1$.
Llamemos $Y_0 = t(X), \varphi : Y_0 \to X, \varphi = t^{-1}, \alpha = \frac{1}{\beta}$. Si $y, y' \in Y_0$:

$$Tf(y) - Tf(y') = \alpha(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y')))$$

Se puede demostrar que $\varphi$ es continua y que $Y_0$ es un subespacio cerrado de $Y$.

# Ideas principales de la demostración

$\hat{T} : (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(Y)/\xi, \rho)$. Sea $M = \hat{T}(\mathcal{C}(X)/\xi)$.
Consideramos $\hat{T}^* : M^* \to (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho)^*$.
Dados $x_1, x_2 \in X$, existen $\beta \in S_{\mathbb{K}}, y_1, y_2 \in Y$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_{x_2} - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_{y_2} - \delta_{y_1})_{|M}$$

Usando la independencia lineal de $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ se obtiene que fijado $x_1 \in X$, existe $y_1 \in Y, \beta \in S_{\mathbb{K}}$ tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$, existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_{x} - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_{y} - \delta_{y_1})_{|M}$$

Obtenemos $t : X \to Y$ inyectiva. No depende de $x_1$.
Llamemos $Y_0 = t(X), \varphi : Y_0 \to X, \varphi = t^{-1}, \alpha = \frac{1}{\beta}$. Si $y, y' \in Y_0$:

$$Tf(y) - Tf(y') = \alpha(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y')))$$

Se puede demostrar que $\varphi$ es continua y que $Y_0$ es un subespacio cerrado de $Y$.

# IDEAS PRINCIPALES DE LA DEMOSTRACIÓN

$\hat{T} : (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(Y)/\xi, \rho)$. Sea $M = \hat{T}(\mathcal{C}(X)/\xi)$.
Consideramos $\hat{T}^* : M^* \to (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho)^*$.
Dados $x_1, x_2 \in X$, existen $\beta \in S_{\mathbb{K}}, y_1, y_2 \in Y$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_{x_2} - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_{y_2} - \delta_{y_1})_{|M}$$

Usando la independencia lineal de $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ se obtiene que fijado $x_1 \in X$, existe $y_1 \in Y, \beta \in S_{\mathbb{K}}$ tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$, existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_x - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_y - \delta_{y_1})_{|M}$$

Obtenemos $t : X \to Y$ inyectiva. No depende de $x_1$.
Llamemos $Y_0 = t(X), \varphi : Y_0 \to X, \varphi = t^{-1}, \alpha = \frac{1}{\beta}$. Si $y, y' \in Y_0$:

$$Tf(y) - Tf(y') = \alpha(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y')))$$

Se puede demostrar que $\varphi$ es continua y que $Y_0$ es un subespacio cerrado de $Y$.

# Ideas principales de la demostración

$\hat{T} : (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(Y)/\xi, \rho)$. Sea $M = \hat{T}(\mathcal{C}(X)/\xi)$.
Consideramos $\hat{T}^* : M^* \to (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho)^*$.
Dados $x_1, x_2 \in X$, existen $\beta \in S_{\mathbb{K}}, y_1, y_2 \in Y$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_{x_2} - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_{y_2} - \delta_{y_1})_{|M}$$

Usando la independencia lineal de $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ se obtiene que fijado $x_1 \in X$, existe $y_1 \in Y, \beta \in S_{\mathbb{K}}$ tales que para cada $x \in X \setminus \{x_1\}$, existe $y \in Y \setminus \{y_1\}$ tales que:

$$\hat{T}^{*-1}(\delta_{x} - \delta_{x_1}) = \beta(\delta_{y} - \delta_{y_1})_{|M}$$

Obtenemos $t : X \to Y$ inyectiva. No depende de $x_1$.
Llamemos $Y_0 = t(X), \varphi : Y_0 \to X, \varphi = t^{-1}, \alpha = \frac{1}{\beta}$. Si $y, y' \in Y_0$:

$$Tf(y) - Tf(y') = \alpha(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y')))$$

Se puede demostrar que $\varphi$ es continua y que $Y_0$ es un subespacio cerrado de $Y$.

Si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $[Tf_{|Y_0}] = [g]$, con $g : Y_0 \to \mathbb{K}$ definida por $g(y) = \alpha f(\varphi(y))$.
Existe $z \in \mathbb{K}$, que llamaremos $Lf$, tal que, si $y \in Y_0$

$$Tf(y) = \alpha f(\varphi(y)) + Lf$$

La aplicación L será continua si y sólo si T lo es.
Sea $S : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(X)$, definida por $S(g)(x) = \beta g(t(x))$.
Sea $T_0 : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, definida por $T_0 f(y) = Tf(y) - Lf$.
$S$ y $T_0$ preservan el diámetro.
Definimos $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$, por $H = T_0 S$.Si $g \in \mathcal{C}(Y_0)$:
$(Hg)(y) = T_0 S(g(y)) = T(Sg)(y) - L(Sg) =$
$\alpha(\beta g(t(\varphi(y)))) + L(Sg) - L(Sg) = g(y)$.
H es un operador lineal de extensión que preserva los diámetros.
Si $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$, se puede demostrar que $M_0 = M$,así pues $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$.

Si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $[Tf_{|Y_0}] = [g]$, con $g : Y_0 \to \mathbb{K}$ definida por $g(y) = \alpha f(\varphi(y))$.
Existe $z \in \mathbb{K}$, que llamaremos $Lf$, tal que, si $y \in Y_0$

$$Tf(y) = \alpha f(\varphi(y)) + Lf$$

La aplicación L será continua si y sólo si T lo es.
Sea $S : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(X)$, definida por $S(g)(x) = \beta g(t(x))$.
Sea $T_0 : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, definida por $T_0 f(y) = Tf(y) - Lf$.
$S$ y $T_0$ preservan el diámetro.
Definimos $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$, por $H = T_0 S$.Si $g \in \mathcal{C}(Y_0)$:
$(Hg)(y) = T_0 S(g(y)) = T(Sg)(y) - L(Sg) = \alpha(\beta g(t(\varphi(y)))) + L(Sg) - L(Sg) = g(y)$.
H es un operador lineal de extensión que preserva los diámetros.
Si $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$, se puede demostrar que $M_0 = M$,así pues $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$.

Si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $[Tf_{|Y_0}] = [g]$, con $g : Y_0 \to \mathbb{K}$ definida por $g(y) = \alpha f(\varphi(y))$.
Existe $z \in \mathbb{K}$, que llamaremos $Lf$, tal que, si $y \in Y_0$

$$Tf(y) = \alpha f(\varphi(y)) + Lf$$

La aplicación L será continua si y sólo si T lo es.
Sea $S : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(X)$, definida por $S(g)(x) = \beta g(t(x))$.
Sea $T_0 : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, definida por $T_0 f(y) = Tf(y) - Lf$.
$S$ y $T_0$ preservan el diámetro.
Definimos $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$, por $H = T_0 S$.Si $g \in \mathcal{C}(Y_0)$:
$(Hg)(y) = T_0 S(g(y)) = T(Sg)(y) - L(Sg) = \alpha(\beta g(t(\varphi(y)))) + L(Sg) - L(Sg) = g(y)$.
H es un operador lineal de extensión que preserva los diámetros.
Si $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$, se puede demostrar que $M_0 = M$,así pues $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$.

Si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $[Tf_{|Y_0}] = [g]$, con $g : Y_0 \to \mathbb{K}$ definida por $g(y) = \alpha f(\varphi(y))$.
Existe $z \in \mathbb{K}$, que llamaremos $Lf$, tal que, si $y \in Y_0$

$$Tf(y) = \alpha f(\varphi(y)) + Lf$$

La aplicación L será continua si y sólo si T lo es.
Sea $S : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(X)$, definida por $S(g)(x) = \beta g(t(x))$.
Sea $T_0 : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, definida por $T_0 f(y) = Tf(y) - Lf$.
$S$ y $T_0$ preservan el diámetro.
Definimos $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$, por $H = T_0 S$.Si $g \in \mathcal{C}(Y_0)$:
$(Hg)(y) = T_0 S(g(y)) = T(Sg)(y) - L(Sg) = \alpha(\beta g(t(\varphi(y)))) + L(Sg) - L(Sg) = g(y)$.
H es un operador lineal de extensión que preserva los diámetros.
Si $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$, se puede demostrar que $M_0 = M$,así pues $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$.

