Nuevos resultados sobre métodos de interpolación asociados a polígonos en el caso cuasi-Banach

Rubén Rodríguez

VI Encuentro de Análisis Funcional y Aplicaciones

Introducción

Acotación de un operador entre espacios L_p

Riesz-Thorin

Marcinkiewicz

Introducción

Acotación de un operador entre espacios L_p

Riesz-Thorin

Marcinkiewicz

Principios años 60

- Lions
- Peetre
- Calderón
- Gagliardo
- Krein

Método real y método complejo

Orígenes

Riesz-Thorin

$\downarrow$

Método complejo $(\cdot,\cdot)_{[\theta]}$

Método real y método complejo

Orígenes

$$\begin{array}{ccc} \text{Riesz-Thorin} & \qquad & \text{Marcinkiewicz} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Método complejo } (\cdot,\cdot)_{[\theta]} & & \text{Método real } (\cdot,\cdot)_{\theta,q} \end{array}$$

Método real y método complejo

Orígenes

$$\begin{array}{ccc} \text{Riesz-Thorin} & \qquad & \text{Marcinkiewicz} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Método complejo } (\cdot,\cdot)_{[\theta]} & & \text{Método real } (\cdot,\cdot)_{\theta,q} \end{array}$$

Método real y complejo

Método real y método complejo

Orígenes

$$\text{Riesz-Thorin} \longrightarrow \text{Método complejo } (\cdot,\cdot)_{[\theta]}$$

$$\text{Marcinkiewicz} \longrightarrow \text{Método real } (\cdot,\cdot)_{\theta,q}$$

Método real y complejo

A_0 ——— A_1

$$0 < \theta < 1$$

Método real y método complejo

Orígenes

Riesz-Thorin $\downarrow$ Método complejo $(\cdot,\cdot)_{[\theta]}$

Marcinkiewicz $\downarrow$ Método real $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$

Método real y complejo

A_0 $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ A_1

$$0 < \theta < 1$$

Interpolación real clásica

Sea $\bar{A} = (A_0, A_1)$ un par compatible de espacios cuasi-Banach, es decir, dos espacios cuasi-Banach continuamente inyectados en un espacio vectorial topológico Hausdorff $\mathcal{A}$

Interpolación real clásica

Sea $\bar{A} = (A_0, A_1)$ un par compatible de espacios cuasi-Banach, es decir, dos espacios cuasi-Banach continuamente inyectados en un espacio vectorial topológico Hausdorff $\mathcal{A}$

- $A_0 + A_1 = \{a \in \mathcal{A} \ : \ a = a_0 + a_1 \ , \ a_i \in A_i\}$
- $\|a\|_{A_0+A_1} = \text{ínf}\,\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1 \ , \ a_i \in A_i\}$.

Interpolación real clásica

Sea $\bar{A} = (A_0, A_1)$ un par compatible de espacios cuasi-Banach, es decir, dos espacios cuasi-Banach continuamente inyectados en un espacio vectorial topológico Hausdorff $\mathcal{A}$

- $A_0 + A_1 = \{a \in \mathcal{A} \ : \ a = a_0 + a_1 \ , \ a_i \in A_i\}$
  - $\|a\|_{A_0+A_1} = \text{ínf}\,\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1 \ , \ a_i \in A_i\}\,.$
- $A_0 \cap A_1 = \{a \in \mathcal{A} \ : \ a \in A_0 \text{ y } a \in A_1\}$
  - $\|a\|_{A_0 \cap A_1} = \text{máx}\,\{\|a\|_{A_0} \ , \ \|a\|_{A_1}\}\,.$

Interpolación real clásica

Sea $\bar{A} = (A_0, A_1)$ un par compatible de espacios cuasi-Banach, es decir, dos espacios cuasi-Banach continuamente inyectados en un espacio vectorial topológico Hausdorff $\mathcal{A}$

- $A_0 + A_1 = \{a \in \mathcal{A} \ : \ a = a_0 + a_1 \ , \ a_i \in A_i\}$
  - $\|a\|_{A_0+A_1} = \inf \{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1 \ , \ a_i \in A_i\} \, .$

- $A_0 \cap A_1 = \{a \in \mathcal{A} \ : \ a \in A_0 \text{ y } a \in A_1\}$
  - $\|a\|_{A_0 \cap A_1} = \max \{\|a\|_{A_0} \ , \ \|a\|_{A_1}\} \, .$

$(A_0 + A_1, \|\cdot\|_{A_0+A_1})$ y $(A_0 \cap A_1, \|\cdot\|_{A_0 \cap A_1})$ son espacios c cuasi-Banach con $c = \max\{c_0, c_1\}$.

K- y J-funcionales

- J. L. Lions and J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Inst. Hautes Études Sci. Publ.Math.* **19**(1964), 5-68.

K- y J-funcionales

- J. L. Lions and J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Inst. Hautes Études Sci. Publ.Math.* **19**(1964), 5-68.

K-funcional

Dado $t > 0$ y $a \in \sum(\bar{A})$ se define el K-funcional como

$$K(t,a) = \text{ínf}\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} \;:\; a = a_0 + a_1, a_i \in A_i\}$$

K- y J-funcionales

- J. L. Lions and J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Inst. Hautes Études Sci. Publ.Math.* **19**(1964), 5-68.

K-funcional

Dado $t > 0$ y $a \in \sum(\bar{A})$ se define el K-funcional como

$$K(t,a) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} \ : \ a = a_0 + a_1, a_i \in A_i\}$$

J-funcional

Dado $t > 0$ y $a \in \triangle(\bar{A})$ se define el J-funcional como

$$J(t,a) = \max\{\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}\}$$

$(A_0, A_1)_{\theta,q}$. $K-$funcional.

