CONVERGENCIA ESTADÍSTICA EN ESPACIOS DE BANACH

Marina Nicasio Llach

Salobreña, 14-17 de abril de 2010

ÍNDICE

* 1935 Zygmund: Primera idea de casi convergencia en la primera edición de su monografía "Trigonometric Series".
* 1949 Steinhaus: Primer concepto formal bajo el nombre de convergencia estadística.
* 1951 Fast: Paralelamente a Steinhaus formaliza el concepto de convergencia estadística.

* 1935 Zygmund: Primera idea de casi convergencia en la primera edición de su monografía "Trigonometric Series".
* 1949 Steinhaus: Primer concepto formal bajo el nombre de convergencia estadística.
* 1951 Fast: Paralelamente a Steinhaus formaliza el concepto de convergencia estadística.

* 1935 Zygmund: Primera idea de casi convergencia en la primera edición de su monografía "Trigonometric Series".
* 1949 Steinhaus: Primer concepto formal bajo el nombre de convergencia estadística.
* 1951 Fast: Paralelamente a Steinhaus formaliza el concepto de convergencia estadística.

Primeras definiciones

Definición

Sea A un conjunto de números naturales. Denotamos por $|A|$ el cardinal del conjunto A. Definimos la densidad de A como $d(A) = \lim_n \frac{1}{n}|A(n)|$, donde $A(n) = \{i \in A : i \leq n\}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Sea X un espacio normado.

Definición

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X. Se dice que $(x_n)_n$ es estadísticamente convergente a $x \in X$, y escribimos $st - \lim_n x_n = x$, si para cada $\varepsilon > 0$, $d(\{i \in \mathbb{N} : \|x_i - x\| < \varepsilon\}) = 1$.

Primeras definiciones

Definición

Sea A un conjunto de números naturales. Denotamos por $|A|$ el cardinal del conjunto A. Definimos la densidad de A como $d(A) = \lim_n \frac{1}{n}|A(n)|$, donde $A(n) = \{i \in A : i \leq n\}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Sea X un espacio normado.

Definición

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X. Se dice que $(x_n)_n$ es estadísticamente convergente a $x \in X$, y escribimos $st - \lim_n x_n = x$, si para cada $\varepsilon > 0$, $d(\{i \in \mathbb{N} : \|x_i - x\| < \varepsilon\}) = 1$.

Primeras definiciones

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de X es estadísticamente de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, existe un entero $m \geq n$ tal que $d(\{i \in \mathbb{N} : \|x_i - x_m\| < \varepsilon\}) = 1$.

Proposición

Sea X un espacio completo. Una sucesión $(x_n)_n$ es estadísticamente convergente si y sólo si es estadísticamente de Cauchy.

Primeras definiciones

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de X es estadísticamente de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, existe un entero $m \geq n$ tal que $d(\{i \in \mathbb{N} : \|x_i - x_m\| < \varepsilon\}) = 1$.

Proposición

Sea X un espacio completo. Una sucesión $(x_n)_n$ es estadísticamente convergente si y sólo si es estadísticamente de Cauchy.

Fast (1951) demostró que:

Teorema

$st-\lim_n x_n = x$ si y sólo si existe $A \subset \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y $\lim_{n \in A} x_n = x$.

Freedman, A. R. y Sember, J. J. (1985) prueban que:

Teorema

Sea $(A_i)_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ una sucesión de conjuntos de densidad cero y disjuntos dos a dos. Existe una sucesión $(B_i)_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de conjuntos de densidad cero, disjuntos dos a dos y tales que $B_i \triangle A_i$ es finito para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ tiene densidad cero.

Fast (1951) demostró que:

Teorema

$st - \lim_n x_n = x$ si y sólo si existe $A \subset \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y $\lim_{n \in A} x_n = x$.

Freedman, A. R. y Sember, J. J. (1985) prueban que:

Teorema

Sea $(A_i)_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ una sucesión de conjuntos de densidad cero y disjuntos dos a dos. Existe una sucesión $(B_i)_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de conjuntos de densidad cero, disjuntos dos a dos y tales que $B_i \triangle A_i$ es finito para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ tiene densidad cero.

Convergencia estadística débil

Definiciones

La sucesión $(x_n)_n$ es débil estadísticamente convergente a x si para cualquier $f \in X^*$ es $st - \lim_n f(x_n) = f(x)$, y escribimos $wst - \lim x_n = x$.

La sucesión $(x_n)_n$ es débil estadísticamente de Cauchy si para cualquier $f \in X^*$ existe el límite $st - \lim_n f(x_n)$.

Primeras definiciones en matrices

Definición

Sea $(x_{ij})_{i,j}$ una matriz en X. Se dice que $(x_{ij})_{i,j}$ converge a x_0 (en sentido Pringsheim) si para cada $\varepsilon > 0$ existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $\|x_{ij} - x_0\| < \varepsilon$ si $i \geq p$ y $j \geq q$. Se dice que $(x_{ij})_{i,j}$ es de Cauchy (en sentido Pringsheim) si para cada $\varepsilon > 0$ existen $p, q \in \mathbb{N}$ de modo que $\|x_{pq} - x_{ij}\| < \varepsilon$ si $i \geq p$ y $j \geq q$.

Proposición

Si X es completo se verifica que una matriz $(x_{ij})_{i,j}$ es de Cauchy si y sólo si es convergente.

Primeras definiciones en matrices

Definición

Sea $(x_{ij})_{i,j}$ una matriz en X. Se dice que $(x_{ij})_{i,j}$ converge a x_0 (en sentido Pringsheim) si para cada $\varepsilon > 0$ existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $\|x_{ij} - x_0\| < \varepsilon$ si $i \geq p$ y $j \geq q$. Se dice que $(x_{ij})_{i,j}$ es de Cauchy (en sentido Pringsheim) si para cada $\varepsilon > 0$ existen $p, q \in \mathbb{N}$ de modo que $\|x_{pq} - x_{ij}\| < \varepsilon$ si $i \geq p$ y $j \geq q$.

Proposición

Si X es completo se verifica que una matriz $(x_{ij})_{i,j}$ es de Cauchy si y sólo si es convergente.

Definición

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se dice que la densidad de A es $\alpha \in [0,1]$ si existe el límite doble $d_2(A) = \lim_{p,q} \frac{|A(p,q)|}{pq} = \alpha$, donde $A(p,q) = \{(i,j) \in A : i \leq p, j \leq q\}$, $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Definición

Se dice que la matriz $(x_{ij})_{i,j}$ es estadísticamente convergente a x_0 si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que $d_2(\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|x_{ij} - x_0\| < \varepsilon\}) = 1$.

Definición

Se dice que la matriz $(x_{ij})_{i,j}$ es estadísticamente de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $d_2(\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|x_{ij} - x_{pq}\| < \varepsilon\}) = 1$.

Definición

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se dice que la densidad de A es $\alpha \in [0, 1]$ si existe el límite doble $d_2(A) = \lim_{p,q} \frac{|A(p,q)|}{pq} = \alpha$, donde $A(p, q) = \{(i, j) \in A : i \leq p, j \leq q\}$, $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Definición

Se dice que la matriz $(x_{ij})_{i,j}$ es estadísticamente convergente a x_0 si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que $d_2(\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|x_{ij} - x_0\| < \varepsilon\}) = 1$.

Definición

Se dice que la matriz $(x_{ij})_{i,j}$ es estadísticamente de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $d_2(\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|x_{ij} - x_{pq}\| < \varepsilon\}) = 1$.

DEFINICIÓN

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se dice que la densidad de A es $\alpha \in [0, 1]$ si existe el límite doble $d_2(A) = \lim_{p,q} \frac{|A(p,q)|}{pq} = \alpha$, donde $A(p, q) = \{(i, j) \in A : i \leq p, j \leq q\}$, $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

DEFINICIÓN

Se dice que la matriz $(x_{ij})_{i,j}$ es estadísticamente convergente a x_0 si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que $d_2(\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|x_{ij} - x_0\| < \varepsilon\}) = 1$.

DEFINICIÓN

Se dice que la matriz $(x_{ij})_{i,j}$ es estadísticamente de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $d_2(\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|x_{ij} - x_{pq}\| < \varepsilon\}) = 1$.

Moricz demuestra en 2003 que:

Teorema

Si X es completo entonces toda matriz $(x_{ij})_{i,j}$ que sea estadísticamente de Cauchy es estadísticamente convergente.

Moricz también demuestra (2003):

Teorema

Si $st - \lim_{i,j}(x_{ij}) = x_0$ entonces existe $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $d_2(A) = 1$ de modo que $(x_{ij})_{(i,j)\in A}$ es convergente a x_0 (en sentido Pringsheim).

Moricz demuestra en 2003 que:

Teorema

Si X es completo entonces toda matriz $(x_{ij})_{i,j}$ que sea estadísticamente de Cauchy es estadísticamente convergente.

Moricz también demuestra (2003):

Teorema

Si $st - \lim_{i,j}(x_{ij}) = x_0$ entonces existe $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $d_2(A) = 1$ de modo que $(x_{ij})_{(i,j)\in A}$ es convergente a x_0 (en sentido Pringsheim).

Convergencia estadística y series débilmente incondicionalmente de Cauchy

Series débil incondicionalmente de Cauchy

Definición

Decimos que una serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es débilmente incondicionalmente de Cauchy (dic) si $(\sum_{k=1}^{i} x_{\pi(k)})_i$ es una sucesión débilmente de Cauchy para toda permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Caracterizaciones de las series DIC

Sean $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ en X, $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito.

$S_A = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m \in A}$ es convergente $\}$.

$S_{wA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m \in A}$ es débil convergente $\}$.

$S_{stA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m \in A}$ es estadíst. converg. $\}$.

$S_{wstA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m \in A}$ débilm. estadíst. converg.$\}$.

Caracterizaciones de las series DIC

Sean $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ en X, $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito.

$$S_A = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m \in A} \text{ es convergente } \}.$$

$$S_{wA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m \in A} \text{ es débil convergente } \}.$$

$$S_{stA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m \in A} \text{ es estadíst. converg. } \}.$$

$$S_{wstA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m \in A} \text{ débilm. estadíst. converg.} \}.$$

CARACTERIZACIONES DE LAS SERIES DIC

Sean $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ en X, $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito.

$S_A = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m \in A}$ es convergente $\}$.

$S_{wA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m \in A}$ es débil convergente $\}$.

$S_{stA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m \in A}$ es estadíst. converg. $\}$.

$S_{wstA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m \in A}$ débilm. estadíst. converg.$\}$.

CARACTERIZACIONES DE LAS SERIES DIC

Sean $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ en X, $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito.

$S_A = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m\in A}$ es convergente $\}$.

$S_{wA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m\in A}$ es débil convergente $\}$.

$S_{stA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m\in A}$ es estadíst. converg. $\}$.

$S_{wstA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m\in A}$ débilm. estadíst. converg.$\}$.

CARACTERIZACIONES DE LAS SERIES DIC

Sean $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ en X, $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito.

$S_A = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m\in A}$ es convergente $\}$.

$S_{wA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m\in A}$ es débil convergente $\}$.

$S_{stA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m\in A}$ es estadíst. converg. $\}$.

$S_{wstA} = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)_{m\in A}$ débilm. estadíst. converg.$\}$.

