# Desigualdades de Sobolev afines

Jesús Bastero

Universidad de Zaragoza

Salobreña, 15 de Abril de 2010

# Notación

- $\omega_n$ medida Lebesgue de la bola euclidea unidad
- $(S^{n-1}, du)$ esfera euclidea con la probabilidad normalizada

# Notación

- Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible entonces
  $f^* : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ (reordenamiento no creciente de $f$)

$$f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda > 0; |\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > \lambda\}| \leq t\}$$

- $f^\circ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (simetrizada de Schwarz)

$$f^\circ(x) = f^*(|x|^n \omega_n)$$

- $f, f^*, f^\circ$ tienen los mismos conjuntos de nivel

# Notación

- Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible entonces
  $f^* : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ (reordenamiento no creciente de $f$)

$$f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda > 0; |\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > \lambda\}| \leq t\}$$

- $f^\circ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (simetrizada de Schwarz)

$$f^\circ(x) = f^*(|x|^n \omega_n)$$

- $f, f^*, f^\circ$ tienen los mismos conjuntos de nivel
- Transformada de Hardy

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

# Espacios de Sobolev

Sea $m \in N$, $p \geq 1$, $\Omega$ un dominio en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) = \{ & f : \Omega \to \mathbb{R}, f \in L^p(\Omega), \\ & D^\alpha f = g_\alpha, \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \} \end{aligned}$$

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \|f\|_p + \sum_\alpha \|g_\alpha\|_p$$

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \text{clausura de las funciones test en} W^{m,p}(\Omega)$$

## Teorema de inclusión. (Sobolev, Kondrashov, Il'in $\sim$ 1930)

Sea $1 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq m$, $1 < p < q < \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con la "cone property"

$$\boxed{\frac{k}{q} = \frac{n}{p} - (m - l)}$$

entonces

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{l,q}(\Omega^k)$$

donde $\Omega^k = \Omega \cap E$, $E$ es un plano $k$-dimensional

# Caso $k = n$, $m = 1$, $l = 0$

$$\boxed{\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}}$$

$$1 \leq p < n \qquad \Rightarrow \qquad \frac{n}{n-1} \leq q < \infty$$

entonces

# Caso $k = n$, $m = 1$, $l = 0$

$$\boxed{\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}}$$

$$1 \leq p < n \qquad \Rightarrow \qquad \frac{n}{n-1} \leq q < \infty$$

entonces

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

# Caso $k = n$, $m = 1$, $l = 0$

$$\boxed{\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}}$$

$$1 \leq p < n \qquad \Rightarrow \qquad \frac{n}{n-1} \leq q < \infty$$

entonces

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

es decir,

$$\|f\|_q \leq c_{n,p} \|\nabla f\|_p$$

- $\boxed{\text{¿Qué sucede si } p = n\text{?}}$
- $\boxed{\text{Cálculo de las mejores constantes}}$

# Caso $p = n$, $q = \infty$

$$W^{1,n}(\Omega) \not\subseteq L^{\infty}(\Omega)$$

# Caso $p = n$, $q = \infty$

$$W^{1,n}(\Omega) \not\subseteq L^{\infty}(\Omega)$$

### Moser-Trudinger, 1969-70

Existe una constante $m_n > 0$ tal que

$$\boxed{W^{1,n}(\Omega) \subseteq \mathcal{MT}(\Omega)}$$

con $\mathcal{MT}(\Omega) = \{f; \|f\|_{\mathcal{MT}} < \infty\}$ siendo

$$f_{\mathcal{MT}} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0; \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \exp\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-1}} dx \leq m_n\right\}$$

es decir

$$\boxed{n\omega_n^{1/n}\|f\|_{\mathcal{MT}} \leq \|\nabla f\|_n}$$

## Hansson (1979), Brezis-Wainger (1980)

Supongamos que $|\Omega| < \infty$. Entonces

$$\boxed{W^{1,n}(\Omega) \subseteq H_n(\Omega)} \subseteq \mathcal{MT}(\Omega)$$

es decir,

$$c_n \|f\|_{\mathcal{MT}} \leq \boxed{\|f\|_{H_n(\Omega)} \leq d_n \|\nabla f\|_n}$$

