ÁLGEBRAS Y MÓDULOS DE CONVOLUCIÓN DEFINIDOS MEDIANTE OPERADORES INTEGRALES

Juan J. Royo, Luis Sánchez

Universidad de Zaragoza

VI Encuentro de Análisis Funcional y Aplicaciones, Salobreña
15 de Abril de 2010

Índice

Índice

Índice

Índice

- 1. Introducción
- 2. Una desigualdad de tipo Hardy
- 3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k(\tau)$ como $\mathcal{T}^k(\tau)$-módulos de Banach

Índice

1. INTRODUCCIÓN

1. Introducción

1. Introducción

$$L^1(\omega), L^p(\omega) \qquad (p \geq 1)$$

1. Introducción

$$L^1(\omega), L^p(\omega) \qquad (p \geq 1)$$

Submultiplicatividad de ω:

$$\omega(s+t) \leq C\omega(s)\omega(t)$$

1. Introducción

$$L^1(\omega), L^p(\omega) \qquad (p \geq 1)$$

$$\|f\|_{L^p(\omega)} := \left(\int_0^\infty |f(t)|^p \omega^p(t) \right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Introducción

1. Introducción

$$L^1(\omega) * L^p(\omega) \hookrightarrow L^p(\omega)$$

1. Introducción

$$L^1(\omega) * L^p(\omega) \hookrightarrow L^p(\omega)$$

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-s)g(s)ds, \qquad t \geq 0$$

1. Introducción

$$L^1(\omega) * L^p(\omega) \hookrightarrow L^p(\omega)$$

$$\|f * g\|_{L^p(\omega)} \leq C\|f\|_{L^1(\omega)}\|g\|_{L^p(\omega)}$$

1. Introducción

$$L^1(\omega) * L^p(\omega) \hookrightarrow L^p(\omega)$$

Desigualdad de tipo Minkowski:

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty F(x,y)dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^\infty \left(\int_0^\infty F^p(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p}} dy$$

1. Introducción

1. Introducción

Notación:

$$\mathcal{D}_+ := \mathcal{C}_c^{(\infty)}([0,\infty)),$$

espacio de funciones test.

1. Introducción

1. Introducción

[M] , [GM]

1. Introducción

[M] , [GM] $\alpha > 0.$

1. Introducción

[M], [GM] $\alpha > 0$. $\mathcal{T}^{(\alpha)}(\phi)$

1. Introducción

[M] , [GM] $\alpha > 0$. $\mathcal{T}^{(\alpha)}(\phi) := \overline{\mathcal{D}_+}^{\|\cdot\|_{(\alpha),\phi}}$

1. Introducción

[M] , [GM] $\alpha > 0$. $\mathcal{T}^{(\alpha)}(\phi) := \overline{\mathcal{D}_+}^{\|\cdot\|_{(\alpha),\phi}}$

$$\|f\|_{(\alpha),\phi} := \int_0^\infty |W^\alpha f(t)|\phi(t)dt$$

1. Introducción

[M] , [GM] $\qquad \alpha > 0. \qquad \mathcal{T}^{(\alpha)}(\phi) := \overline{\mathcal{D}_+}^{\|\cdot\|_{(\alpha),\phi}}$

$$\|f\|_{(\alpha),\phi} := \int_0^\infty |W^\alpha f(t)|\phi(t)dt$$

$$W^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty (y-t)^{\alpha-1} f(y)dy$$

$$W^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^\infty (y-t)^{n-\alpha-1} f(y)dy$$

$$t \geq 0, \qquad n := [\alpha] + 1$$

1. Introducción

`[M]`, `[GM]` $\alpha > 0.$ $\mathcal{T}^{(\alpha)}(\phi) := \overline{\mathcal{D}_+}^{\|\cdot\|_{(\alpha),\phi}}$

$$\|f\|_{(\alpha),\phi} := \int_0^\infty |W^\alpha f(t)| \phi(t) dt$$

- $$\int_{I(r,s)} (r+s-u)^{\alpha-1} \phi(u) du \leq C\phi(r)\phi(s)$$

  $$0 \leq r \leq s, \qquad I(r,s) := [0,r] \cup [s, s+r]$$

- $r^\alpha \leq C\phi(r), \qquad r \geq 0$

1. Introducción

[M] , [GM] $\quad \alpha > 0. \qquad \mathcal{T}^{(\alpha)}(\phi) := \overline{\mathcal{D}_+}^{\|\cdot\|_{(\alpha),\phi}}$

$$\|f\|_{(\alpha),\phi} := \int_0^\infty |W^\alpha f(t)|\phi(t)dt$$

$$\mathcal{T}^{(\alpha)}(\phi) \hookrightarrow \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^+).$$