Caracterizaciones de las series dic

Teorema

Sea $\sum_i x_i$ una serie en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes, si X es completo:

1. $\sum_i x_i$ *es dic.*
2. S_{stA} *es completo.*
3. S_{wstA} *es completo.*
4. $\sum_i a_i x_i$ *es estadísticamente convergente para cada* $(a_i)_i \in c_0$.
5. $\sum_i a_i x_i$ *es débil estadísticamente convergente para cada* $(a_i)_i \in c_0$.

Caracterizamos la completitud de un espacio normado

Corolario

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *X es completo.*
2. *Si $\sum_i x_i$ es dic y A es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ entonces S_A es completo.*
3. *Si $\sum_i x_i$ es dic y A es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, entonces S_{wA} es completo.*
4. *Si $\sum_i x_i$ es dic entonces S_{stA} es completo.*
5. *Si $\sum_i x_i$ es dic entonces S_{wstA} es completo.*

Nota

Es sencillo obtener en c_0 una serie $\sum_i x_i$ que sea dic y estadísticamente convergente pero que no sea ni convergente ni débil convergente. De este modo, si $a = (a_i)_i$ es la sucesión donde $a_i = 1$ si $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $a \in S_{stA}$, $a \in S_{wstA}$ pero $a \notin S_A$ y $a \notin S_{wA}$.

Problema

Conocer en su totalidad la relación existente entre los distintos espacios de sucesiones aquí estudiados.

Nota

Es sencillo obtener en c_0 una serie $\sum_i x_i$ que sea dic y estadísticamente convergente pero que no sea ni convergente ni débil convergente. De este modo, si $a = (a_i)_i$ es la sucesión donde $a_i = 1$ si $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $a \in S_{stA}$, $a \in S_{wstA}$ pero $a \notin S_A$ y $a \notin S_{wA}$.

Problema

Conocer en su totalidad la relación existente entre los distintos espacios de sucesiones aquí estudiados.

Problema

Caracterizar otras propiedades de los espacios normados utilizando la convergencia estadística. Por ejemplo, la tonelación.

Teorema de Bessaga-Pelczynski original

Teorema

Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *Existe en X una serie, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, que es débil incondicionalmente de Cauchy y que no es incondicionalmente convergente.*
2. *Existe en X una serie, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, que es débil incondicionalmente de Cauchy con $\inf_i \|x_i\| > 0$.*
3. *X tiene copia de c_0.*

Teorema de Bessaga-Pelczynski estadístico

Teorema

Sea X un espacio de Banach. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. *Existe una serie en X que es débilmente incondicionalmente de Cauchy y que no es estadísticamente convergente.*
2. *X tiene copia de c_0.*

Propiedad estadística de Schur

Decimos que X *tiene la propiedad estadística de Schur si toda sucesión acotada* $(x_n)_n \subseteq X$ *que sea débilmente estadísticamente convergente a cero es también estadísticamente convergente a cero*.

Teorema

Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, existe una sucesión acotada $(x_n)_n$ débil estadísticamente convergente a cero con ninguna subsucesión convergente.

Propiedad estadística de Schur

Decimos que X *tiene la propiedad estadística de Schur si toda sucesión acotada* $(x_n)_n \subseteq X$ *que sea débilmente estadísticamente convergente a cero es también estadísticamente convergente a cero*.

Teorema

Si X *es un espacio de Banach de dimensión infinita, existe una sucesión acotada* $(x_n)_n$ *débil estadísticamente convergente a cero con ninguna subsucesión convergente.*

Connor, J., Ganichev, M. y Kadets, V. demuestran:

Teoremas

1. *Sea X un espacio de Banach. Entonces X es de dimensión finita si y sólo si toda sucesión débilmente estadísticamente convergente a cero tiene una subsucesión acotada.*
2. *Sea X un espacio de Banach separable. X tiene dual separable si y sólo si toda sucesión acotada débilmente estadísticamente convergente a cero converge débilmente a cero en un conjunto de densidad uno.*
3. *Sea X un espacio de Banach. X no contiene copia isomorfa de ℓ_1 si y sólo si toda sucesión acotada estadísticamente convergente a cero contiene una subsucesión débilmente convergente a cero.*

Connor, J., Ganichev, M. y Kadets, V. demuestran:

Teoremas

1. *Sea X un espacio de Banach. Entonces X es de dimensión finita si y sólo si toda sucesión débilmente estadísticamente convergente a cero tiene una subsucesión acotada.*
2. *Sea X un espacio de Banach separable. X tiene dual separable si y sólo si toda sucesión acotada débilmente estadísticamente convergente a cero converge débilmente a cero en un conjunto de densidad uno.*
3. *Sea X un espacio de Banach. X no contiene copia isomorfa de ℓ_1 si y sólo si toda sucesión acotada estadísticamente convergente a cero contiene una subsucesión débilmente convergente a cero.*

Connor, J., Ganichev, M. y Kadets, V. demuestran:

Teoremas

1. *Sea X un espacio de Banach. Entonces X es de dimensión finita si y sólo si toda sucesión débilmente estadísticamente convergente a cero tiene una subsucesión acotada.*
2. *Sea X un espacio de Banach separable. X tiene dual separable si y sólo si toda sucesión acotada débilmente estadísticamente convergente a cero converge débilmente a cero en un conjunto de densidad uno.*
3. *Sea X un espacio de Banach. X no contiene copia isomorfa de ℓ_1 si y sólo si toda sucesión acotada estadísticamente convergente a cero contiene una subsucesión débilmente convergente a cero.*

Connor, J., Ganichev, M. y Kadets, V. demuestran:

Teoremas

1. *Sea X un espacio de Banach. Entonces X es de dimensión finita si y sólo si toda sucesión débilmente estadísticamente convergente a cero tiene una subsucesión acotada.*
2. *Sea X un espacio de Banach separable. X tiene dual separable si y sólo si toda sucesión acotada débilmente estadísticamente convergente a cero converge débilmente a cero en un conjunto de densidad uno.*
3. *Sea X un espacio de Banach. X no contiene copia isomorfa de ℓ_1 si y sólo si toda sucesión acotada estadísticamente convergente a cero contiene una subsucesión débilmente convergente a cero.*

Teorema

Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, existe una sucesión acotada $(x_n)_n$ débil estadísticamente convergente a cero con ninguna subsucesión convergente.

Construcción de la sucesión

Consideramos $(x_k)_k = (e_k)_k$ y $X_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, con $dim(X_n) = 2^n$ y tal que existe

$$T_n : l_2(\{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}) \to X_n$$

con $\|T_n\| < 5/4$ y $\|T_n^{-1}\| = 1$.
Definamos, si $2^n \leq j \leq 2^{n+1} - 1$, $z_j = T_n(e_j)$.
$(z_j)_j$ no es estadísticamente convergente a cero y sí es débil estadísticamente convergente a cero.

CONSTRUCCIÓN DE LA SUCESIÓN

Consideramos $(x_k)_k = (e_k)_k$ y $X_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, con $dim(X_n) = 2^n$ y tal que existe

$$T_n : l_2(\{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}) \to X_n$$

con $\|T_n\| < 5/4$ y $\|T_n^{-1}\| = 1$.
Definamos, si $2^n \leq j \leq 2^{n+1} - 1$, $z_j = T_n(e_j)$.
$(z_j)_j$ no es estadísticamente convergente a cero y sí es débil estadísticamente convergente a cero.

Construcción de la sucesión

Consideramos $(x_k)_k = (e_k)_k$ y $X_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, con $dim(X_n) = 2^n$ y tal que existe

$$T_n : l_2(\{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}) \to X_n$$

con $\|T_n\| < 5/4$ y $\|T_n^{-1}\| = 1$.
Definamos, si $2^n \leq j \leq 2^{n+1} - 1$, $z_j = T_n(e_j)$.
$(z_j)_j$ no es estadísticamente convergente a cero y sí es débil estadísticamente convergente a cero.

Construcción de la sucesión

Consideramos $(x_k)_k = (e_k)_k$ y $X_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, con $dim(X_n) = 2^n$ y tal que existe

$$T_n : l_2(\{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}) \to X_n$$

con $\|T_n\| < 5/4$ y $\|T_n^{-1}\| = 1$.
Definamos, si $2^n \leq j \leq 2^{n+1} - 1$, $z_j = T_n(e_j)$.
$(z_j)_j$ no es estadísticamente convergente a cero y sí es débil estadísticamente convergente a cero.

Construcción de la sucesión

Consideramos $(x_k)_k = (e_k)_k$ y $X_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, con $dim(X_n) = 2^n$ y tal que existe

$$T_n : l_2(\{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}) \to X_n$$

con $\|T_n\| < 5/4$ y $\|T_n^{-1}\| = 1$.
Definamos, si $2^n \leq j \leq 2^{n+1} - 1$, $z_j = T_n(e_j)$.
$(z_j)_j$ no es estadísticamente convergente a cero y sí es débil estadísticamente convergente a cero.

Supongamos que $(z_j)_j$ es estadísticamente convergente a cero. Existiría $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y $(z_j)_{j \in A}$ convergente, i.e., existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ y $p, q \in A$ entonces $\|z_p - z_q\| < \sqrt{2}$. Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ con $p \neq q$, entonces

$$\|z_p - z_q\| = \|T_n e_p - T_n e_q\| \geq \frac{1}{\|T_n^{-1}\|}\|e_p - e_q\| = \sqrt{2}.$$

De aquí podemos deducir que $A \cap \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ tiene a lo más un elemento si $2^n \geq n_0$. Esto implica que

$$|A \cap \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}| \leq n_0 + n + 1.$$

Así que,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A(2^{n+1} - 1)|}{2^{n+1} - 1} = 0.$$

Luego $d(A) \neq 1$.

Supongamos que $(z_j)_j$ es estadísticamente convergente a cero. Existiría $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y $(z_j)_{j\in A}$ convergente, i.e., existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ y $p, q \in A$ entonces $\|z_p - z_q\| < \sqrt{2}$. Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ con $p \neq q$, entonces

$$\|z_p - z_q\| = \|T_n e_p - T_n e_q\| \geq \frac{1}{\|T_n^{-1}\|}\|e_p - e_q\| = \sqrt{2}.$$

De aquí podemos deducir que $A \cap \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ tiene a lo más un elemento si $2^n \geq n_0$. Esto implica que

$$|A \cap \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}| \leq n_0 + n + 1.$$

Así que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A(2^{n+1} - 1)|}{2^{n+1} - 1} = 0.$$

Luego $d(A) \neq 1$.

Supongamos que $(z_j)_j$ es estadísticamente convergente a cero. Existiría $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y $(z_j)_{j \in A}$ convergente, i.e., existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ y $p, q \in A$ entonces $\|z_p - z_q\| < \sqrt{2}$.
Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ con $p \neq q$, entonces

$$\|z_p - z_q\| = \|T_n e_p - T_n e_q\| \geq \frac{1}{\|T_n^{-1}\|} \|e_p - e_q\| = \sqrt{2}.$$

De aquí podemos deducir que $A \cap \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ tiene a lo más un elemento si $2^n \geq n_0$. Esto implica que

$$|A \cap \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}| \leq n_0 + n + 1.$$

Así que,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A(2^{n+1} - 1)|}{2^{n+1} - 1} = 0.$$

Luego $d(A) \neq 1$.