El espacio $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ puede ser descrito usando el K-funcional.
Sea $0 < q \leq \infty$ y sea $0 < \theta < 1$

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \left\{ a \in A_0 + A_1 \ : \ \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(2^{-m\theta} K(2^m, a) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

si $q < \infty$ o

$$(A_0, A_1)_{\theta,\infty} = \left\{ a \in A_0 + A_1 \ : \ \sup_{m \in \mathbb{Z}} 2^{-m\theta} K(2^m, a) < \infty \right\}$$

$(A_0, A_1)_{\theta,q}$. $J-$funcional.

Usando el J-funcional el espacio $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ se puede describir como todos los elementos $a \in A_0 + A_1$ que pueden ser representados por

$$a = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m \quad \text{convergente en } \sum(\bar{A}) \text{ y con } u_m \in \triangle(\bar{A})$$

verificando

$$\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(2^{-m\theta} J(2^m, u_m)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

si $q = \infty$

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \left\{2^{-m\theta} J(2^m, u_m)\right\} < \infty.$$

La norma en este espacio se define por

$$\|a\|_{\bar{A}_{\theta,q;J}} = \text{ínf}\left\{\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(2^{-m\theta}J(2^m,u_m)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones que verifican (*) y (**).

La norma en este espacio se define por

$$\|a\|_{\bar{A}_{\theta,q;J}} = \text{ínf}\left\{ \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(2^{-m\theta} J(2^m, u_m) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones que verifican (*) y (**).

- J. Bergh and J. Löfström, "*Interpolation spaces. An introduction*", Springer, Berlin 1976.

$(A_0, A_1)_{\theta,q}$. Propiedades.

$(A_0, A_1)_{\theta,q}$. Propiedades.

- $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ es un espacio c cuasi-Banach donde

$$c = c_0^{1-\theta} c_1^{\theta} \max\{1, 2^{\frac{1-q}{q}}\}.$$

$(A_0, A_1)_{\theta,q}$. Propiedades.

- $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ es un espacio c cuasi-Banach donde

$$c = c_0^{1-\theta} c_1^{\theta} \max\{1, 2^{\frac{1-q}{q}}\}.$$

- $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ es un espacio intermediario respecto del par $\bar{A}$

$$A_0 \cap A_1 \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow A_0 + A_1.$$

$(A_0, A_1)_{\theta,q}$. Propiedades.

- $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ es un espacio c cuasi-Banach donde
$$c = c_0^{1-\theta} c_1^{\theta} \max\{1, 2^{\frac{1-q}{q}}\}.$$
- $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ es un espacio intermediario respecto del par $\bar{A}$
$$A_0 \cap A_1 \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow A_0 + A_1.$$
- Sea $T \in \mathcal{L}(\bar{A}, \bar{B})$ entonces la restricción de T a $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ da un operador acotado
$$T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow (B_0, B_1)_{\theta,q}$$
con norma
$$\|T\|_{\theta,q} \leq C \|T\|_{A_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1}^{\theta}.$$

$\mathcal{C}(\theta; \bar{A})$

Sea $0 < \theta < 1$ entonces dado un espacio cuasi-Banach X, intermedio respecto del par $\bar{A}$ diremos

$\mathcal{C}(\theta; \bar{A})$

Sea $0 < \theta < 1$ entonces dado un espacio cuasi-Banach X, intermedio respecto del par $\bar{A}$ diremos

- X es de clase $\mathcal{C}_K(\theta; \bar{A})$ si y solo si

$$\triangle(\bar{A}) \hookrightarrow X \hookrightarrow \bar{A}_{\theta,\infty}.$$

$\mathcal{C}(\theta; \bar{A})$

Sea $0 < \theta < 1$ entonces dado un espacio cuasi-Banach X, intermedio respecto del par $\bar{A}$ diremos

- X es de clase $\mathcal{C}_K(\theta; \bar{A})$ si y solo si

$$\triangle(\bar{A}) \hookrightarrow X \hookrightarrow \bar{A}_{\theta,\infty}.$$

- X es de clase $\mathcal{C}_J(\theta; \bar{A})$ si y solo si

$$\bar{A}_{\theta,\rho} \hookrightarrow X \hookrightarrow \sum(\bar{A})$$

siendo X c cuasi-Banach y ρ verificando $(2c)^{\rho} = 2$.

$\mathcal{C}(\theta;\bar{A})$

Sea $0<\theta<1$ entonces dado un espacio cuasi-Banach X, intermedio respecto del par $\bar{A}$ diremos

- X es de clase $\mathcal{C}_K(\theta;\bar{A})$ si y solo si
$$\triangle(\bar{A}) \hookrightarrow X \hookrightarrow \bar{A}_{\theta,\infty}.$$
- X es de clase $\mathcal{C}_J(\theta;\bar{A})$ si y solo si
$$\bar{A}_{\theta,\rho} \hookrightarrow X \hookrightarrow \sum(\bar{A})$$

siendo X c cuasi-Banach y ρ verificando $(2c)^\rho = 2$.

- X es de clase $\mathcal{C}(\theta;\bar{A})$ si
$$\bar{A}_{\theta,\rho} \hookrightarrow X \hookrightarrow \bar{A}_{\theta,\infty}.$$

Espacios de Lorentz. L_{pq}

Sea una espacio de medida $\sigma-$finita (Ω, μ) entonces para $0 < p < \infty$ y para $0 < q \leq \infty$ los espacios de Lorentz de definen como

$$L_{p,q} = \left\{ f : \|f\|_{L_{p,q}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s)ds \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

donde

$$f^*(s) = \inf \left\{ \gamma > 0 : \mu \left\{ x \in \Omega : |f(x)| > \gamma \right\} \leq s \right\}.$$

Ejemplos.

- Sea $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ y $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$

Ejemplos.

- Sea $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ y $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$

$$(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,q} = L_{p,q}$$

Ejemplos.

- Sea $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ y $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$

$$(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,q} = L_{p,q}$$

$$* \, (L_{p_0}, L_\infty)_{\theta,p} = L_p \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}.$$

Ejemplos.