1. Introducción

[M] , [GM] $\quad \alpha > 0. \quad \mathcal{T}^{(\alpha)}(\phi) := \overline{\mathcal{D}_+}^{\|\cdot\|_{(\alpha),\phi}}$

$$\|f\|_{(\alpha),\phi} := \int_0^\infty |W^\alpha f(t)|\phi(t)dt$$

$$\mathcal{T}^{(\alpha)}(\phi) \hookrightarrow \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^+).$$

$\alpha = n \in \mathbb{N},$ $\quad \phi(t) = t^n$ [AK]

$\phi(t) = e^{\lambda t}, \lambda \geq 0$ [W]

1. Introducción

1. Introducción

[KLM]

1. Introducción

[KLM] $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $0 \in \mathrm{sop}(k)$

1. Introducción

[KLM] $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $0 \in \operatorname{sop}(k)$

$$\begin{array}{cccc} T^k : & \mathcal{D}_+ & \longrightarrow & \mathcal{D}_+ \\ & f & \longmapsto & T^k(f) := k \circ f \end{array}$$

1. Introducción

[KLM] $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $0 \in \mathrm{sop}(k)$

$$\begin{array}{rccc} T^k : & \mathcal{D}_+ & \longrightarrow & \mathcal{D}_+ \\ & f & \longmapsto & T^k(f) := k \circ f \end{array}$$

$$(k \circ f)(t) := \int_t^\infty k(s-t) f(s)\, ds, \qquad t \geq 0$$

1. Introducción

[KLM] $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $0 \in \mathrm{sop}(k)$

$$\begin{array}{rccc} T^k: & \mathcal{D}_+ & \longrightarrow & \mathcal{D}_+ \\ & f & \longmapsto & T^k(f) := k \circ f \end{array}$$

$$(k \circ f)(t) := \int_t^\infty k(s-t)f(s)ds, \qquad t \geq 0$$

$$(k * f)(t) := \int_0^t k(t-s)f(s)ds, \qquad t \geq 0$$

1. Introducción

[KLM] $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $0 \in \mathrm{sop}(k)$

$$\begin{array}{rccc} T^k: & \mathcal{D}_+ & \to & \mathcal{D}_+ \\ & f & \mapsto & T^k(f) := k \circ f \end{array}$$

$$(k \circ f)(t) := \int_t^\infty k(s-t)f(s)ds, \qquad t \geq 0$$

$$(k * f)(t) := \int_0^t k(t-s)f(s)ds, \qquad t \geq 0$$

$$\int_0^\infty f(t)(g \circ h)(t)dt = \int_0^\infty h(t)(g * f)(t)dt$$

1. Introducción

[KLM] $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $0 \in \mathrm{sop}(k)$

$$\begin{array}{rccc} T^k : & \mathcal{D}_+ & \rightarrow & \mathcal{D}_+ \\ & f & \mapsto & T^k(f) := k \circ f \end{array}$$

$$(k \circ f)(t) := \int_t^\infty k(s-t) f(s)\,ds, \qquad t \geq 0$$

$$(k * f)(t) := \int_0^t k(t-s) f(s)\,ds, \qquad t \geq 0$$

Si $k(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $\quad (k \circ f)(t) = \displaystyle\int_t^\infty \frac{(s-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\,ds = W^{-\alpha} f(t)$

1. Introducción

[KLM] $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $0 \in \operatorname{sop}(k)$

$$\begin{array}{rccc} T^k : & \mathcal{D}_+ & \longrightarrow & \mathcal{D}_+ \\ & f & \longmapsto & T^k(f) := k \circ f \end{array}$$

$$\mathcal{D}_k := T^k(\mathcal{D}_+)$$

1. Introducción

[KLM] $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $0 \in \mathrm{sop}(k)$

$$\begin{array}{rccc} T^k : & \mathcal{D}_+ & \rightarrow & \mathcal{D}_+ \\ & f & \mapsto & T^k(f) := k \circ f \end{array}$$

$$\mathcal{D}_k := T^k(\mathcal{D}_+)$$

$$T^k : \mathcal{D}_+ \rightarrow \mathcal{D}_k$$

1. Introducción

[KLM] $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $0 \in \operatorname{sop}(k)$

$$\begin{array}{rccc} T^k : & \mathcal{D}_+ & \rightarrow & \mathcal{D}_+ \\ & f & \mapsto & T^k(f) := k \circ f \end{array}$$

$$\mathcal{D}_k := T^k(\mathcal{D}_+)$$

$$W^k : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{D}_+$$

1. Introducción

1. Introducción

[KLM]

1. Introducción

[KLM] $k \geq 0$

1. Introducción

[KLM] $k \geq 0$

- $$\int_{I(s,r)} \tau(u)k(r+s-u)du \leq C\tau(s)\tau(r), \quad 0 \leq s \leq r$$