siendo

$$H_n(\Omega) = \{f : \|f\|_{H_n(\Omega)} = \left[\int_0^{|\Omega|} \left(\frac{f^{**}(s)}{1 + \log \frac{|\Omega|}{s}}\right)^n \frac{ds}{s}\right]^{1/n} < \infty\}.$$

donde $H_n(\Omega)$ es es espacio óptimo entre los r.i.

## Bennet, DeVore, Sharpley (1981)

$$\boxed{W_0^{1,L(n,\infty)}(\mathbb{R}^n) \subset L(\infty,\infty)(\mathbb{R}^n)}$$

donde

$$L_{\infty,\infty} = \{f; \|f\|_{\infty,\infty} = \|f^{**}(t) - f^*(t)\| < \infty\}$$

es decir,

$$\boxed{\|f\|_{\infty,\infty} \leq c_n \|t^{1/n} |\nabla f|^*(t)\|_\infty}$$

## Maly, Pick(2002) y B., Milman, Ruiz (2003)

Si llamamos

$$\mathcal{A}_n(\Omega) = \{f; \|f\|_{\infty,n} = \left(\int_0^{|\Omega|} (f^{**}(t) - f^*(t))^n \frac{dt}{t}\right)^{1/n} < \infty\}$$

entonces

$$\boxed{W_0^{1,n}(\Omega) \subseteq \mathcal{A}_n(\Omega)} \subseteq H_n(\Omega)$$

es decir,

$$c_n \|f\|_{H(\Omega)} \leq \boxed{(n-1)\,\omega_n^{\frac{1}{n}} \|f\|_{\infty,n} \leq \|\nabla f\|_n}$$

# Mejores constantes. Caso $p = 1$

$$\boxed{q = \frac{n}{n-1}}$$

$$\boxed{W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}$$

# Mejores constantes. Caso $p = 1$

$$\boxed{q = \frac{n}{n-1}} \qquad \boxed{W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}$$

**H. Federer, W. Fleming, V. Maz'ja (1960,1961)**

$$\boxed{n\omega_n^{\frac{1}{n}} \|f\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \|\nabla f\|_1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n\omega_n^{\frac{1}{n}} |K|^{\frac{n-1}{n}} \leq |\partial K|$$

# Mejores constantes. Caso $p = 1$

$$\boxed{q = \frac{n}{n-1}} \qquad \boxed{W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}$$

## H. Federer, W. Fleming, V. Maz'ja (1960,1961)

$$\boxed{n\omega_n^{\frac{1}{n}} \|f\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \|\nabla f\|_1} \quad \Longleftrightarrow \quad n\omega_n^{\frac{1}{n}} |K|^{\frac{n-1}{n}} \leq |\partial K|$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{|\partial B_2^n|^{\frac{1}{n-1}}}{|B_2^n|^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{|\partial K|^{\frac{1}{n-1}}}{|K|^{\frac{1}{n}}}$$

# Mejores constantes. Caso $p = 1$

$$\boxed{q = \frac{n}{n-1}} \qquad \boxed{W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}$$

**H. Federer, W. Fleming, V. Maz'ja (1960,1961)**

$$\boxed{n\omega_n^{\frac{1}{n}} \|f\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \|\nabla f\|_1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n\omega_n^{\frac{1}{n}} |K|^{\frac{n-1}{n}} \leq |\partial K|$$

$$\Updownarrow$$

$$(n-1)\omega_n^{\frac{1}{n}} \|f\|_{L^{\frac{n}{n-1},1}} \leq \|\nabla f\|_1$$

## Mejores constantes. Caso $p = 1$

$$\boxed{q = \frac{n}{n-1}} \qquad\qquad \boxed{W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}$$

