Condiciones no lineales para operadores composición con peso entre álgebras de funciones lipschitzianas

María José Burgos Navarro, Antonio Jiménez Vargas y Moisés Villegas Vallecillos

Universidad de Almería

V Encuentro de Análisis Funcional y Aplicaciones (Salobreña, 2009)

Condiciones no lineales para operadores composición con peso

El Teorema de Banach-Stone

Sean X e Y dos espacios topológicos compactos de Hausdorff y $T : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$ una isometría lineal sobreyectiva. Entonces existen un homeomorfismo $\varphi : Y \longrightarrow X$ y una función continua $\tau \in \mathcal{C}(Y)$ con $|\tau(y)| = 1$ para todo $y \in Y$ tales que

$$T(f)(y) = \tau(y) f(\varphi(y)) \quad \forall y \in Y, \ \forall f \in \mathcal{C}(X).$$

Operador composición con peso

Sean X e Y dos espacios topológicos compactos, $\mathcal{A}$ una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{B}$ una subálgebra de $\mathcal{C}(Y)$ y $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación. Se dice que T es un operador composición con peso si existe un homeomorfismo $\varphi : Y \longrightarrow X$ y una función $\tau : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) con $|\tau(y)| = 1$ para todo $y \in Y$, tales que

$$T(f)(y) = \tau(y) f(\varphi(y)) \quad \forall y \in Y,\ \forall f \in \mathcal{A}.$$

Proposición

Sean X e Y dos espacios topológicos compactos de Hausdorff y $T : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$ un isomorfismo de álgebras. Entonces existe un homeomorfismo $\varphi : Y \longrightarrow X$ tal que

$$T(f)(y) = f(\varphi(y)) \quad \forall y \in Y, \ \forall f \in \mathcal{C}(X).$$

¿Otras condiciones para obtener operadores composición con peso?

Proposición

Sean X e Y dos espacios topológicos compactos de Hausdorff y $T : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$ un isomorfismo de álgebras. Entonces existe un homeomorfismo $\varphi : Y \longrightarrow X$ tal que

$$T(f)(y) = f(\varphi(y)) \quad \forall y \in Y\,,\ \forall f \in \mathcal{C}(X).$$

¿Otras condiciones para obtener operadores composición con peso?

Conservación del espectro

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras de Banach complejas con unidad y $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación lineal. T conserva el espectro si

$$\mathrm{sp}(T(a)) = \mathrm{sp}(a) \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Jafarian y Sourour $\longrightarrow$ [1, Spectrum-preserving linear maps, 1986]
Aupetit y Mouton $\longrightarrow$ [2, Spectrum preserving linear mappings in Banach algebras, 1994]

Conservación del espectro

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras de Banach complejas con unidad y $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación lineal. T conserva el espectro si

$$\mathrm{sp}(T(a)) = \mathrm{sp}(a) \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Jafarian y Sourour $\longrightarrow$ [1, Spectrum-preserving linear maps, 1986]

Aupetit y Mouton $\longrightarrow$ [2, Spectrum preserving linear mappings in Banach algebras, 1994]

En [1, Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $\mathcal{C}(X)$, 2002] Molnár introdujo:

La condición espectral multiplicativa

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras de Banach complejas con unidad y $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación. Se dice que T verifica la condición espectral multiplicativa si

$$\mathrm{sp}(T(a)T(b)) = \mathrm{sp}(ab) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Molnár probó:

Teorema

Sea X un espacio topológico compacto de Hausdorff que cumple el primer axioma de numerabilidad y sea $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ una aplicación sobreyectiva que verifica la condición espectral multiplicativa. Entonces existe un homeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X$ y una función continua $\tau : X \longrightarrow \{-1, 1\}$ tales que

$$T(f)(y) = \tau(y) f(\varphi(y)) \quad \forall y \in Y\,,\ \forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}).$$

Obsérvese que se omite la condición de linealidad de T.

Molnár probó:

Teorema

Sea X un espacio topológico compacto de Hausdorff que cumple el primer axioma de numerabilidad y sea $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ una aplicación sobreyectiva que verifica la condición espectral multiplicativa. Entonces existe un homeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X$ y una función continua $\tau : X \longrightarrow \{-1, 1\}$ tales que

$$T(f)(y) = \tau(y) f(\varphi(y)) \quad \forall y \in Y, \ \forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}).$$

Obsérvese que se omite la condición de linealidad de T.

En [1, Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative, 2007] Hatori, Miura y Takagi generalizaron el resultado de Molnár:

Teorema

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras de Banach complejas con unidad y conmutativas. Supongamos que $\mathcal{A}$ es semisimple y que $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es una aplicación sobreyectiva que verifica la condición espectral multiplicativa, esto es,

$$\mathrm{sp}(T(f)T(g)) = \mathrm{sp}(fg) \quad \forall f, g \in \mathcal{A}.$$

Entonces $\mathcal{B}$ es semisimple y existe $\tau \in \mathcal{B}$ con $\mathrm{sp}(\tau) \subset \{-1, 1\}$ y un homeomorfismo φ del espacio de los caracteres de $\mathcal{B}$, $\Sigma(\mathcal{B})$, en el espacio de los caracteres de $\mathcal{A}$, $\Sigma(\mathcal{A})$, tales que

$$\widehat{T(f)}(\omega) = \widehat{\tau}(\omega)\widehat{f}(\varphi(\omega)) \quad \forall \omega \in \Sigma(\mathcal{B}), \ \forall f \in \mathcal{A};$$

donde $\widehat{\cdot}$ representa la transformación de Gelfand en $\mathcal{A}$ o en $\mathcal{B}$ respectivamente.

Lambert, Luttman y Tonev estudiaron este tipo de problemas en álgebras uniformes.

Álgebra uniforme

Sea X un espacio topológico compacto de Hausdorff. Se dice que una subálgebra cerrada $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X)$ es un álgebra uniforme si separa los puntos de X y contiene las constantes.

Rango periférico y espectro periférico

Sea X un espacio topológico compacto, $\mathcal{A}$ una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$ y $f \in \mathcal{A}$.

i) El rango periférico de f es el conjunto

$$\mathrm{Ran}_\pi(f) = \{f(x) : x \in X, |f(x)| = \|f\|_\infty\}.$$

ii) Si además, $\mathcal{A}$ es compleja y cerrada, se define el espectro periférico de f como

$$\mathrm{sp}_\pi(f) = \{z \in \mathrm{sp}(f) : |z| = \max\{|w| : w \in \mathrm{sp}(f)\}\}.$$

Rango periférico y espectro periférico

Sea X un espacio topológico compacto, $\mathcal{A}$ una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$ y $f \in \mathcal{A}$.

i) El rango periférico de f es el conjunto

$$\mathrm{Ran}_{\pi}(f) = \{f(x) : x \in X, \ |f(x)| = \|f\|_{\infty}\}.$$

ii) Si además, $\mathcal{A}$ es compleja y cerrada, se define el espectro periférico de f como

$$\mathrm{sp}_{\pi}(f) = \{z \in \mathrm{sp}(f) : |z| = \max\{|w| : w \in \mathrm{sp}(f)\}\}.$$

Rango periférico y espectro periférico

Sea X un espacio topológico compacto, $\mathcal{A}$ una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$ y $f \in \mathcal{A}$.

i) El rango periférico de f es el conjunto

$$\mathrm{Ran}_\pi(f) = \{f(x) : x \in X, \ |f(x)| = \|f\|_\infty\}.$$

ii) Si además, $\mathcal{A}$ es compleja y cerrada, se define el espectro periférico de f como

$$\mathrm{sp}_\pi(f) = \{z \in \mathrm{sp}(f) : |z| = \max\{|w| : w \in \mathrm{sp}(f)\}\}.$$

En [4, Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity, 2007] Luttman y Tonev prueban:

Lema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra uniforme sobre un espacio topológico compacto de Hausdorff X. Entonces

$$\mathrm{sp}_{\pi}(f) = \mathrm{Ran}_{\pi}(f) \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Luttman y Tonev generalizan el resultado de Molnár en álgebras uniformes.