1. Introducción

[KLM] $k \geq 0$

- $$\int_{I(s,r)} \tau(u)k(r+s-u)du \leq C\tau(s)\tau(r), \quad 0 \leq s \leq r$$
- $$\int_0^t k(s)ds \leq C\tau(t), \qquad t \geq 0$$

1. Introducción

[KLM] $\quad k \geq 0$

- $$\int_{I(s,r)} \tau(u)k(r+s-u)du \leq C\tau(s)\tau(r), \quad 0 \leq s \leq r$$
- $$\int_0^t k(s)ds \leq C\tau(t), \qquad t \geq 0$$

$$\mathcal{T}^k(\tau) := \overline{\mathcal{D}_k}^{\|\cdot\|_{k,\tau}} \qquad \|f\|_{k,\tau} := \int_0^\infty |W^k f(t)|\tau(t)dt$$

2. UNA DESIGUALDAD DE TIPO HARDY

2. Una desigualdad de tipo Hardy

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$$\phi(t) = t^\alpha \omega(t), \qquad \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha \omega),$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$$\phi(t) = t^\alpha \omega(t), \qquad \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha \omega), \qquad p \geq 1.$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$$\phi(t) = t^\alpha \omega(t), \qquad \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha \omega), \qquad p \geq 1.$$

$$\mathcal{T}_p^{(\alpha)}(t^\alpha \omega) := W^{-\alpha}(L^p(t^\alpha \omega))$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$$\phi(t) = t^\alpha \omega(t), \qquad \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha \omega), \qquad p \geq 1.$$

$$\mathcal{T}_p^{(\alpha)}(t^\alpha \omega) := W^{-\alpha}(L^p(t^\alpha \omega))$$

$$W^{-\alpha} : \mathcal{D}_+ \to \mathcal{D}_+$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$$\phi(t) = t^\alpha \omega(t), \qquad \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha \omega), \qquad p \geq 1.$$

$$\mathcal{T}_p^{(\alpha)}(t^\alpha \omega) := W^{-\alpha}(L^p(t^\alpha \omega))$$

$$W^{-\alpha} : L^p(t^\alpha \omega) \to L^p(\omega)$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$$\phi(t) = t^\alpha \omega(t), \qquad \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha \omega), \qquad p \geq 1.$$

$$\mathcal{T}_p^{(\alpha)}(t^\alpha \omega) := W^{-\alpha}(L^p(t^\alpha \omega))$$

$$W^{-\alpha} : L^p(t^\alpha \omega) \to \mathcal{T}_p^{(\alpha)}(t^\alpha \omega)$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$$\phi(t) = t^\alpha \omega(t), \qquad \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha \omega), \qquad p \geq 1.$$

$$\mathcal{T}_p^{(\alpha)}(t^\alpha \omega) := W^{-\alpha}(L^p(t^\alpha \omega))$$

$$W^\alpha : \mathcal{T}_p^{(\alpha)}(t^\alpha \omega) \to L^p(t^\alpha \omega)$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$$\phi(t) = t^\alpha \omega(t), \qquad \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha \omega), \qquad p \geq 1.$$

$$\mathcal{T}_p^{(\alpha)}(t^\alpha \omega) := W^{-\alpha}(L^p(t^\alpha \omega))$$

$$W^\alpha : \mathcal{T}_p^{(\alpha)}(t^\alpha \omega) \to L^p(t^\alpha \omega)$$

$$\|f\|_{(\alpha),p} := \left(\int_0^\infty |W^\alpha f(t)|^p t^{\alpha p} \omega^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$$\phi(t) = t^\alpha \omega(t), \qquad \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha\omega), \qquad p \geq 1.$$

$$\mathcal{T}_p^{(\alpha)}(t^\alpha\omega) := W^{-\alpha}(L^p(t^\alpha\omega))$$

$$W^\alpha : \mathcal{T}_p^{(\alpha)}(t^\alpha\omega) \to L^p(t^\alpha\omega)$$

$$\|f\|_{(\alpha),p} := \left(\int_0^\infty |W^\alpha f(t)|^p t^{\alpha p}\omega^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Teorema

$$\mathcal{T}^\alpha(t^\alpha\omega) * \mathcal{T}_p^\alpha(t^\alpha\omega) \hookrightarrow \mathcal{T}_p^\alpha(t^\alpha\omega)$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

2. Una desigualdad de tipo Hardy

Sean $f \geq 0$, $p > 1$.

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

Sean $f \geq 0$, $p > 1$.

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx$$

Sean $f \geq 0$, $p \geq 1$, $\alpha < p - 1$.