Supongamos que $(z_j)_j$ es estadísticamente convergente a cero. Existiría $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y $(z_j)_{j \in A}$ convergente, i.e., existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ y $p, q \in A$ entonces $\|z_p - z_q\| < \sqrt{2}$. Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ con $p \neq q$, entonces

$$\|z_p - z_q\| = \|T_n e_p - T_n e_q\| \geq \frac{1}{\|T_n^{-1}\|}\|e_p - e_q\| = \sqrt{2}.$$

De aquí podemos deducir que $A \cap \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ tiene a lo más un elemento si $2^n \geq n_0$. Esto implica que

$$|A \cap \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}| \leq n_0 + n + 1.$$

Así que,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A(2^{n+1} - 1)|}{2^{n+1} - 1} = 0.$$

Luego $d(A) \neq 1$.

Supongamos que $(z_j)_j$ es estadísticamente convergente a cero. Existiría $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y $(z_j)_{j \in A}$ convergente, i.e., existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ y $p, q \in A$ entonces $\|z_p - z_q\| < \sqrt{2}$. Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ con $p \neq q$, entonces

$$\|z_p - z_q\| = \|T_n e_p - T_n e_q\| \geq \frac{1}{\|T_n^{-1}\|} \|e_p - e_q\| = \sqrt{2}.$$

De aquí podemos deducir que $A \cap \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ tiene a lo más un elemento si $2^n \geq n_0$. Esto implica que

$$|A \cap \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}| \leq n_0 + n + 1.$$

Así que,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A(2^{n+1} - 1)|}{2^{n+1} - 1} = 0.$$

Luego $d(A) \neq 1$.

Supongamos que $(z_j)_j$ es estadísticamente convergente a cero. Existiría $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y $(z_j)_{j \in A}$ convergente, i.e., existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ y $p, q \in A$ entonces $\|z_p - z_q\| < \sqrt{2}$. Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ con $p \neq q$, entonces

$$\|z_p - z_q\| = \|T_n e_p - T_n e_q\| \geq \frac{1}{\|T_n^{-1}\|} \|e_p - e_q\| = \sqrt{2}.$$

De aquí podemos deducir que $A \cap \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ tiene a lo más un elemento si $2^n \geq n_0$. Esto implica que

$$|A \cap \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}| \leq n_0 + n + 1.$$

Así que,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A(2^{n+1} - 1)|}{2^{n+1} - 1} = 0.$$

Luego $d(A) \neq 1$.

Supongamos que $(z_j)_j$ es estadísticamente convergente a cero. Existiría $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y $(z_j)_{j \in A}$ convergente, i.e., existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ y $p, q \in A$ entonces $\|z_p - z_q\| < \sqrt{2}$. Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ con $p \neq q$, entonces

$$\|z_p - z_q\| = \|T_n e_p - T_n e_q\| \geq \frac{1}{\|T_n^{-1}\|}\|e_p - e_q\| = \sqrt{2}.$$

De aquí podemos deducir que $A \cap \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ tiene a lo más un elemento si $2^n \geq n_0$. Esto implica que

$$|A \cap \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}| \leq n_0 + n + 1.$$

Así que,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A(2^{n+1} - 1)|}{2^{n+1} - 1} = 0.$$

Luego $d(A) \neq 1$.

Supongamos que $(z_j)_j$ es estadísticamente convergente a cero. Existiría $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y $(z_j)_{j \in A}$ convergente, i.e., existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ y $p, q \in A$ entonces $\|z_p - z_q\| < \sqrt{2}$. Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ con $p \neq q$, entonces

$$\|z_p - z_q\| = \|T_n e_p - T_n e_q\| \geq \frac{1}{\|T_n^{-1}\|} \|e_p - e_q\| = \sqrt{2}.$$

De aquí podemos deducir que $A \cap \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ tiene a lo más un elemento si $2^n \geq n_0$. Esto implica que

$$|A \cap \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}| \leq n_0 + n + 1.$$

Así que,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A(2^{n+1} - 1)|}{2^{n+1} - 1} = 0.$$

Luego $d(A) \neq 1$.

Supongamos que $(z_j)_j$ es estadísticamente convergente a cero. Existiría $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y $(z_j)_{j \in A}$ convergente, i.e., existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ y $p, q \in A$ entonces $\|z_p - z_q\| < \sqrt{2}$. Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ con $p \neq q$, entonces

$$\|z_p - z_q\| = \|T_n e_p - T_n e_q\| \geq \frac{1}{\|T_n^{-1}\|}\|e_p - e_q\| = \sqrt{2}.$$

De aquí podemos deducir que $A \cap \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ tiene a lo más un elemento si $2^n \geq n_0$. Esto implica que

$$|A \cap \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}| \leq n_0 + n + 1.$$

Así que,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A(2^{n+1} - 1)|}{2^{n+1} - 1} = 0.$$

Luego $d(A) \neq 1$.

Veamos que $(z_j)_j$ es débil estadísticamente convergente a cero.
Consideremos $f \in X^*$ y $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$2^{-n} \cdot \sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |f(T_n(e_j))| \leq 2^{-n} \cdot \sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |(f \circ T_n)(e_j))| =$$

$$= 2^{-n} \cdot \sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |(f \circ T_n)_j| \leq 2^{-n} \cdot 2^{n/2} (\sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |(f \circ T_n)_j|^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2^{-n/2} \|f \circ T_n\| \leq 2^{-n/2} \|f\| \frac{5}{4} \to 0.$$

Así pues, $(z_j)_j$ es débilmente estadísticamente convergente a cero.

Veamos que $(z_j)_j$ es débil estadísticamente convergente a cero. Consideremos $f \in X^*$ y $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$2^{-n} \cdot \sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |f(T_n(e_j))| \leq 2^{-n} \cdot \sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |(f \circ T_n)(e_j))| =$$

$$= 2^{-n} \cdot \sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |(f \circ T_n)_j| \leq 2^{-n} \cdot 2^{n/2} (\sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |(f \circ T_n)_j|^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2^{-n/2} \| f \circ T_n \| \leq 2^{-n/2} \| f \| \frac{5}{4} \to 0.$$

Así pues, $(z_j)_j$ es débilmente estadísticamente convergente a cero.

Veamos que $(z_j)_j$ es débil estadísticamente convergente a cero. Consideremos $f \in X^*$ y $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$2^{-n} \cdot \sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |f(T_n(e_j))| \leq 2^{-n} \cdot \sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |(f \circ T_n)(e_j))| =$$

$$= 2^{-n} \cdot \sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |(f \circ T_n)_j| \leq 2^{-n} \cdot 2^{n/2} (\sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |(f \circ T_n)_j|^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2^{-n/2} \|f \circ T_n\| \leq 2^{-n/2} \|f\| \frac{5}{4} \to 0.$$

Así pues, $(z_j)_j$ es débilmente estadísticamente convergente a cero.

Veamos que $(z_j)_j$ es débil estadísticamente convergente a cero. Consideremos $f \in X^*$ y $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$2^{-n} \cdot \sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |f(T_n(e_j))| \leq 2^{-n} \cdot \sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |(f \circ T_n)(e_j))| =$$

$$= 2^{-n} \cdot \sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |(f \circ T_n)_j| \leq 2^{-n} \cdot 2^{n/2} (\sum_{2^n \leq j \leq 2^{n+1}} |(f \circ T_n)_j|^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2^{-n/2} \|f \circ T_n\| \leq 2^{-n/2} \|f\| \frac{5}{4} \to 0.$$

Así pues, $(z_j)_j$ es débilmente estadísticamente convergente a cero.

Corolario

Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, existe una serie de sumas parciales acotadas que es débilmente estadísticamente convergente pero no estadísticamente convergente.

Nota

Observemos que $(1, 1, \ldots) \in S_{wstA} \setminus S_{stA}$

Corolario

Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, existe una serie de sumas parciales acotadas que es débilmente estadísticamente convergente pero no estadísticamente convergente.

Nota

Observemos que $(1, 1, \ldots) \in S_{wstA} \setminus S_{stA}$

SOBRE EL TEOREMA DE ORLICZ-PETTIS Y LA CONVERGENCIA ESTADÍSTICA

Teorema de Orlicz-Pettis original

Teorema

Sea X un espacio de Banach. Si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es una serie en X de forma que $\sum_{i \in B} x_i$ es débilmente convergente para todo $B \in \mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente.

Propiedades (SC) y (M)

Definición

Se dice que una familia natural tiene la propiedad (SC) si para cada sucesión $(F_n)_n$ de elementos disjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ se verifica que existe $M \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\bigcup_{n \in M} F_n \in \mathcal{F}$.

Definición

Diremos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (M) si para cada sucesión $(F_n)_n$ de subconjuntos disjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ existen $B \in \mathcal{F}$ y $M \subset \mathbb{N}$ infinito tales que $B \subset \bigcup_n F_n$ y $F_k \subset B$ si $k \in M$.

Propiedades (SC) y (M)

Definición

Se dice que una familia natural tiene la propiedad (SC) si para cada sucesión $(F_n)_n$ de elementos disjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ se verifica que existe $M \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\bigcup\limits_{n \in M} F_n \in \mathcal{F}$.

Definición

Diremos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (M) si para cada sucesión $(F_n)_n$ de subconjuntos disjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ existen $B \in \mathcal{F}$ y $M \subset \mathbb{N}$ infinito tales que $B \subset \bigcup\limits_n F_n$ y $F_k \subset B$ si $k \in M$.

Relación entre las propiedades (SC) y (M)

Es claro que si $\mathcal{F}$ posee la propiedad (SC) también tiene la (M). Recíprocamente no se cumple.

Ejemplo

Consideremos c_0.
$I_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es impar y } 1 \leq m < 2n\}$
$P_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es par y } 1 < m \leq 2n\}$.
Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (|A \cap P_n| - |A \cap I_n|)_n \notin c_0\} \cup \phi_0(\mathbb{N}),$$

$\mathcal{F}$ carece de la propiedad (SC)
$F_n = \{2n-1, 2n\}$
$|\bigcup_{n\in M} F_n \cap P_n| - |\bigcup_{n\in M} F_n \cap I_n| = 0$ para todo $M \subseteq \mathbb{N}$.

Relación entre las propiedades (SC) y (M)

Es claro que si $\mathcal{F}$ posee la propiedad (SC) también tiene la (M). Recíprocamente no se cumple.

Ejemplo

Consideremos c_0.
$I_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es impar y } 1 \leq m < 2n\}$
$P_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es par y } 1 < m \leq 2n\}$.
Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (|A \cap P_n| - |A \cap I_n|)_n \notin c_0\} \cup \phi_0(\mathbb{N}),$$

$\mathcal{F}$ carece de la propiedad (SC)
$F_n = \{2n-1, 2n\}$
$|\bigcup_{n\in M} F_n \cap P_n| - |\bigcup_{n\in M} F_n \cap I_n| = 0$ para todo $M \subseteq \mathbb{N}$.

Relación entre las propiedades (SC) y (M)

Es claro que si $\mathcal{F}$ posee la propiedad (SC) también tiene la (M). Recíprocamente no se cumple.

Ejemplo

Consideremos c_0.
$I_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es impar y } 1 \leq m < 2n\}$
$P_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es par y } 1 < m \leq 2n\}$.
Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (|A \cap P_n| - |A \cap I_n|)_n \notin c_0\} \cup \phi_0(\mathbb{N}),$$

$\mathcal{F}$ carece de la propiedad (SC)
$F_n = \{2n-1, 2n\}$
$|\bigcup_{n\in M} F_n \cap P_n| - |\bigcup_{n\in M} F_n \cap I_n| = 0$ para todo $M \subseteq \mathbb{N}$.