En [4, Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity, 2007] Luttman y Tonev prueban:

Lema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra uniforme sobre un espacio topológico compacto de Hausdorff X. Entonces

$$\mathrm{sp}_\pi(f) = \mathrm{Ran}_\pi(f) \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Luttman y Tonev generalizan el resultado de Molnár en álgebras uniformes.

En [2, Weakly peripherally-multiplicative operators between uniform algebras, 2007] Lambert, Luttman y Tonev estudian:

La condición débil multiplicativa del rango periférico

Sea $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación entre dos subálgebras de funciones continuas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre espacios topológicos compactos. Se dice que T verifica la condición débil multiplicativa del rango periférico si

$$\mathrm{Ran}_\pi(T(f)T(g)) \cap \mathrm{Ran}_\pi(fg) \neq \emptyset \quad \forall f, g \in \mathcal{A}$$

La condición multiplicativa no simétrica de la norma

Sea $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación entre dos subálgebras de funciones continuas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre espacios topológicos compactos. Se dice que T verifica la condición multiplicativa no simétrica de la norma si

$$\|T(f)T(g) - \mathbf{1}\|_\infty = \|fg - \mathbf{1}\|_\infty \quad \forall f, g \in \mathcal{A}$$

La condición débil multiplicativa del rango periférico

Sea $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación entre dos subálgebras de funciones continuas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre espacios topológicos compactos. Se dice que T verifica la condición débil multiplicativa del rango periférico si

$$\mathrm{Ran}_\pi(T(f)T(g)) \cap \mathrm{Ran}_\pi(fg) \neq \emptyset \quad \forall f, g \in \mathcal{A}$$

La condición multiplicativa no simétrica de la norma

Sea $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación entre dos subálgebras de funciones continuas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre espacios topológicos compactos. Se dice que T verifica la condición multiplicativa no simétrica de la norma si

$$\|T(f)T(g) - \mathbf{1}\|_\infty = \|fg - \mathbf{1}\|_\infty \quad \forall f, g \in \mathcal{A}$$

La condición multiplicativa no simétrica de la norma es estudiada por:

1. Hatori, Miura y Takagi en

   [2, Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras]

2. Luttman y Lambert en

   [3, Norm conditions for uniform algebra isomorphisms, 2008]

La condición multiplicativa no simétrica de la norma es estudiada por:

1. Hatori, Miura y Takagi en

   [2, Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras]

2. Luttman y Lambert en

   [3, Norm conditions for uniform algebra isomorphisms, 2008]

La condición multiplicativa no simétrica de la norma es estudiada por:

1. Hatori, Miura y Takagi en

   [2, Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras]

2. Luttman y Lambert en

   [3, Norm conditions for uniform algebra isomorphisms, 2008]

La condición débil $*$-multiplicativa del rango periférico

T la verifica si

$$\mathrm{Ran}_\pi(T(f)\overline{T(g)}) \cap \mathrm{Ran}_\pi(f\overline{g}) \neq \emptyset \quad \forall f,g \in \mathcal{A}$$

La condición $*$-multiplicativa no simétrica de la norma

T la verifica si

$$\|T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1}\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty \quad \forall f,g \in \mathcal{A}$$

La condición débil $*$-multiplicativa del rango periférico

T la verifica si

$$\mathrm{Ran}_\pi(T(f)\overline{T(g)}) \cap \mathrm{Ran}_\pi(f\overline{g}) \neq \emptyset \quad \forall f, g \in \mathcal{A}$$

La condición $*$-multiplicativa no simétrica de la norma

T la verifica si

$$\|T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1}\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty \quad \forall f, g \in \mathcal{A}$$

$*$-álgebra

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Se dice que $\mathcal{A}$ es un $*$-álgebra, un álgebra involutiva o un álgebra con involución si existe una aplicación $a \mapsto a^*$, de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$, que verifica:

i) $a^{**}=a$ (es una involución)

ii) $(a+b)^*=a^*+b^*$

iii) $(\lambda a)^*=\overline{\lambda}a^*$

iv) $(ab)^*=b^*a^*$

$*$-álgebra

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Se dice que $\mathcal{A}$ es un $*$-álgebra, un álgebra involutiva o un álgebra con involución si existe una aplicación $a \mapsto a^*$, de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$, que verifica:

i) $a^{**} = a$ (es una involución)

ii) $(a+b)^* = a^* + b^*$

iii) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$

iv) $(ab)^* = b^* a^*$

$*$-álgebra

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Se dice que $\mathcal{A}$ es un $*$-álgebra, un álgebra involutiva o un álgebra con involución si existe una aplicación $a \mapsto a^*$, de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$, que verifica:

i) $a^{**} = a$ (es una involución)

ii) $(a+b)^* = a^* + b^*$

iii) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$

iv) $(ab)^* = b^* a^*$

$*$-álgebra

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Se dice que $\mathcal{A}$ es un $*$-álgebra, un álgebra involutiva o un álgebra con involución si existe una aplicación $a \mapsto a^*$, de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$, que verifica:

i) $a^{**} = a$ (es una involución)
ii) $(a+b)^* = a^* + b^*$
iii) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$
iv) $(ab)^* = b^* a^*$

$*$-álgebra

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Se dice que $\mathcal{A}$ es un $*$-álgebra, un álgebra involutiva o un álgebra con involución si existe una aplicación $a \mapsto a^*$, de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$, que verifica:

i) $a^{**} = a$ (es una involución)
ii) $(a+b)^* = a^* + b^*$
iii) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$
iv) $(ab)^* = b^* a^*$

En [3, Surjections on the algebras of continuous functions which preserve peripheral spectrum, 2007] Honma probó:

Teorema

Sean X e Y dos espacios topológicos de Hausdorff localmente compactos. Si $T : \mathcal{C}_0(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(Y,\mathbb{C})$ es una aplicación sobreyectiva que satisface la condición

$$\mathrm{Ran}_\pi(T(f)\overline{T(g)}) = \mathrm{Ran}_\pi(f\overline{g}) \quad \forall f,g \in \mathcal{C}_0(X,\mathbb{C});$$

entonces existe un homeomorfismo $\varphi : Y \longrightarrow X$ y una función continua $\tau : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ con $|\tau(y)| = 1$ para todo $y \in Y$ tales que

$$T(f)(y) = \tau(y) f(\varphi(y)) \quad \forall y \in Y,\ \forall f \in \mathcal{C}_0(X,\mathbb{C}).$$

En [3, Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions] Honma probó:

Teorema

Sean X e Y dos espacios topológicos compactos de Hausdorff y $T : \mathcal{C}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}(Y,\mathbb{C})$ una aplicación sobreyectiva. Si T satisface las dos condiciones siguientes:

a) $T(\lambda \mathbf{1}) = \lambda \mathbf{1}$ *para cualquier* $\lambda \in \{-1, 1, -i, i\}$,
b) $\|T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1}\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty$ *para cualesquiera* $f, g \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$;

entonces existe un homeomorfismo $\varphi : Y \longrightarrow X$ *tal que*

$$T(f) = f \circ \varphi \quad \forall f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C}).$$

En [3, Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions] Honma probó:

Teorema

Sean X e Y dos espacios topológicos compactos de Hausdorff y $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}(Y, \mathbb{C})$ una aplicación sobreyectiva. Si T satisface las dos condiciones siguientes:

a) $T(\lambda \mathbf{1}) = \lambda \mathbf{1}$ *para cualquier* $\lambda \in \{-1, 1, -i, i\}$,

b) $\|T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1}\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty$ *para cualesquiera* $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$;

entonces existe un homeomorfismo $\varphi : Y \longrightarrow X$ *tal que*

$$T(f) = f \circ \varphi \quad \forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}).$$

En [3, Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions] Honma probó:

Teorema

Sean X e Y dos espacios topológicos compactos de Hausdorff y $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}(Y, \mathbb{C})$ una aplicación sobreyectiva. Si T satisface las dos condiciones siguientes:

a) $T(\lambda \mathbf{1}) = \lambda \mathbf{1}$ *para cualquier* $\lambda \in \{-1, 1, -i, i\}$,

b) $\|T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1}\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty$ *para cualesquiera* $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$;

entonces existe un homeomorfismo $\varphi : Y \longrightarrow X$ tal que

$$T(f) = f \circ \varphi \quad \forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}).$$

En [3, Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions] Honma probó:

Teorema

Sean X e Y dos espacios topológicos compactos de Hausdorff y $T : \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}(Y, \mathbb{C})$ una aplicación sobreyectiva. Si T satisface las dos condiciones siguientes:

a) $T(\lambda \mathbf{1}) = \lambda \mathbf{1}$ *para cualquier* $\lambda \in \{-1, 1, -i, i\}$,

b) $\|T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1}\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty$ *para cualesquiera* $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$;

entonces existe un homeomorfismo $\varphi : Y \longrightarrow X$ tal que

$$T(f) = f \circ \varphi \quad \forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}).$$

En [3, Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions] Honma probó:

Teorema

Sean X e Y dos espacios topológicos compactos de Hausdorff y $T : \mathcal{C}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}(Y,\mathbb{C})$ una aplicación sobreyectiva. Si T satisface las dos condiciones siguientes:

a) $T(\lambda \mathbf{1}) = \lambda \mathbf{1}$ *para cualquier* $\lambda \in \{-1, 1, -i, i\}$,

b) $\|T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1}\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty$ *para cualesquiera* $f, g \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$;

entonces existe un homeomorfismo $\varphi : Y \longrightarrow X$ *tal que*

$$T(f) = f \circ \varphi \quad \forall f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C}).$$

Las álgebras de Lipschitz

Aplicación lipschitziana y homeomorfismo de Lipschitz

Sean X e Y dos espacios métricos. Se dice que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es lipschitziana si existe una constante C tal que

$$\mathrm{d}(f(x), f(w)) \leq C\, \mathrm{d}(x, w) \quad \forall x, w \in X.$$

En tal caso, al número

$$L(f) = \sup \left\{ \frac{\mathrm{d}(f(x), f(w))}{\mathrm{d}(x, w)} : x, w \in X,\, x \neq w \right\}$$

se le llama constante de Lipschitz de f. Si f es biyectiva y f y f^{-1} son lipschitzianas, entonces se dice que f es un homeomorfismo de Lipschitz.

El álgebra $\mathrm{Lip}(X)$

Sea X un espacio métrico compacto. $\mathrm{Lip}(X)$ es el conjunto de las funciones lipschitzianas de X en $\mathbb{K}$. Escribiremos $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$ o $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{C})$ si necesitamos especificar el cuerpo base. En $\mathrm{Lip}(X)$ consideraremos la norma

$$\|f\| = \max\{\|f\|_\infty, L(f)\} \quad (f \in \mathrm{Lip}(X)).$$

1. $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.
2. $\mathrm{Lip}(X)$ es una subálgebra de $C(X)$.
3. $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|)$ puede no ser un álgebra normada, pero:

$$\|fg\| \leq 2\,\|f\|\,\|g\| \quad \forall f, g \in \mathrm{Lip}(X).$$

4. $\mathrm{Lip}(X)$ con la conjugación compleja es un $*$-álgebra.

El álgebra $\mathrm{Lip}(X)$

Sea X un espacio métrico compacto. $\mathrm{Lip}(X)$ es el conjunto de las funciones lipschitzianas de X en $\mathbb{K}$. Escribiremos $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$ o $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{C})$ si necesitamos especificar el cuerpo base. En $\mathrm{Lip}(X)$ consideraremos la norma

$$\|f\| = \max\{\|f\|_\infty, L(f)\} \quad (f \in \mathrm{Lip}(X)).$$

1. $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.
2. $\mathrm{Lip}(X)$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$.
3. $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|)$ puede no ser un álgebra normada, pero:

$$\|fg\| \leq 2\,\|f\|\,\|g\| \quad \forall f,g \in \mathrm{Lip}(X).$$

4. $\mathrm{Lip}(X)$ con la conjugación compleja es un $*$-álgebra.

El álgebra $\mathrm{Lip}(X)$

Sea X un espacio métrico compacto. $\mathrm{Lip}(X)$ es el conjunto de las funciones lipschitzianas de X en $\mathbb{K}$. Escribiremos $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$ o $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{C})$ si necesitamos especificar el cuerpo base. En $\mathrm{Lip}(X)$ consideraremos la norma

$$\|f\| = \max\{\|f\|_\infty, L(f)\} \quad (f \in \mathrm{Lip}(X)).$$

1. $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.
2. $\mathrm{Lip}(X)$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$.
3. $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|)$ puede no ser un álgebra normada, pero:

$$\|fg\| \leq 2\,\|f\|\,\|g\| \quad \forall f,g \in \mathrm{Lip}(X).$$

4. $\mathrm{Lip}(X)$ con la conjugación compleja es un $*$-álgebra.

El álgebra $\mathrm{Lip}(X)$

Sea X un espacio métrico compacto. $\mathrm{Lip}(X)$ es el conjunto de las funciones lipschitzianas de X en $\mathbb{K}$. Escribiremos $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$ o $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{C})$ si necesitamos especificar el cuerpo base. En $\mathrm{Lip}(X)$ consideraremos la norma

$$\|f\| = \max\{\|f\|_\infty, L(f)\} \quad (f \in \mathrm{Lip}(X)).$$

1. $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.
2. $\mathrm{Lip}(X)$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$.
3. $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|)$ puede no ser un álgebra normada, pero:

$$\|fg\| \le 2\,\|f\|\,\|g\| \quad \forall f,g \in \mathrm{Lip}(X).$$

4. $\mathrm{Lip}(X)$ con la conjugación compleja es un $*$-álgebra.

El álgebra $\mathrm{Lip}(X)$

Sea X un espacio métrico compacto. $\mathrm{Lip}(X)$ es el conjunto de las funciones lipschitzianas de X en $\mathbb{K}$. Escribiremos $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$ o $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{C})$ si necesitamos especificar el cuerpo base. En $\mathrm{Lip}(X)$ consideraremos la norma

$$\|f\| = \max\{\|f\|_\infty, L(f)\} \quad (f \in \mathrm{Lip}(X)).$$

1. $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.
2. $\mathrm{Lip}(X)$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$.
3. $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|)$ puede no ser un álgebra normada, pero:

$$\|fg\| \leq 2\,\|f\|\,\|g\| \quad \forall f,g \in \mathrm{Lip}(X).$$

4. $\mathrm{Lip}(X)$ con la conjugación compleja es un $*$-álgebra.

El álgebra $\mathrm{Lip}(X)$

Sea X un espacio métrico compacto. $\mathrm{Lip}(X)$ es el conjunto de las funciones lipschitzianas de X en $\mathbb{K}$. Escribiremos $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$ o $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{C})$ si necesitamos especificar el cuerpo base. En $\mathrm{Lip}(X)$ consideraremos la norma

$$\|f\| = \max\{\|f\|_\infty, L(f)\} \quad (f \in \mathrm{Lip}(X)).$$

1. $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.
2. $\mathrm{Lip}(X)$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$.
3. $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|)$ puede no ser un álgebra normada, pero:

$$\|fg\| \leq 2\,\|f\|\,\|g\| \quad \forall f,g \in \mathrm{Lip}(X).$$

4. $\mathrm{Lip}(X)$ con la conjugación compleja es un $*$-álgebra.

Espacio métrico punteado

Un espacio métrico punteado es un espacio métrico X en el que hay distinguido un punto e_X denominado punto base.