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p x^\alpha dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\alpha dx$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

2. Una desigualdad de tipo Hardy

[HLP]

Sea $\alpha > 0$ *y* $F : (0, \infty) \to [0, \infty)$ *una función medible Lebesgue. Entonces, para todo* $p > 1$*,*

$$\int_0^\infty \left(\int_x^\infty (t - x)^{\alpha - 1} f(t) dt \right)^p dx \leq C_{\alpha,p} \int_0^\infty x^{\alpha p} f^p(x) dx.$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

[HLP]

Sea $\alpha > 0$ *y* $F : (0, \infty) \to [0, \infty)$ *una función medible Lebesgue. Entonces, para todo* $p > 1$*,*

$$\int_0^\infty \left(\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \right)^p dx \leq C_{\alpha,p} \int_0^\infty x^{\alpha p} f^p(x)dx.$$

$$\int_0^\infty \left(\int_x^\infty k(t-x) f(t)dt \right)^p dx \leq C \int_0^\infty \left(\int_0^x k(t)dt \right)^p f^p(x)dx$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$q > 1$.

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$q > 1$. k satisface *(C1)*$_q$ si existe $F \in L^1([0,1])$ tal que

$$(C1)_q \qquad \frac{s k\left(\frac{s}{t}(1-t)\right)}{t^{1+\frac{1}{q}} \int_0^{\frac{s}{t}} k(\tau) d\tau} \leq F(t), \qquad s \in (0,\infty),\ t \in (0,1).$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$q > 1$. k satisface *(C1)*$_q$ si existe $F \in L^1([0,1])$ tal que

$$\text{(C1)}_q \qquad \frac{sk\left(\frac{s}{t}(1-t)\right)}{t^{1+\frac{1}{q}}\int_0^{\frac{s}{t}} k(\tau)d\tau} \leq F(t), \qquad s \in (0,\infty),\ t \in (0,1).$$

$$Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy, \qquad x > 0$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

$q > 1$. k satisface *(C1)*$_q$ si existe $F \in L^1([0,1])$ tal que

$$(C1)_q \qquad \frac{sk\left(\frac{s}{t}(1-t)\right)}{t^{1+\frac{1}{q}} \int_0^{\frac{s}{t}} k(\tau)d\tau} \leq F(t), \qquad s \in (0,\infty), \; t \in (0,1).$$

$$t^{-\frac{1}{q}} k\left(\frac{s}{t}(1-t)\right) \leq Hk\left(\frac{s}{t}\right) F(t)$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

2. Una desigualdad de tipo Hardy

Desigualdad 1

Sean $q > 1$, k verificando *(C1)*$_q$, $g \in L^q(\mathbb{R}^+)$. Entonces

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(\int_0^x k(\tau)d\tau\right)^q} \left(\int_0^x k(x-s)|g(s)|ds\right)^q dx \leq C \int_0^\infty |g(t)|^q dt$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

Desigualdad 1

Sean $q > 1$, k verificando *(C1)*$_q$, $g \in L^q(\mathbb{R}^+)$. Entonces

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(\int_0^x k(\tau)d\tau\right)^q} \left(\int_0^x k(x-s)|g(s)|ds\right)^q dx \leq C \int_0^\infty |g(t)|^q dt$$

$$\|k * g\|_{L^q\left(\frac{1}{\int_0^x k}\right)} \leq C\|g\|_q.$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

2. Una desigualdad de tipo Hardy

Desigualdad 2

Sean $p > 1$, k verificando *(C1)*$_q$, $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$. Entonces

$$\int_0^\infty \left| \int_x^\infty k(y-x) f(y)\, dy \right|^p dx \leq C \int_0^\infty \left(\int_0^x k(t)\, dt \right)^p |f(x)|^p dx$$

2. Una desigualdad de tipo Hardy

Desigualdad 2

Sean $p > 1$, k verificando $(C1)_q$, $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$. Entonces

$$\int_0^\infty \left| \int_x^\infty k(y-x) f(y) dy \right|^p dx \leq C \int_0^\infty \left(\int_0^x k(t) dt \right)^p |f(x)|^p dx$$

$$\|k \circ f\|_p \leq C \|f\|_{L^p\left(\int_0^x k\right)}.$$

3. LOS ESPACIOS $\mathcal{T}_p^k(\tau)$ COMO $\mathcal{T}^k(\tau)$-MÓDULOS DE BANACH

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

$$\tau(t) := \omega(t)\int_0^t k(s)ds, \qquad t \geq 0.$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Lema 0

Lema 0

Sean $p \geq 1, F \in L^p(\tau)$, k verificando *(C1)*$_q$.