RELACIÓN ENTRE LAS PROPIEDADES (SC) Y (M)

Es claro que si $\mathcal{F}$ posee la propiedad (SC) también tiene la (M). Recíprocamente no se cumple.

EJEMPLO

Consideremos c_0.
$I_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es impar y } 1 \leq m < 2n\}$
$P_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es par y } 1 < m \leq 2n\}$.
Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (|A \cap P_n| - |A \cap I_n|)_n \notin c_0\} \cup \phi_0(\mathbb{N}),$$

$\mathcal{F}$ carece de la propiedad (SC)
$F_n = \{2n-1, 2n\}$
$|\bigcup_{n\in M} F_n \cap P_n| - |\bigcup_{n\in M} F_n \cap I_n| = 0$ para todo $M \subseteq \mathbb{N}$.

Relación entre las propiedades (SC) y (M)

Es claro que si $\mathcal{F}$ posee la propiedad (SC) también tiene la (M). Recíprocamente no se cumple.

Ejemplo

Consideremos c_0.
$I_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es impar y } 1 \leq m < 2n\}$
$P_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es par y } 1 < m \leq 2n\}$.
Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (|A \cap P_n| - |A \cap I_n|)_n \notin c_0\} \cup \phi_0(\mathbb{N}),$$

$\mathcal{F}$ carece de la propiedad (SC)
$F_n = \{2n-1, 2n\}$
$|\bigcup_{n\in M} F_n \cap P_n| - |\bigcup_{n\in M} F_n \cap I_n| = 0$ para todo $M \subseteq \mathbb{N}$.

Relación entre las propiedades (SC) y (M)

Es claro que si $\mathcal{F}$ posee la propiedad (SC) también tiene la (M). Recíprocamente no se cumple.

Ejemplo

Consideremos c_0.
$I_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es impar y } 1 \leq m < 2n\}$
$P_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es par y } 1 < m \leq 2n\}$.
Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (|A \cap P_n| - |A \cap I_n|)_n \notin c_0\} \cup \phi_0(\mathbb{N}),$$

$\mathcal{F}$ carece de la propiedad (SC)
$F_n = \{2n-1, 2n\}$
$|\bigcup_{n \in M} F_n \cap P_n| - |\bigcup_{n \in M} F_n \cap I_n| = 0$ para todo $M \subseteq \mathbb{N}$.

Relación entre las propiedades (SC) y (M)

Es claro que si $\mathcal{F}$ posee la propiedad (SC) también tiene la (M). Recíprocamente no se cumple.

Ejemplo

Consideremos c_0.
$I_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es impar y } 1 \leq m < 2n\}$
$P_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es par y } 1 < m \leq 2n\}$.
Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (|A \cap P_n| - |A \cap I_n|)_n \notin c_0\} \cup \phi_0(\mathbb{N}),$$

$\mathcal{F}$ carece de la propiedad (SC)
$F_n = \{2n-1, 2n\}$
$|\bigcup_{n \in M} F_n \cap P_n| - |\bigcup_{n \in M} F_n \cap I_n| = 0$ para todo $M \subseteq \mathbb{N}$.

Relación entre las propiedades (SC) y (M)

Ejemplo

$\mathcal{F}$ posee la propiedad (M).

Sea $(F_n)_n$ una sucesión de conjuntos finitos y disjuntos dos a dos.

Tomando $C = \bigcup_{n\geq 2} F_n$:

- Si $C \in \mathcal{F}$ lo tenemos.
- Si no, sea a el primer elemento de F_1. Entonces $C \cup \{a\} \in \mathcal{F}$.

Relación entre las propiedades (SC) y (M)

Ejemplo

$\mathcal{F}$ posee la propiedad (M).
Sea $(F_n)_n$ una sucesión de conjuntos finitos y disjuntos dos a dos.
Tomando $C = \bigcup_{n \geq 2} F_n$:

- Si $C \in \mathcal{F}$ lo tenemos.
- Si no, sea a el primer elemento de F_1. Entonces $C \cup \{a\} \in \mathcal{F}$.

Relación entre las propiedades (SC) y (M)

Ejemplo

$\mathcal{F}$ posee la propiedad (M).
Sea $(F_n)_n$ una sucesión de conjuntos finitos y disjuntos dos a dos.
Tomando $C = \bigcup_{n \geq 2} F_n$:

- Si $C \in \mathcal{F}$ lo tenemos.
- Si no, sea a el primer elemento de F_1. Entonces $C \cup \{a\} \in \mathcal{F}$.

Relación entre las propiedades (SC) y (M)

Ejemplo

$\mathcal{F}$ posee la propiedad (M).
Sea $(F_n)_n$ una sucesión de conjuntos finitos y disjuntos dos a dos.
Tomando $C = \bigcup_{n\geq 2} F_n$:

- Si $C \in \mathcal{F}$ lo tenemos.
- Si no, sea a el primer elemento de F_1. Entonces $C \cup \{a\} \in \mathcal{F}$.

Relación entre las propiedades (SC) y (M)

Ejemplo

$\mathcal{F}$ posee la propiedad (M).
Sea $(F_n)_n$ una sucesión de conjuntos finitos y disjuntos dos a dos.
Tomando $C = \bigcup_{n\geq 2} F_n$:

- Si $C \in \mathcal{F}$ lo tenemos.
- Si no, sea a el primer elemento de F_1. Entonces $C \cup \{a\} \in \mathcal{F}$.

Relación entre las propiedades (SC) y (M)

Ejemplo

$\mathcal{F}$ posee la propiedad (M).
Sea $(F_n)_n$ una sucesión de conjuntos finitos y disjuntos dos a dos.
Tomando $C = \bigcup_{n\geq 2} F_n$:

- Si $C \in \mathcal{F}$ lo tenemos.
- Si no, sea a el primer elemento de F_1. Entonces $C \cup \{a\} \in \mathcal{F}$.

Lema

Sea $\mathcal{F}$ una familia natural con la propiedad (M). Consideremos una matriz $(a_{ij})_{i,j}$ en $\mathbb{R}$ tal que si $B \in \mathcal{F}$ se verifica que la sucesión $(st - \sum_{j \in B} a_{ij})_i$ es convergente. Entonces, para cada sucesión $(A_n)_n$ de subconjuntos disjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ se verifica que las sucesiones $(\sum_{j \in A_n} a_{ij})_i$ son uniformemente convergentes en $n \in \mathbb{N}$ y las sucesiones $(\sum_{j \in A_n} a_{ij})_n$ son uniformemente convergentes a cero en $i \in \mathbb{N}$.

Demostración

$*$ Si $\sum_i a_i$ es una serie de números reales tal que $st - \sum_{i \in B} a_i$ existe si $B \in \mathcal{F}$, entonces $\sum_i a_i$ es incondicionalmente de Cauchy (ica).

Si $\sum_i a_i$ no fuera ica, entonces existirían $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de $\phi_0(\mathbb{N})$ con $\sup F_k < \inf F_{k+1}$ y tal que $|\sum_{i \in F_k} a_i| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Si $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$F_k^+ = \{i \in F_k : a_i \geq 0\} \text{ y } F_k^- = \{i \in F_k : a_i < 0\}.$$

Podemos considerar que $H = \{k \in \mathbb{N} : |\sum_{i \in F_k^+} a_i| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ es infinito.

Demostración

$*$ Si $\sum_i a_i$ es una serie de números reales tal que $st - \sum_{i \in B} a_i$ existe si $B \in \mathcal{F}$, entonces $\sum_i a_i$ es incondicionalmente de Cauchy (ica).

Si $\sum_i a_i$ no fuera ica, entonces existirían $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de $\phi_0(\mathbb{N})$ con $\sup F_k < \inf F_{k+1}$ y tal que $|\sum_{i \in F_k} a_i| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Si $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$F_k^+ = \{i \in F_k : a_i \geq 0\} \text{ y } F_k^- = \{i \in F_k : a_i < 0\}.$$

Podemos considerar que $H = \{k \in \mathbb{N} : |\sum_{i \in F_k^+} a_i| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ es infinito.

Demostración

$*$ Si $\sum_i a_i$ es una serie de números reales tal que $st - \sum_{i \in B} a_i$ existe si $B \in \mathcal{F}$, entonces $\sum_i a_i$ es incondicionalmente de Cauchy (ica).
Si $\sum_i a_i$ no fuera ica, entonces existirían $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de $\phi_0(\mathbb{N})$ con $\sup F_k < \inf F_{k+1}$ y tal que $|\sum_{i \in F_k} a_i| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.
Si $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$F_k^+ = \{i \in F_k : a_i \geq 0\} \text{ y } F_k^- = \{i \in F_k : a_i < 0\}.$$

Podemos considerar que $H = \{k \in \mathbb{N} : |\sum_{i \in F_k^+} a_i| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ es infinito.

Demostración

$*$ Si $\sum_i a_i$ es una serie de números reales tal que $st - \sum_{i \in B} a_i$ existe si $B \in \mathcal{F}$, entonces $\sum_i a_i$ es incondicionalmente de Cauchy (ica).
Si $\sum_i a_i$ no fuera ica, entonces existirían $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de $\phi_0(\mathbb{N})$ con $\sup F_k < \inf F_{k+1}$ y tal que $|\sum_{i \in F_k} a_i| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.
Si $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$F_k^+ = \{i \in F_k : a_i \geq 0\} \text{ y } F_k^- = \{i \in F_k : a_i < 0\}.$$

Podemos considerar que $H = \{k \in \mathbb{N} : |\sum_{i \in F_k^+} a_i| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ es infinito.

DEMOSTRACIÓN

$*$ Si $\sum_i a_i$ es una serie de números reales tal que $st - \sum_{i\in B} a_i$ existe si $B \in \mathcal{F}$, entonces $\sum_i a_i$ es incondicionalmente de Cauchy (ica).

Si $\sum_i a_i$ no fuera ica, entonces existirían $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de $\phi_0(\mathbb{N})$ con $\sup F_k < \inf F_{k+1}$ y tal que $|\sum_{i\in F_k} a_i| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Si $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$F_k^+ = \{i \in F_k : a_i \geq 0\} \text{ y } F_k^- = \{i \in F_k : a_i < 0\}.$$

Podemos considerar que $H = \{k \in \mathbb{N} : |\sum_{i\in F_k^+} a_i| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ es infinito.

Demostración

Para la sucesión $(F_k^+)_{k\in H}$ existen $B \in \mathcal{F}$ y $D \subset H$ infinito tales que $B \subset \bigcup_k F_k^+$ y $F_k^+ \subset B$ si $k \in D$.

Como $\sum_{i\in B} a_i$ es estadísticamente convergente, existe $A \subset \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ tal que la sucesión $(\sum_{i\in B\cap\{1,\ldots,n\}} a_i)_{n\in A}$ es de Cauchy.

Pero para cada $p \in A$ existe $k \in H$ con $p < \inf F_k$ y si $q \in A$ es tal que $\sup F_k < q$ tendremos que $\frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i\in F_k^+} a_i \leq \sum_{i\in[p,q]\cap B} a_i$ y esto es una contradicción. Por tanto, $\sum_i a_i$ es ica.

DEMOSTRACIÓN

Para la sucesión $(F_k^+)_{k\in H}$ existen $B \in \mathcal{F}$ y $D \subset H$ infinito tales que $B \subset \bigcup_k F_k^+$ y $F_k^+ \subset B$ si $k \in D$.