El álgebra $\mathrm{Lip}_0(X)$

Sea X un espacio métrico compacto punteado con punto base e_X. $\mathrm{Lip}_0(X)$ es el conjunto de las funciones lipschitzianas $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que $f(e_X) = 0$. Escribiremos $\mathrm{Lip}_0(X, \mathbb{R})$ o $\mathrm{Lip}_0(X, \mathbb{C})$ si necesitamos especificar el cuerpo base. En $\mathrm{Lip}_0(X)$ se considera como norma la constante de Lipschitz

$$L(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(w)|}{\mathrm{d}(x, w)} : x, w \in X, x \neq w\right\} \quad (f \in \mathrm{Lip}_0(X)).$$

Espacio métrico punteado

Un espacio métrico punteado es un espacio métrico X en el que hay distinguido un punto e_X denominado punto base.

El álgebra $\mathrm{Lip}_0(X)$

Sea X un espacio métrico compacto punteado con punto base e_X. $\mathrm{Lip}_0(X)$ es el conjunto de las funciones lipschitzianas $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que $f(e_X) = 0$. Escribiremos $\mathrm{Lip}_0(X, \mathbb{R})$ o $\mathrm{Lip}_0(X, \mathbb{C})$ si necesitamos especificar el cuerpo base. En $\mathrm{Lip}_0(X)$ se considera como norma la constante de Lipschitz

$$L(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(w)|}{\mathrm{d}(x, w)} : x, w \in X,\ x \neq w\right\} \quad (f \in \mathrm{Lip}_0(X)).$$

1. $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ es un espacio de Banach.
2. $\mathrm{Lip}_0(X)$ es una subálgebra de $\mathrm{Lip}(X)$ y

$$\|f\|_\infty \leq \mathrm{diam}(X)\, L(f) \quad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X)$$

   donde $\mathrm{diam}(X)$ denota el diámetro de X.
3. $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ puede no ser un álgebra normada, pero:

$$L(fg) \leq 2\, \mathrm{diam}(X)\, L(f)\, L(g) \quad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

4. $\mathrm{Lip}_0(X)$ con la conjugación compleja es un $*$-álgebra.

1. $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ es un espacio de Banach.
2. $\mathrm{Lip}_0(X)$ es una subálgebra de $\mathrm{Lip}(X)$ y
$$\|f\|_\infty \leq \mathrm{diam}(X)\, L(f) \quad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X)$$
donde $\mathrm{diam}(X)$ denota el diámetro de X.
3. $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ puede no ser un álgebra normada, pero:
$$L(fg) \leq 2\, \mathrm{diam}(X)\, L(f)\, L(g) \quad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X).$$
4. $\mathrm{Lip}_0(X)$ con la conjugación compleja es un $*$-álgebra.

1. $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ es un espacio de Banach.
2. $\mathrm{Lip}_0(X)$ es una subálgebra de $\mathrm{Lip}(X)$ y

$$\|f\|_\infty \leq \mathrm{diam}(X)\, L(f) \quad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X)$$

donde $\mathrm{diam}(X)$ denota el diámetro de X.

3. $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ puede no ser un álgebra normada, pero:

$$L(fg) \leq 2\,\mathrm{diam}(X)\, L(f)\, L(g) \quad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

4. $\mathrm{Lip}_0(X)$ con la conjugación compleja es un $*$-álgebra.

1. $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ es un espacio de Banach.
2. $\mathrm{Lip}_0(X)$ es una subálgebra de $\mathrm{Lip}(X)$ y
$$\|f\|_\infty \leq \mathrm{diam}(X)\, L(f) \quad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X)$$
donde $\mathrm{diam}(X)$ denota el diámetro de X.
3. $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ puede no ser un álgebra normada, pero:
$$L(fg) \leq 2\, \mathrm{diam}(X)\, L(f)\, L(g) \quad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X).$$
4. $\mathrm{Lip}_0(X)$ con la conjugación compleja es un $*$-álgebra.

1. $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ es un espacio de Banach.
2. $\mathrm{Lip}_0(X)$ es una subálgebra de $\mathrm{Lip}(X)$ y

$$\|f\|_\infty \leq \mathrm{diam}(X)\, L(f) \quad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X)$$

   donde $\mathrm{diam}(X)$ denota el diámetro de X.
3. $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ puede no ser un álgebra normada, pero:

$$L(fg) \leq 2\, \mathrm{diam}(X)\, L(f)\, L(g) \quad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

4. $\mathrm{Lip}_0(X)$ con la conjugación compleja es un $*$-álgebra.

$\mathrm{Lip}(X)$ es isométricamente isomorfo a $\mathrm{Lip}_0(X_0)$

Sea X un espacio métrico compacto y denotemos $X_0 = X \cup \{e_0\}$ donde $e_0 \notin X$. X_0 con la distancia $\mathrm{d}_0 : X \cup \{e_0\} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ dada por:

$$\mathrm{d}_0(x,w) = \begin{cases} \min\{2, \mathrm{d}(x,w)\} & \text{si } x,w \in X \\ 1 & \text{si } x \in X,\ w = e_0 \\ 1 & \text{si } w \in X,\ x = e_0 \\ 0 & \text{si } x = w = e_0; \end{cases}$$

y con punto base e_0 es un espacio métrico punteado. Sea $\Psi_X : \mathrm{Lip}(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(X_0)$ el operador definido por

$$\Psi_X(f)(x) = f(x) \quad \forall x \in X, \quad \Psi_X(f)(e_0) = 0, \quad \forall f \in \mathrm{Lip}(X).$$

Entonces Ψ_X es un isomorfismo isométrico de álgebras.

Sherbert $\longrightarrow$ [2, Banach algebras of Lipschitz functions, 1963]

Weaver $\longrightarrow$ [3, Lipschitz algebras, 1999]

Garrido y Jaramillo $\longrightarrow$ [4, Lipschitz-type functions on metric spaces, 2008]

Araujo y Dubarbie $\longrightarrow$ [1, Biseparating maps between Lipschitz function spaces]

Cabello y Cabello $\longrightarrow$ [3, Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions]

Identidad aproximada

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa en la que hay definida una norma. Una red $\{a_j\}_{j\in I}$ en $\mathcal{A}$ es una identidad aproximada si

$$\lim_{j\in I}\|a_j b - b\| = 0 \quad \forall b \in \mathcal{A}.$$

Lema

Sea X un espacio métrico compacto punteado. Son equivalentes:

i) $\mathrm{Lip}_0(X)$ *tiene elemento unidad.*
ii) $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ *tiene una identidad aproximada.*
iii) e_X *es un punto aislado.*

Identidad aproximada

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa en la que hay definida una norma. Una red $\{a_j\}_{j\in I}$ en $\mathcal{A}$ es una identidad aproximada si

$$\lim_{j\in I}\|a_j b - b\| = 0 \quad \forall b \in \mathcal{A}.$$

Lema

Sea X un espacio métrico compacto punteado. Son equivalentes:

i) $\mathrm{Lip}_0(X)$ *tiene elemento unidad.*

ii) $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ *tiene una identidad aproximada.*

iii) e_X *es un punto aislado.*

Identidad aproximada

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa en la que hay definida una norma. Una red $\{a_j\}_{j\in I}$ en $\mathcal{A}$ es una identidad aproximada si

$$\lim_{j\in I}\|a_jb-b\|=0 \quad \forall b\in\mathcal{A}.$$

Lema

Sea X un espacio métrico compacto punteado. Son equivalentes:

i) $\mathrm{Lip}_0(X)$ *tiene elemento unidad.*

ii) $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ *tiene una identidad aproximada.*

iii) e_X *es un punto aislado.*

Identidad aproximada

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa en la que hay definida una norma. Una red $\{a_j\}_{j\in I}$ en $\mathcal{A}$ es una identidad aproximada si

$$\lim_{j\in I}\|a_jb-b\|=0 \quad \forall b\in\mathcal{A}.$$

Lema

Sea X un espacio métrico compacto punteado. Son equivalentes:

i) $\mathrm{Lip}_0(X)$ *tiene elemento unidad.*

ii) $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ *tiene una identidad aproximada.*

iii) e_X *es un punto aislado.*

Identidad aproximada

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa en la que hay definida una norma. Una red $\{a_j\}_{j\in I}$ en $\mathcal{A}$ es una identidad aproximada si

$$\lim_{j\in I}\|a_j b - b\| = 0 \quad \forall b \in \mathcal{A}.$$

Lema

Sea X un espacio métrico compacto punteado. Son equivalentes:

i) $\mathrm{Lip}_0(X)$ *tiene elemento unidad.*

ii) $(\mathrm{Lip}_0(X), L(\cdot))$ *tiene una identidad aproximada.*

iii) e_X *es un punto aislado.*

Observación

La sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$h_n(x) = \min\{1, n\,\mathrm{d}(x, e_X)\} \quad \forall x \in X,\ n \in \mathbb{N};$$

es una identidad aproximada para $(\mathrm{Lip}_0(X), \|\cdot\|_\infty)$.