Si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $[Tf_{|Y_0}] = [g]$, con $g : Y_0 \to \mathbb{K}$ definida por $g(y) = \alpha f(\varphi(y))$.
Existe $z \in \mathbb{K}$, que llamaremos $Lf$, tal que, si $y \in Y_0$

$$Tf(y) = \alpha f(\varphi(y)) + Lf$$

La aplicación L será continua si y sólo si T lo es.
Sea $S : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(X)$, definida por $S(g)(x) = \beta g(t(x))$.
Sea $T_0 : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, definida por $T_0 f(y) = Tf(y) - Lf$.
$S$ y $T_0$ preservan el diámetro.
Definimos $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$, por $H = T_0 S$.Si $g \in \mathcal{C}(Y_0)$:
$(Hg)(y) = T_0 S(g(y)) = T(Sg)(y) - L(Sg) = \alpha(\beta g(t(\varphi(y)))) + L(Sg) - L(Sg) = g(y)$.
H es un operador lineal de extensión que preserva los diámetros.
Si $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$, se puede demostrar que $M_0 = M$,así pues $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$.

Si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $[Tf_{|Y_0}] = [g]$, con $g : Y_0 \to \mathbb{K}$ definida por $g(y) = \alpha f(\varphi(y))$.
Existe $z \in \mathbb{K}$, que llamaremos $Lf$, tal que, si $y \in Y_0$

$$Tf(y) = \alpha f(\varphi(y)) + Lf$$

La aplicación L será continua si y sólo si T lo es.
Sea $S : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(X)$, definida por $S(g)(x) = \beta g(t(x))$.
Sea $T_0 : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, definida por $T_0 f(y) = Tf(y) - Lf$.
$S$ y $T_0$ preservan el diámetro.
Definimos $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$, por $H = T_0 S$. Si $g \in \mathcal{C}(Y_0)$:
$(Hg)(y) = T_0 S(g(y)) = T(Sg)(y) - L(Sg) = \alpha(\beta g(t(\varphi(y)))) + L(Sg) - L(Sg) = g(y)$.
H es un operador lineal de extensión que preserva los diámetros.
Si $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$, se puede demostrar que $M_0 = M$, así pues $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$.

Si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $[Tf_{|Y_0}] = [g]$, con $g : Y_0 \to \mathbb{K}$ definida por $g(y) = \alpha f(\varphi(y))$.
Existe $z \in \mathbb{K}$, que llamaremos $Lf$, tal que, si $y \in Y_0$

$$Tf(y) = \alpha f(\varphi(y)) + Lf$$

La aplicación L será continua si y sólo si T lo es.
Sea $S : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(X)$, definida por $S(g)(x) = \beta g(t(x))$.
Sea $T_0 : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, definida por $T_0 f(y) = Tf(y) - Lf$.
$S$ y $T_0$ preservan el diámetro.
Definimos $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$, por $H = T_0 S$.Si $g \in \mathcal{C}(Y_0)$:
$(Hg)(y) = T_0 S(g(y)) = T(Sg)(y) - L(Sg) = \alpha(\beta g(t(\varphi(y)))) + L(Sg) - L(Sg) = g(y)$.
H es un operador lineal de extensión que preserva los diámetros.
Si $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$, se puede demostrar que $M_0 = M$,así pues $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$.

Si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $[Tf_{|Y_0}] = [g]$, con $g : Y_0 \to \mathbb{K}$ definida por $g(y) = \alpha f(\varphi(y))$.
Existe $z \in \mathbb{K}$, que llamaremos $Lf$, tal que, si $y \in Y_0$

$$Tf(y) = \alpha f(\varphi(y)) + Lf$$

La aplicación L será continua si y sólo si T lo es.
Sea $S : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(X)$, definida por $S(g)(x) = \beta g(t(x))$.
Sea $T_0 : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, definida por $T_0 f(y) = Tf(y) - Lf$.
$S$ y $T_0$ preservan el diámetro.
Definimos $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$, por $H = T_0 S$.Si $g \in \mathcal{C}(Y_0)$:
$(Hg)(y) = T_0 S(g(y)) = T(Sg)(y) - L(Sg) =$
$\alpha(\beta g(t(\varphi(y)))) + L(Sg) - L(Sg) = g(y)$.
H es un operador lineal de extensión que preserva los diámetros.
Si $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$, se puede demostrar que $M_0 = M$,así pues $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$.

Si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $[Tf_{|Y_0}] = [g]$, con $g : Y_0 \to \mathbb{K}$ definida por $g(y) = \alpha f(\varphi(y))$.
Existe $z \in \mathbb{K}$, que llamaremos $Lf$, tal que, si $y \in Y_0$

$$Tf(y) = \alpha f(\varphi(y)) + Lf$$

La aplicación L será continua si y sólo si T lo es.
Sea $S : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(X)$, definida por $S(g)(x) = \beta g(t(x))$.
Sea $T_0 : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, definida por $T_0 f(y) = Tf(y) - Lf$.
$S$ y $T_0$ preservan el diámetro.
Definimos $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$, por $H = T_0 S$.Si $g \in \mathcal{C}(Y_0)$:
$(Hg)(y) = T_0 S(g(y)) = T(Sg)(y) - L(Sg) = \alpha(\beta g(t(\varphi(y)))) + L(Sg) - L(Sg) = g(y)$.
H es un operador lineal de extensión que preserva los diámetros.
Si $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$, se puede demostrar que $M_0 = M$,así pues $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$.

Si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $[Tf_{|Y_0}] = [g]$, con $g : Y_0 \to \mathbb{K}$ definida por $g(y) = \alpha f(\varphi(y))$.
Existe $z \in \mathbb{K}$, que llamaremos $Lf$, tal que, si $y \in Y_0$

$$Tf(y) = \alpha f(\varphi(y)) + Lf$$

La aplicación L será continua si y sólo si T lo es.
Sea $S : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(X)$, definida por $S(g)(x) = \beta g(t(x))$.
Sea $T_0 : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, definida por $T_0 f(y) = Tf(y) - Lf$.
$S$ y $T_0$ preservan el diámetro.
Definimos $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$, por $H = T_0 S$.Si $g \in \mathcal{C}(Y_0)$:
$(Hg)(y) = T_0 S(g(y)) = T(Sg)(y) - L(Sg) =$
$\alpha(\beta g(t(\varphi(y)))) + L(Sg) - L(Sg) = g(y)$.
H es un operador lineal de extensión que preserva los diámetros.
Si $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$, se puede demostrar que $M_0 = M$,así pues $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$.

Recíprocamente, si tenemos:

- $\varphi : Y_0 \to X$, *homeomorfismo*.
- $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$ operador lineal de extensión que preserva diámetros.
- $\{\delta_y : y \in Y\}$ sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$.

Definimos $S : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y_0)$ por $Sf(y) = f(\varphi(y))$.
Definimos $T : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ por $T = HS$.
$S$ y $T$ preservan los diámetros.
$M = T(\mathcal{C}(X)) = H(\mathcal{C}(Y_0)) = M_0$, así pues $\{\delta_y : y \in Y\}$ es un sistema libre en $M^*$.

Recíprocamente, si tenemos:

- $\varphi : Y_0 \to X$, *homeomorfismo*.
- $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$ operador lineal de extensión que preserva diámetros.
- $\{\delta_y : y \in Y\}$ sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$.

Definimos $S : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y_0)$ por $Sf(y) = f(\varphi(y))$.
Definimos $T : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ por $T = HS$.
$S$ y $T$ preservan los diámetros.
$M = T(\mathcal{C}(X)) = H(\mathcal{C}(Y_0)) = M_0$, así pues $\{\delta_y : y \in Y\}$ es un sistema libre en $M^*$.

Recíprocamente, si tenemos:

- $\varphi : Y_0 \to X$, *homeomorfismo*.
- $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$ operador lineal de extensión que preserva diámetros.
- $\{\delta_y : y \in Y\}$ sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$.

Definimos $S : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y_0)$ por $Sf(y) = f(\varphi(y))$.
Definimos $T : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ por $T = HS$.
$S$ y $T$ preservan los diámetros.
$M = T(\mathcal{C}(X)) = H(\mathcal{C}(Y_0)) = M_0$, así pues $\{\delta_y : y \in Y\}$ es un sistema libre en $M^*$.