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Lema 0

Sean $p \geq 1, F \in L^p(\tau)$, k verificando *(C1)$_q$*. Entonces existe

$$T^k F(t) := (k \circ F)(t) = \int_t^\infty k(s-t)F(s)ds, \qquad \text{c.t.p.} \quad t \geq 0.$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Lema 0

Sean $p \geq 1, F \in L^p(\tau)$, k verificando *(C1)*$_q$. Entonces existe

$$T^k F(t) := (k \circ F)(t) = \int_t^\infty k(s-t)F(s)ds, \qquad \text{c.t.p.} \quad t \geq 0.$$

De hecho T^k define un elemento de $L^p(\mathbb{R}^+)$ y un operador acotado

$$T^k : L^p(\tau) \to L^p(\mathbb{R}^+)$$

que extiende al inicial $T^k : \mathcal{D}_+ \to \mathcal{D}_+$.

Lema 0

Sean $p \geq 1, F \in L^p(\tau)$, k verificando *(C1)*$_q$. Entonces existe

$$T^k F(t) := (k \circ F)(t) = \int_t^\infty k(s-t)F(s)ds, \qquad \text{c.t.p.} \quad t \geq 0.$$

De hecho T^k define un elemento de $L^p(\mathbb{R}^+)$ y un operador acotado

$$T^k : L^p(\tau) \to L^p(\mathbb{R}^+)$$

que extiende al inicial $T^k : \mathcal{D}_+ \to \mathcal{D}_+$.

En la demostración se emplea la desigualdad de tipo Hardy anterior.

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Definimos el espacio de Banach $\mathcal{T}_p^k(\tau)$ como el rango $T^k(L^p(\tau))$ dotado con la norma $\|\cdot\|_{k,\tau,p}$ obtenida como la imagen de la norma de $L^p(\tau)$ vía el operador $T^k : L^p(\tau) \to L^p(\mathbb{R}^+)$.

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Definimos el espacio de Banach $\mathcal{T}_p^k(\tau)$ como el rango $T^k(L^p(\tau))$ dotado con la norma $\|\cdot\|_{k,\tau,p}$ obtenida como la imagen de la norma de $L^p(\tau)$ vía el operador $T^k : L^p(\tau) \to L^p(\mathbb{R}^+)$.

$$T^k : L^p(\tau) \to \mathcal{T}_p^k(\tau)$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Definimos el espacio de Banach $\mathcal{T}_p^k(\tau)$ como el rango $T^k(L^p(\tau))$ dotado con la norma $\|\cdot\|_{k,\tau,p}$ obtenida como la imagen de la norma de $L^p(\tau)$ vía el operador $T^k : L^p(\tau) \to L^p(\mathbb{R}^+)$.

$$T^k : L^p(\tau) \to \mathcal{T}_p^k(\tau)$$

$$W^k : \mathcal{T}_p^k(\tau) \to L^p(\tau)$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Definimos el espacio de Banach $\mathcal{T}_p^k(\tau)$ como el rango $T^k(L^p(\tau))$ dotado con la norma $\|\cdot\|_{k,\tau,p}$ obtenida como la imagen de la norma de $L^p(\tau)$ vía el operador $T^k : L^p(\tau) \to L^p(\mathbb{R}^+)$.

$$T^k : L^p(\tau) \to \mathcal{T}_p^k(\tau)$$

$$W^k : \mathcal{T}_p^k(\tau) \to L^p(\tau)$$

$$\|f\|_{k,\tau,p} := \left(\int_0^\infty |W^k f(t)|^p \tau^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Teorema

$$\mathcal{T}^k(\tau) * \mathcal{T}_p^k(\tau) \hookrightarrow \mathcal{T}_p^k(\tau)$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Teorema

$$\mathcal{T}^k(\tau) * \mathcal{T}_p^k(\tau) \hookrightarrow \mathcal{T}_p^k(\tau)$$

$$\|f * g\|_{\mathcal{T}_p^k(\tau)} \leq C \|f\|_{\mathcal{T}^k(\tau)} \|g\|_{\mathcal{T}_p^k(\tau)}$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Teorema [KLM]

Sean $f, g \in \mathcal{D}_k$. Entonces $f * g \in \mathcal{D}_k$ y

$$
\begin{aligned}
W^k(f*g)(s) = & \int_0^s W^k g(r) \int_{s-r}^s k(t+r-s) W^k f(t) dt dr \\
& - \quad \int_s^\infty W^k g(r) \int_s^\infty k(t+r-s) W^k f(t) dt dr
\end{aligned}
$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

(C2) $$\int_0^{2t} k(s)ds \le C \int_0^t k(s)ds, \qquad t \ge 0.$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