### H. Federer, W. Fleming, V. Maz'ja (1960,1961)

$$\boxed{n\omega_n^{\frac{1}{n}} \|f\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \|\nabla f\|_1} \quad \Longleftrightarrow \quad n\omega_n^{\frac{1}{n}} |K|^{\frac{n-1}{n}} \leq |\partial K|$$

Recordemos:

$$\|f\|_{L^{p,1}} = \int_0^\infty f^*(t) t^{-1/p} dt \geq p\|f\|_{L^p}$$

# Cómo demostrar las desigualdades de Soblolev con las mejores constantes

$$1 \leq p < n \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_q \leq c_{p,n} \|\nabla f\|_p$$

# Cómo demostrar las desigualdades de Soblolev con las mejores constantes

$$1 \leq p < n \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_q \leq c_{p,n} \|\nabla f\|_p$$

Primer paso

$$\|f\|_q \quad \overset{\substack{\text{desigualdades}\\ \text{de}\\ \text{Hardy}}}{\leq} \quad \|\nabla f^{\circ}\|_p$$

# Cómo demostrar las desigualdades de Soblolev con las mejores constantes

$$1 \leq p < n \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_q \leq c_{p,n} \|\nabla f\|_p$$

**Primer paso**

$$\|f\|_q \quad \overset{\substack{\text{desigualdades}\\ \text{de}\\ \text{Hardy}}}{\leq} \quad \|\nabla f^\circ\|_p$$

**Segundo paso**

$$\|\nabla f^\circ\|_p \quad \overset{\substack{\text{desigualdad}\\ \text{isoperimétrica}\\ +\,\text{coárea}}}{\leq} \quad \|\nabla f\|_p \quad \text{(Polya-Szego)}$$

# Desigualdad de Hardy

Si $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ es una función medible positiva y $p > 1$,

$$\left( \int_0^\infty \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left( \int_0^\infty f(x)^p dx \right)^{1/p}$$

# Desigualdad de Hardy

Si $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ es una función medible positiva y $p > 1$,

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty f(x)^p dx\right)^{1/p}$$

- $\|F'\|_p$ controla a la norma $\|x^{-1}F\|_p$
- Variaciones con pesos y diferentes exponentes $p, q$
- Se conocen las mejores constantes

# Fórmula de la coárea

Sea $\Omega$ una variedad $m$-dimensional, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible positiva o inegrable en $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^{(m}$, entonces

$$\int_{\Omega} F(x)|\nabla f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\{z\in\Omega; f(z)=t\}} F(z) dm_{n-1}(z) \right) dt$$

## Caso $p = 1$

Usamos: la fórmula de la coárea de Federer, la $\boxed{\text{D. I.}}$ y las $\boxed{\boxed{\text{D.H.}}}$

$$\|\nabla f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx \overset{\downarrow}{=} \int_0^\infty |\{x; |f(x)| = t\}| dt$$

$$\overset{\text{T. Sard}}{=} \int_0^\infty |\partial\{x; |f(x)| \geq t\}| dt \overset{\boxed{\downarrow}}{\geq} n\omega_n^{\frac{1}{n}} \int_0^\infty |\{x; |f(x)| \geq t\}|^{\frac{n-1}{n}} dt$$

$$= n\omega_n^{\frac{1}{n}} \int_0^\infty |\{x; |f^\circ(x)| \geq t\}|^{\frac{n-1}{n}} dt = \int_0^\infty |\partial\{x; |f^\circ(x)| \geq t\}| dt$$

$$= \int_0^\infty |\{x; |f^\circ(x)| = t\}| dt = \|\nabla f^\circ\|_1$$

$$\overset{\boxed{\boxed{\downarrow}\ \text{(igualdad en este caso)}}}{\geq} (n-1)\omega_n^{1/n} \|f\|_{\frac{n}{n-1},1}$$

## Desigualdad de Petty ('50)

$$n\omega_n^{1/n}|K|^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{n\omega_n}{\omega_{n-1}}\left(\int_{S^{n-1}} \frac{du}{|P_u(K)|^n}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