Recíprocamente, si tenemos:

- $\varphi : Y_0 \to X$, *homeomorfismo*.
- $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$ operador lineal de extensión que preserva diámetros.
- $\{\delta_y : y \in Y\}$ sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$.

Definimos $S : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y_0)$ por $Sf(y) = f(\varphi(y))$.
Definimos $T : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ por $T = HS$.
$S$ y $T$ preservan los diámetros.
$M = T(\mathcal{C}(X)) = H(\mathcal{C}(Y_0)) = M_0$, así pues $\{\delta_y : y \in Y\}$ es un sistema libre en $M^*$.

Recíprocamente, si tenemos:

- $\varphi : Y_0 \to X$, *homeomorfismo*.
- $H : \mathcal{C}(Y_0) \to \mathcal{C}(Y)$ operador lineal de extensión que preserva diámetros.
- $\{\delta_y : y \in Y\}$ sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(\mathcal{C}(Y_0))$.

Definimos $S : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y_0)$ por $Sf(y) = f(\varphi(y))$.
Definimos $T : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ por $T = HS$.
$S$ y $T$ preservan los diámetros.
$M = T(\mathcal{C}(X)) = H(\mathcal{C}(Y_0)) = M_0$, así pues $\{\delta_y : y \in Y\}$ es un sistema libre en $M^*$.

# Caso localmente compacto

### Teorema

*Sean $\mathrm{X}, \mathrm{Y}$ dos espacios topológicos localmente compactos, no compactos, Hausdorff. Son equivalentes:*

1) *Existe una aplicación lineal que preserva los diámetros $T : \mathcal{C}_0(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(Y)$ tal que $\{\delta_y : y \in \mathrm{Y}\}$ es libre en $M^*$ donde $M = T(\mathcal{C}_0(\mathrm{X}))$.*
2) *Existe un homeomorfismo $\varphi : \gamma\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}_0$ donde $\mathrm{Y}_0$ es un subespacio de $\mathrm{Y}$ y un operador lineal de extensión que preserva los diámetros $H : A \longrightarrow \mathcal{C}(\gamma\mathrm{Y})$ donde $A = \{g \in \mathcal{C}(Y_0) : g(y_0) = 0\}$, $y_0 = \varphi(\infty)$ tal que $\{\delta_y : y \in \gamma\mathrm{Y}\backslash\{y_0\}\}$ es libre en $M_0^*$ donde $M_0 = H(A)$.*

# Ideas principales de la demostración

Sean $f \in \mathcal{C}_0(X)$, $g \in \mathcal{C}_0(Y)$.
Definimos $\overline{f} \in \mathcal{C}(\gamma X)$ por $\overline{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\overline{f}(\infty) = 0$.
Análogamente $\overline{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y)$ .
Definimos $q_1 : (\mathcal{C}_0(X), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X)/\xi, \rho)$ por $q_1(f) = [\overline{f}]$.
Análogamente, $q_2 : (\mathcal{C}_0(Y), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y)/\xi, \rho)$ por $q_2(g) = [\overline{g}]$.
Consideramos $\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y)/\xi, \rho)$ ,
$\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
Por el teorema anterior, existen $Y_0 \subset Y, \varphi : Y_0 \to \gamma X$ homeomorfismo y $\beta \in S_{\mathbb{K}}$, tales que si $y, y' \in Y_0$

$$\overline{Tf}(y) - \overline{Tf}(y') = \beta(\overline{f}(\varphi(y)) - \overline{f}(\varphi(y')))$$

# Ideas principales de la demostración

Sean $f \in \mathcal{C}_0(X)$, $g \in \mathcal{C}_0(Y)$.
Definimos $\bar{f} \in \mathcal{C}(\gamma X)$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
Análogamente $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y)$ .
Definimos $q_1 : (\mathcal{C}_0(X), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X)/\xi, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
Análogamente, $q_2 : (\mathcal{C}_0(Y), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y)/\xi, \rho)$ por $q_2(g) = [\bar{g}]$.
Consideramos $\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y)/\xi, \rho)$ ,
$\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
Por el teorema anterior, existen $Y_0 \subset Y, \varphi : Y_0 \to \gamma X$
homeomorfismo y $\beta \in S_{\mathbb{K}}$, tales que si $y, y' \in Y_0$

$$\overline{Tf}(y) - \overline{Tf}(y') = \beta(\bar{f}(\varphi(y)) - \bar{f}(\varphi(y')))$$

# Ideas principales de la demostración

Sean $f \in \mathcal{C}_0(X)$, $g \in \mathcal{C}_0(Y)$.
Definimos $\bar{f} \in \mathcal{C}(\gamma X)$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
Análogamente $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y)$ .
Definimos $q_1 : (\mathcal{C}_0(X), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X)/\xi, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
Análogamente, $q_2 : (\mathcal{C}_0(Y), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y)/\xi, \rho)$ por $q_2(g) = [\bar{g}]$.
Consideramos $\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y)/\xi, \rho)$ ,
$\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
Por el teorema anterior, existen $Y_0 \subset Y, \varphi : Y_0 \to \gamma X$ homeomorfismo y $\beta \in S_{\mathbb{K}}$, tales que si $y, y' \in Y_0$

$$\overline{Tf}(y) - \overline{Tf}(y') = \beta(\bar{f}(\varphi(y)) - \bar{f}(\varphi(y')))$$

# Ideas principales de la demostración

Sean $f \in \mathcal{C}_0(X)$, $g \in \mathcal{C}_0(Y)$.
Definimos $\bar{f} \in \mathcal{C}(\gamma X)$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
Análogamente $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y)$ .
Definimos $q_1 : (\mathcal{C}_0(X), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X)/\xi, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
Análogamente, $q_2 : (\mathcal{C}_0(Y), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y)/\xi, \rho)$ por $q_2(g) = [\bar{g}]$.
Consideramos $\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y)/\xi, \rho)$ ,
$\hat{T}[q_1 f] = [q_2 T f]$.
Por el teorema anterior, existen $Y_0 \subset Y, \varphi : Y_0 \to \gamma X$ homeomorfismo y $\beta \in S_{\mathbb{K}}$, tales que si $y, y' \in Y_0$

$$\overline{Tf}(y) - \overline{Tf}(y') = \beta(\bar{f}(\varphi(y)) - \bar{f}(\varphi(y')))$$

# IDEAS PRINCIPALES DE LA DEMOSTRACIÓN

Sean $f \in \mathcal{C}_0(X)$, $g \in \mathcal{C}_0(Y)$.
Definimos $\bar{f} \in \mathcal{C}(\gamma X)$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
Análogamente $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y)$ .
Definimos $q_1 : (\mathcal{C}_0(X), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X)/\xi, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
Análogamente, $q_2 : (\mathcal{C}_0(Y), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y)/\xi, \rho)$ por $q_2(g) = [\bar{g}]$.
Consideramos $\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y)/\xi, \rho)$ ,
$\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
Por el teorema anterior, existen $Y_0 \subset Y, \varphi : Y_0 \to \gamma X$ homeomorfismo y $\beta \in S_{\mathbb{K}}$, tales que si $y, y' \in Y_0$

$$\overline{Tf}(y) - \overline{Tf}(y') = \beta(\bar{f}(\varphi(y)) - \bar{f}(\varphi(y')))$$

# Ideas principales de la demostración

Sean $f \in \mathcal{C}_0(X)$, $g \in \mathcal{C}_0(Y)$.
Definimos $\bar{f} \in \mathcal{C}(\gamma X)$ por $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$, $\bar{f}(\infty) = 0$.
Análogamente $\bar{g} \in \mathcal{C}(\gamma Y)$ .
Definimos $q_1 : (\mathcal{C}_0(X), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma X)/\xi, \rho)$ por $q_1(f) = [\bar{f}]$.
Análogamente, $q_2 : (\mathcal{C}_0(Y), \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y)/\xi, \rho)$ por $q_2(g) = [\bar{g}]$.
Consideramos $\hat{T} : (\mathcal{C}(\gamma X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(\gamma Y)/\xi, \rho)$ ,
$\hat{T}[q_1 f] = [q_2 Tf]$.
Por el teorema anterior, existen $Y_0 \subset Y, \varphi : Y_0 \to \gamma X$ homeomorfismo y $\beta \in S_{\mathbb{K}}$, tales que si $y, y' \in Y_0$

$$\overline{Tf}(y) - \overline{Tf}(y') = \beta(\bar{f}(\varphi(y)) - \bar{f}(\varphi(y')))$$