Como $\sum_{i\in B} a_i$ es estadísticamente convergente, existe $A \subset \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ tal que la sucesión $(\sum_{i\in B\cap\{1,\dots,n\}} a_i)_{n\in A}$ es de Cauchy.

Pero para cada $p \in A$ existe $k \in H$ con $p < \inf F_k$ y si $q \in A$ es tal que $\sup F_k < q$ tendremos que $\frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i\in F_k^+} a_i \leq \sum_{i\in[p,q]\cap B} a_i$ y esto es una contradicción. Por tanto, $\sum_i a_i$ es ica.

Demostración

Para la sucesión $(F_k^+)_{k\in H}$ existen $B \in \mathcal{F}$ y $D \subset H$ infinito tales que $B \subset \bigcup_k F_k^+$ y $F_k^+ \subset B$ si $k \in D$.

Como $\sum_{i\in B} a_i$ es estadísticamente convergente, existe $A \subset \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ tal que la sucesión $(\sum_{i\in B\cap\{1,\dots,n\}} a_i)_{n\in A}$ es de Cauchy.

Pero para cada $p \in A$ existe $k \in H$ con $p < \inf F_k$ y si $q \in A$ es tal que $\sup F_k < q$ tendremos que $\frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i\in F_k^+} a_i \leq \sum_{i\in[p,q]\cap B} a_i$ y

esto es una contradicción. Por tanto, $\sum_i a_i$ es ica.

DEMOSTRACIÓN

Para la sucesión $(F_k^+)_{k\in H}$ existen $B \in \mathcal{F}$ y $D \subset H$ infinito tales que $B \subset \bigcup_k F_k^+$ y $F_k^+ \subset B$ si $k \in D$.

Como $\sum_{i\in B} a_i$ es estadísticamente convergente, existe $A \subset \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ tal que la sucesión $(\sum_{i\in B\cap\{1,\ldots,n\}} a_i)_{n\in A}$ es de Cauchy.

Pero para cada $p \in A$ existe $k \in H$ con $p < \inf F_k$ y si $q \in A$ es tal que $\sup F_k < q$ tendremos que $\frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i\in F_k^+} a_i \leq \sum_{i\in[p,q]\cap B} a_i$ y esto es una contradicción. Por tanto, $\sum_i a_i$ es ica.

Demostración

$*$ Si $A \subset \mathbb{N}$ entonces $(\sum_{j\in A} a_{ij})_i$ es una sucesión convergente.

Supongamos que existe $A \subset \mathbb{N}$ tal que $(\sum_{j\in A} a_{ij})_i$ no es una sucesión de Cauchy. Necesariamente A será un conjunto infinito y existirá $\varepsilon > 0$ tal que si $i \in \mathbb{N}$ existe $k > i$ tal que $|\sum_{j\in A}(a_{ij} - a_{kj})| > \varepsilon$.

En particular, para $i_1 = 1$ existen $k_1 > i_1$ y $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sum_{j\in A\cap\{1,\dots l_1\}} (a_{i_1 j} - a_{k_1 j})| > \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN

$*$ Si $A \subset \mathbb{N}$ entonces $(\sum_{j\in A} a_{ij})_i$ es una sucesión convergente.

Supongamos que existe $A \subset \mathbb{N}$ tal que $(\sum_{j\in A} a_{ij})_i$ no es una sucesión de Cauchy. Necesariamente A será un conjunto infinito y existirá $\varepsilon > 0$ tal que si $i \in \mathbb{N}$ existe $k > i$ tal que $|\sum_{j\in A}(a_{ij} - a_{kj})| > \varepsilon$.

En particular, para $i_1 = 1$ existen $k_1 > i_1$ y $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sum_{j\in A\cap\{1,\dots l_1\}} (a_{i_1 j} - a_{k_1 j})| > \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN

$*$ Si $A \subset \mathbb{N}$ entonces $(\sum_{j \in A} a_{ij})_i$ es una sucesión convergente.

Supongamos que existe $A \subset \mathbb{N}$ tal que $(\sum_{j \in A} a_{ij})_i$ no es una sucesión de Cauchy. Necesariamente A será un conjunto infinito y existirá $\varepsilon > 0$ tal que si $i \in \mathbb{N}$ existe $k > i$ tal que $|\sum_{j \in A} (a_{ij} - a_{kj})| > \varepsilon$.

En particular, para $i_1 = 1$ existen $k_1 > i_1$ y $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sum_{j \in A \cap \{1, \ldots l_1\}} (a_{i_1 j} - a_{k_1 j})| > \varepsilon.$$

Demostración

$*$ Si $A \subset \mathbb{N}$ entonces $(\sum_{j\in A} a_{ij})_i$ es una sucesión convergente.

Supongamos que existe $A \subset \mathbb{N}$ tal que $(\sum_{j\in A} a_{ij})_i$ no es una sucesión de Cauchy. Necesariamente A será un conjunto infinito y existirá $\varepsilon > 0$ tal que si $i \in \mathbb{N}$ existe $k > i$ tal que $|\sum_{j\in A}(a_{ij} - a_{kj})| > \varepsilon$.

En particular, para $i_1 = 1$ existen $k_1 > i_1$ y $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sum_{j\in A\cap\{1,\ldots l_1\}} (a_{i_1 j} - a_{k_1 j})| > \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN

Como $(a_{ij})_i$ es una sucesión de Cauchy, si $j \in \{1, \ldots, l_1\}$ existe $r_1 > k_1$ tal que si $p, q \geq r_1$ entonces

$$|\sum_{j \in C} (a_{pj} - a_{qj})| < \frac{\varepsilon}{8},$$

con $C \subset \{1, \ldots, l_1\}$.

De forma análoga a la anterior consideremos ahora $i_2 > r_1$ y $k_2 > i_2$ tales que

$$|\sum_{j \in A} (a_{i_2 j} - a_{k_2 j})| > \varepsilon.$$

Tenemos que existe $l_2 \in \mathbb{N}$, $l_2 > l_1$ tal que

$$|\sum_{j \in B} (a_{i_2 j} - a_{k_2 j})| < \frac{\varepsilon}{8},$$

si $B \subset \{l_2 + 1, l_2 + 2, \ldots\}$.

DEMOSTRACIÓN

Como $(a_{ij})_i$ es una sucesión de Cauchy, si $j \in \{1, \ldots, l_1\}$ existe $r_1 > k_1$ tal que si $p, q \geq r_1$ entonces

$$|\sum_{j \in C}(a_{pj} - a_{qj})| < \frac{\varepsilon}{8},$$

con $C \subset \{1, \ldots, l_1\}$.

De forma análoga a la anterior consideremos ahora $i_2 > r_1$ y $k_2 > i_2$ tales que

$$|\sum_{j \in A}(a_{i_2 j} - a_{k_2 j})| > \varepsilon.$$

Tenemos que existe $l_2 \in \mathbb{N}$, $l_2 > l_1$ tal que

$$|\sum_{j \in B}(a_{i_2 j} - a_{k_2 j})| < \frac{\varepsilon}{8},$$

si $B \subset \{l_2 + 1, l_2 + 2, \ldots\}$.

Demostración

Como $(a_{ij})_i$ es una sucesión de Cauchy, si $j \in \{1, \ldots, l_1\}$ existe $r_1 > k_1$ tal que si $p, q \geq r_1$ entonces

$$|\sum_{j \in C}(a_{pj} - a_{qj})| < \frac{\varepsilon}{8},$$

con $C \subset \{1, \ldots, l_1\}$.
De forma análoga a la anterior consideremos ahora $i_2 > r_1$ y $k_2 > i_2$ tales que

$$|\sum_{j \in A}(a_{i_2 j} - a_{k_2 j})| > \varepsilon.$$

Tenemos que existe $l_2 \in \mathbb{N}$, $l_2 > l_1$ tal que

$$|\sum_{j \in B}(a_{i_2 j} - a_{k_2 j})| < \frac{\varepsilon}{8},$$

si $B \subset \{l_2 + 1, l_2 + 2, \ldots\}$.

Demostración

Entonces, se verifica que

$$|\sum_{j\in A\cap\{l_1+1,\dots,l_2\}}(a_{i_2j}-a_{k_2j})| \geq |\sum_{j\in A}(a_{i_2j}-a_{k_2j})|-|\sum_{j\in A, j\leq l_1}(a_{i_2j}-a_{k_2j})|-$$

$$-|\sum_{j\in A, j>l_2}(a_{i_2j}-a_{k_2j})| \geq \varepsilon-\frac{\varepsilon}{8}-\frac{\varepsilon}{8}=\frac{3\varepsilon}{4}.$$

Inductivamente, obtenemos tres sucesiones crecientes de números naturales: $(i_r)_r$, $(k_r)_r$ y $(l_r)_r$ tales que $i_1 < k_1 < i_2 < k_2 < \dots$ y si $r > 1$ se verifica que:

I.- $|\sum_{j\in C}(a_{i_rj}-a_{k_rj})| < \frac{\varepsilon}{8}$ si $C \subset \{1, 2, \dots, l_{r-1}\}$.

II.- $|\sum_{j\in B}(a_{i_rj}-a_{k_rj})| < \frac{\varepsilon}{8}$ si $B \subset \{l_r+1, l_r+2\dots\}$.

III.- $|\sum_{j\in F_r}(a_{i_rj}-a_{k_rj})| > \frac{3\varepsilon}{4}$ si $F_r = A\cap\{l_{r-1}+1, \dots, l_r\}$.

Demostración

Entonces, se verifica que

$$|\sum_{j\in A\cap\{l_1+1,\dots,l_2\}}(a_{i_2j}-a_{k_2j})| \geq |\sum_{j\in A}(a_{i_2j}-a_{k_2j})|-|\sum_{j\in A, j\leq l_1}(a_{i_2j}-a_{k_2j})|-$$

$$-|\sum_{j\in A, j>l_2}(a_{i_2j}-a_{k_2j})| \geq \varepsilon-\frac{\varepsilon}{8}-\frac{\varepsilon}{8}=\frac{3\varepsilon}{4}.$$

Inductivamente, obtenemos tres sucesiones crecientes de números naturales: $(i_r)_r$, $(k_r)_r$ y $(l_r)_r$ tales que $i_1<k_1<i_2<k_2<\dots$ y si $r>1$ se verifica que:

I.- $|\sum_{j\in C}(a_{i_rj}-a_{k_rj})|<\frac{\varepsilon}{8}$ si $C\subset\{1,2,\dots,l_{r-1}\}$.

II.- $|\sum_{j\in B}(a_{i_rj}-a_{k_rj})|<\frac{\varepsilon}{8}$ si $B\subset\{l_r+1,l_r+2\dots\}$.

III.- $|\sum_{j\in F_r}(a_{i_rj}-a_{k_rj})|>\frac{3\varepsilon}{4}$ si $F_r=A\cap\{l_{r-1}+1,\dots,l_r\}$.

