Algunas propiedades de las m-isometrías

Antonio Martinón

Universidad de La Laguna

VI Encuentro de Análisis Funcional y Aplicaciones

Salobreña (Granada), 15-17 de abril de 2010

- T. Bermúdez, I. Marrero, A. Martinón:
  On the orbit of an m-isometry.
  Integral Equations and Operator Theory (2009).
- T. Bermúdez, A. Martinón, E. Negrín:
  Weighted shift operators which are m-isometries.
  Integral Equations and Operator Theory (to appear).
- T. Bermúdez, A. Martinón:
  Powers of m-isometries (In preparation).

m-**isometrías**

- H un espacio de Hilbert

  $L(H)$ álgebra de operadores

  $T \in L(H)$

- T es *isometría* si

$$d(Tx, Ty) = d(x, y) \quad (x, y \in H)$$

- T es isometría si

$$\|Tx - Ty\| = \|x - y\| \quad (x, y \in H)$$

- T es isometría si

$$\|Tx\| = \|x\| \quad (x \in H)$$

- T es *isometría parcial* si T es isometría sobre $\ker(T)^{\perp}$
- T es *casi isometría* si T es isometría sobre ran(T)

- T es 1-isometría si

$$T^*T - I = 0$$

- T es 2-isometría si

$$T^{*2}T^2 - 2T^*T + I = 0$$

- T es 3-isometría si

$$T^{*3}T^3 - 3T^{*2}T^2 + 3T^*T - I = 0$$

Definición 1. Dado $m = 1, 2, 3...$, se dice que $T \in L(H)$ es m-*isometría* si

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} T^{*k} T^{k} = 0$$

- J. Agler: A disconjugacy theorem for Toeplitz operators. *Amer. J. Math.* (1990)
- J. Agler, M. Stankus; m-isometric transformations of Hilbert space, I, II, III. Integr. Equat. Oper. Th. (1995,1996)

- T es m-isometría $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in H, \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \|T^k x\|^2 = 0$$

- T es m-isometría $\Rightarrow$

$$\forall k \geq 1, T \text{ es } (m+k) - \text{isometría}$$

- T es m-isometría $\Rightarrow$

$$T \text{ es isomorfismo (inyectivo y rango cerrado)}$$

- T es m-isometría $\Rightarrow$

$$\sigma(T) \subset \partial\mathbb{D} \text{ ó } \sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$$

- T es m-isometría y de potencia acotada $\Rightarrow$

$$T \text{ es isometría}$$

- Para $T \in L(H)$ y $k = 0, 1, 2...$:

$$\beta_k(T) := \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} T^{*j} T^j$$

- T es m-isometría $\Rightarrow \forall k \geq m, \beta_k(T) = 0$

Definición 2. *Dada una m-isometría T, el* operador covarianza *es*

$$\Delta_T := \beta_{m-1}(T)$$

Proposición 1 (Agler, Stankus, 1995)**.** Si T es una m-isometría, entonces

1. Δ_T es un operador positivo
2. $\ker(\Delta_T)$ es un subespacio invariante para T y $T|\ker(\Delta_T)$ es una $(m-1)$-isometría

- Para $n = 0, 1, 2...$ y $k = 0, 1, 2...$, se denota

$$n^{(k)} := \begin{cases} 1 & \text{si } nk = 0 \\ n(n-1)\cdots(n-k+1) & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 2 (Agler, Stankus, 1995)**.** Para cualquier $T \in L(H)$,

1. $T^{*n}T^n = \sum_{k=0}^{n} n^{(k)} \beta_k(T)$
2. $\|T^n x\|^2 = \sum_{k=0}^{n} n^{(k)} \langle \beta_k(T)x, x \rangle$
3. si T es m-isometría:

$$\|T^n x\|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} n^{(k)} \langle \beta_k(T)x, x \rangle$$

- si T es m-isometría:

$$\|T^n x\|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \|T^i x\|^2 \right)$$

Proposición 3. $T \in L(H)$ es m-isometría si y sólo si, para $x \in H$, $n = 0, 1, 2...,$

$$\|T^n x\|^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} \frac{n(n-1)\cdots \overbrace{(n-k)} \cdots (n-m+1)}{k!\,(m-k-1)!} \|T^k x\|^2$$

Producto de isometrías

- T, S isometrías $\Rightarrow TS$ isometría
- T isometría $\Rightarrow T^n$ isometría
- T^2 isometría $\not\Rightarrow T$ isometría
- T^n y T^{n+1} isometrías $\Rightarrow T$ isometría