(C2) $$\int_0^{2t} k(s)ds \leq C \int_0^t k(s)ds, \qquad t \geq 0.$$

$$Hk(2t) \leq CHk(t)$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Lema 1

Sean $r \geq 0$, $p \geq 1$, k verificando *(C1)*$_q$ y *(C2)*. Entonces

$$\text{(1)} \qquad \left(\int_r^{2r} \tau^p(s) \left(\int_{s-r}^{s} k(t+r-s)|W^k f(t)|dt \right)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C\tau(r)\|f\|_{k,\tau,p}$$

$$\text{(2)} \qquad \left(\int_{2r}^{\infty} \tau^p(s) \left(\int_{s-r}^{s} k(t+r-s)|W^k f(t)|dt \right)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C\tau(r)\|f\|_{k,\tau,p}$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

$$(C3)\qquad \frac{\int_0^{u+r} k(y)dy}{\int_0^{u+s} k(y)dy} \leq C\frac{\int_0^{r} k(y)dy}{\int_0^{s} k(y)dy}, \qquad 0 \leq s \leq r, \quad u \geq 0.$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

$$(C3) \qquad \frac{\int_0^{u+r} k(y)dy}{\int_0^{u+s} k(y)dy} \leq C \frac{\int_0^{r} k(y)dy}{\int_0^{s} k(y)dy}, \qquad 0 \leq s \leq r, \quad u \geq 0.$$

$$(C4)_q \qquad r^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \frac{k^q(u+r)}{\left(\int_0^{u+r} k(y)dy\right)^q} du \right)^{\frac{1}{q}} \leq C, \qquad r \geq 0.$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Lema 2

Sean $p \geq 1$, k verificando *(C3)* y *(C4)*$_q$. Entonces

$$\left(\int_0^\infty \tau^p(s)\left(\int_0^s |W^k g(r)| \int_s^\infty k(t+r-s)|W^k f(t)|dtdr\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C\|f\|_{k,\tau,p}\|g\|_{k,\tau}$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Teorema

Sean $p > 1$, k verificando *(C1)*$_q$, *(C2)*, *(C3)* y *(C4)*$_q$. Entonces

$$\mathcal{T}^k(\tau) * \mathcal{T}_p^k(\tau) \hookrightarrow \mathcal{T}_p^k(\tau)$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Idea de la demostración.

Idea de la demostración. Sean $f, g \in \mathcal{D}_k$.

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Idea de la demostración. Sean $f, g \in \mathcal{D}_k$.

$$
\begin{aligned}
|W_k(f*g)(s)|^p \;\le\; & C_{k,p}\left(\int_0^s |W_k g(r)| \int_{s-r}^s k(t+r-s)|W_k f(t)|dtdr\right)^p \\
& + C_{k,p}\left(\int_s^\infty |W_k g(r)| \int_s^\infty k(t+r-s)|W_k f(t)|dtdr\right)^p .
\end{aligned}
$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Idea de la demostración. Sean $f, g \in \mathcal{D}_k$.

$$\|f * g\|_{k,\tau,p} := \left(\int_0^\infty |W_k(f*g)(s)|^p \tau^p(s) ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{k,p}(I_1 + I_2),$$

Idea de la demostración. Sean $f, g \in \mathcal{D}_k$.

$$\|f * g\|_{k,\tau,p} := \left(\int_0^\infty |W_k(f*g)(s)|^p \tau^p(s) ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{k,p}(I_1 + I_2),$$

donde

$$I_1 := \left(\int_0^\infty \tau^p(s) \left(\int_0^s |W_k g(r)| \int_{s-r}^s k(t+r-s)|W_k f(t)| dtdr\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$I_2 := \left(\int_0^\infty \tau^p(s) \left(\int_0^s |W_k g(r)| \int_s^\infty k(t+r-s)|W_k f(t)| dtdr\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

Idea de la demostración. Sean $f, g \in \mathcal{D}_k$.

$$I_1 \leq \int_0^\infty |W_k g(r)|(I_{11}(r) + I_{12}(r))dr,$$

Idea de la demostración. Sean $f, g \in \mathcal{D}_k$.

$$I_1 \leq \int_0^\infty |W_k g(r)|(I_{11}(r) + I_{12}(r))dr,$$

donde

$$I_{11}(r) := \left(\int_r^{2r} \tau^p(s) \left(\int_{s-r}^{s} k(t+r-s)|W_k f(t)|dt\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$I_{12}(r) := \left(\int_{2r}^{\infty} \tau^p(s) \left(\int_{s-r}^{s} k(t+r-s)|W_k f(t)|dt\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

$(C1)_q$ $\quad \dfrac{sk\left(\frac{s}{t}(1-t)\right)}{t^{1+\frac{1}{q}}\int_0^{\frac{s}{t}} k(\tau)d\tau} \leq F(t), \qquad s \in (0,\infty),\ t \in (0,1).$

$(C2)$ $\quad \int_0^{2t} k(s)ds \leq C\int_0^t k(s)ds, \qquad t \geq 0.$

$(C3)$ $\quad \dfrac{\int_0^{u+r} k(y)dy}{\int_0^{u+s} k(y)dy} \leq C\dfrac{\int_0^r k(y)dy}{\int_0^s k(y)dy}, \qquad 0 \leq s \leq r, \quad u \geq 0.$