DEMOSTRACIÓN

Entonces, se verifica que

$$|\sum_{j\in A\cap\{l_1+1,\ldots,l_2\}}(a_{i_2j}-a_{k_2j})| \geq |\sum_{j\in A}(a_{i_2j}-a_{k_2j})|-|\sum_{j\in A, j\leq l_1}(a_{i_2j}-a_{k_2j})|-$$

$$-|\sum_{j\in A, j>l_2}(a_{i_2j}-a_{k_2j})| \geq \varepsilon-\frac{\varepsilon}{8}-\frac{\varepsilon}{8}=\frac{3\varepsilon}{4}.$$

Inductivamente, obtenemos tres sucesiones crecientes de números naturales: $(i_r)_r$, $(k_r)_r$ y $(l_r)_r$ tales que $i_1<k_1<i_2<k_2<\ldots$ y si $r>1$ se verifica que:

I.- $|\sum_{j\in C}(a_{i_rj}-a_{k_rj})|<\frac{\varepsilon}{8}$ si $C\subset\{1,2,\ldots,l_{r-1}\}$.

II.- $|\sum_{j\in B}(a_{i_rj}-a_{k_rj})|<\frac{\varepsilon}{8}$ si $B\subset\{l_r+1,l_r+2\ldots\}$.

III.- $|\sum_{j\in F_r}(a_{i_rj}-a_{k_rj})|>\frac{3\varepsilon}{4}$ si $F_r=A\cap\{l_{r-1}+1,\ldots,l_r\}$.

Demostración

Entonces, se verifica que

$$|\sum_{j\in A\cap\{l_1+1,\dots,l_2\}}(a_{i_2j}-a_{k_2j})| \geq |\sum_{j\in A}(a_{i_2j}-a_{k_2j})|-|\sum_{j\in A, j\leq l_1}(a_{i_2j}-a_{k_2j})|-$$

$$-|\sum_{j\in A, j>l_2}(a_{i_2j}-a_{k_2j})| \geq \varepsilon-\frac{\varepsilon}{8}-\frac{\varepsilon}{8}=\frac{3\varepsilon}{4}.$$

Inductivamente, obtenemos tres sucesiones crecientes de números naturales: $(i_r)_r$, $(k_r)_r$ y $(l_r)_r$ tales que $i_1<k_1<i_2<k_2<\dots$ y si $r>1$ se verifica que:

I.- $|\sum_{j\in C}(a_{i_rj}-a_{k_rj})|<\frac{\varepsilon}{8}$ si $C\subset\{1,2,\dots,l_{r-1}\}$.

II.- $|\sum_{j\in B}(a_{i_rj}-a_{k_rj})|<\frac{\varepsilon}{8}$ si $B\subset\{l_r+1,l_r+2\dots\}$.

III.- $|\sum_{j\in F_r}(a_{i_rj}-a_{k_rj})|>\frac{3\varepsilon}{4}$ si $F_r=A\cap\{l_{r-1}+1,\dots,l_r\}$.

Demostración

Entonces, se verifica que

$$|\sum_{j\in A\cap\{l_1+1,\ldots,l_2\}}(a_{i_2j}-a_{k_2j})|\geq|\sum_{j\in A}(a_{i_2j}-a_{k_2j})|-|\sum_{j\in A,j\leq l_1}(a_{i_2j}-a_{k_2j})|-$$

$$-|\sum_{j\in A,j>l_2}(a_{i_2j}-a_{k_2j})|\geq\varepsilon-\frac{\varepsilon}{8}-\frac{\varepsilon}{8}=\frac{3\varepsilon}{4}.$$

Inductivamente, obtenemos tres sucesiones crecientes de números naturales: $(i_r)_r$, $(k_r)_r$ y $(l_r)_r$ tales que $i_1<k_1<i_2<k_2<\ldots$ y si $r>1$ se verifica que:

I.- $|\sum_{j\in C}(a_{i_rj}-a_{k_rj})|<\frac{\varepsilon}{8}$ si $C\subset\{1,2,\ldots,l_{r-1}\}$.

II.- $|\sum_{j\in B}(a_{i_rj}-a_{k_rj})|<\frac{\varepsilon}{8}$ si $B\subset\{l_r+1,l_r+2\ldots\}$.

III.- $|\sum_{j\in F_r}(a_{i_rj}-a_{k_rj})|>\frac{3\varepsilon}{4}$ si $F_r=A\cap\{l_{r-1}+1,\ldots,l_r\}$.

Demostración

Entonces, se verifica que

$$|\sum_{j\in A\cap\{l_1+1,\ldots,l_2\}}(a_{i_2 j}-a_{k_2 j})| \geq |\sum_{j\in A}(a_{i_2 j}-a_{k_2 j})| - |\sum_{j\in A, j\leq l_1}(a_{i_2 j}-a_{k_2 j})| -$$

$$-|\sum_{j\in A, j>l_2}(a_{i_2 j}-a_{k_2 j})| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{8} = \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Inductivamente, obtenemos tres sucesiones crecientes de números naturales: $(i_r)_r$, $(k_r)_r$ y $(l_r)_r$ tales que $i_1 < k_1 < i_2 < k_2 < \ldots$ y si $r > 1$ se verifica que:

I.- $|\sum_{j\in C}(a_{i_r j} - a_{k_r j})| < \frac{\varepsilon}{8}$ si $C \subset \{1, 2, \ldots, l_{r-1}\}$.

II.- $|\sum_{j\in B}(a_{i_r j} - a_{k_r j})| < \frac{\varepsilon}{8}$ si $B \subset \{l_r + 1, l_r + 2 \ldots\}$.

III.- $|\sum_{j\in F_r}(a_{i_r j} - a_{k_r j})| > \frac{3\varepsilon}{4}$ si $F_r = A \cap \{l_{r-1} + 1, \ldots, l_r\}$.

DEMOSTRACIÓN

Si consideramos la sucesión $(F_r)_r$ de $\phi_0(\mathbb{N})$ tenemos, por hipótesis, que existen $T \in \mathcal{F}$ y $P \subset \mathbb{N}$ infinito tales que $T \subset \bigcup_r F_r$ y $F_r \subset T$ si $r \in P$. Para cada $r \in P$ se verifica que:

$$|\sum_{j \in T}(a_{i_r j} - a_{k_r j})| \geq |\sum_{j \in F_r}(a_{i_r j} - a_{k_r j})| - |\sum_{j \in T, j \leq l_{r-1}}(a_{i_r j} - a_{k_r j})| -$$

$$-|\sum_{j \in T, j > l_r}(a_{i_r j} - a_{k_r j})| > \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Y esto contradice que $(\sum_{j \in T} a_{ij})_i$ sea una sucesión de Cauchy.

Demostración

Si consideramos la sucesión $(F_r)_r$ de $\phi_0(\mathbb{N})$ tenemos, por hipótesis, que existen $T \in \mathcal{F}$ y $P \subset \mathbb{N}$ infinito tales que $T \subset \bigcup_r F_r$ y $F_r \subset T$ si $r \in P$. Para cada $r \in P$ se verifica que:

$$|\sum_{j \in T}(a_{i_r j} - a_{k_r j})| \geq |\sum_{j \in F_r}(a_{i_r j} - a_{k_r j})| - |\sum_{j \in T, j \leq l_{r-1}}(a_{i_r j} - a_{k_r j})| -$$

$$-|\sum_{j \in T, j > l_r}(a_{i_r j} - a_{k_r j})| > \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Y esto contradice que $(\sum_{j \in T} a_{ij})_i$ sea una sucesión de Cauchy.

Demostración

Si consideramos la sucesión $(F_r)_r$ de $\phi_0(\mathbb{N})$ tenemos, por hipótesis, que existen $T \in \mathcal{F}$ y $P \subset \mathbb{N}$ infinito tales que $T \subset \bigcup_r F_r$ y $F_r \subset T$ si $r \in P$. Para cada $r \in P$ se verifica que:

$$|\sum_{j\in T}(a_{i_rj} - a_{k_rj})| \geq |\sum_{j\in F_r}(a_{i_rj} - a_{k_rj})| - |\sum_{j\in T, j\leq l_{r-1}}(a_{i_rj} - a_{k_rj})| -$$

$$-|\sum_{j\in T, j>l_r}(a_{i_rj} - a_{k_rj})| > \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Y esto contradice que $(\sum_{j\in T} a_{ij})_i$ sea una sucesión de Cauchy.

Demostración

Finalmente, consideremos para cada $i \in \mathbb{N}$ la medida $\mu_i : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mu_i(A) = \sum_{j \in A} a_{ij}$. Tenemos que $(\mu_i)_i$ es puntualmente convergente en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Se sigue del teorema de Vitali-Hahn-Saks, que la sucesión $(\mu_i)_i$ es uniformemente fuertemente aditiva, es decir, $(\mu_i(A_j))_j$ converge a cero uniformemente en $i \in \mathbb{N}$, donde $(A_j)_j$ es una sucesión de disjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Ahora es fácil comprobar que $(\mu_i(A_j))_i$ es uniformemente convergente en $j \in \mathbb{N}$.

Demostración

Finalmente, consideremos para cada $i \in \mathbb{N}$ la medida $\mu_i : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mu_i(A) = \sum_{j \in A} a_{ij}$. Tenemos que $(\mu_i)_i$ es puntualmente convergente en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Se sigue del teorema de Vitali-Hahn-Saks, que la sucesión $(\mu_i)_i$ es uniformemente fuertemente aditiva, es decir, $(\mu_i(A_j))_j$ converge a cero uniformemente en $i \in \mathbb{N}$, donde $(A_j)_j$ es una sucesión de disjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Ahora es fácil comprobar que $(\mu_i(A_j))_i$ es uniformemente convergente en $j \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN

Finalmente, consideremos para cada $i \in \mathbb{N}$ la medida $\mu_i : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mu_i(A) = \sum_{j \in A} a_{ij}$. Tenemos que $(\mu_i)_i$ es puntualmente convergente en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Se sigue del teorema de Vitali-Hahn-Saks, que la sucesión $(\mu_i)_i$ es uniformemente fuertemente aditiva, es decir, $(\mu_i(A_j))_j$ converge a cero uniformemente en $i \in \mathbb{N}$, donde $(A_j)_j$ es una sucesión de disjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Ahora es fácil comprobar que $(\mu_i(A_j))_i$ es uniformemente convergente en $j \in \mathbb{N}$.

Demostración

Finalmente, consideremos para cada $i \in \mathbb{N}$ la medida $\mu_i : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mu_i(A) = \sum_{j \in A} a_{ij}$. Tenemos que $(\mu_i)_i$ es puntualmente convergente en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Se sigue del teorema de Vitali-Hahn-Saks, que la sucesión $(\mu_i)_i$ es uniformemente fuertemente aditiva, es decir, $(\mu_i(A_j))_j$ converge a cero uniformemente en $i \in \mathbb{N}$, donde $(A_j)_j$ es una sucesión de disjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Ahora es fácil comprobar que $(\mu_i(A_j))_i$ es uniformemente convergente en $j \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN

Finalmente, consideremos para cada $i \in \mathbb{N}$ la medida $\mu_i : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mu_i(A) = \sum_{j \in A} a_{ij}$. Tenemos que $(\mu_i)_i$ es puntualmente convergente en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Se sigue del teorema de Vitali-Hahn-Saks, que la sucesión $(\mu_i)_i$ es uniformemente fuertemente aditiva, es decir, $(\mu_i(A_j))_j$ converge a cero uniformemente en $i \in \mathbb{N}$, donde $(A_j)_j$ es una sucesión de disjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
Ahora es fácil comprobar que $(\mu_i(A_j))_i$ es uniformemente convergente en $j \in \mathbb{N}$.