Producto de m-isometrías

- T 2-isometría y S isometría $\not\Rightarrow$ TS 2-isometría
- T m-isometría $\Rightarrow$ T^n m-isometría
- T^2 m-isometría $\not\Rightarrow$ T m-isometría
- T^n y T^{n+1} 2-isometrías $\Rightarrow$ T 2-isometría

Conjetura 1. *T^n y T^{n+1} m-isometrías $\Rightarrow$ T m-isometría*

Operador traslación

- $w = (w_n)_{n \geq 1} \in \ell_\infty$; $w_0 = 1$
- $S_w : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$, $S_w e_n = w_n e_{n+1}$ $(n \geq 1)$
- $S_w x = S_w(x_1, x_2, x_3 ...) = (0, w_1 x_1, w_2 x_2, w_3 x_3 ...)$
- S_w es m-isometría $\Rightarrow \forall n \geq 1, w_n \neq 0$

- $n = 0, 1, 2..$:

$$R_n^{(m)} =$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \frac{n(n-1)\cdots\overbrace{(n-k)}\cdots(n-m+1)}{k!\,(m-k-1)!} |w_0 w_1 \cdots w_k|^2$$

- Si S_w es m-isometría y $n = 0, 1, 2..$:

$$R_n^{(m)} = \|S_w^n e_1\|^2 = |w_0 w_1 \cdots w_n|^2$$

Teorema 1. S_w es m-isometría $\Leftrightarrow$ para todo $n \geq 1$,

$$|w_n|^2 = \frac{R_n^{(m)}}{R_{n-1}^{(m)}} > 0$$

Lema 1. *Lema combinatorio.*

Para $n, m = 1, 2, 3..$ y $h = 0, 1, ..., m - 1$:

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{(n+k-1)\cdots\overbrace{(n+k-1-h)}\cdots(n+k-m)}{k!\,(m-k)!} = 0$$

Casos particulares:

- S_w es isometría $\Leftrightarrow$ para todo $n \geq 1$,

$$|w_n| = 1$$

- S_w es 2-isometría $\Leftrightarrow$ para todo $n \geq 1$,

$$|w_n|^2 = \frac{n|w_1|^2 - (n-1)}{(n-1)|w_1|^2 - (n-2)} > 0$$

- S_w es 3-isometría $\Leftrightarrow$ para todo $n \geq 1$,

$$|w_n|^2 =$$

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}|w_1 w_2|^2 - n(n-2)|w_1|^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}}{\frac{(n-1)(n-2)}{2}|w_1 w_2|^2 - (n-1)(n-3)|w_1|^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}} > 0$$

Proposición 4. *(Athavale, 1991)* Sea $w(m) = (w_n(m))_{n\geq 1}$, siendo

$$w_n(m) = \sqrt{\frac{n+m}{n}}$$

Entonces $S_{w(m)}$ es $(m+1)$-isometría, pero no m-isometría.

Corolario 1. $1\text{-}Isom \subsetneq 2\text{-}Isom \subsetneq 3\text{-}Isom \subsetneq \cdots$

Dinámica de m-isometrías

- Para $T \in L(H)$ y $A \subset H$, se define la *órbita*

$$\mathrm{Orb}(T, A) := \{T^n x \ : \ x \in A, \ n = 0, 1, 2...\}$$

- T es *supercíclico* si $\mathrm{Orb}(T, \mathrm{lin}\{x\})$ es densa en H, para cierto $x \in H$
- T es *N-supercíclico* si $\mathrm{Orb}(T, \mathrm{lin}\{x_1, ..., x_N\}$ es densa en H, para ciertos $x_1, ..., x_N \in H$

Algunos resultados conocidos

- Ninguna m-isometría es supercíclica [Faghih Ahmadi, Hedayatian, 2009]
- Ningún operador normal es N-supercíclico [Hilden, Wallen, 1974]

En consecuencia

- Ninguna isometría es N-supercíclica:

  T isometría N-supercíclica

  $\Rightarrow T$ isometría con rango denso

  $\Rightarrow T$ unitario

  $\Rightarrow T$ normal

  $\Rightarrow T$ no es N-supercíclico: ¡contradicción!

Proposición 5 (Faghih Ahmadi, Hedayatian, 2010). *Si T es m-isometría, entonces la sucesión $(\|T^n x\|)_{n\geq 1}$ es eventualmente creciente o eventualmente decreciente*

Proposición 6. Si T es m-isometría, entonces la sucesión $(\|T^n x\|)_{n\geq 1}$ es eventualmente creciente

Teorema 2. Si T es una m-isometría con operador covarianza $\beta_{m-1}(T) = \Delta_T$ inyectivo, entonces T no es N-supercíclico.