$(C4)_q$ $\quad r^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty \dfrac{k^q(u+r)}{\left(\int_0^{u+r} k(y)dy\right)^q}du\right)^{\frac{1}{q}} \leq C, \qquad r \geq 0.$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

$(C1)_q$ $\quad \dfrac{sk\left(\frac{s}{t}(1-t)\right)}{t^{1+\frac{1}{q}}\int_0^{\frac{s}{t}} k(\tau)d\tau} \le F(t), \qquad s \in (0,\infty),\ t \in (0,1).$

$(C2)$ $\quad \int_0^{2t} k(s)ds \le C \int_0^t k(s)ds, \qquad t \ge 0.$

$(C3)$ $\quad \dfrac{\int_0^{u+r} k(y)dy}{\int_0^{u+s} k(y)dy} \le C \dfrac{\int_0^r k(y)dy}{\int_0^s k(y)dy}, \qquad 0 \le s \le r, \quad u \ge 0.$

$(C4)_q$ $\quad r^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \dfrac{k^q(u+r)}{\left(\int_0^{u+r} k(y)dy\right)^q} du \right)^{\frac{1}{q}} \le C, \qquad r \ge 0.$

$$k(t) = h(t)t^{\alpha-1}, \qquad \begin{array}{c} 0 < m \le M \\ m \le h \le M \text{ c.t.p.} \end{array}$$

3. Los espacios $\mathcal{T}_p^k$ como $\mathcal{T}^k$-módulos de Banach

$(C1)_q$ $\quad \dfrac{sk\left(\frac{s}{t}(1-t)\right)}{t^{1+\frac{1}{q}} \int_0^{\frac{s}{t}} k(\tau)d\tau} \le F(t), \qquad s \in (0,\infty),\ t \in (0,1).$

$(C2)$ $\quad \int_0^{2t} k(s)ds \le C \int_0^t k(s)ds, \qquad t \ge 0.$

$(C3)$ $\quad \dfrac{\int_0^{u+r} k(y)dy}{\int_0^{u+s} k(y)dy} \le C \dfrac{\int_0^r k(y)dy}{\int_0^s k(y)dy}, \qquad 0 \le s \le r, \quad u \ge 0.$

$(C4)_q$ $\quad r^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \dfrac{k^q(u+r)}{\left(\int_0^{u+r} k(y)dy\right)^q} du \right)^{\frac{1}{q}} \le C, \qquad r \ge 0.$

$$k(t) = h(t)t^{\alpha-1}, \qquad \begin{array}{c} 0 < m \le M \\ m \le h \le M \text{ c.t.p.} \end{array}$$

$\left(\frac{At+B}{Ct+D}\right)^\gamma t^{\alpha-1}$	$(E+\cos(t))t^{\alpha-1}$	$(R+e^{-\lambda t})t^{\alpha-1}$
$A,B,C,D>0, \gamma \in \mathbb{R}$	$E>1$	$R>0, \lambda \ge 0$

4. OTROS RESULTADOS RELACIONADOS

4. Otros resultados relacionados

4. Otros resultados relacionados

$$f *_c g := \frac{1}{2}\left(f * g + f \circ g + g \circ f\right),$$

4. Otros resultados relacionados

$$f *_c g := \frac{1}{2}\left(f * g + f \circ g + g \circ f\right),$$

Lema

Sea $p \geq 1$. Entonces

$$L^p(\mathbb{R}^+) \circ \mathcal{T}^k(\tau) \hookrightarrow \mathcal{T}_p^k(\tau) \qquad \text{y} \qquad L^1(\mathbb{R}^+) \circ \mathcal{T}_p^k(\tau) \hookrightarrow \mathcal{T}_p^k(\tau)$$

4. Otros resultados relacionados

$$f *_c g := \frac{1}{2}\left(f * g + f \circ g + g \circ f\right),$$

Lema

Sea $p \geq 1$. Entonces

$$L^p(\mathbb{R}^+) \circ \mathcal{T}^k(\tau) \hookrightarrow \mathcal{T}^k_p(\tau) \qquad \text{y} \qquad L^1(\mathbb{R}^+) \circ \mathcal{T}^k_p(\tau) \hookrightarrow \mathcal{T}^k_p(\tau)$$

Corolario

Sea $p \geq 1$. Entonces

$$\mathcal{T}^k_p(\tau) \circ \mathcal{T}^k(\tau) \hookrightarrow \mathcal{T}^k_p(\tau) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{T}^k(\tau) \circ \mathcal{T}^k_p(\tau) \hookrightarrow \mathcal{T}^k_p(\tau)$$

4. Otros resultados relacionados

4. Otros resultados relacionados

Teorema

Sean $p > 1$, k verificando *(C1)*$_q$, *(C2)*, *(C3)* y *(C4)*$_q$. Entonces

$$\mathcal{T}^k(\tau) *_c \mathcal{T}_p^k(\tau) \hookrightarrow \mathcal{T}_p^k(\tau)$$