Teorema de Orlicz-Pettis estadístico

Teorema

Sea X un espacio normado y sea $\mathcal{F}$ una familia natural con la propiedad (M). Sea $\sum_i x_i$ una serie en X tal que $\sum_{i \in B} x_i$ es estadísticamente débil convergente si $B \in \mathcal{F}$. Entonces $\sum_i x_i$ es incondicionalmente de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos lo contrario, es decir, que $\sum_i x_i$ no es ica, entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de subconjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ tales que $\|\sum_{i \in F_k} x_i\| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Para cada k existe $f_k \in S_{X^*}$ tal que $|f_k(\sum_{i \in F_k} x_i)| > \varepsilon$.

Considerando $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ podemos asumir que X es separable. Así que, existe una subsucesión de $(f_k)_k$, (usamos la misma notación), y existe $f_0 \in B_{X^*}$ de forma que $w^* \lim f_k = f_0$.

Demostración

Supongamos lo contrario, es decir, que $\sum_i x_i$ no es ica,

entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de subconjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ tales que $\|\sum_{i \in F_k} x_i\| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Para cada k existe $f_k \in S_{X^*}$ tal que $|f_k(\sum_{i \in F_k} x_i)| > \varepsilon$.

Considerando $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ podemos asumir que X es separable. Así que, existe una subsucesión de $(f_k)_k$, (usamos la misma notación), y existe $f_0 \in B_{X^*}$ de forma que $w^* \lim f_k = f_0$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos lo contrario, es decir, que $\sum_i x_i$ no es ica,

entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de subconjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ tales que $\|\sum_{i\in F_k} x_i\| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Para cada k existe $f_k \in S_{X^*}$ tal que $|f_k(\sum_{i\in F_k} x_i)| > \varepsilon$.

Considerando $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ podemos asumir que X es separable. Así que, existe una subsucesión de $(f_k)_k$, (usamos la misma notación), y existe $f_0 \in B_{X^*}$ de forma que w^* lím $f_k = f_0$.

Demostración

Supongamos lo contrario, es decir, que $\sum_i x_i$ no es ica, entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de subconjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ tales que $\| \sum_{i \in F_k} x_i \| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Para cada k existe $f_k \in S_{X^*}$ tal que $|f_k(\sum_{i \in F_k} x_i)| > \varepsilon$.

Considerando $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ podemos asumir que X es separable. Así que, existe una subsucesión de $(f_k)_k$, (usamos la misma notación), y existe $f_0 \in B_{X^*}$ de forma que $w^* \lim f_k = f_0$.

Demostración

Supongamos lo contrario, es decir, que $\sum_i x_i$ no es ica, entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de subconjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ tales que $\|\sum_{i \in F_k} x_i\| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Para cada k existe $f_k \in S_{X^*}$ tal que $|f_k(\sum_{i \in F_k} x_i)| > \varepsilon$.

Considerando $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ podemos asumir que X es separable. Así que, existe una subsucesión de $(f_k)_k$, (usamos la misma notación), y existe $f_0 \in B_{X^*}$ de forma que $w^*\ \text{lím}\, f_k = f_0$.

Demostración

Supongamos lo contrario, es decir, que $\sum_i x_i$ no es ica,

entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de subconjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ tales que $\|\sum_{i\in F_k} x_i\| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Para cada k existe $f_k \in S_{X^*}$ tal que $|f_k(\sum_{i\in F_k} x_i)| > \varepsilon$.

Considerando $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ podemos asumir que X es separable. Así que, existe una subsucesión de $(f_k)_k$, (usamos la misma notación), y existe $f_0 \in B_{X^*}$ de forma que $w^* \lim f_k = f_0$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos lo contrario, es decir, que $\sum_i x_i$ no es ica, entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de subconjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ tales que $\|\sum_{i\in F_k} x_i\| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Para cada k existe $f_k \in S_{X^*}$ tal que $|f_k(\sum_{i\in F_k} x_i)| > \varepsilon$.

Considerando $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ podemos asumir que X es separable.

Así que, existe una subsucesión de $(f_k)_k$, (usamos la misma notación), y existe $f_0 \in B_{X^*}$ de forma que $w^* \lim f_k = f_0$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos lo contrario, es decir, que $\sum_i x_i$ no es ica, entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de subconjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ tales que $\|\sum_{i\in F_k} x_i\| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Para cada k existe $f_k \in S_{X^*}$ tal que $|f_k(\sum_{i\in F_k} x_i)| > \varepsilon$.

Considerando $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ podemos asumir que X es separable. Así que, existe una subsucesión de $(f_k)_k$, (usamos la misma notación), y existe $f_0 \in B_{X^*}$ de forma que $w^* \lim f_k = f_0$.

Demostración

Supongamos lo contrario, es decir, que $\sum_i x_i$ no es ica, entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de subconjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ tales que $\|\sum_{i \in F_k} x_i\| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Para cada k existe $f_k \in S_{X^*}$ tal que $|f_k(\sum_{i \in F_k} x_i)| > \varepsilon$.

Considerando $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ podemos asumir que X es separable. Así que, existe una subsucesión de $(f_k)_k$, (usamos la misma notación), y existe $f_0 \in B_{X^*}$ de forma que $w^* \lim f_k = f_0$.

Demostración

Supongamos lo contrario, es decir, que $\sum_i x_i$ no es ica, entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_k)_k$ de subconjuntos de $\phi_0(\mathbb{N})$ tales que $\| \sum_{i \in F_k} x_i \| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$.

Para cada k existe $f_k \in S_{X^*}$ tal que $|f_k(\sum_{i \in F_k} x_i)| > \varepsilon$.

Considerando $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ podemos asumir que X es separable. Así que, existe una subsucesión de $(f_k)_k$, (usamos la misma notación), y existe $f_0 \in B_{X^*}$ de forma que $w^* \lim f_k = f_0$.

Demostración

Luego, la matriz $(f_i(x_j))_{i,j}$ es tal que se encuentra en las condiciones del lema anterior. Si $B \in \mathcal{F}$, existe x_0 tal que $st - w \sum_{j \in B} x_j = x_0$. Si $i \in \mathbb{N}$ será $st - \sum_{j \in B} f_i(x_j) = f_i(x_0)$. Por consiguiente, la sucesión $(f_i(x_0))_i$ converge a $f_0(x_0)$. Esto contradice que $|\sum_{j \in F_k} f_k(x_j)| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$, y $\sum_i x_i$ es incondicionalmente de Cauchy.

Demostración

Luego, la matriz $(f_i(x_j))_{i,j}$ es tal que se encuentra en las condiciones del lema anterior. Si $B \in \mathcal{F}$, existe x_0 tal que $st - w \sum_{j \in B} x_j = x_0$. Si $i \in \mathbb{N}$ será $st - \sum_{j \in B} f_i(x_j) = f_i(x_0)$. Por consiguiente, la sucesión $(f_i(x_0))_i$ converge a $f_0(x_0)$. Esto contradice que $|\sum_{j \in F_k} f_k(x_j)| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$, y $\sum_i x_i$ es incondicionalmente de Cauchy.

Demostración

Luego, la matriz $(f_i(x_j))_{i,j}$ es tal que se encuentra en las condiciones del lema anterior. Si $B \in \mathcal{F}$, existe x_0 tal que $st - w \sum_{j \in B} x_j = x_0$. Si $i \in \mathbb{N}$ será $st - \sum_{j \in B} f_i(x_j) = f_i(x_0)$. Por consiguiente, la sucesión $(f_i(x_0))_i$ converge a $f_0(x_0)$. Esto contradice que $|\sum_{j \in F_k} f_k(x_j)| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$, y $\sum_i x_i$ es incondicionalmente de Cauchy.

Demostración

Luego, la matriz $(f_i(x_j))_{i,j}$ es tal que se encuentra en las condiciones del lema anterior. Si $B \in \mathcal{F}$, existe x_0 tal que $st - w \sum_{j \in B} x_j = x_0$. Si $i \in \mathbb{N}$ será $st - \sum_{j \in B} f_i(x_j) = f_i(x_0)$. Por consiguiente, la sucesión $(f_i(x_0))_i$ converge a $f_0(x_0)$. Esto contradice que $|\sum_{j \in F_k} f_k(x_j)| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$, y $\sum_i x_i$ es incondicionalmente de Cauchy.

Demostración

Luego, la matriz $(f_i(x_j))_{i,j}$ es tal que se encuentra en las condiciones del lema anterior. Si $B \in \mathcal{F}$, existe x_0 tal que $st - w \sum_{j \in B} x_j = x_0$. Si $i \in \mathbb{N}$ será $st - \sum_{j \in B} f_i(x_j) = f_i(x_0)$. Por consiguiente, la sucesión $(f_i(x_0))_i$ converge a $f_0(x_0)$. Esto contradice que $|\sum_{j \in F_k} f_k(x_j)| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$, y $\sum_i x_i$ es incondicionalmente de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN

Luego, la matriz $(f_i(x_j))_{i,j}$ es tal que se encuentra en las condiciones del lema anterior. Si $B \in \mathcal{F}$, existe x_0 tal que $st - w \sum_{j \in B} x_j = x_0$. Si $i \in \mathbb{N}$ será $st - \sum_{j \in B} f_i(x_j) = f_i(x_0)$. Por consiguiente, la sucesión $(f_i(x_0))_i$ converge a $f_0(x_0)$. Esto contradice que $|\sum_{j \in F_k} f_k(x_j)| > \varepsilon$ si $k \in \mathbb{N}$, y $\sum_i x_i$ es incondicionalmente de Cauchy.

Algunas consecuencias

1.- Del teorema anterior podemos deducir que el lema es cierto si la matriz $(a_{ij})_{i,j}$ es una matriz cuyos elementos pertenecen a un espacio de Banach X, porque en ese caso, las filas serían incondicionalmente convergentes y el teorema de Vitali-Hahn-Saks también sería cierto con una sucesión de medidas definidas en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y valoradas en X.

2.- Sea $\mathcal{F}$ una familia natural con la propiedad (M) y sea $(x_{ij})_{i,j}$ una matriz en un espacio de Banach X tal que:

A.- Cada columna $(x_{ij})_i$ es estadísticamente convergente.

B.- Para cada $B \in \mathcal{F}$ infinito se verifica que la sucesión $(st - \sum_{j \in B} x_{ij})_i$ es de Cauchy.

Se tiene que $(x_{ij})_{i,j}$ es fuertemente uniformemente estadísticamente convergente por filas a cero.

Algunas consecuencias

1.- Del teorema anterior podemos deducir que el lema es cierto si la matriz $(a_{ij})_{i,j}$ es una matriz cuyos elementos pertenecen a un espacio de Banach X, porque en ese caso, las filas serían incondicionalmente convergentes y el teorema de Vitali-Hahn-Saks también sería cierto con una sucesión de medidas definidas en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y valoradas en X.

2.- Sea $\mathcal{F}$ una familia natural con la propiedad (M) y sea $(x_{ij})_{i,j}$ una matriz en un espacio de Banach X tal que:

A.- Cada columna $(x_{ij})_i$ es estadísticamente convergente.

B.- Para cada $B \in \mathcal{F}$ infinito se verifica que la sucesión $(st - \sum_{j \in B} x_{ij})_i$ es de Cauchy.

Se tiene que $(x_{ij})_{i,j}$ es fuertemente uniformemente estadísticamente convergente por filas a cero.