## Desigualdad de Petty ('50)

$$n\omega_n^{1/n}|K|^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{n\omega_n}{\omega_{n-1}}\left(\int_{S^{n-1}}\frac{du}{|P_u(K)|^n}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

Aplicando que $\|\cdot\|_{-n} \leq \|\cdot\|_1$ + fórmula de Cauchy para la superficie

$$\left(\int_{S^{n-1}}\frac{du}{|P_u(K)|^n}\right)^{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\omega_{n-1}}{n\,\omega_n}|\partial K|$$

## Desigualdad de Petty ('50)

$$n\omega_n^{1/n}|K|^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{n\omega_n}{\omega_{n-1}} \left( \int_{S^{n-1}} \frac{du}{|P_u(K)|^n} \right)^{-\frac{1}{n}}$$

Aplicando que $\|\cdot\|_{-n} \leq \|\cdot\|_1$ + fórmula de Cauchy para la superficie

$$\left( \int_{S^{n-1}} \frac{du}{|P_u(K)|^n} \right)^{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\omega_{n-1}}{n\,\omega_n}|\partial K|$$

$$\boxed{n\,\omega_n^{1/n}|K|^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{n\,\omega_n}{\omega_{n-1}} \left( \int_{S^{n-1}} \frac{du}{|P_u(K)|^n} \right)^{-\frac{1}{n}}} \leq |\partial K|$$

- Esta nueva desigualdad es $\boxed{\text{mejor que la isoperimétrica}}$ y es $\boxed{\text{invariante afín}}$

# Desigualdades de Sobolev afines

## Caso $p = 1$, G. Zhang (1999)

Introduce una nueva “clase ”, integral de energía,

$$\mathcal{E}_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \mathcal{E}_p(f) = c_{n,p} \left( \int_{S^{n-1}} \|D_u f\|_p^{-n} du \right)^{-\frac{1}{n}} < \infty \right\}$$

donde

# Desigualdades de Sobolev afines

## Caso $p = 1$, G. Zhang (1999)

Introduce una nueva “clase ”, integral de energía,

$$\mathcal{E}_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \mathcal{E}_p(f) = c_{n,p} \left( \int_{S^{n-1}} \|D_u f\|_p^{-n} du \right)^{-\frac{1}{n}} < \infty \right\}$$

donde

$$c_{n,p} = \left( \int_{S^{n-1}} |u_1|^p du \right)^{-1/p}$$

y

$$\|D_u f\|_p = \left( \int_{\Omega} |\langle \nabla f(x), u \rangle|^p dx \right)^{1/p}$$

La clase $\mathcal{E}_p(\Omega)$ es invariante afín, es decir, si $T \in GL(n)$ con $\det T = \pm 1$ $a \in \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sea $F(x) = f(a + Tx) : \Delta \to \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{E}_p(f) = \mathcal{E}_p(F)$$

pues

$$\mathcal{E}_p(f) = c_n \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|D_y f\|_p^n} dy \right)^{-\frac{1}{n}} = c_n \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|D_x F\|_p^n} dx \right)^{-\frac{1}{n}} = \mathcal{E}_p(F)$$

Sin embargo

$$\langle \nabla F(x), \nabla F(x) \rangle = (\text{regla de la cadena}) = \langle \nabla f(x)^t T^t, T \nabla f(x) \rangle$$

con lo que $\|\nabla f\|_p = \|\nabla F\|_p$ sólo para $T$ ortogonal

## Desigualdad de Zhang

$$W_0^{1,1}(\Omega) \subseteq \boxed{\mathcal{E}_1(\Omega) \subseteq L^{\frac{n}{n-1},1}(\Omega)}$$

$$\boxed{n\,\omega_n^{\frac{1}{n}} \|f\|_{\frac{n}{n-1},1} \leq \mathcal{E}_1(f)} \leq \|\nabla f\|_1$$