Demostración Sea T una m-isometría

Se verifica

- $\dfrac{\|T^n x\|^2}{n^{m-1}} \to \langle \Delta_T x, x\rangle \ (n \to \infty)$ unif en B_H
- $\dfrac{\|T^n\|^2}{n^{m-1}} \to \left\|\sqrt{\Delta_T}\right\|^2 \ (n \to \infty)$

De ahí se deduce

- $\exists \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall n \geq 1,$

$$\varepsilon < \frac{\|T^n\|}{\sqrt{n^{m-1}}} < M$$

- $\forall x \in H, x \neq 0, \exists \delta_x > 0,$

$$\delta_x < \frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|}$$

Estas dos propiedades permiten aplicar [Ansari, Bourdon, 1997; Ansari, Enflo, 1998] y obtener

- Existen $\widetilde{H}$ de Hilbert, $\widetilde{T}$ isometría en $\widetilde{H}$ y $S : H \to \widetilde{H}$ con rango denso tal que $ST = \widetilde{T}S$:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & H \arrow[d, "S"] \\ \widetilde{H} \arrow[r, "\widetilde{T}"] & \widetilde{H} \end{tikzcd}$$

Como ninguna isometría es N-supercíclica se tiene

- $\widetilde{T}$ no es N-supercíclico

Aplicamos [Martínez-Giménez, Peris, 2002, para hipercíclicos]: sean $T_i : X_i \to X_i$, $S : X_1 \to X_2$ con rango denso tal que

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "S"'] & X_1 \arrow[d, "S"] \\ X_2 \arrow[r, "T_2"] & X_2 \end{tikzcd}$$

Si T_1 es N-supercíclico, entonces T_2 es N-supercíclico.

Finalmente, como $\widetilde{T}$ no es N-supercíclico

- T no es N-supercíclico

Conjetura 2. Ninguna m-isometría es N-supercíclica

Teorema 3 (Bayart,2009)**.** Ninguna m-isometría es N-supercíclica

m-isometrías en espacios de Banach y en espacios métricos

Generalización a espacios de Banach

- Sean X un espacio de Banach, $T : X \longrightarrow X$ lineal y continuo
- (Bayart, 2009; Sid Ahmed, 2010) Para $m = 1, 2, 3...$ y $1 \leq p$: T es una (p, m)-isometría si

$$\forall x \in X, \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \|T^k x\|^p = 0$$

- T es una m-isometría si es (p, m)-isometría para algún p

Generalización a espacios métricos

- Sean E un espacio métrico, $T : E \longrightarrow E$.
- Para $m = 1, 2, 3...$ y $1 \leq p$: T es una (p, m)-isometría si

$$\forall x, y \in E, \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} d(T^k x, T^k y)^p = 0$$

- T es una m-isometría si es (p, m)-isometría para algún p

- **Teorema de Mazur-Ulam.** Sea X un espacio de Banach real y $T : X \longrightarrow X$ isometría biyectiva con $T0 = 0$. Entonces T es lineal.
- **Problema.** Sea X un espacio de Banach real y $T : X \longrightarrow X$ m-isometría biyectiva con $T0 = 0$. ¿Entonces T es lineal?

- Sean H un espacio de Hilbert y

$$b(H) = \{C \subset H : C \neq \emptyset \text{ y acotado}\}$$

- La semidistancia de Hausdorff en $b(X)$ se define por

$$h(C, D) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : C \subset D + \varepsilon B_H \ , \ D \subset C + \varepsilon B_H\}$$

- Para $C \in b(H)$ se define su norma

$$\|C\| = \sup\{\|x\| : x \in C\} = h(C, \{0\})$$

- $\mathcal{T} : b(H) \longrightarrow b(H)$ es 2-isometría si

$$h(\mathcal{T}^2 C, \mathcal{T}^2 D)^2 - 2h(\mathcal{T}C, \mathcal{T}D)^2 + h(C, D)^2 = 0 \ .$$

- Para $T \in L(H)$ se define

$$b(T) : b(H) \longrightarrow b(H) \quad , \quad b(T)C = TC$$

- $b(T)$ es lineal y acotada
- T isometría $\Rightarrow b(T)$ isometría
- $b(T)$ es 2-isometría si

$$\|b(T)^2 C\|^2 - 2\|b(T)C\|^2 + \|C\|^2 = 0$$

- ¿T m-isometría $\Rightarrow b(T)$ m-isometría? NO
- Sea $S_w : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ una 2-isometría que no es isometría. Entonces
$$b(S_w) : b(\ell_2) \longrightarrow b(\ell_2)$$
no es 2-isometría