Sea $y_0 \in Y_0, \varphi(y_0) = \infty$. Para $y \in Y_0 \setminus \{y_0\}$, $Tf(y) - Tf(y_0) = \beta f(\varphi(y))$.
Sea $A = \{g \in \mathcal{C}(Y_0) : g(y_0) = 0\}$. Consideremos $Q : A \to \mathcal{C}_0(X)$, $Qg(x) = \frac{1}{\beta} g(\varphi^{-1}(x))$.
$Q$ está bien definida y preserva los diámetros.
Consideremos $T' : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}(\gamma Y)$ definida por $T'h(y) = Th(y) - Th(y_0)$.
Sea $H : A \to \mathcal{C}(\gamma X)$ definida por $H = T'Q$.
Si $g \in A$, $Hg(y) = g(y)$. H es lineal y preserva los diámetros.
Se puede demostrar que $\{\delta_y : y \in \gamma Y \setminus \{y_0\}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(A)$.

Sea $y_0 \in Y_0, \varphi(y_0) = \infty$. Para $y \in Y_0 \setminus \{y_0\}$,
$Tf(y) - Tf(y_0) = \beta f(\varphi(y))$.
Sea $A = \{g \in \mathcal{C}(Y_0) : g(y_0) = 0\}$. Consideremos
$Q : A \to \mathcal{C}_0(X)$, $Qg(x) = \frac{1}{\beta} g(\varphi^{-1}(x))$.
$Q$ está bien definida y preserva los diámetros.
Consideremos $T' : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}(\gamma Y)$ definida por
$T'h(y) = Th(y) - Th(y_0)$.
Sea $H : A \to \mathcal{C}(\gamma X)$ definida por $H = T'Q$.
Si $g \in A, Hg(y) = g(y)$. H es lineal y preserva los diámetros.
Se puede demostrar que $\{\delta_y : y \in \gamma Y \setminus \{y_0\}\}$ es un sistema
libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(A)$.

Sea $y_0 \in Y_0, \varphi(y_0) = \infty$. Para $y \in Y_0 \setminus \{y_0\}$,
$Tf(y) - Tf(y_0) = \beta f(\varphi(y))$.
Sea $A = \{g \in \mathcal{C}(Y_0) : g(y_0) = 0\}$. Consideremos
$Q : A \to \mathcal{C}_0(X)$, $Qg(x) = \frac{1}{\beta} g(\varphi^{-1}(x))$.
$Q$ está bien definida y preserva los diámetros.
Consideremos $T' : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}(\gamma Y)$ definida por
$T'h(y) = Th(y) - Th(y_0)$.
Sea $H : A \to \mathcal{C}(\gamma X)$ definida por $H = T'Q$.
Si $g \in A, Hg(y) = g(y)$. H es lineal y preserva los diámetros.
Se puede demostrar que $\{\delta_y : y \in \gamma Y \setminus \{y_0\}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(A)$.

Sea $y_0 \in Y_0, \varphi(y_0) = \infty$. Para $y \in Y_0 \setminus \{y_0\}$,
$Tf(y) - Tf(y_0) = \beta f(\varphi(y))$.
Sea $A = \{g \in \mathcal{C}(Y_0) : g(y_0) = 0\}$. Consideremos
$Q : A \to \mathcal{C}_0(X)$, $Qg(x) = \frac{1}{\beta} g(\varphi^{-1}(x))$.
$Q$ está bien definida y preserva los diámetros.
Consideremos $T' : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}(\gamma Y)$ definida por
$T'h(y) = Th(y) - Th(y_0)$.
Sea $H : A \to \mathcal{C}(\gamma X)$ definida por $H = T'Q$.
Si $g \in A$, $Hg(y) = g(y)$. H es lineal y preserva los diámetros.
Se puede demostrar que $\{\delta_y : y \in \gamma Y \setminus \{y_0\}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(A)$.

Sea $y_0 \in Y_0, \varphi(y_0) = \infty$. Para $y \in Y_0 \setminus \{y_0\}$,
$Tf(y) - Tf(y_0) = \beta f(\varphi(y))$.
Sea $A = \{g \in \mathcal{C}(Y_0) : g(y_0) = 0\}$. Consideremos
$Q : A \to \mathcal{C}_0(X)$, $Qg(x) = \frac{1}{\beta} g(\varphi^{-1}(x))$.
$Q$ está bien definida y preserva los diámetros.
Consideremos $T' : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}(\gamma Y)$ definida por
$T'h(y) = Th(y) - Th(y_0)$.
Sea $H : A \to \mathcal{C}(\gamma X)$ definida por $H = T'Q$.
Si $g \in A, Hg(y) = g(y)$. H es lineal y preserva los diámetros.
Se puede demostrar que $\{\delta_y : y \in \gamma Y \setminus \{y_0\}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(A)$.

Sea $y_0 \in Y_0, \varphi(y_0) = \infty$. Para $y \in Y_0 \setminus \{y_0\}$,
$Tf(y) - Tf(y_0) = \beta f(\varphi(y))$.
Sea $A = \{g \in \mathcal{C}(Y_0) : g(y_0) = 0\}$. Consideremos
$Q : A \to \mathcal{C}_0(X)$, $Qg(x) = \frac{1}{\beta} g(\varphi^{-1}(x))$.
$Q$ está bien definida y preserva los diámetros.
Consideremos $T' : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}(\gamma Y)$ definida por
$T'h(y) = Th(y) - Th(y_0)$.
Sea $H : A \to \mathcal{C}(\gamma X)$ definida por $H = T'Q$.
Si $g \in A, Hg(y) = g(y)$. H es lineal y preserva los diámetros.
Se puede demostrar que $\{\delta_y : y \in \gamma Y \setminus \{y_0\}\}$ es un sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(A)$.

Recíprocamente, si existen:

- $\varphi : Y_0 \to \gamma X$, *homeomorfismo*.
- $H : A \to \mathcal{C}(\gamma Y)$ operador lineal de extensión que preserva diámetros.
- $\{\delta_y : y \in Y \setminus \{y_0\}\}$ sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(A)$.

Definimos:

$\varphi_1 : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}(\gamma X), \varphi_1(f) = \bar{f}$.

$\varphi_2 : \mathcal{C}(\gamma X) \to \mathcal{C}(Y_0), \varphi_2 f(y) = f(\varphi(y))$.

$\varphi_3 : \mathcal{C}(\gamma Y) \to \mathcal{C}_0(Y), \varphi_3 g(y) = g(y) - g(\infty)$.

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ son aplicaciones lineales que preservan el diámetro.

Definimos $T : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}_0(Y)$, $T = \varphi_3 H \varphi_2 \varphi_1$.

T es una aplicación lineal que preserva los diámetros.

Si $M = T(\mathcal{C}_0(X))$, se puede demostrar que $\{\delta_y : y \in Y\}$ es un sistema libre en $M^*$.

Recíprocamente, si existen:

- $\varphi : Y_0 \to \gamma X$, *homeomorfismo*.
- $H : A \to \mathcal{C}(\gamma Y)$ operador lineal de extensión que preserva diámetros.
- $\{\delta_y : y \in Y \setminus \{y_0\}\}$ sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(A)$.

Definimos:

$\varphi_1 : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}(\gamma X), \varphi_1(f) = \bar{f}$.

$\varphi_2 : \mathcal{C}(\gamma X) \to \mathcal{C}(Y_0), \varphi_2 f(y) = f(\varphi(y))$.

$\varphi_3 : \mathcal{C}(\gamma Y) \to \mathcal{C}_0(Y), \varphi_3 g(y) = g(y) - g(\infty)$.

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ son aplicaciones lineales que preservan el diámetro.

Definimos $T : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}_0(Y), T = \varphi_3 H \varphi_2 \varphi_1$.

T es una aplicación lineal que preserva los diámetros.