4. Otros resultados relacionados

4. Otros resultados relacionados

Teorema

El conjunto de caracteres del álgebra de Banach $\mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha \omega)$ tiene la forma

$$\{\varphi_z \ : \ z \in \overline{\Pi}_{\sigma_\omega}\}$$

de modo que la transformada de Gelfand en $\mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha \omega)$ viene dada por la transformada de Laplace

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}: & \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha \omega) & \longrightarrow & \mathcal{A}_0(\Pi_{\sigma_\omega}) \\ & f & \longmapsto & \mathcal{L}(f) \end{array}$$

4. Otros resultados relacionados

Teorema

El conjunto de caracteres del álgebra de Banach $\mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha\omega)$ tiene la forma

$$\{\varphi_z \ : \ z \in \overline{\Pi}_{\sigma_\omega}\}$$

de modo que la transformada de Gelfand en $\mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha\omega)$ viene dada por la transformada de Laplace

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}: & \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha\omega) & \longrightarrow & \mathcal{A}_0(\Pi_{\sigma_\omega}) \\ & f & \longmapsto & \mathcal{L}(f) \end{array}$$

donde

$$\mathcal{L}(f)(z) := \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}^+)$$

4. Otros resultados relacionados

Teorema

El conjunto de caracteres del álgebra de Banach $\mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha\omega)$ tiene la forma

$$\{\varphi_z \ : \ z \in \overline{\Pi}_{\sigma_\omega}\}$$

de modo que la transformada de Gelfand en $\mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha\omega)$ viene dada por la transformada de Laplace

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{L}: & \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha\omega) & \longrightarrow & \mathcal{A}_0(\Pi_{\sigma_\omega}) \\ & f & \longmapsto & \mathcal{L}(f) \end{array}$$

donde

$$\overline{\Pi}_{\sigma_\omega} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re z \geq \sigma_\omega\}$$

$$\sigma_\omega = -\log \lim_{t\to\infty} \omega(t)^{\frac{1}{t}}$$

4. Otros resultados relacionados

Teorema

El conjunto de caracteres del álgebra de Banach $\mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha\omega)$ tiene la forma

$$\{\varphi_z \ : \ z \in \overline{\Pi}_{\sigma_\omega}\}$$

de modo que la transformada de Gelfand en $\mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha\omega)$ viene dada por la transformada de Laplace

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}: & \mathcal{T}^{(\alpha)}(t^\alpha\omega) & \longrightarrow & \mathcal{A}_0(\Pi_{\sigma_\omega}) \\ & f & \longmapsto & \mathcal{L}(f) \end{array}$$

donde

$$\mathcal{A}_0(\Pi_{\sigma_\omega}) := \left\{ F \in \mathcal{C}(\overline{\Pi}_{\sigma_\omega}) \cap \mathcal{H}ol(\Pi_{\sigma_\omega}) \ : \ \lim_{\substack{\Re z \geq \sigma_\omega \\ z \to \infty}} F(z) = 0 \right\}.$$

Bibliografía

Bibliografía

[AK] W. Arendt, H. Kellerman: *Integration solutions of Volterra integro-differential equations and applications*, G. Da Prato, M. Iannelli (Eds), Proc. Conf. Integrodiff. Eq., Trento, 1987, in: Pitman Res. Notes Math., **190**, Longman, Harlow (1987), 21-51.

[GM] J. E. Galé, P. J. Miana: *One-parameter groups of regular quasimultipliers*, J. Funct. Anal. **237** (2006), no. 1, 1-53.

[HLP] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya: *Inequelities*, Cambridge University Press (1934)

Bibliografía

[KLM] V. Keyantuo, C. Lizama, P. J. Miana: *Algebra homomorphisms defined via convoluted semigroups and cosine functions*, J. Funct. Anal. **257** (2009), no. 11, 3454-3487.

[M] P. J. Miana: α*-times integrated semigroups and fractional derivation*, Forum Math. **14** (2002), no. 1, 23-46.

[W] S. W. Wang: *Quasi-distribution semigroups and integrated semigroups*, J. Funct. Anal. **146** (1997), 352-381.

Bibliografía

[KLM] V. Keyantuo, C. Lizama, P. J. Miana: *Algebra homomorphisms defined via convoluted semigroups and cosine functions*, J. Funct. Anal. **257** (2009), no. 11, 3454-3487.

[M] P. J. Miana: *α-times integrated semigroups and fractional derivation*, Forum Math. **14** (2002), no. 1, 23-46.

[W] S. W. Wang: *Quasi-distribution semigroups and integrated semigroups*, J. Funct. Anal. **146** (1997), 352-381.

MUCHAS GRACIAS.