## Desigualdad de Zhang

$$W_0^{1,1}(\Omega) \subseteq \boxed{\mathcal{E}_1(\Omega) \subseteq L^{\frac{n}{n-1},1}(\Omega)}$$

$$\boxed{n\,\omega_n^{\frac{1}{n}}\|f\|_{\frac{n}{n-1},1} \leq \mathcal{E}_1(f)} \leq \|\nabla f\|_1$$

$$\Updownarrow$$

## Desigualdad de la proyección de Petty

$$|K|^{\frac{n-1}{n}} \leq \omega_n^{-1/n}\left(\int_{S^{n-1}} \frac{du}{|P_u(K)|^n}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

## Desigualdad de Zhang

$$W_0^{1,1}(\Omega) \subseteq \boxed{\mathcal{E}_1(\Omega) \subseteq L^{\frac{n}{n-1},1}(\Omega)}$$

$$\boxed{n\,\omega_n^{\frac{1}{n}} \|f\|_{\frac{n}{n-1},1} \leq \mathcal{E}_1(f)} \leq \|\nabla f\|_1$$

$$\Updownarrow$$

## Desigualdad de la proyección de Petty

$$|K|^{\frac{n-1}{n}} \leq \omega_n^{-1/n} \left( \int_{S^{n-1}} \frac{du}{|P_u(K)|^n} \right)^{-\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{\text{Son invariantes afínes}}$$

# Caso $1 < p < n$

**E. Lutwak, D. Yang, G. Zhang (2003)**

$$\boxed{c(n,p)\|f\|_q \leq \mathcal{E}_p} \leq \|\nabla f\|_p$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq \boxed{\mathcal{E}_p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)}$$

# Cómo demostrar las desigualdades afines de Soblolev con las mejores constantes

$$1 \leq p < n \qquad \Longrightarrow \qquad c_{p,n}\|f\|_q \leq \mathcal{E}_p(f) \leq \|\nabla f\|_p$$

# Cómo demostrar las desigualdades afines de Soblolev con las mejores constantes

$$1 \leq p < n \qquad \Longrightarrow \qquad c_{p,n}\|f\|_q \leq \mathcal{E}_p(f) \leq \|\nabla f\|_p$$

Primer paso

$$c_{p,n}\|f\|_q \quad \overset{\substack{\text{desigualdades}\\ \text{de}\\ \text{Hardy}}}{\leq} \quad \mathcal{E}_p(f^\circ)$$

# Cómo demostrar las desigualdades afines de Soblolev con las mejores constantes

$$1 \le p < n \qquad \Longrightarrow \qquad c_{p,n}\|f\|_q \le \mathcal{E}_p(f) \le \|\nabla f\|_p$$

**Primer paso**

$$c_{p,n}\|f\|_q \quad \overset{\substack{\text{desigualdades}\\ \text{de}\\ \text{Hardy}}}{\le} \quad \mathcal{E}_p(f^\circ)$$

**Segundo paso**

$$\mathcal{E}_p(f^\circ) \quad \overset{\substack{\text{fórmula de la coárea}\\ +\text{ des. de Petty, si } p=1\\ \text{o teoría } L^p\text{-BM } p>1}}{\le} \quad \mathcal{E}_p(f) \quad \text{(mejora de Polya-Szego)}$$

# Cómo demostrar las desigualdades afines de Soblolev con las mejores constantes

$$1 \leq p < n \qquad \Longrightarrow \qquad c_{p,n}\|f\|_q \leq \mathcal{E}_p(f) \leq \|\nabla f\|_p$$

Primer paso

$$c_{p,n}\|f\|_q \quad \overset{\substack{\text{desigualdades}\\ \text{de}\\ \text{Hardy}}}{\leq} \quad \mathcal{E}_p(f^\circ)$$

Una versión de

$$\mathcal{E}_p(f^\circ) \leq c\sqrt{p}\ \mathcal{E}_p(f)$$

se deduce del caso $p = 1$

## Cómo demostrar las desigualdades afines de Soblolev con las mejores constantes

$$1 \leq p < n \qquad \Longrightarrow \qquad c_{p,n}\|f\|_q \leq \mathcal{E}_p(f) \leq \|\nabla f\|_p$$