- Sea $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ y $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$

$$(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,q} = L_{p,q}$$

$$* \, (L_{p_0}, L_\infty)_{\theta,p} = L_p \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}.$$

- Si $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ y $0 < \theta < 1$.

$$(B^{s_0}_{pq_0}, B^{s_1}_{pq_1})_{\theta,q} = B^s_{pq}$$

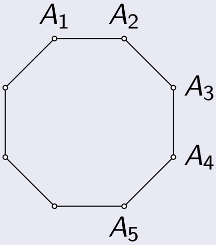
- A. Yoshikawa. *Sur la théorie d´spaces d´interpolation-Les spaces de moyenne de plusiers spaces de Banach*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **16**(1970) 407-468.
- G. Sparr, *Interpolation of several Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl. 99 (1974) 247-316.

- A. Yoshikawa. *Sur la théorie d´spaces d´interpolation-Les spaces de moyenne de plusiers spaces de Banach*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **16**(1970) 407-468.
- G. Sparr, *Interpolation of several Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl. 99 (1974) 247-316.
- D. L. Fernández. *Interpolation of 2^n Banach spaces.* Studia math. 45 (1979), 175-201.

- A. Yoshikawa. *Sur la théorie d´spaces d´interpolation-Les spaces de moyenne de plusiers spaces de Banach*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **16**(1970) 407-468.
- G. Sparr, *Interpolation of several Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl. 99 (1974) 247-316.
- D. L. Fernández. *Interpolation of 2^n Banach spaces.* Studia math. 45 (1979), 175-201.
- F. Cobos, J. Peetre. *Interpolation of compact operators: The multidimensional case*, Proc. London Math. Soc.**63**(1991),371-400.

- A. Yoshikawa. *Sur la théorie d´spaces d´interpolation-Les spaces de moyenne de plusiers spaces de Banach*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **16**(1970) 407-468.
- G. Sparr, *Interpolation of several Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl. 99 (1974) 247-316.
- D. L. Fernández. *Interpolation of 2^n Banach spaces.* Studia math. 45 (1979), 175-201.
- F. Cobos, J. Peetre. *Interpolation of compact operators: The multidimensional case*, Proc. London Math. Soc.**63**(1991),371-400.
- F. Cobos, P. Fernández-Martínez and T. Schonbek, *Norm estimates for interpolation methods defined by means of polygons*, J. Approx. Theory **80** (1995) 321–351.
- F. Cobos, T. Kühn and T. Schonbek, *One-sided compactness results for Aronszajn-Gagliardo functors*, J. Funct. Analysis **106** (1992) 274-313.

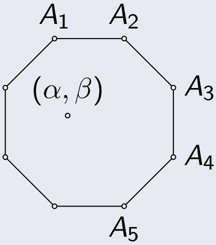
N-upla de espacios cuasi-Banach



A_i situado en P_i

N-upla de espacios cuasi-Banach

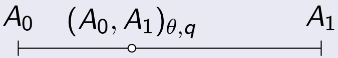
$$0 < \theta < 1$$



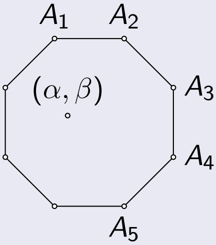
A_i situado en P_i

$(\alpha, \beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$

N-upla de espacios cuasi-Banach



$$0 < \theta < 1$$

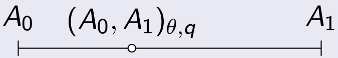


A_i situado en P_i

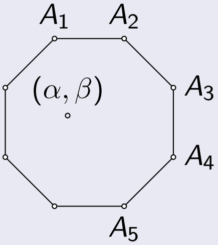
$(\alpha, \beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$

$\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;K}$ y $\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J}$

N-upla de espacios cuasi-Banach



$$0 < \theta < 1$$



A_i situado en P_i

$(\alpha, \beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$

$\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;K}$ y $\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J}$

$$\sum(\bar{A}) = \left\{ a \in \mathcal{A} \quad ; a = \sum_{j=1}^{N} a_j \quad : a_j \in A_j \right\}$$

$$\triangle(\bar{A}) = \{ a \in \mathcal{A} \ ; a \in A_j \ : j = 1, \dots, N \}$$

$K-$ y $J-$funcionales bidimensionales.

Por medio de Π definimos para $t, s > 0$ las siguientes C cuasi-normas en $\sum(\bar{A})$

$$K(t,s;a) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{N} t^{x_j}s^{y_j}\|a_j\|_{A_j} \;:\; a = \sum_{j=1}^{N} a_j, a_j \in A_j\right\}$$

Similarmente definimos en $\triangle(\bar{A})$, para $t, s > 0$, la familia de C cuasi-normas

$$J(t,s;a) = \text{máx}\left\{t^{x_j}s^{y_j}\|a\|_{A_j} \;:\; 1 \leq j \leq N\right\}.$$

$\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;K}$

Dado $(\alpha,\beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$ y $0 < q \leq \infty$ el $K-$espacio $\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;K}$ consiste en todos los elementos $a \in \sum(\bar{A})$ con cuasi-norma

$$\|a\|_{\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;K}} = \left(\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \left(2^{-m\alpha-n\beta} K(2^m, 2^m, a)\right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

finita.