Algunas consecuencias

1.- Del teorema anterior podemos deducir que el lema es cierto si la matriz $(a_{ij})_{i,j}$ es una matriz cuyos elementos pertenecen a un espacio de Banach X, porque en ese caso, las filas serían incondicionalmente convergentes y el teorema de Vitali-Hahn-Saks también sería cierto con una sucesión de medidas definidas en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y valoradas en X.

2.- Sea $\mathcal{F}$ una familia natural con la propiedad (M) y sea $(x_{ij})_{i,j}$ una matriz en un espacio de Banach X tal que:

A.- Cada columna $(x_{ij})_i$ es estadísticamente convergente.

B.- Para cada $B \in \mathcal{F}$ infinito se verifica que la sucesión $(st - \sum_{j \in B} x_{ij})_i$ es de Cauchy.

Se tiene que $(x_{ij})_{i,j}$ es fuertemente uniformemente estadísticamente convergente por filas a cero.

Algunas consecuencias

1.- Del teorema anterior podemos deducir que el lema es cierto si la matriz $(a_{ij})_{i,j}$ es una matriz cuyos elementos pertenecen a un espacio de Banach X, porque en ese caso, las filas serían incondicionalmente convergentes y el teorema de Vitali-Hahn-Saks también sería cierto con una sucesión de medidas definidas en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y valoradas en X.

2.- Sea $\mathcal{F}$ una familia natural con la propiedad (M) y sea $(x_{ij})_{i,j}$ una matriz en un espacio de Banach X tal que:

A.- Cada columna $(x_{ij})_i$ es estadísticamente convergente.

B.- Para cada $B \in \mathcal{F}$ infinito se verifica que la sucesión $(st - \sum_{j \in B} x_{ij})_i$ es de Cauchy.

Se tiene que $(x_{ij})_{i,j}$ es fuertemente uniformemente estadísticamente convergente por filas a cero.

ALGUNAS CONSECUENCIAS

1.- Del teorema anterior podemos deducir que el lema es cierto si la matriz $(a_{ij})_{i,j}$ es una matriz cuyos elementos pertenecen a un espacio de Banach X, porque en ese caso, las filas serían incondicionalmente convergentes y el teorema de Vitali-Hahn-Saks también sería cierto con una sucesión de medidas definidas en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y valoradas en X.

2.- Sea $\mathcal{F}$ una familia natural con la propiedad (M) y sea $(x_{ij})_{i,j}$ una matriz en un espacio de Banach X tal que:

   A.- Cada columna $(x_{ij})_i$ es estadísticamente convergente.

   B.- Para cada $B \in \mathcal{F}$ infinito se verifica que la sucesión $(st - \sum_{j \in B} x_{ij})_i$ es de Cauchy.

Se tiene que $(x_{ij})_{i,j}$ es fuertemente uniformemente estadísticamente convergente por filas a cero.

Algunas consecuencias

1.- Del teorema anterior podemos deducir que el lema es cierto si la matriz $(a_{ij})_{i,j}$ es una matriz cuyos elementos pertenecen a un espacio de Banach X, porque en ese caso, las filas serían incondicionalmente convergentes y el teorema de Vitali-Hahn-Saks también sería cierto con una sucesión de medidas definidas en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y valoradas en X.

2.- Sea $\mathcal{F}$ una familia natural con la propiedad (M) y sea $(x_{ij})_{i,j}$ una matriz en un espacio de Banach X tal que:

- A.- Cada columna $(x_{ij})_i$ es estadísticamente convergente.
- B.- Para cada $B \in \mathcal{F}$ infinito se verifica que la sucesión $(st - \sum_{j \in B} x_{ij})_i$ es de Cauchy.

Se tiene que $(x_{ij})_{i,j}$ es fuertemente uniformemente estadísticamente convergente por filas a cero.

Algunas consecuencias

1.- Del teorema anterior podemos deducir que el lema es cierto si la matriz $(a_{ij})_{i,j}$ es una matriz cuyos elementos pertenecen a un espacio de Banach X, porque en ese caso, las filas serían incondicionalmente convergentes y el teorema de Vitali-Hahn-Saks también sería cierto con una sucesión de medidas definidas en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y valoradas en X.

2.- Sea $\mathcal{F}$ una familia natural con la propiedad (M) y sea $(x_{ij})_{i,j}$ una matriz en un espacio de Banach X tal que:

A.- Cada columna $(x_{ij})_i$ es estadísticamente convergente.

B.- Para cada $B \in \mathcal{F}$ infinito se verifica que la sucesión $(st - \sum_{j \in B} x_{ij})_i$ es de Cauchy.

Se tiene que $(x_{ij})_{i,j}$ es fuertemente uniformemente estadísticamente convergente por filas a cero.

3.- Del teorema previo deducimos que si $\sum_i x_i$ es una serie en un espacio de Banach X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

I.- $\sum_i x_i$ es ico.

II.- $\sum_i a_i x_i$ es estadísticamente convergente para cada $(a_i)_i \in \ell_\infty$.

III.- $\sum_i a_i x_i$ es estadísticamente débil convergente para cada $(a_i)_i \in \ell_\infty$.

3.- Del teorema previo deducimos que si $\sum_i x_i$ es una serie en un espacio de Banach X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- I.- $\sum_i x_i$ es ico.
- II.- $\sum_i a_i x_i$ es estadísticamente convergente para cada $(a_i)_i \in \ell_\infty$.
- III.- $\sum_i a_i x_i$ es estadísticamente débil convergente para cada $(a_i)_i \in \ell_\infty$.

3.- Del teorema previo deducimos que si $\sum_i x_i$ es una serie en un espacio de Banach X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i.- $\sum_i x_i$ es ico.

ii.- $\sum_i a_i x_i$ es estadísticamente convergente para cada $(a_i)_i \in \ell_\infty$.

iii.- $\sum_i a_i x_i$ es estadísticamente débil convergente para cada $(a_i)_i \in \ell_\infty$.

3.- Del teorema previo deducimos que si $\sum_i x_i$ es una serie en un espacio de Banach X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

I.- $\sum_i x_i$ es ico.

II.- $\sum_i a_i x_i$ es estadísticamente convergente para cada $(a_i)_i \in \ell_\infty$.

III.- $\sum_i a_i x_i$ es estadísticamente débil convergente para cada $(a_i)_i \in \ell_\infty$.

SUMABILIDAD CÈSARO ESTADÍSTICA Y EL TEOREMA DE ORLICZ-PETTIS

Sumabilidad Cèsaro

Definición

Se dice que $\sum_i x_i$ es Cèsaro sumable si existe $x_0 \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)x_i) = x_0$, y lo denotamos por $c\sum_i x_i = x_0$. Y esto es equivalente a $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} s_k) = x_0$, donde $s_k = s_k(\sum_i x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

Definición

Se dice que $\sum_i x_i$ es débilmente Cèsaro sumable si existe $x_0 \in X$ tal que $w \lim_{n \to \infty} (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) x_i) = x_0$, y lo denotamos $wc \sum_i x_i = x_0$.

Sumabilidad Cèsaro estadística

Definición

Diremos que $\sum_i x_i$ es estadísticamente Cèsaro sumable si existe $x_0 \in X$ de forma que $st - \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)x_i) = x_0$. Y esto es equivalente a afirmar que existe $A \subset \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y

$$\lim_{n\in A}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)x_i\right) = x_0.$$

Lo denotaremos por $st - c\sum_i x_i = x_0$.

De una forma similar definiremos $st - wc\sum_i x_i$.

Sumabilidad Cèsaro estadística

Definición

Diremos que $\sum_i x_i$ es estadísticamente Cèsaro sumable si existe $x_0 \in X$ de forma que $st - \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)x_i) = x_0$. Y esto es equivalente a afirmar que existe $A \subset \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ y

$$\lim_{n\in A} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)x_i \right) = x_0.$$

Lo denotaremos por $st - c\sum_i x_i = x_0$.

De una forma similar definiremos $st - wc\sum_i x_i$.

Teorema de Orlicz-Pettis Cèsaro estadístico

Teorema

Sea X un espacio de Banach y consideremos $\sum_i x_i$ una serie en X tal que cada subserie es débilmente estadísticamente Cèsaro sumable. Entonces $\sum_i x_i$ es incondicionalmente convergente.

Espacios de sucesiones

$$StS_c(\sum_i x_i) = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : st - c\sum_i a_i x_i \text{ existe}\}$$

$$StS_{wc}(\sum_i x_i) = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : st - wc\sum_i a_i x_i \text{ existe}\}$$

Corolario

Sea X un espacio de Banach y $\sum_i x_i$ una serie en X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

I.- $\sum_i x_i$ *es ico.*

II.- $StS_c(\sum_i x_i) = \ell_\infty$.

III.- $StS_{wc}(\sum_i x_i) = \ell_\infty$.

Espacios de sucesiones

$$StS_c(\sum_i x_i) = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : st - c\sum_i a_i x_i \text{ existe}\}$$
$$StS_{wc}(\sum_i x_i) = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : st - wc\sum_i a_i x_i \text{ existe}\}$$

Corolario

Sea X un espacio de Banach y $\sum_i x_i$ una serie en X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

I.- $\sum_i x_i$ *es ico.*

II.- $StS_c(\sum_i x_i) = \ell_\infty$.

III.- $StS_{wc}(\sum_i x_i) = \ell_\infty$.

Espacios de sucesiones

$$StS_c(\sum_i x_i) = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : st - c\sum_i a_i x_i \text{ existe}\}$$
$$StS_{wc}(\sum_i x_i) = \{(a_i)_i \in \ell_\infty : st - wc\sum_i a_i x_i \text{ existe}\}$$

Corolario

Sea X un espacio de Banach y $\sum_i x_i$ una serie en X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

I.- $\sum_i x_i$ *es ico.*

II.- $StS_c(\sum_i x_i) = \ell_\infty$.

III.- $StS_{wc}(\sum_i x_i) = \ell_\infty$.

Problema

Sea X un espacio de Banach y $\sum_i x_i$ una serie en X.

Sabemos que si para cada subconjunto $M \subset \mathbb{N}$ infinito existe $R \subset M$ infinito y $x_0 \in X$ de forma que $w \sum_{i \in R} x_i = x_0$ entonces $\sum_i x_i$ es ico.

¿Será cierto si cambiamos $w \sum_{i \in R} x_i = x_0$ por $st - wc \sum_{i \in R} x_i = x_0$?

PROBLEMA

Sea X un espacio de Banach y $\sum_i x_i$ una serie en X.

Sabemos que si para cada subconjunto $M \subset \mathbb{N}$ infinito existe $R \subset M$ infinito y $x_0 \in X$ de forma que $w \sum_{i \in R} x_i = x_0$ entonces $\sum_i x_i$ es ico.

¿Será cierto si cambiamos $w \sum_{i \in R} x_i = x_0$ por $st - wc \sum_{i \in R} x_i = x_0$?

Problema

Sea X un espacio de Banach y $\sum_i x_i$ una serie en X.

Sabemos que si para cada subconjunto $M \subset \mathbb{N}$ infinito existe $R \subset M$ infinito y $x_0 \in X$ de forma que $w \sum_{i \in R} x_i = x_0$ entonces $\sum_i x_i$ es ico.

¿Será cierto si cambiamos $w \sum_{i \in R} x_i = x_0$ por $st - wc \sum_{i \in R} x_i = x_0$?