Las funciones pico

1. Aparecen en los trabajos de Lambert, Luttman y Tonev y juegan un papel importante en la teoría de álgebras uniformes.
2. Sea X un espacio métrico compacto punteado y sea $x \in X \setminus \{e_X\}$. Se define el conjunto de las funciones con pico en x como

$$P_x(X) = \{h \in \mathrm{Lip}_0(X) : \mathrm{Ran}_\pi(h) = \{1\}, h(x) = 1\}.$$

El conjunto de las funciones pico de $\mathrm{Lip}_0(X)$ es

$$P(X) = \bigcup_{x \in X \setminus \{e_X\}} P_x(X) = \{h \in \mathrm{Lip}_0(X) : \mathrm{Ran}_\pi(h) = \{1\}\}$$

Las funciones pico

1. Aparecen en los trabajos de Lambert, Luttman y Tonev y juegan un papel importante en la teoría de álgebras uniformes.
2. Sea X un espacio métrico compacto punteado y sea $x \in X \setminus \{e_X\}$. Se define el conjunto de las funciones con pico en x como

$$P_x(X) = \{h \in \mathrm{Lip}_0(X) : \mathrm{Ran}_\pi(h) = \{1\}, h(x) = 1\}.$$

El conjunto de las funciones pico de $\mathrm{Lip}_0(X)$ es

$$P(X) = \bigcup_{x \in X \setminus \{e_X\}} P_x(X) = \{h \in \mathrm{Lip}_0(X) : \mathrm{Ran}_\pi(h) = \{1\}\}$$

Las funciones pico

1. Aparecen en los trabajos de Lambert, Luttman y Tonev y juegan un papel importante en la teoría de álgebras uniformes.
2. Sea X un espacio métrico compacto punteado y sea $x \in X \setminus \{e_X\}$. Se define el conjunto de las funciones con pico en x como

$$P_x(X) = \{h \in \mathrm{Lip}_0(X) : \mathrm{Ran}_\pi(h) = \{1\}, h(x) = 1\}.$$

El conjunto de las funciones pico de $\mathrm{Lip}_0(X)$ es

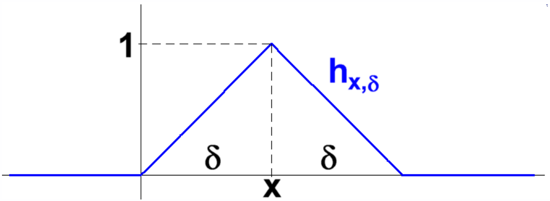
$$P(X) = \bigcup_{x \in X \setminus \{e_X\}} P_x(X) = \{h \in \mathrm{Lip}_0(X) : \mathrm{Ran}_\pi(h) = \{1\}\}$$

Ejemplo de función pico

Sea $x \in X \setminus \{e_X\}$ y $\delta \in]0, \mathrm{d}(x, e_X)]$. La función $h_{x,\delta} : X \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$h_{x,\delta}(w) = \max\{0, 1 - \frac{\mathrm{d}(w, x)}{\delta}\} \quad \forall w \in X,$$

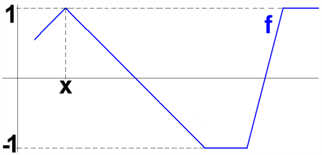
es una función con pico en x.



La familia $F(X)$

Sea $x \in X \setminus \{e_x\}$. Denotamos

$$F_x(X) = \{f \in \mathrm{Lip}_0(X) : |f(x)| = \|f\|_\infty = 1\},$$
$$F(X) = \bigcup_{x \in X \setminus \{e_x\}} F_x(X)$$



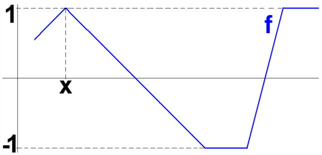
$$P_x(X) \subset F_x(X) \quad (x \in X \setminus \{e_x\})$$

Denotaremos $S_{\mathbb{K}} = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| = 1\}$.

La familia $F(X)$

Sea $x \in X \setminus \{e_x\}$. Denotamos

$$F_x(X) = \{f \in \mathrm{Lip}_0(X) : |f(x)| = \|f\|_\infty = 1\},$$
$$F(X) = \bigcup_{x \in X \setminus \{e_x\}} F_x(X)$$



$$P_x(X) \subset F_x(X) \quad (x \in X \setminus \{e_x\})$$

Denotaremos $S_{\mathbb{K}} = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| = 1\}$.

El teorema principal

Teorema principal

Sean X e Y dos espacios métricos compactos punteados y sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(Y)$ una aplicación sobreyectiva que verifica

$$\left\| T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1} \right\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Entonces existe una función $\eta : Y \longrightarrow \{0, 1\}$ con $\eta(e_Y) = 1$, una función $\tau : Y \longrightarrow S_{\mathbb{K}}$ con $\tau(e_Y) = 1$, y un homeomorfismo de Lipschitz $\varphi : Y \longrightarrow X$ con $\varphi(e_Y) = e_X$ tales que

$$T(f) = \tau \cdot \left(\eta \cdot (f \circ \varphi) + (\mathbf{1} - \eta) \cdot \overline{(f \circ \varphi)} \right) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

$$T(f) = \tau \cdot \left(\eta \cdot (f \circ \varphi) + (\mathbf{1} - \eta) \cdot \overline{(f \circ \varphi)}\right)$$

$$T(f)(y) = \begin{cases} \tau(y)\, f(\varphi(y)) & \text{si } \eta(y) = 1 \\ \\ \tau(y)\, \overline{f(\varphi(y))} & \text{si } \eta(y) = 0. \end{cases}$$

Saltar pasos

$$T(f) = \tau \cdot \left(\eta \cdot (f \circ \varphi) + (\mathbf{1} - \eta) \cdot \overline{(f \circ \varphi)}\right)$$

$$T(f)(y) = \begin{cases} \tau(y)\, f(\varphi(y)) & \text{si } \eta(y) = 1 \\ \\ \tau(y)\, \overline{f(\varphi(y))} & \text{si } \eta(y) = 0. \end{cases}$$

Saltar pasos

Primer paso

Lema

Sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \to \mathrm{Lip}_0(Y)$ una aplicación que satisface:

1. $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ *para toda* $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$.
2. *Dadas* $f, g \in \mathrm{Lip}_0(X)$, $|f| \leq |g| \Leftrightarrow |T(f)| \leq |T(g)|$.

Se verifica que:

(i) *Para todo* $x \in X \setminus \{e_X\}$, *existe* $y \in Y \setminus \{e_Y\}$ *tal que*

$$T(F_x(X)) \subset F_y(Y).$$

(ii) *Si* $x, w \in X \setminus \{e_X\}$ *y* $T(F_x(X)) \subset T(F_w(X))$, *entonces* $x = w$.

Primer paso

Lema

Sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \to \mathrm{Lip}_0(Y)$ una aplicación que satisface:

1. $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ *para toda* $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$.
2. *Dadas* $f, g \in \mathrm{Lip}_0(X)$, $|f| \leq |g| \Leftrightarrow |T(f)| \leq |T(g)|$.