$\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J}$

Dado $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$ y $0 < q \leq \infty$ el $J-$espacio $\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J}$ consiste en todos los elementos $a \in \sum(\bar{A})$ que admiten una representación

$$a = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} u_{m,n} \quad \text{con convergencia en} \quad \sum(\bar{A}) \quad (*)$$

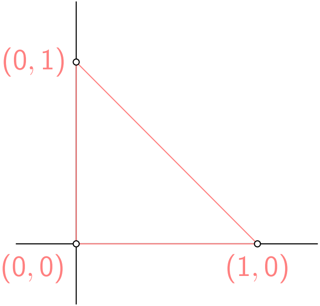
donde $u(m,n) \in \triangle(\bar{A})$ que además verifica que

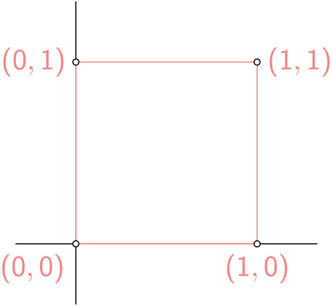
$$\left(\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \left(2^{-m\alpha - n\beta} J(2^m, 2^m, u_{m,n}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \quad (**)$$

La $\tilde{C}$ cuasi-norma en $\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J}$ viene dada por el ínfimo de la anterior suma sobre todas las posibles representaciones de a que verifican $(*)$ y $(**)$.

$\Pi = \{(0,0),(1,0)(0,1)\}$ recuperamos los espacios estudiados por Sparr.

$\Pi = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ recuperamos los espacios estudiados por Fernandez.





$\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;K}$ y $\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J}$. Propiedades

- A diferencia de lo que ocurre para pares sólo podemos assegurar que

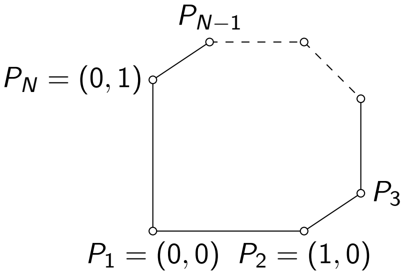
$$\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J} \hookrightarrow \bar{A}_{(\alpha,\beta),q;K}.$$

- $R(\bar{t}) = x_o + S(\bar{t})$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ y S es un isomorfismo de $\mathbb{R}^2$.

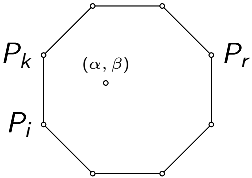
$$\bar{A}_{R(\alpha,\beta),\rho;K} \cong \bar{A}_{(\alpha,\beta),\rho;K}$$

$$\bar{A}_{R(\alpha,\beta),\rho;J} \cong \bar{A}_{(\alpha,\beta),\rho;J}.$$

A partir de ahora podemos pensar en que la situación del polígono será

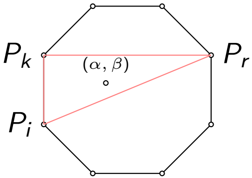


$\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$



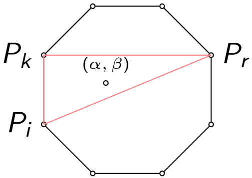
- $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$

$\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$



- $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$
- $\{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$

$\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$



- $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$
- $\{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$
- (c_i, c_k, c_r) coordenadas baricéntricas de (α, β) con respecto a P_i, P_k, P_r

Propiedad de interpolación

Sea $T \in \mathcal{L}(\bar{A}, \bar{B})$ entonces la restricción de T a $\bar{A}_{\theta,q;K}$ y $\bar{A}_{\theta,q;J}$ da un operador que verifica

- $\|T\|_{\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;K},\bar{B}_{(\alpha,\beta),q;K}} \leq C \text{ máx}\left\{M_i^{c_i} M_j^{c_j} M_k^{c_k} : \{i,j,k\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}\right\}.$
- $\|T\|_{\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J},\bar{B}_{(\alpha,\beta),q;J}} \leq C \text{ máx}\left\{M_i^{c_i} M_j^{c_j} M_k^{c_k} : \{i,j,k\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}\right\}.$

- F.Cobos, P. Fernández-Martínez and A.Martínez, *On reiteration and the behaviour of weak compactness under certain interpolation methods.* Collect. Math. 50,1(1999), 53-72.
- S. Ericsson, *Certain reiteration and equivalence results for the Cobos-Peetre polygon interpolation method,* Math. Scan. 85 (1999) 301-319.
- F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, J. Martin, *Some reiteration results for interpolation methods defined by means of polygons.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 138 (2008) 1179-1195.
- F. Cobos, C. Richter, T. Ullrich, *Reiteration formulae for interpolation methods associated to polygons*, J. Math. Anal. Appl. 352 (2009) 773-787.

Definiciones alternativas de K- y del $J-$espacio

Sea $a \in \sum(\bar{A})$, entonces $a \in \bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J}$ si y solamente si, a admite una representación de la forma (*), verificando que

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \left(\lambda^{-m\alpha-n\beta} J(\lambda^m, \lambda^n, u_{m,n})\right)^q < \infty$$

donde $\lambda > 1$. La norma en el espacio se puede definir como

$$\|a\|_{(\alpha,\beta),q;J} \sim \inf \left\{ \left(\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \left(\lambda^{-m\alpha-n\beta} J(\lambda^m, \lambda^n, u_{m,n})\right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones de a de la forma (*).

Definiciones alternativas de K- y del $J-$espacio

$a \in \bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J}$, si y solamente si, a admite una representación del tipo $(*)$, verificando que

$$\left(\sum_{\substack{m<0 \\ n\in\mathbb{Z}}} \left(\lambda^{-m\alpha-n\beta} J(\lambda^m, \lambda^n, u_{m,n}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{\substack{m\geq 0 \\ n\in\mathbb{Z}}} \left(\mu^{-m\alpha-n\beta} J(\mu^m, \mu^n, u_{m,n}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

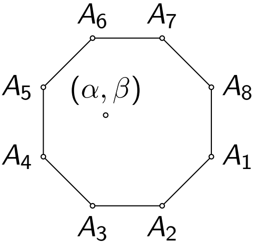
Definiciones alternativas de K- y del $J-$espacio

La norma como en el caso anterior se toma sobre todas las posibles representaciones de la forma (*).

$$\|a\|_{(\alpha,\beta),q;J} \sim \inf \left\{ \left(\sum_{\substack{m<0 \\ n\in\mathbb{Z}}} \left(\lambda^{-m\alpha-n\beta} J(\lambda^m, \lambda^n, u_{m,n}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{\substack{m\geq 0 \\ n\in\mathbb{Z}}} \left(\mu^{-m\alpha-n\beta} J(\mu^m, \mu^n, u_{m,n}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} = \|a\|_{\lambda,\mu}$$

donde $\lambda, \mu > 1$.