**Primer paso**

$$c_{p,n}\|f\|_q \overset{\substack{\text{desigualdades}\\ \text{de}\\ \text{Hardy}}}{\leq} \mathcal{E}_p(f^\circ)$$

**Segundo paso**

$$\mathcal{E}_p(f^\circ) \overset{\substack{\text{fórmula de la coárea}\\ +\text{ des. de Petty, si } p=1\\ \text{o teoría } L^p\text{-BM } p>1}}{\leq} \mathcal{E}_p(f) \quad \text{(mejora de Polya-Szego)}$$

**Tercer paso**

$$\mathcal{E}_p(f) \overset{\substack{\text{desigualdad}\\ \text{Jensen}}}{\leq} \|\nabla f\|_p$$

# Caso $p = n$, desigualdades afines

**Haberl, Schuster (2009)**

$$W_0^{1,n}(\Omega) \subseteq \boxed{\mathcal{E}_n(\Omega) \subseteq \mathcal{MT}(\Omega)}$$

$$\boxed{c_n \|f\|_{\mathcal{MT}} \leq \mathcal{E}_n(f)} \leq \|\nabla f\|_n$$

# Caso $p = n$, desigualdad afín

**Teorema (Alonso, B., Bernués)**

$$W_0^{1,n}(\Omega) \subseteq \boxed{\mathcal{E}_n(\Omega) \subseteq \mathcal{A}_n(\Omega)} \subseteq H_n(\Omega) \subseteq \mathcal{MT}(\Omega)$$

$$\boxed{n\omega_n^{1/n}\|f\|_{\infty,n} \leq \ \mathcal{E}_n(f)} \leq \|\nabla f\|_n$$

# Caso $p = n$, desigualdad afín

**Teorema (Alonso, B., Bernués)**

$$W_0^{1,n}(\Omega) \subseteq \boxed{\mathcal{E}_n(\Omega) \subseteq \mathcal{A}_n(\Omega)} \subseteq H_n(\Omega) \subseteq \mathcal{MT}(\Omega)$$

$$\boxed{n\omega_n^{1/n}\|f\|_{\infty,n} \leq \mathcal{E}_n(f)} \leq \|\nabla f\|_n$$

Igualdad si y sólo si $f(x) = C \log\left(\frac{1}{\omega_n^{1/n}|x|}\right)_+$

# Caso $p > n$, $q < 0$

**Teorema (Alonso, B., Bernués)**

Sea $p > n$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, luego $q < 0$

# Caso $p > n$, $q < 0$

## Teorema (Alonso, B., Bernués)

Sea $p > n$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$, luego $q < 0$

Entonces

$$\mathcal{B}_q(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \|f\|_{\mathcal{B}_q} = \sup_t \left(\|f\|_\infty - f^*(t)\right) t^{1/q} < \infty\}$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq \boxed{\mathcal{E}_p(\Omega) \subseteq \mathcal{B}_q(\Omega) \cap \mathcal{A}_p(\Omega)}$$

# Caso $p > n$, $q < 0$

## Teorema (Alonso, B., Bernués)

Sea $p > n$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$, luego $q < 0$

Entonces

$$\mathcal{B}_q(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \|f\|_{\mathcal{B}_q} = \sup_t \left(\|f\|_\infty - f^*(t)\right) t^{1/q} < \infty\}$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq \boxed{\mathcal{E}_p(\Omega) \subseteq \mathcal{B}_q(\Omega) \cap \mathcal{A}_p(\Omega)}$$

$$\boxed{n\omega_n^{1/n} \,\text{máx}\left\{\|f\|_{\mathcal{B}_q}, \|f\|_{\mathcal{A}_p}\right\} \leq \left(\frac{|q|}{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \mathcal{E}_p(f)} \leq \left(\frac{|q|}{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \|\nabla f\|_p$$