Se verifica que:

(i) *Para todo* $x \in X \setminus \{e_X\}$, *existe* $y \in Y \setminus \{e_Y\}$ *tal que*

$$T(F_x(X)) \subset F_y(Y).$$

(ii) *Si* $x, w \in X \setminus \{e_X\}$ *y* $T(F_x(X)) \subset T(F_w(X))$, *entonces* $x = w$.

Primer paso

Lema

Sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \to \mathrm{Lip}_0(Y)$ *una aplicación que satisface:*

1. $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ *para toda* $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$.
2. *Dadas* $f, g \in \mathrm{Lip}_0(X)$, $|f| \le |g| \Leftrightarrow |T(f)| \le |T(g)|$.

Se verifica que:

(i) *Para todo* $x \in X \setminus \{e_X\}$, *existe* $y \in Y \setminus \{e_Y\}$ *tal que*

$$T(F_x(X)) \subset F_y(Y).$$

(ii) *Si* $x, w \in X \setminus \{e_X\}$ *y* $T(F_x(X)) \subset T(F_w(X))$, *entonces* $x = w$.

Primer paso

Lema

Sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \to \mathrm{Lip}_0(Y)$ *una aplicación que satisface:*

1. $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ *para toda* $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$.
2. *Dadas* $f, g \in \mathrm{Lip}_0(X)$, $|f| \leq |g| \Leftrightarrow |T(f)| \leq |T(g)|$.

Se verifica que:

(i) *Para todo* $x \in X \setminus \{e_X\}$, *existe* $y \in Y \setminus \{e_Y\}$ *tal que*

$$T(F_x(X)) \subset F_y(Y).$$

(ii) *Si* $x, w \in X \setminus \{e_X\}$ *y* $T(F_x(X)) \subset T(F_w(X))$, *entonces* $x = w$.

Primer paso

Lema

Sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \to \mathrm{Lip}_0(Y)$ *una aplicación que satisface:*

1. $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ *para toda* $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$.
2. *Dadas* $f, g \in \mathrm{Lip}_0(X)$, $|f| \leq |g| \Leftrightarrow |T(f)| \leq |T(g)|$.

Se verifica que:

(i) *Para todo* $x \in X \setminus \{e_X\}$, *existe* $y \in Y \setminus \{e_Y\}$ *tal que*

$$T(F_x(X)) \subset F_y(Y).$$

(ii) *Si* $x, w \in X \setminus \{e_X\}$ *y* $T(F_x(X)) \subset T(F_w(X))$, *entonces* $x = w$.

Primer paso

Lema

Sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \to \mathrm{Lip}_0(Y)$ *una aplicación que satisface:*

1. $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ *para toda* $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$.
2. *Dadas* $f, g \in \mathrm{Lip}_0(X)$, $|f| \leq |g| \Leftrightarrow |T(f)| \leq |T(g)|$.

Se verifica que:

(i) *Para todo* $x \in X \setminus \{e_X\}$, *existe* $y \in Y \setminus \{e_Y\}$ *tal que*

$$T(F_x(X)) \subset F_y(Y).$$

(ii) *Si* $x, w \in X \setminus \{e_X\}$ *y* $T(F_x(X)) \subset T(F_w(X))$, *entonces* $x = w$.

Si, además, T es sobreyectiva, se tiene que:

(iii) *Para todo $y \in Y \setminus \{e_Y\}$, existe $w \in X \setminus \{e_X\}$ tal que*

$$F_y(Y) \subset T(F_w(X)).$$

(iv) *Para todo $x \in X \setminus \{e_X\}$, existe un único $y \in Y \setminus \{e_Y\}$ tal que*

$$T(F_x(X)) = F_y(Y).$$

Si, además, T es sobreyectiva, se tiene que:

(iii) *Para todo $y \in Y \setminus \{e_Y\}$, existe $w \in X \setminus \{e_X\}$ tal que*
$$F_y(Y) \subset T(F_w(X)).$$

(iv) *Para todo $x \in X \setminus \{e_X\}$, existe un único $y \in Y \setminus \{e_Y\}$ tal que*
$$T(F_x(X)) = F_y(Y).$$

Si, además, T es sobreyectiva, se tiene que:

(iii) *Para todo $y \in Y \setminus \{e_Y\}$, existe $w \in X \setminus \{e_X\}$ tal que*

$$F_y(Y) \subset T(F_w(X)).$$

(iv) *Para todo $x \in X \setminus \{e_X\}$, existe un único $y \in Y \setminus \{e_Y\}$ tal que*

$$T(F_x(X)) = F_y(Y).$$

Segundo paso

Proposición

Sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(Y)$ *una aplicación sobreyectiva que satisface:*

$$\|T(f)T(g)\|_\infty = \|fg\|_\infty \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Entonces existe una única aplicación biyectiva $\psi : X \longrightarrow Y$ *tal que* $\psi(e_X) = e_Y$ *y*

$$|T(f)(\psi(x))| = |f(x)| \qquad \forall x \in X, \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

A la aplicación ψ *la llamaremos aplicación asociada a* T*.*

Tercer paso

Lema

Sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(Y)$ *una aplicación sobreyectiva que verifica*

$$\left\| T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1} \right\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Entonces

$$\|T(f)T(g)\|_\infty = \|fg\|_\infty \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Cuarto paso

Definición

Sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \to \mathrm{Lip}_0(Y)$ *una aplicación sobreyectiva que verifica*

$$\left\| T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1} \right\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Sea $\psi : X \to Y$ *la aplicación asociada a* T*. Definimos* $\varphi = \psi^{-1}$*,* $\tau : Y \to S_{\mathbb{K}}$ *como* $\tau(e_Y) = 1$*,*

$$\tau(y) = T(h)(y) \quad \textit{donde } h \in P_{\varphi(y)}(X) \ \textit{ e } \ y \in Y \setminus \{e_Y\}.$$

Además, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, definimos* $\gamma : Y \to S_{\mathbb{C}}$ *como* $\gamma(e_Y) = i$*,*

$$\gamma(y) = T(ih)(y) \quad \textit{donde } h \in P_{\varphi(y)}(X) \ \textit{ e } \ y \in Y \setminus \{e_Y\}.$$

Quinto paso

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, definimos la aplicación $\eta : Y \longrightarrow \{0,1\}$ como

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - i\gamma\overline{\tau}\right).$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, definimos $\eta = \mathbf{1}$.
- Probamos que se verifica la igualdad

$$T(f) = \tau \cdot \Big(\eta \cdot (f \circ \varphi) + (\mathbf{1} - \eta) \cdot \overline{(f \circ \varphi)}\Big) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Quinto paso

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, definimos la aplicación $\eta : Y \longrightarrow \{0, 1\}$ como

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - i\gamma\overline{\tau}\right).$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, definimos $\eta = \mathbf{1}$.
- Probamos que se verifica la igualdad

$$T(f) = \tau \cdot \left(\eta \cdot (f \circ \varphi) + (\mathbf{1} - \eta) \cdot \overline{(f \circ \varphi)}\right) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Quinto paso

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, definimos la aplicación $\eta : Y \longrightarrow \{0, 1\}$ como

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - i\gamma\overline{\tau}\right).$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, definimos $\eta = \mathbf{1}$.
- Probamos que se verifica la igualdad

$$T(f) = \tau \cdot \left(\eta \cdot (f \circ \varphi) + (\mathbf{1} - \eta) \cdot \overline{(f \circ \varphi)}\right) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Quinto paso

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, definimos la aplicación $\eta : Y \longrightarrow \{0, 1\}$ como

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - i\gamma\overline{\tau}\right).$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, definimos $\eta = \mathbf{1}$.
- Probamos que se verifica la igualdad

$$T(f) = \tau \cdot \left(\eta \cdot (f \circ \varphi) + (\mathbf{1} - \eta) \cdot \overline{(f \circ \varphi)}\right) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Sexto paso

Lema

Sea $S : \mathrm{Lip}_0(X) \to \mathrm{Lip}_0(Y)$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal y continua con respecto a la norma del supremo. Entonces S es continua con respecto a la norma de Lipschitz.