Primer lema



iv) $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$

ii) $y_i \geq 0$ (Situado en la mitad superior del plano).

Primer lema.

Lema 1

Supongamos que $0 < q \leq \infty$

- $\delta x_i + \rho y_i \leq \theta_i \leq \delta' x_i + \rho' y_i$

para $\delta\delta' > 0$ y $\rho, \rho' \neq 0$ y $0 < \delta\alpha + \rho\beta, \delta'\alpha + \rho'\beta < 1$. Si A_i es de clase $\mathcal{C}_K(\theta_i; X, Y)$

Primer lema.

Lema 1

Supongamos que $0 < q \leq \infty$

- $\delta x_i + \rho y_i \leq \theta_i \leq \delta' x_i + \rho' y_i$

para $\delta\delta' > 0$ y $\rho, \rho' \neq 0$ y $0 < \delta\alpha + \rho\beta, \delta'\alpha + \rho'\beta < 1$. Si A_i es de clase $\mathcal{C}_K(\theta_i; X, Y)$

$$\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;K} \hookrightarrow (X, Y)_{\delta\alpha+\rho\beta,q} + (X, Y)_{\delta'\alpha+\rho'\beta,q} \tag{1,1}$$

Primer lema.

Lema 1

Supongamos que $0 < q \leq \infty$

- $\delta x_i + \rho y_i \leq \theta_i \leq \delta' x_i + \rho' y_i$

para $\delta\delta' > 0$ y $\rho, \rho' \neq 0$ y $0 < \delta\alpha + \rho\beta, \delta'\alpha + \rho'\beta < 1$. Si A_i es de clase $\mathcal{C}_K(\theta_i; X, Y)$

$$\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;K} \hookrightarrow (X,Y)_{\delta\alpha+\rho\beta,q} + (X,Y)_{\delta'\alpha+\rho'\beta,q} \tag{1,1}$$

y si A_i es de clase $C_J(\theta_i; X, Y)$

$$(X,Y)_{\delta\alpha+\rho\beta,q} \cap (X,Y)_{\delta'\alpha+\rho'\beta,q} \hookrightarrow \bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J}. \tag{1,2}$$

Teorema 1

Sea $0 < q < \infty$ y sea una $N-$upla donde cada A_i es de clase $\mathcal{C}(\theta_i; X, Y)$. Si existen $\delta \neq 0, \rho \neq 0$ y un polígono Π' tal que

$$(1,3) \; \theta_j = \delta x_j + \rho y_j$$

para $i = 0, ..., N$ entonces

- $\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;K} \backsimeq \bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J} \backsimeq (X, Y)_{\delta\alpha+\rho\beta,q}.$

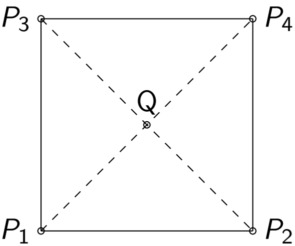
Corolario

En las condiciones del teorema anterior con $N = 3$, si los θ_j no son todos iguales

$$(A_1, A_2, A_3)_{(\alpha,\beta),q,K} \cong (A_1, A_2, A_3)_{(\alpha,\beta),q,J} \cong (X, Y)_{\eta,q} \tag{1,4}$$

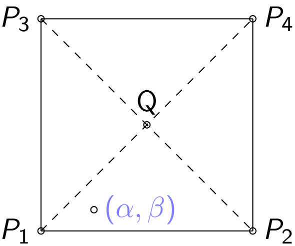
donde $\eta = \mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \mu_3\theta_3$ y (μ_1, μ_2, μ_3) son las coordenadas baricéntricas de (α, β) con respecto al triángulo que tiene como vértices, la situación de los espacios A_i.

El cuadrado unidad



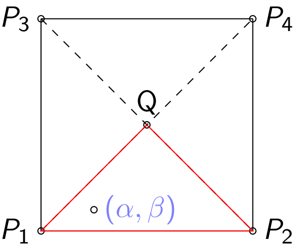
- $P_1 = (0,0), P_2 = (1,0), P_3 = (0,1), P_4 = (1,1)$

El cuadrado unidad



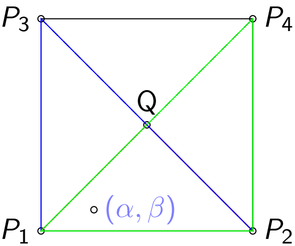
- $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (0,1)$, $P_4 = (1,1)$
- $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$

El cuadrado unidad



- $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (0,1)$, $P_4 = (1,1)$
- $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$
- $(\alpha, \beta) \in \overline{P_1 P_2 Q}$

El cuadrado unidad



- $P_1 = (0,0), P_2 = (1,0), P_3 = (0,1), P_4 = (1,1)$
- $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$
- $(\alpha, \beta) \in \overline{P_1 P_2 Q}$
- $(\alpha, \beta) \in \overline{P_1 P_2 P_3}$ y $\overline{P_1 P_2 P_4}$

Teorema 2

Sea $\bar{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ una $4-$upla donde cada A_i es de clase $\mathcal{C}(\theta_i, X; Y)$. Supongamos $\theta_1 \neq \theta_2$. Sean

$$\begin{gathered}\theta_{123} = (1-\alpha-\beta)\theta_1 + \alpha\theta_2 + \beta\theta_3 \\ \theta_{124} = (1-\alpha)\theta_1 + (\alpha-\beta)\theta_2 + \beta\theta_4.\end{gathered}$$