Si $M = T(\mathcal{C}_0(X))$, se puede demostrar que $\{\delta_y : y \in Y\}$ es un sistema libre en $M^*$.

Recíprocamente, si existen:

- $\varphi : Y_0 \to \gamma X$, *homeomorfismo*.
- $H : A \to \mathcal{C}(\gamma Y)$ operador lineal de extensión que preserva diámetros.
- $\{\delta_y : y \in Y \setminus \{y_0\}\}$ sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(A)$.

Definimos:

$\varphi_1 : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}(\gamma X), \varphi_1(f) = \bar{f}$.
$\varphi_2 : \mathcal{C}(\gamma X) \to \mathcal{C}(Y_0), \varphi_2 f(y) = f(\varphi(y))$.
$\varphi_3 : \mathcal{C}(\gamma Y) \to \mathcal{C}_0(Y), \varphi_3 g(y) = g(y) - g(\infty)$.
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ son aplicaciones lineales que preservan el diámetro.
Definimos $T : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}_0(Y), T = \varphi_3 H \varphi_2 \varphi_1$.
T es una aplicación lineal que preserva los diámetros.
Si $M = T(\mathcal{C}_0(X))$, se puede demostrar que $\{\delta_y : y \in Y\}$ es un sistema libre en $M^*$.

Recíprocamente, si existen:

- $\varphi : Y_0 \to \gamma X$, *homeomorfismo*.
- $H : A \to \mathcal{C}(\gamma Y)$ operador lineal de extensión que preserva diámetros.
- $\{\delta_y : y \in Y \setminus \{y_0\}\}$ sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(A)$.

Definimos:
$\varphi_1 : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}(\gamma X), \varphi_1(f) = \bar{f}$.
$\varphi_2 : \mathcal{C}(\gamma X) \to \mathcal{C}(Y_0), \varphi_2 f(y) = f(\varphi(y))$.
$\varphi_3 : \mathcal{C}(\gamma Y) \to \mathcal{C}_0(Y), \varphi_3 g(y) = g(y) - g(\infty)$.
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ son aplicaciones lineales que preservan el diámetro.
Definimos $T : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}_0(Y), T = \varphi_3 H \varphi_2 \varphi_1$.
T es una aplicación lineal que preserva los diámetros.
Si $M = T(\mathcal{C}_0(X))$, se puede demostrar que $\{\delta_y : y \in Y\}$ es un sistema libre en $M^*$.

Recíprocamente, si existen:

- $\varphi : Y_0 \to \gamma X$, *homeomorfismo*.
- $H : A \to \mathcal{C}(\gamma Y)$ operador lineal de extensión que preserva diámetros.
- $\{\delta_y : y \in Y \setminus \{y_0\}\}$ sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(A)$.

Definimos:

$\varphi_1 : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}(\gamma X), \varphi_1(f) = \bar{f}$.
$\varphi_2 : \mathcal{C}(\gamma X) \to \mathcal{C}(Y_0), \varphi_2 f(y) = f(\varphi(y))$.
$\varphi_3 : \mathcal{C}(\gamma Y) \to \mathcal{C}_0(Y), \varphi_3 g(y) = g(y) - g(\infty)$.
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ son aplicaciones lineales que preservan el diámetro.
Definimos $T : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}_0(Y)$, $T = \varphi_3 H \varphi_2 \varphi_1$.
T es una aplicación lineal que preserva los diámetros.
Si $M = T(\mathcal{C}_0(X))$, se puede demostrar que $\{\delta_y : y \in Y\}$ es un sistema libre en $M^*$.

Recíprocamente, si existen:

- $\varphi : Y_0 \to \gamma X$, *homeomorfismo*.
- $H : A \to \mathcal{C}(\gamma Y)$ operador lineal de extensión que preserva diámetros.
- $\{\delta_y : y \in Y \setminus \{y_0\}\}$ sistema libre en $M_0^*$, donde $M_0 = H(A)$.

Definimos:
$\varphi_1 : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}(\gamma X), \varphi_1(f) = \bar{f}$.
$\varphi_2 : \mathcal{C}(\gamma X) \to \mathcal{C}(Y_0), \varphi_2 f(y) = f(\varphi(y))$.
$\varphi_3 : \mathcal{C}(\gamma Y) \to \mathcal{C}_0(Y), \varphi_3 g(y) = g(y) - g(\infty)$.
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ son aplicaciones lineales que preservan el diámetro.
Definimos $T : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}_0(Y), T = \varphi_3 H \varphi_2 \varphi_1$.
T es una aplicación lineal que preserva los diámetros.
Si $M = T(\mathcal{C}_0(X))$, se puede demostrar que $\{\delta_y : y \in Y\}$ es un sistema libre en $M^*$.

**Teorema**

*Sean X, Y dos espacios compactos, Haussdorf y $T : (\mathcal{C}(X)/\xi, \rho) \to (\mathcal{C}(Y)/\xi, \rho)$ una isometría lineal. Sean $N = (T(\mathcal{C}(X)/\xi, \rho))$ y $H = \{(y, y') \in Y \times Y : (\delta_y - \delta_{y'})_{|N} \in Ex(N^*)\}$. En esta situación existen $Y_0 \subset Y, \alpha : Y_0 \to S_{\mathbb{K}}$ y $\varphi : Y_0 \to X$ sobreyectiva tales que $H \subseteq Y_0 \times Y_0$ y para cada par $(y, y') \in H$*

$$T^*(\delta_y - \delta_{y'})_{|N} = \alpha(y)(\delta_{\varphi(y)} - \delta_{\varphi(y')})$$

# CASO REAL

En la situación del teorema anterior, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\alpha(y) = 1$ o $\alpha(y) = -1$.

Sean: $Y^+ = \{y \in Y_0 : \alpha(y) = 1\}$, $Y^- = \{y \in Y_0 : \alpha(y) = -1\}$.

Si $y, y' \in Y^+$, $Tf(y) - Tf(y') = f(\varphi(y)) - f(\varphi(y'))$.

Si $z, z' \in Y^-$, $Tf(z) - Tf(z') = f(\varphi(z')) - f(\varphi(z))$.

Llamemos $L^+f = Tf(y') - f(\varphi(y')), L^-f = Tf(z') + f(\varphi(z'))$.

Tenemos

$$Tf(y) = \begin{cases} f(\varphi(y)) + L^+f & \text{si} \quad y \in Y^+ \\ -f(\varphi(y)) + L^-f & \text{si} \quad y \in Y^- \end{cases}$$

# Caso real

En la situación del teorema anterior, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\alpha(y) = 1$ o $\alpha(y) = -1$.
Sean: $Y^+ = \{y \in Y_0 : \alpha(y) = 1\}$, $Y^- = \{y \in Y_0 : \alpha(y) = -1\}$.
Si $y, y' \in Y^+$, $Tf(y) - Tf(y') = f(\varphi(y)) - f(\varphi(y'))$.
Si $z, z' \in Y^-$, $Tf(z) - Tf(z') = f(\varphi(z')) - f(\varphi(z))$.
Llamemos $L^+ f = Tf(y') - f(\varphi(y'))$, $L^- f = Tf(z') + f(\varphi(z'))$.
Tenemos

$$Tf(y) = \begin{cases} f(\varphi(y)) + L^+ f & \text{si} \quad y \in Y^+ \\ -f(\varphi(y)) + L^- f & \text{si} \quad y \in Y^- \end{cases}$$

## Caso real

En la situación del teorema anterior, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\alpha(y) = 1$ o $\alpha(y) = -1$.
Sean: $Y^+ = \{y \in Y_0 : \alpha(y) = 1\}$, $Y^- = \{y \in Y_0 : \alpha(y) = -1\}$.
Si $y, y' \in Y^+$, $Tf(y) - Tf(y') = f(\varphi(y)) - f(\varphi(y'))$.
Si $z, z' \in Y^-$, $Tf(z) - Tf(z') = f(\varphi(z')) - f(\varphi(z))$.
Llamemos $L^+f = Tf(y') - f(\varphi(y'))$, $L^-f = Tf(z') + f(\varphi(z'))$.
Tenemos

$$Tf(y) = \begin{cases} f(\varphi(y)) + L^+f & \text{si} \quad y \in Y^+ \\ -f(\varphi(y)) + L^-f & \text{si} \quad y \in Y^- \end{cases}$$