Séptimo paso

Teorema principal

Sean X e Y dos espacios métricos compactos punteados y sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(Y)$ una aplicación sobreyectiva que verifica

$$\left\| T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1} \right\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Entonces existe una función $\eta : Y \longrightarrow \{0, 1\}$ con $\eta(e_Y) = 1$, una función $\tau : Y \longrightarrow S_{\mathbb{K}}$ con $\tau(e_Y) = 1$, y un homeomorfismo de Lipschitz $\varphi : Y \longrightarrow X$ con $\varphi(e_Y) = e_X$ tales que

$$T(f) = \tau \cdot \Big(\eta \cdot (f \circ \varphi) + (\mathbf{1} - \eta) \cdot \overline{(f \circ \varphi)}\Big) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Unicidad de las aplicaciones η, τ y φ

Sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(Y)$ una aplicación sobreyectiva que verifica

$$\left\| T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1} \right\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X);$$

y sean η, τ y φ como en el teorema principal. Si $\eta' : Y \longrightarrow \{0,1\}$ y $\tau' : Y \longrightarrow S_{\mathbb{K}}$ son funciones con $\eta'(e_Y) = 1 = \tau'(e_Y)$ y $\varphi' : Y \longrightarrow X$ es una biyección con $\varphi'(e_Y) = e_X$ de manera que

$$T(f) = \tau' \cdot \left(\eta' \cdot (f \circ \varphi') + (\mathbf{1} - \eta') \cdot \overline{(f \circ \varphi')} \right) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X);$$

entonces:

i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se tiene que $\varphi' = \varphi$ y $\tau' = \tau$.

ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se tiene que $\varphi' = \varphi$, $\tau' = \tau$ y $\eta' = \eta$.

Unicidad de las aplicaciones η, τ y φ

Sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(Y)$ una aplicación sobreyectiva que verifica

$$\left\| T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1} \right\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X);$$

y sean η, τ y φ como en el teorema principal. Si $\eta' : Y \longrightarrow \{0,1\}$ y $\tau' : Y \longrightarrow S_{\mathbb{K}}$ son funciones con $\eta'(e_Y) = 1 = \tau'(e_Y)$ y $\varphi' : Y \longrightarrow X$ es una biyección con $\varphi'(e_Y) = e_X$ de manera que

$$T(f) = \tau' \cdot \left(\eta' \cdot (f \circ \varphi') + (\mathbf{1} - \eta') \cdot \overline{(f \circ \varphi')} \right) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X);$$

entonces:

i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se tiene que $\varphi' = \varphi$ y $\tau' = \tau$.

ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se tiene que $\varphi' = \varphi$, $\tau' = \tau$ y $\eta' = \eta$.

Unicidad de las aplicaciones η, τ y φ

Sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(Y)$ una aplicación sobreyectiva que verifica

$$\left\| T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1} \right\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X);$$

y sean η, τ y φ como en el teorema principal. Si $\eta' : Y \longrightarrow \{0, 1\}$ y $\tau' : Y \longrightarrow S_{\mathbb{K}}$ son funciones con $\eta'(e_Y) = 1 = \tau'(e_Y)$ y $\varphi' : Y \longrightarrow X$ es una biyección con $\varphi'(e_Y) = e_X$ de manera que

$$T(f) = \tau' \cdot \left(\eta' \cdot (f \circ \varphi') + (\mathbf{1} - \eta') \cdot \overline{(f \circ \varphi')} \right) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X);$$

entonces:

i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se tiene que $\varphi' = \varphi$ y $\tau' = \tau$.

ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se tiene que $\varphi' = \varphi$, $\tau' = \tau$ y $\eta' = \eta$.

Teorema para la condición débil $*$-multiplicativa del rango periférico

Teorema

Sean X e Y dos espacios métricos compactos punteados y sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(Y)$ una aplicación sobreyectiva que verifica

$$\mathrm{Ran}_\pi(T(f)\overline{T(g)}) \cap \mathrm{Ran}_\pi(f\overline{g}) \neq \emptyset \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Entonces existe una única función $\tau : Y \longrightarrow S_{\mathbb{K}}$ con $\tau(e_Y) = 1$ y un único homeomorfismo de Lipschitz $\varphi : Y \longrightarrow X$ con $\varphi(e_Y) = e_X$ tales que

$$T(f) = \tau \cdot (f \circ \varphi) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

Corolario

Sean X e Y dos espacios métricos compactos punteados y sea $T : \mathrm{Lip}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(Y)$ una aplicación sobreyectiva que verifica

$$\mathrm{Ran}_\pi(T(f)\overline{T(g)}) \cap \mathrm{Ran}_\pi(f\overline{g}) \neq \emptyset \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}_0(X);$$

y que conserva una identidad aproximada respecto de la norma del supremo. Entonces existe un único homeomorfismo de Lipschitz $\varphi : Y \longrightarrow X$ con $\varphi(e_Y) = e_X$ tal que

$$T(f) = f \circ \varphi \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}_0(X);$$

con lo cual, T es un isomorfismo de álgebras.

Consecuencias para las álgebras $\mathrm{Lip}(X)$

Corolario

Sean X e Y dos espacios métricos compactos y sea $T : \mathrm{Lip}(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}(Y)$ una aplicación sobreyectiva que verifica

$$\left\| T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1} \right\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}(X).$$

(1) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, existen dos únicas funciones lipschitzianas $\eta : Y \longrightarrow \{0, 1\}$ y $\tau : Y \longrightarrow S_{\mathbb{C}}$ y un único homeomorfismo de Lipschitz $\varphi : Y \longrightarrow X$ tales que*

$$T(f) = \tau \cdot \left(\eta \cdot (f \circ \varphi) + (\mathbf{1} - \eta) \cdot \overline{(f \circ \varphi)} \right) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{C}).$$

Si, además, $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ y $T(i\mathbf{1}) = i\mathbf{1}$, entonces T es un isomorfismo de álgebras.

Consecuencias para las álgebras $\mathrm{Lip}(X)$

Corolario

Sean X e Y dos espacios métricos compactos y sea $T : \mathrm{Lip}(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}(Y)$ una aplicación sobreyectiva que verifica

$$\left\| T(f)\overline{T(g)} - \mathbf{1} \right\|_\infty = \|f\overline{g} - \mathbf{1}\|_\infty \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}(X).$$

(1) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, existen dos únicas funciones lipschitzianas $\eta : Y \longrightarrow \{0, 1\}$ y $\tau : Y \longrightarrow S_{\mathbb{C}}$ y un único homeomorfismo de Lipschitz $\varphi : Y \longrightarrow X$ tales que*

$$T(f) = \tau \cdot \left(\eta \cdot (f \circ \varphi) + (\mathbf{1} - \eta) \cdot \overline{(f \circ \varphi)} \right) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{C}).$$

Si, además, $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ y $T(i\mathbf{1}) = i\mathbf{1}$, entonces T es un isomorfismo de álgebras.

(2) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, existe una única función lipschitziana $\tau : Y \longrightarrow S_{\mathbb{R}}$ y un único homeomorfismo de Lipschitz $\varphi : Y \longrightarrow X$ tales que*

$$T(f) = \tau \cdot (f \circ \varphi) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{R}).$$

Si, además, $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, entonces T es un isomorfismo de álgebras.

(2) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, existe una única función lipschitziana $\tau : Y \longrightarrow S_{\mathbb{R}}$ y un único homeomorfismo de Lipschitz $\varphi : Y \longrightarrow X$ tales que*

$$T(f) = \tau \cdot (f \circ \varphi) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{R}).$$

Si, además, $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, entonces T es un isomorfismo de álgebras.