Entonces tenemos con equivalencia de normas

$$(A_1, A_2, A_3, A_4)_{(\alpha,\beta),q;K} = (X, Y)_{\theta_{123},q} + (X, Y)_{\theta_{124},q}$$

y

$$(A_1, A_2, A_3, A_4)_{(\alpha,\beta),q;J} = (X, Y)_{\theta_{123},q} \cap (X, Y)_{\theta_{124},q}.$$

Corolario 2. Espacios de Lorentz

Sea $0 < p_j < \infty$ y $0 < q_j, q \leq \infty$ con $j = 1, 2, 3, 4$. Supongamos que $\alpha > \beta$, $\alpha + \beta < 1$ y $p_1 \neq p_2$. Entonces tenemos con equivalencia de normas

$$(L_{p_1,q_1}, L_{p_2,q_2}, L_{p_3,q_3}, L_{p_4,q_4})_{(\alpha,\beta),q;K} = L_{p_{123},q} + L_{p_{124},q}$$

$$(L_{p_1,q_1}, L_{p_2,q_2}, L_{p_3,q_3}, L_{p_4,q_4})_{(\alpha,\beta),q;J} = L_{p_{123},q} \cap L_{p_{124},q}$$

con

$$\frac{1}{p_{123}} = \frac{1-\alpha-\beta}{p_1} + \frac{\alpha}{p_2} + \frac{\beta}{p_3} \quad \text{y} \quad \frac{1}{p_{124}} = \frac{1-\alpha}{p_1} + \frac{\alpha-\beta}{p_2} + \frac{\beta}{p_4}$$

Corolario 3. Espacios de Besov

Para $j = 1, 2, 3, 4$, sea $-\infty < s < \infty$, $0 < p, q, q_j \leq \infty$.
Supongamos que $\alpha > \beta$, y $\alpha + \beta < 1$ y $s_1 \neq s_2$. Escribiendo

$$s_{123} = (1-\alpha-\beta)s_1+\alpha s_2+\beta s_3 \quad , \quad s_{124} = (1-\alpha)s_1+(\alpha-\beta)s_2+\beta s_4$$

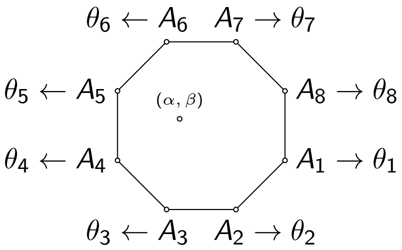
$$\bar{s} = \text{mín}\{s_{123}, s_{124}\} \quad , \quad \check{s} = \text{máx}\{s_{123}, s_{124}\}$$

Entonces tenemos con equivalencia de normas

$$\left(B^{s_1}_{pq_1}, B^{s_2}_{pq_2}, B^{s_3}_{pq_3}, B^{q_4 s_4}_{p}\right)_{(\alpha,\beta),q;K} = B^{\bar{s}}_{pq}$$

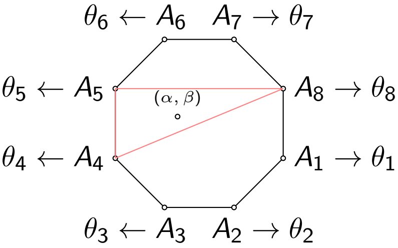
$$\left(B^{s_1}_{pq_1}, B^{s_2}_{pq_2}, B^{s_3}_{pq_3}, B^{s_4}_{pq_4}\right)_{(\alpha,\beta),q;J} = B^{\check{s}}_{pq}.$$

Condiciones y definiciones generales



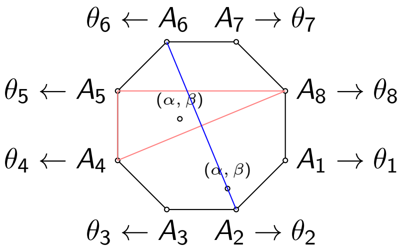
- N-upla $\{\bar{A}_1, ..., \bar{A}_N\}$.
- A_i es de clase $\mathcal{C}(\theta_i; X, Y)$, $0 \leq \theta_i \leq 1$.

Condiciones y definiciones generales



- N-upla $\{\bar{A}_1, ..., \bar{A}_N\}$.
- A_i es de clase $\mathcal{C}(\theta_i; X, Y)$, $0 \leq \theta_i \leq 1$.
- $\{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{(\alpha,\beta)}$ suponemos $\theta_i, \theta_k, \theta_r$ no son todos iguales.

Condiciones y definiciones generales



- N-upla $\{\bar{A}_1, ..., \bar{A}_N\}$.
- A_i es de clase $\mathcal{C}(\theta_i; X, Y)$, $0 \leq \theta_i \leq 1$.
- $\{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{(\alpha,\beta)}$ suponemos $\theta_i, \theta_k, \theta_r$ no son todos iguales.
- $(\alpha, \beta) \notin \overline{P_i P_k}$

Definiciones de $\bar{\theta}$ y $\tilde{\theta}$

Para $\{i,k,r\} \in \mathcal{P}_{(\alpha,\beta)}$ sea $\theta_{ikr} = c_i\theta_i + c_j\theta_j + c_k\theta_k$ con (c_i, c_k, c_r) las coordenadas baricéntricas de (α,β) con respecto a P_i, P_k, P_r. Podemos definir $0 < \bar{\theta}, \breve{\theta} < 1$ como

- $\bar{\theta} = \text{mín}\{\,\theta_{ikr} : \{i,k,r\} \in \mathcal{P}_{(\alpha,\beta)}\}$
- $\breve{\theta} = \text{máx}\{\,\theta_{ikr} : \{i,k,r\} \in \mathcal{P}_{(\alpha,\beta)}\}.$

Teorema 4.