## Caso real

En la situación del teorema anterior, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\alpha(y) = 1$ o $\alpha(y) = -1$.
Sean: $Y^+ = \{y \in Y_0 : \alpha(y) = 1\}$, $Y^- = \{y \in Y_0 : \alpha(y) = -1\}$.
Si $y, y' \in Y^+$, $Tf(y) - Tf(y') = f(\varphi(y)) - f(\varphi(y'))$.
Si $z, z' \in Y^-$, $Tf(z) - Tf(z') = f(\varphi(z')) - f(\varphi(z))$.
Llamemos $L^+f = Tf(y') - f(\varphi(y'))$, $L^-f = Tf(z') + f(\varphi(z'))$.
Tenemos

$$Tf(y) = \begin{cases} f(\varphi(y)) + L^+f & \text{si} \quad y \in Y^+ \\ -f(\varphi(y)) + L^-f & \text{si} \quad y \in Y^- \end{cases}$$

# Caso real

En la situación del teorema anterior, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\alpha(y) = 1$ o $\alpha(y) = -1$.
Sean: $Y^+ = \{y \in Y_0 : \alpha(y) = 1\}$, $Y^- = \{y \in Y_0 : \alpha(y) = -1\}$.
Si $y, y' \in Y^+$, $Tf(y) - Tf(y') = f(\varphi(y)) - f(\varphi(y'))$.
Si $z, z' \in Y^-$, $Tf(z) - Tf(z') = f(\varphi(z')) - f(\varphi(z))$.
Llamemos $L^+f = Tf(y') - f(\varphi(y'))$, $L^-f = Tf(z') + f(\varphi(z'))$.
Tenemos

$$Tf(y) = \begin{cases} f(\varphi(y)) + L^+f & \text{si} \quad y \in Y^+ \\ -f(\varphi(y)) + L^-f & \text{si} \quad y \in Y^- \end{cases}$$

## TEOREMA

*Sean $X$, $Y$ dos espacios compactos Haussdorf, $Y^+$, $Y^-$ subconjuntos disjuntos de $Y$, $\varphi : Y^+ \cup Y^- \to X$ sobreyectiva y $L^+, L^- : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ aplicaciones lineales. Sea $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$ una aplicación lineal definida por*

$$Tf(y) = f(\varphi(y)) + L^+ f$$

$$Tf(z) = f(\varphi(z)) + L^- f$$

*para $y \in Y^+, z \in Y^-$ tal que $\rho(Tf) \leq \rho(f)$ para $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Si $\#(\varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)) \geq 2$ entonces existen $\psi : Y^+ \cup Y^- \to X$ sobreyectiva y $(K, \alpha) \in \{(L^-, -1), (L^+, 1)\}$ tales que*

$$Tf(y) = \alpha f(\psi(y)) + Kf$$

*para cada $y \in Y^+ \cup Y^-, f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.*

# Ideas principales de la demostración

Si $\rho(Tf) \leq \rho(f)$, entonces $\#\varphi(Y^+) \leq 2$ o $\#\varphi(Y^-) \leq 2$.
Así pues, $\#(\varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)) = 2$.
$x_1, x_2 \in X$ y $A = \{g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|\}$, entonces $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
$\{x_1, x_2\} = \varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)$. Existirán $y_1, y_2 \in Y^+, z_1, z_2 \in Y^-$ tales que $\varphi(y_1) = \varphi(z_1) = x_1, \varphi(y_2) = \varphi(z_2) = x_2$.
Si $g \in A$ y llamamos $L = L^+ - L^-$. Se verifica:
$|Tg(y_1) - Tg(z_1)| = |2g(x_1) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|Tg(y_2) - Tg(z_2)| = |2g(x_2) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
Esto implica que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$ y por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

# Ideas principales de la demostración

Si $\rho(Tf) \leq \rho(f)$, entonces $\#\varphi(Y^+) \leq 2$ o $\#\varphi(Y^-) \leq 2$.
Así pues, $\#(\varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)) = 2$.
$x_1, x_2 \in X$ y $A = \{g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|\}$,
entonces $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
$\{x_1, x_2\} = \varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)$. Existirán $y_1, y_2 \in Y^+, z_1, z_2 \in Y^-$
tales que $\varphi(y_1) = \varphi(z_1) = x_1, \varphi(y_2) = \varphi(z_2) = x_2$.
Si $g \in A$ y llamamos $L = L^+ - L^-$. Se verifica:
$|Tg(y_1) - Tg(z_1)| = |2g(x_1) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|Tg(y_2) - Tg(z_2)| = |2g(x_2) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
Esto implica que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$ y por linealidad
$Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

# Ideas principales de la demostración

Si $\rho(Tf) \leq \rho(f)$, entonces $\#\varphi(Y^+) \leq 2$ o $\#\varphi(Y^-) \leq 2$.
Así pues, $\#(\varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)) = 2$.
$x_1, x_2 \in X$ y $A = \{g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|\}$,
entonces $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
$\{x_1, x_2\} = \varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)$. Existirán $y_1, y_2 \in Y^+, z_1, z_2 \in Y^-$
tales que $\varphi(y_1) = \varphi(z_1) = x_1, \varphi(y_2) = \varphi(z_2) = x_2$.
Si $g \in A$ y llamamos $L = L^+ - L^-$. Se verifica:
$|Tg(y_1) - Tg(z_1)| = |2g(x_1) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|Tg(y_2) - Tg(z_2)| = |2g(x_2) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
Esto implica que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$ y por linealidad
$Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

# Ideas principales de la demostración

Si $\rho(Tf) \leq \rho(f)$, entonces $\#\varphi(Y^+) \leq 2$ o $\#\varphi(Y^-) \leq 2$.
Así pues, $\#(\varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)) = 2$.
$x_1, x_2 \in X$ y $A = \{g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|\}$, entonces $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
$\{x_1, x_2\} = \varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)$. Existirán $y_1, y_2 \in Y^+, z_1, z_2 \in Y^-$ tales que $\varphi(y_1) = \varphi(z_1) = x_1, \varphi(y_2) = \varphi(z_2) = x_2$.
Si $g \in A$ y llamamos $L = L^+ - L^-$. Se verifica:
$|Tg(y_1) - Tg(z_1)| = |2g(x_1) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|Tg(y_2) - Tg(z_2)| = |2g(x_2) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
Esto implica que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$ y por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

# IDEAS PRINCIPALES DE LA DEMOSTRACIÓN

Si $\rho(Tf) \leq \rho(f)$, entonces $\#\varphi(Y^+) \leq 2$ o $\#\varphi(Y^-) \leq 2$.
Así pues, $\#(\varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)) = 2$.
$x_1, x_2 \in X$ y $A = \{g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|\}$, entonces $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
$\{x_1, x_2\} = \varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)$. Existirán $y_1, y_2 \in Y^+, z_1, z_2 \in Y^-$ tales que $\varphi(y_1) = \varphi(z_1) = x_1, \varphi(y_2) = \varphi(z_2) = x_2$.
Si $g \in A$ y llamamos $L = L^+ - L^-$. Se verifica:
$|Tg(y_1) - Tg(z_1)| = |2g(x_1) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|Tg(y_2) - Tg(z_2)| = |2g(x_2) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
Esto implica que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$ y por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

# Ideas principales de la demostración

Si $\rho(Tf) \leq \rho(f)$, entonces $\#\varphi(Y^+) \leq 2$ o $\#\varphi(Y^-) \leq 2$.
Así pues, $\#(\varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)) = 2$.
$x_1, x_2 \in X$ y $A = \{g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|\}$, entonces $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
$\{x_1, x_2\} = \varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)$. Existirán $y_1, y_2 \in Y^+, z_1, z_2 \in Y^-$ tales que $\varphi(y_1) = \varphi(z_1) = x_1, \varphi(y_2) = \varphi(z_2) = x_2$.
Si $g \in A$ y llamamos $L = L^+ - L^-$. Se verifica:
$|Tg(y_1) - Tg(z_1)| = |2g(x_1) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|Tg(y_2) - Tg(z_2)| = |2g(x_2) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
Esto implica que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$ y por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