Corolario

Sean X e Y dos espacios métricos compactos y sea $T : \mathrm{Lip}(X) \longrightarrow \mathrm{Lip}(Y)$ una aplicación sobreyectiva que verifica

$$\mathrm{Ran}_\pi(T(f)\overline{T(g)}) \cap \mathrm{Ran}_\pi(f\overline{g}) \neq \emptyset \qquad \forall f, g \in \mathrm{Lip}(X).$$

Entonces existe una única función lipschitziana $\tau : Y \longrightarrow S_{\mathbb{K}}$ y un único homeomorfismo de Lipschitz $\varphi : Y \longrightarrow X$ tales que

$$T(f) = \tau \cdot (f \circ \varphi) \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}(X).$$

Referencias

[1] J. Araujo, L. Dubarbie, *Biseparating maps between Lipschitz function spaces,* preprint.

[2] B. Aupetit, H. du T. Mouton, *Spectrum preserving linear mappings in Banach algebras,* Studia Math. 109 (1994), no. 1, 91–100.

[3] F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, *Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions,* avalaible at http://kolmogorov.unex.es/ fcabello.

[4] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, *Lipschitz-type functions on metric spaces,* J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 1, 282–290.

Referencias

- [1] J. Araujo, L. Dubarbie, *Biseparating maps between Lipschitz function spaces,* preprint.
- [2] B. Aupetit, H. du T. Mouton, *Spectrum preserving linear mappings in Banach algebras,* Studia Math. 109 (1994), no. 1, 91–100.
- [3] F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, *Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions,* avalaible at http://kolmogorov.unex.es/ fcabello.
- [4] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, *Lipschitz-type functions on metric spaces,* J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 1, 282–290.

Referencias

- [1] J. Araujo, L. Dubarbie, *Biseparating maps between Lipschitz function spaces,* preprint.
- [2] B. Aupetit, H. du T. Mouton, *Spectrum preserving linear mappings in Banach algebras,* Studia Math. 109 (1994), no. 1, 91–100.
- [3] F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, *Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions,* avalaible at http://kolmogorov.unex.es/ fcabello.
- [4] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, *Lipschitz-type functions on metric spaces,* J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 1, 282–290.

Referencias

- [1] J. Araujo, L. Dubarbie, *Biseparating maps between Lipschitz function spaces,* preprint.
- [2] B. Aupetit, H. du T. Mouton, *Spectrum preserving linear mappings in Banach algebras,* Studia Math. 109 (1994), no. 1, 91–100.
- [3] F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, *Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions,* avalaible at http://kolmogorov.unex.es/ fcabello.
- [4] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, *Lipschitz-type functions on metric spaces,* J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 1, 282–290.

Referencias

- [1] J. Araujo, L. Dubarbie, *Biseparating maps between Lipschitz function spaces,*
preprint.

- [2] B. Aupetit, H. du T. Mouton, *Spectrum preserving linear mappings in Banach algebras,*
Studia Math. 109 (1994), no. 1, 91–100.

- [3] F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, *Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions,*
avalaible at http://kolmogorov.unex.es/ fcabello.

- [4] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, *Lipschitz-type functions on metric spaces,*
J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 1, 282–290.

[5] O. Hatori, T. Miura, H. Takagi, *Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative,* J. Math. Anal. Appl. 326 (2007) 281–296.

[6] O. Hatori, T. Miura, H. Takagi, *Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras,* preprint.

[7] D. Honma, *Surjections on the algebras of continuous functions which preserve peripheral spectrum,* Contemp. Math., 435 (2007) 199–205.

[8] D. Honma, *Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions,* to appear in Rocky Mountain J. Math.

- [5] O. Hatori, T. Miura, H. Takagi, *Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative,* J. Math. Anal. Appl. 326 (2007) 281–296.
- [6] O. Hatori, T. Miura, H. Takagi, *Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras,* preprint.
- [7] D. Honma, *Surjections on the algebras of continuous functions which preserve peripheral spectrum,* Contemp. Math., 435 (2007) 199–205.
- [8] D. Honma, *Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions,* to appear in Rocky Mountain J. Math.

- [5] O. Hatori, T. Miura, H. Takagi, *Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative,* J. Math. Anal. Appl. 326 (2007) 281–296.
- [6] O. Hatori, T. Miura, H. Takagi, *Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras,* preprint.
- [7] D. Honma, *Surjections on the algebras of continuous functions which preserve peripheral spectrum,* Contemp. Math., 435 (2007) 199–205.
- [8] D. Honma, *Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions,* to appear in Rocky Mountain J. Math.

- [5] O. Hatori, T. Miura, H. Takagi, *Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative,* J. Math. Anal. Appl. 326 (2007) 281–296.
- [6] O. Hatori, T. Miura, H. Takagi, *Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras,* preprint.
- [7] D. Honma, *Surjections on the algebras of continuous functions which preserve peripheral spectrum,* Contemp. Math., 435 (2007) 199–205.
- [8] D. Honma, *Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions,* to appear in Rocky Mountain J. Math.

[9] Ali A. Jafarian, A. R. Sourour, *Spectrum-preserving linear maps,*
J. Funct. Anal. 66 (1986), no. 2, 255–261.

[10] S. Lambert, A. Luttman, T. Tonev, *Weakly peripherally-multiplicative operators between uniform algebras,*
Contemp. Math. 435 (2007) 265–281.

[11] A. Luttman, S. Lambert, *Norm conditions for uniform algebra isomorphisms,*
Cent. Eur. J. Math. 6 (2008) 272-280.

[12] A. Luttman, T. Tonev, *Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity,*
Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007) 3589–3598.

[9] Ali A. Jafarian, A. R. Sourour, *Spectrum-preserving linear maps,*
J. Funct. Anal. 66 (1986), no. 2, 255–261.

[10] S. Lambert, A. Luttman, T. Tonev, *Weakly peripherally-multiplicative operators between uniform algebras,*
Contemp. Math. 435 (2007) 265–281.

[11] A. Luttman, S. Lambert, *Norm conditions for uniform algebra isomorphisms,*
Cent. Eur. J. Math. 6 (2008) 272-280.

[12] A. Luttman, T. Tonev, *Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity,*
Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007) 3589–3598.

[9] Ali A. Jafarian, A. R. Sourour, *Spectrum-preserving linear maps,*
J. Funct. Anal. 66 (1986), no. 2, 255–261.

[10] S. Lambert, A. Luttman, T. Tonev, *Weakly peripherally-multiplicative operators between uniform algebras,*
Contemp. Math. 435 (2007) 265–281.

[11] A. Luttman, S. Lambert, *Norm conditions for uniform algebra isomorphisms,*
Cent. Eur. J. Math. 6 (2008) 272-280.

[12] A. Luttman, T. Tonev, *Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity,*
Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007) 3589–3598.

[9] Ali A. Jafarian, A. R. Sourour, *Spectrum-preserving linear maps,*
J. Funct. Anal. 66 (1986), no. 2, 255–261.

[10] S. Lambert, A. Luttman, T. Tonev, *Weakly peripherally-multiplicative operators between uniform algebras,*
Contemp. Math. 435 (2007) 265–281.

[11] A. Luttman, S. Lambert, *Norm conditions for uniform algebra isomorphisms,*
Cent. Eur. J. Math. 6 (2008) 272-280.

[12] A. Luttman, T. Tonev, *Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity,*
Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007) 3589–3598.

[13] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$,*
Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 1, 111–120.

[14] D. Sherbert, *Banach algebras of Lipschitz functions,*
Pacific J. Math. 13 (1963) 1387–1399.

[15] N. Weaver, *Lipschitz algebras,*
World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999.

- [13] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$,* Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 1, 111–120.
- [14] D. Sherbert, *Banach algebras of Lipschitz functions,* Pacific J. Math. 13 (1963) 1387–1399.
- [15] N. Weaver, *Lipschitz algebras,* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999.

- [13] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$,* Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 1, 111–120.
- [14] D. Sherbert, *Banach algebras of Lipschitz functions,* Pacific J. Math. 13 (1963) 1387–1399.
- [15] N. Weaver, *Lipschitz algebras,* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999.

MUCHAS GRACIAS

FIN