Sea $0 < q \leq \infty$ y (α, β) no perteneciente a ninguna de las diagonales del polígono tenemos con equivalencia de normas

- $\bar{A}_{(\alpha,\beta),q;K} = (X, Y)_{\bar{\theta},q} + (X, Y)_{\breve{\theta},q}$
- $(X, Y)_{\bar{\theta},q} \cap (X, Y)_{\breve{\theta},q} = \bar{A}_{(\alpha,\beta),q;J}$

donde $0 < \bar{\theta}, \tilde{\theta} < 1$.

Corolario 4.

- $0 < p_j < \infty$ y $0 < q_j, q \leq \infty$ con $j = 1, ..., N$ tal que para cada $\{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ los números p_i, p_k, p_r no son todos iguales.

Corolario 4.

▶ $0 < p_j < \infty$ y $0 < q_j, q \leq \infty$ con $j = 1, ..., N$ tal que para cada $\{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ los números p_i, p_k, p_r no son todos iguales.

$$▶ 1/p_{ikr} = c_i/p_i + c_k/p_k + c_r/p_r$$

$$▶ 1/\bar{p} = \text{mín}\,\{1/p_{ikr} : \{i, k, , r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}\}$$

$$▶ 1/\check{p} = \text{máx}\,\{1/p_{ikr} : \{i, k, , r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}\}$$

Corolario 4.

▶ $0 < p_j < \infty$ y $0 < q_j, q \leq \infty$ con $j = 1, ..., N$ tal que para cada $\{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ los números p_i, p_k, p_r no son todos iguales.

$$\blacktriangleright 1/p_{ikr} = c_i/p_i + c_k/p_k + c_r/p_r$$

$$\blacktriangleright 1/\bar{p} = \min \{1/p_{ikr} : \{i, k, , r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}\}$$

$$\blacktriangleright 1/\check{p} = \max \{1/p_{ikr} : \{i, k, , r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}\}$$

Entonces tenemos con equivalencia de normas

$$(L_{p_1,q_1}, ..., L_{p_N,q_N})_{(\alpha,\beta),q;K} = L_{\bar{p},q} + L_{\check{p},q}$$

$$(L_{p_1,q_1}, ..., L_{p_N,q_N})_{(\alpha,\beta),q;J} = L_{\bar{p},q} \cap L_{\check{p},q}.$$

Corolario 5.

- $0 < p_j < \infty$, $0 < q_j, q \leq \infty$ y $-\infty < s_j < \infty$ con $j = 1, ..., N$ tal que para cada $\{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ los números s_i, s_k, s_r no son todos iguales.

Corolario 5.

- $0 < p_j < \infty$, $0 < q_j, q \leq \infty$ y $-\infty < s_j < \infty$ con $j = 1, \ldots, N$ tal que para cada $\{i,k,r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ los números s_i, s_k, s_r no son todos iguales.

$$\blacktriangleright s_{ikr} = c_i s_i + c_k s_k + c_r s_r, \quad \{i,k,r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$$

$$\blacktriangleright \bar{s} = \min\{s_{ikr} : \{i,k,r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}\}$$

$$\blacktriangleright \check{s} = \max\{s_{ikr} : \{i,k,,r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}\}$$

Corolario 5.

▶ $0 < p_j < \infty$, $0 < q_j, q \leq \infty$ y $-\infty < s_j < \infty$ con $j = 1, ..., N$ tal que para cada $\{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ los números s_i, s_k, s_r no son todos iguales.

$$▶ s_{ikr} = c_i s_i + c_k s_k + c_r s_r, \quad \{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$$

$$▶ \bar{s} = \min\{s_{ikr} : \{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}\}$$

$$▶ \check{s} = \max\{s_{ikr} : \{i, k, , r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}\}$$

Entonces tenemos con equivalencia de normas

$$\left(B^{s_1}_{pq_1}, ..., B^{s_N}_{pq_N}\right)_{(\alpha,\beta),q;K} = B^{\bar{s}}_{pq}$$

$$\left(B^{s_1}_{pq_1}, ..., B^{s_N}_{pq_N}\right)_{(\alpha,\beta),q;J} = B^{\check{s}}_{pq}.$$

Teorema 4.

Sea $\Pi = \overline{P_1, ..., P_N}$ un polígono convexo con $P_j = (x_j, y_j)$, y sea $(\alpha, \beta) \in \text{Int}(\Pi)$. Asumimos que $\{X, Y\}$ es un par compatible cuasi-Banach y que $\bar{A} = \{A_1, ..., A_N\}$ es una n-upla cuasi-Banach formada por espacios A_j de clase $\mathcal{C}(\theta_j; X, Y)$. Para cada $\{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ con $(\alpha, \beta) \in Int\overline{P_i P_k P_r}$ suponemos que los números $\theta_i, \theta_k, \theta_r$ no son todos iguales. Si $(\alpha, \beta) \in \overline{P_i P_k P_r}$ pero (α, β) no está en $Int\overline{P_i P_k P_r}$, entonces escribiremos que $c_i = 0$ y supondremos que $\theta_k \neq \theta_r$.

Entonces, tenemos con equivalencia de normas

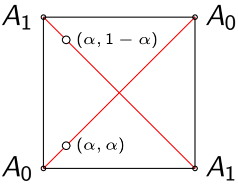
- $\bar{A}_{(\alpha,\beta),\infty;K} = (X, Y)_{\bar{\theta},\infty} + (X, Y)_{\breve{\theta},\infty}$

Teorema 4.