# Ideas principales de la demostración

Si $\rho(Tf) \leq \rho(f)$, entonces $\#\varphi(Y^+) \leq 2$ o $\#\varphi(Y^-) \leq 2$.
Así pues, $\#(\varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)) = 2$.
$x_1, x_2 \in X$ y $A = \{g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|\}$,
entonces $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
$\{x_1, x_2\} = \varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)$. Existirán $y_1, y_2 \in Y^+, z_1, z_2 \in Y^-$
tales que $\varphi(y_1) = \varphi(z_1) = x_1, \varphi(y_2) = \varphi(z_2) = x_2$.
Si $g \in A$ y llamamos $L = L^+ - L^-$. Se verifica:
$|Tg(y_1) - Tg(z_1)| = |2g(x_1) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|Tg(y_2) - Tg(z_2)| = |2g(x_2) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
Esto implica que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$ y por linealidad
$Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

# Ideas principales de la demostración

Si $\rho(Tf) \leq \rho(f)$, entonces $\#\varphi(Y^+) \leq 2$ o $\#\varphi(Y^-) \leq 2$.
Así pues, $\#(\varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)) = 2$.
$x_1, x_2 \in X$ y $A = \{g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|\}$,
entonces $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
$\{x_1, x_2\} = \varphi(Y^+) \cap \varphi(Y^-)$. Existirán $y_1, y_2 \in Y^+, z_1, z_2 \in Y^-$
tales que $\varphi(y_1) = \varphi(z_1) = x_1, \varphi(y_2) = \varphi(z_2) = x_2$.
Si $g \in A$ y llamamos $L = L^+ - L^-$. Se verifica:
$|Tg(y_1) - Tg(z_1)| = |2g(x_1) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|Tg(y_2) - Tg(z_2)| = |2g(x_2) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
Esto implica que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$ y por linealidad
$Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Será $\varphi(Y^+) \subseteq \varphi(Y^-)$ o $\varphi(Y^-) \subseteq \varphi(Y^+)$.
Si $\varphi(Y^+) \subseteq \varphi(Y^-)$, definimos $\psi : Y^+ \cup Y^- \to X$ por:
$\psi(Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)) = \{x_2\}, \psi(Y^- \cap \varphi^{-1}(x_2)) = \{x_1\}$ y
$\psi(y) = \varphi(y)$ si $y \in Y^+$.
Esta aplicación es sobreyectiva y por construcción:
Si $y \in Y^+$, $Tf(y) = f(\varphi(y)) + L^+f = f(\psi(y)) + L^+f$.
Si $z \in Y^-$, $Tf(z) = -f(\varphi(z)) + L^-f = f(\psi(z)) + L^+f$.
Análogamente, si $\varphi(Y^-) \subseteq \varphi(Y^+)$, existe $\psi : Y^+ \cup Y^- \to X$ sobreyectiva tal que $Tf = -f(\psi(y)) + L^-f$ para $y \in Y^+ \cup Y^-, f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Será $\varphi(Y^+) \subseteq \varphi(Y^-)$ o $\varphi(Y^-) \subseteq \varphi(Y^+)$.
Si $\varphi(Y^+) \subseteq \varphi(Y^-)$, definimos $\psi : Y^+ \cup Y^- \to X$ por:
$\psi(Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)) = \{x_2\}, \psi(Y^- \cap \varphi^{-1}(x_2)) = \{x_1\}$ y
$\psi(y) = \varphi(y)$ si $y \in Y^+$.
Esta aplicación es sobreyectiva y por construcción:
Si $y \in Y^+$, $Tf(y) = f(\varphi(y)) + L^+f = f(\psi(y)) + L^+f$.
Si $z \in Y^-$, $Tf(z) = -f(\varphi(z)) + L^-f = f(\psi(z)) + L^+f$.
Análogamente, si $\varphi(Y^-) \subseteq \varphi(Y^+)$, existe $\psi : Y^+ \cup Y^- \to X$
sobreyectiva tal que $Tf = -f(\psi(y)) + L^-f$ para
$y \in Y^+ \cup Y^-, f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Será $\varphi(Y^+) \subseteq \varphi(Y^-)$ o $\varphi(Y^-) \subseteq \varphi(Y^+)$.
Si $\varphi(Y^+) \subseteq \varphi(Y^-)$, definimos $\psi : Y^+ \cup Y^- \to X$ por:
$\psi(Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)) = \{x_2\}, \psi(Y^- \cap \varphi^{-1}(x_2)) = \{x_1\}$ y
$\psi(y) = \varphi(y)$ si $y \in Y^+$.
Esta aplicación es sobreyectiva y por construcción:
Si $y \in Y^+$, $Tf(y) = f(\varphi(y)) + L^+f = f(\psi(y)) + L^+f$.
Si $z \in Y^-$, $Tf(z) = -f(\varphi(z)) + L^-f = f(\psi(z)) + L^+f$.
Análogamente, si $\varphi(Y^-) \subseteq \varphi(Y^+)$, existe $\psi : Y^+ \cup Y^- \to X$
sobreyectiva tal que $Tf = -f(\psi(y)) + L^-f$ para
$y \in Y^+ \cup Y^-, f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Será $\varphi(Y^+) \subseteq \varphi(Y^-)$ o $\varphi(Y^-) \subseteq \varphi(Y^+)$.
Si $\varphi(Y^+) \subseteq \varphi(Y^-)$, definimos $\psi : Y^+ \cup Y^- \to X$ por:
$\psi(Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)) = \{x_2\}, \psi(Y^- \cap \varphi^{-1}(x_2)) = \{x_1\}$ y
$\psi(y) = \varphi(y)$ si $y \in Y^+$.
Esta aplicación es sobreyectiva y por construcción:
Si $y \in Y^+$, $Tf(y) = f(\varphi(y)) + L^+ f = f(\psi(y)) + L^+ f$.
Si $z \in Y^-$, $Tf(z) = -f(\varphi(z)) + L^- f = f(\psi(z)) + L^+ f$.
Análogamente, si $\varphi(Y^-) \subseteq \varphi(Y^+)$, existe $\psi : Y^+ \cup Y^- \to X$ sobreyectiva tal que $Tf = -f(\psi(y)) + L^- f$ para $y \in Y^+ \cup Y^-, f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Será $\varphi(Y^+) \subseteq \varphi(Y^-)$ o $\varphi(Y^-) \subseteq \varphi(Y^+)$.
Si $\varphi(Y^+) \subseteq \varphi(Y^-)$, definimos $\psi : Y^+ \cup Y^- \to X$ por:
$\psi(Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)) = \{x_2\}, \psi(Y^- \cap \varphi^{-1}(x_2)) = \{x_1\}$ y
$\psi(y) = \varphi(y)$ si $y \in Y^+$.
Esta aplicación es sobreyectiva y por construcción:
Si $y \in Y^+$, $Tf(y) = f(\varphi(y)) + L^+f = f(\psi(y)) + L^+f$.
Si $z \in Y^-$, $Tf(z) = -f(\varphi(z)) + L^-f = f(\psi(z)) + L^+f$.
Análogamente, si $\varphi(Y^-) \subseteq \varphi(Y^+)$, existe $\psi : Y^+ \cup Y^- \to X$ sobreyectiva tal que $Tf = -f(\psi(y)) + L^-f$ para $y \in Y^+ \cup Y^-, f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

## Teorema

*Sean $X, Y$ dos espacios topológicos compactos Hausdorff con $X$ perfecto, $Y^+, Y^-$ subconjuntos disjuntos de $Y$, $\varphi : Y^+ \cup Y^- \to X$ sobreyectiva y $L^+, L^- : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ aplicaciones lineales. Supongamos que $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$ es una aplicación lineal tal que*

$$Tf(y) = f(\varphi(y)) + L^+ f$$

$$Tf(z) = -f(\varphi(z)) + L^- f$$

*y $\rho(Tf) \leq \rho(f)$ para cada $y \in Y^+, z \in Y^-$ y $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. En estas condiciones existe $\psi : Y^+ \cup Y^- \to X$ sobreyectiva y $(K, \alpha) \in \{(L^-, -1), (L^+, 1)\}$ tales que para cada $y \in Y^+ \cup Y^-$ and $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ se verifica:*

$$Tf(y) = \alpha f(\psi(y)) + Kf$$

Supongamos $\varphi(Y^-) = \{x_1, x_2\}$. Tomamos $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que $|g(x_1) - g(x_2)| = \rho(g)$ y llamamos $L = L^+ - L^-$.
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in \varphi(Y^+) \setminus \{x_1, x_2\}$ tal que $|g(x_1) - g(x_\varepsilon)| < \varepsilon$. Tomamos $y_\varepsilon \in Y^+ \cap \varphi^{-1}(x_\varepsilon)$ e $y_1 \in Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)$. Tenemos
$|Tg(y_1) - Tg(y_\varepsilon)| = |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| + \varepsilon \leq |g(x_1) - g(x_2)| + \varepsilon$.
Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
Trabajando con $x_2$ obtenemos $|2g(x_2) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
De las dos desigualdades deducimos que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$.
Por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Supongamos $\varphi(Y^-) = \{x_1, x_2\}$. Tomamos $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que $|g(x_1) - g(x_2)| = \rho(g)$ y llamamos $L = L^+ - L^-$.

Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in \varphi(Y^+) \setminus \{x_1, x_2\}$ tal que $|g(x_1) - g(x_\varepsilon)| < \varepsilon$. Tomamos $y_\varepsilon \in Y^+ \cap \varphi^{-1}(x_\varepsilon)$ e $y_1 \in Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)$. Tenemos

$|Tg(y_1) - Tg(y_\varepsilon)| = |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.

$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| + \varepsilon \leq |g(x_1) - g(x_2)| + \varepsilon$.

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos

$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.

Trabajando con $x_2$ obtenemos $|2g(x_2) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.

De las dos desigualdades deducimos que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$.

Por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Supongamos $\varphi(Y^-) = \{x_1, x_2\}$. Tomamos $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que $|g(x_1) - g(x_2)| = \rho(g)$ y llamamos $L = L^+ - L^-$.
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in \varphi(Y^+) \setminus \{x_1, x_2\}$ tal que $|g(x_1) - g(x_\varepsilon)| < \varepsilon$. Tomamos $y_\varepsilon \in Y^+ \cap \varphi^{-1}(x_\varepsilon)$ e $y_1 \in Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)$. Tenemos
$|Tg(y_1) - Tg(y_\varepsilon)| = |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| + \varepsilon \leq |g(x_1) - g(x_2)| + \varepsilon$.
Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
Trabajando con $x_2$ obtenemos $|2g(x_2) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
De las dos desigualdades deducimos que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$.
Por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Supongamos $\varphi(Y^-) = \{x_1, x_2\}$. Tomamos $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que $|g(x_1) - g(x_2)| = \rho(g)$ y llamamos $L = L^+ - L^-$.
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in \varphi(Y^+) \setminus \{x_1, x_2\}$ tal que $|g(x_1) - g(x_\varepsilon)| < \varepsilon$. Tomamos $y_\varepsilon \in Y^+ \cap \varphi^{-1}(x_\varepsilon)$ e $y_1 \in Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)$. Tenemos
$|Tg(y_1) - Tg(y_\varepsilon)| = |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| + \varepsilon \leq |g(x_1) - g(x_2)| + \varepsilon$.
Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
Trabajando con $x_2$ obtenemos $|2g(x_2) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
De las dos desigualdades deducimos que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$.
Por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Supongamos $\varphi(Y^-) = \{x_1, x_2\}$. Tomamos $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que $|g(x_1) - g(x_2)| = \rho(g)$ y llamamos $L = L^+ - L^-$.
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in \varphi(Y^+) \setminus \{x_1, x_2\}$ tal que $|g(x_1) - g(x_\varepsilon)| < \varepsilon$. Tomamos $y_\varepsilon \in Y^+ \cap \varphi^{-1}(x_\varepsilon)$ e $y_1 \in Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)$. Tenemos
$|Tg(y_1) - Tg(y_\varepsilon)| = |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| + \varepsilon \leq |g(x_1) - g(x_2)| + \varepsilon$.
Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
Trabajando con $x_2$ obtenemos $|2g(x_2) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
De las dos desigualdades deducimos que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$.
Por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Supongamos $\varphi(Y^-) = \{x_1, x_2\}$. Tomamos $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que $|g(x_1) - g(x_2)| = \rho(g)$ y llamamos $L = L^+ - L^-$.
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in \varphi(Y^+) \setminus \{x_1, x_2\}$ tal que $|g(x_1) - g(x_\varepsilon)| < \varepsilon$. Tomamos $y_\varepsilon \in Y^+ \cap \varphi^{-1}(x_\varepsilon)$ e $y_1 \in Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)$. Tenemos
$|Tg(y_1) - Tg(y_\varepsilon)| = |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| + \varepsilon \leq |g(x_1) - g(x_2)| + \varepsilon$.
Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
Trabajando con $x_2$ obtenemos $|2g(x_2) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
De las dos desigualdades deducimos que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$.
Por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Supongamos $\varphi(Y^-) = \{x_1, x_2\}$. Tomamos $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que $|g(x_1) - g(x_2)| = \rho(g)$ y llamamos $L = L^+ - L^-$.
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in \varphi(Y^+) \setminus \{x_1, x_2\}$ tal que $|g(x_1) - g(x_\varepsilon)| < \varepsilon$. Tomamos $y_\varepsilon \in Y^+ \cap \varphi^{-1}(x_\varepsilon)$ e $y_1 \in Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)$. Tenemos
$|Tg(y_1) - Tg(y_\varepsilon)| = |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| + \varepsilon \leq |g(x_1) - g(x_2)| + \varepsilon$.
Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
Trabajando con $x_2$ obtenemos $|2g(x_2) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
De las dos desigualdades deducimos que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$.
Por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Supongamos $\varphi(Y^-) = \{x_1, x_2\}$. Tomamos $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que $|g(x_1) - g(x_2)| = \rho(g)$ y llamamos $L = L^+ - L^-$.
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in \varphi(Y^+) \setminus \{x_1, x_2\}$ tal que $|g(x_1) - g(x_\varepsilon)| < \varepsilon$. Tomamos $y_\varepsilon \in Y^+ \cap \varphi^{-1}(x_\varepsilon)$ e $y_1 \in Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)$. Tenemos
$|Tg(y_1) - Tg(y_\varepsilon)| = |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| + \varepsilon \leq |g(x_1) - g(x_2)| + \varepsilon$.
Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
Trabajando con $x_2$ obtenemos $|2g(x_2) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
De las dos desigualdades deducimos que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$.
Por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Supongamos $\varphi(Y^-) = \{x_1, x_2\}$. Tomamos $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que $|g(x_1) - g(x_2)| = \rho(g)$ y llamamos $L = L^+ - L^-$.
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in \varphi(Y^+) \setminus \{x_1, x_2\}$ tal que $|g(x_1) - g(x_\varepsilon)| < \varepsilon$. Tomamos $y_\varepsilon \in Y^+ \cap \varphi^{-1}(x_\varepsilon)$ e $y_1 \in Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)$. Tenemos
$|Tg(y_1) - Tg(y_\varepsilon)| = |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| + \varepsilon \leq |g(x_1) - g(x_2)| + \varepsilon$.
Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
Trabajando con $x_2$ obtenemos $|2g(x_2) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
De las dos desigualdades deducimos que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$.
Por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Supongamos $\varphi(Y^-) = \{x_1, x_2\}$. Tomamos $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que $|g(x_1) - g(x_2)| = \rho(g)$ y llamamos $L = L^+ - L^-$.
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in \varphi(Y^+) \setminus \{x_1, x_2\}$ tal que $|g(x_1) - g(x_\varepsilon)| < \varepsilon$. Tomamos $y_\varepsilon \in Y^+ \cap \varphi^{-1}(x_\varepsilon)$ e $y_1 \in Y^- \cap \varphi^{-1}(x_1)$. Tenemos
$|Tg(y_1) - Tg(y_\varepsilon)| = |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| \leq \rho(g) = |g(x_1) - g(x_2)|$.
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) + g(x_\varepsilon) + Lg| + \varepsilon \leq |g(x_1) - g(x_2)| + \varepsilon$.
Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos
$|2g(x_1) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
Trabajando con $x_2$ obtenemos $|2g(x_2) + Lg| \leq |g(x_1) - g(x_2)|$.
De las dos desigualdades deducimos que $Lg = -g(x_1) - g(x_2)$.
Por linealidad $Lf = -f(x_1) - f(x_2)$ para cada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.