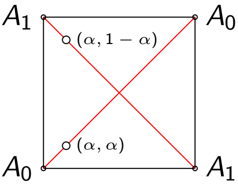
Sea $\Pi = \overline{P_1, \dots, P_N}$ un polígono convexo con $P_j = (x_j, y_j)$, y sea $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Int}(\Pi)$. Asumimos que $\{X, Y\}$ es un par compatible cuasi-Banach y que $\bar{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ es una n-upla cuasi-Banach formada por espacios A_j de clase $\mathcal{C}(\theta_j; X, Y)$. Para cada $\{i, k, r\} \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ con $(\alpha, \beta) \in Int\overline{P_i P_k P_r}$ suponemos que los números $\theta_i, \theta_k, \theta_r$ no son todos iguales. Si $(\alpha, \beta) \in \overline{P_i P_k P_r}$ pero (α, β) no está en $Int\overline{P_i P_k P_r}$, entonces escribiremos que $c_i = 0$ y supondremos que $\theta_k \neq \theta_r$.
Entonces, tenemos con equivalencia de normas

- $\bar{A}_{(\alpha,\beta),\infty;K} = (X, Y)_{\bar{\theta},\infty} + (X, Y)_{\breve{\theta},\infty}$
- $\bar{A}_{(\alpha,\beta),\rho;J} = (X, Y)_{\bar{\theta},\rho} \cap (X, Y)_{\breve{\theta},\rho}$

- El cuadrado unidad y además trabajamos con $A_0 \hookrightarrow A_1$



- El cuadrado unidad y además trabajamos con $A_0 \hookrightarrow A_1$



- F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, J. Martin,*Some reiteration results for interpolation methods defined by means of polygons.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 138 (2008) 1179-1195.
- F. Cobos, L. M. Fernández Cabrera, T. Kühn, T. Ullrich, *On an extreme real interpolation spaces.* J. Func. Analysis 256(2009) 2321-2366.

$(A_0, A_1)_{1,q}$.

- Si $A_0 \hookrightarrow A_1$ y $0 < q \leq \infty$ definimos $(A_0, A_1)_{1,q}$ como el espacio formado por todos los elementos $a \in A_1$ que tienen norma finita

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{1,q}} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(2^{-m} K(2^m, a)\right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{si} \quad 1 \leq q < \infty$$

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{1,\infty}} = \sup_{m \geq 1} \left(\{2^{-m} K(2^m, a)\}\right. \quad \text{si} \quad q = \infty.$$

$(A_0, A_1)_{0,q;J}$.

- Si $A_0 \hookrightarrow A_1$ y $0 < q \leq \infty$ definimos $(A_0, A_1)_{0,q;J}$ como el espacio formado por todos los elementos $a \in A_1$ para los cuales existe una representación de la forma

$$a = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \quad \text{convergente en} \quad A_1 \quad (*^1)$$

donde $a_m \in A_0$ y además

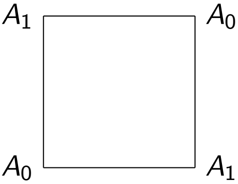
$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} J^q(2^m, u_m) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (*^2)$$

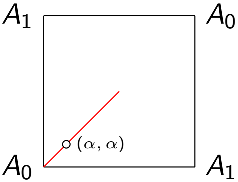
$(A_0, A_1)_{0,q;J}$.

La norma en el espacio se define como

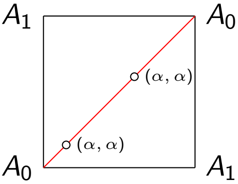
$$\|a\|_{0,q;J} = \inf \left\{ \left(\sum_{m=1}^{\infty} J^q(2^m, u_m) \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las posibles representaciones de a que satisfacen $(*^1)$ y $(*^2)$.


A_1
A_0
A_0
A_1

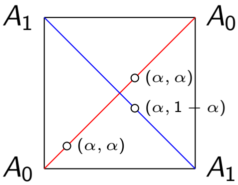


$$(A_0, A_1, A_1, A_0)_{(\alpha,\alpha),q;K} = (A_0, A_1)_{2\alpha,q}$$



$$(A_0, A_1, A_1, A_0)_{(\alpha,\alpha),q;K} = (A_0, A_1)_{2\alpha,q}$$

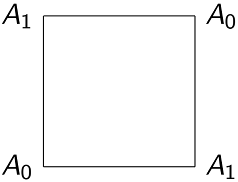
$$(A_0, A_1, A_1, A_0)_{(\alpha,\alpha),q;K} = (A_0, A_1)_{2(1-\alpha),q}$$

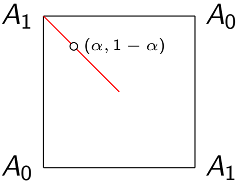


$$(A_0, A_1, A_1, A_0)_{(\alpha,\alpha),q;K} = (A_0, A_1)_{2\alpha,q}$$

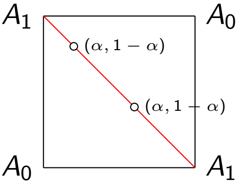
$$(A_0, A_1, A_1, A_0)_{(\alpha,\alpha),q;K} = (A_0, A_1)_{2(1-\alpha),q}$$

$$(A_0, A_1, A_1, A_0)_{(\alpha,1-\alpha),q;K} = (A_0, A_1)_{1,q}$$


A_1
A_0
A_0
A_1

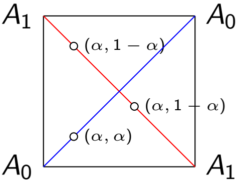


$$(A_0, A_1, A_1, A_0)_{(\alpha,1-\alpha),q;J} = (A_0, A_1)_{1-2\alpha,q}$$



$$(A_0, A_1, A_1, A_0)_{(\alpha,1-\alpha),q;J} = (A_0, A_1)_{1-2\alpha,q}$$

$$(A_0, A_1, A_1, A_0)_{(\alpha,1-\alpha),q;J} = (A_0, A_1)_{2\alpha-1,q}$$



$$(A_0, A_1, A_1, A_0)_{(\alpha,1-\alpha),q;J} = (A_0, A_1)_{1-2\alpha,q}$$

$$(A_0, A_1, A_1, A_0)_{(\alpha,1-\alpha),q;J} = (A_0, A_1)_{2\alpha-1,q}$$

$$(A_0, A_1, A_1, A_0)_{(\alpha,\alpha),q;J} = (A_0, A_1)_{0,q;J}$$