Métodos numéricos para problemas de optimización convexa y ecuaciones diferenciales

M. Ruiz Galán

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada

V Encuentro de Análisis Funcional y sus Aplicaciones
Salobreña, 23 de abril de 2009

Esquema

$(E, < \cdot, \cdot >)$ Hilbert, $y_0 \in E$
$a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal, continua,simétrica, para todo $x \in E$, $a(x, x) \geq 0$

$$x_0 \in E \; : \; J(x_0) = \min_{x \in E} J(x),$$

$J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional convexo

$$J(x) := \frac{1}{2} a(x, x) - < y_0, x >$$

J alcanza su mínimo en $x_0 \Leftrightarrow a(x_0, \cdot) =< y_0, \cdot >$

$(E, < \cdot, \cdot >)$ Hilbert, $y_0 \in E$
$a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal, continua,simétrica, para todo $x \in E$, $a(x, x) \geq 0$

$$x_0 \in E \ : \ J(x_0) = \min_{x \in E} J(x),$$

$J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional convexo

$$J(x) := \frac{1}{2} a(x, x) - < y_0, x >$$

$$J \text{ alcanza su mínimo en } x_0 \Leftrightarrow a(x_0, \cdot) = < y_0, \cdot >$$

Teorema de Lax-Milgram

E espacio de Hilbert real, a forma bilineal, continua y coercitiva

$$\Downarrow$$

para todo $y_0 \in E$ existe (único) $x_0 \in E \ : \ a(x_0, \cdot) =< y_0, \cdot >$

Esquema

Ejemplo motivador

$$a(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x(k) y(k), \qquad (x, y \in \ell_2)$$

$y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$

$$x_0 \in \ell_2 \Rightarrow a(x_0, \cdot) \neq < y_0, \cdot >$$

$$a(ke_k, \cdot) = < e_k, \cdot >$$

Problema

Dada una forma bilineal y continua a en un espacio de Hilbert real E, ¿es posible caracterizar los $y_0 \in E$ de forma que existe $x_0 \in E$ tal que $a(x_0, \cdot) = < y_0, \cdot >$?

Ejemplo motivador

$$a(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x(k) y(k), \qquad (x, y \in \ell_2)$$

$y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$

$$x_0 \in \ell_2 \Rightarrow a(x_0, \cdot) \neq < y_0, \cdot >$$

$$a(ke_k, \cdot) = < e_k, \cdot >$$

Problema

Dada una forma bilineal y continua a en un espacio de Hilbert real E, ¿es posible caracterizar los $y_0 \in E$ de forma que existe $x_0 \in E$ tal que $a(x_0, \cdot) = < y_0, \cdot >$?

Ejemplo motivador

$$a(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x(k)y(k), \qquad (x, y \in \ell_2)$$

$y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$

$$x_0 \in \ell_2 \Rightarrow a(x_0, \cdot) \neq < y_0, \cdot >$$

$$a(ke_k, \cdot) = < e_k, \cdot >$$

Problema

Dada una forma bilineal y continua a en un espacio de Hilbert real E, ¿es posible caracterizar los $y_0 \in E$ de forma que existe $x_0 \in E$ tal que $a(x_0, \cdot) = < y_0, \cdot >$?

Teorema de Lax-Milgram en elc

E, F elc Hausdorff reales, E^* elc Hausdorff real, $y_0^* \in F^*$, $a : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal, $\emptyset \neq C \subset F$ convexo, $y \in C \Rightarrow a(\cdot, y) \in E^*$. Entonces

$$\text{existe } x_0^{**} \in E^{**} \;:\; y \in C \Rightarrow y_0^*(y) \leq x_0^{**}(a(\cdot, y))$$

equivale a

$$\text{existe seminorma continua } p : E^* \longrightarrow \mathbb{R} \;:$$

$$y \in C \Rightarrow y_0^*(y) \leq p(a(\cdot, y))$$

Además, en caso afirmativo, $x_0^{**} \leq p$

Corolario (caso normado, topología fuerte en el dual)

E, F espacios normados reales, $y_0^* \in F^*$, $a : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal, $\emptyset \neq C \subset F$ convexo, $y \in C \Rightarrow a(\cdot, y) \in E^*$. Entonces

$$\text{existe } x_0^{**} \in E^{**} \ : \ y \in C \Rightarrow y_0^*(y) \leq x_0^{**}(a(\cdot, y))$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{existe } \alpha \geq 0 \ : \ y \in C \Rightarrow y_0^*(y) \leq \alpha \|a(\cdot, y)\|.$$

En caso afirmativo, si existe $y \in C$ con $a(\cdot, y) \neq 0$, entonces

$$\min\{\|x_0^{**}\| : x_0^{**} \in E^{**} \text{ y para todo } y \in C,\ y_0^*(y) \leq x_0^{**}(a(\cdot, y))\}$$

$$= \left(\sup_{y \in C,\ a(\cdot, y) \neq 0} \frac{y_0^*(y)}{\|a(\cdot, y)\|} \right)^+$$

Esquema

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, frontera Lipschitz Γ,
$f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$,

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

formulación débil

$$\text{encontrar } u \in H^1(\Omega) \; : \; u = g \text{ en } \Gamma$$

$$\text{y para todo } v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv$$

condiciones de contorno

$$u = g \text{ en } \Gamma \text{ representa } \gamma_0(u) = g$$

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \text{ operador traza}$$

extensión lineal y continua a $H^1(\Omega)$ del operador lineal y continuo

$$\gamma_0 : C^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^2(\Gamma), \quad \gamma_0(x) = x_{|\Gamma}$$

$H^{1/2}(\Gamma) := \gamma_0(H^1(\Omega)) \subset L^2(\Gamma)$.

imponiendo débilmente las condiciones de contorno

$H^{-1/2}(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma)^*$, $< \cdot, \cdot >$ paridad dual $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$

$\gamma_0(u) = g \Leftrightarrow$ para todo $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $< \gamma_0(u), w > = < g, w >$

condiciones de contorno

$$u = g \text{ en } \Gamma \text{ representa } \gamma_0(u) = g$$

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \text{ operador traza}$$

extensión lineal y continua a $H^1(\Omega)$ del operador lineal y continuo

$$\gamma_0 : C^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^2(\Gamma), \quad \gamma_0(x) = x_{|\Gamma}$$

$H^{1/2}(\Gamma) := \gamma_0(H^1(\Omega)) \subset L^2(\Gamma)$.

imponiendo débilmente las condiciones de contorno
$H^{-1/2}(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma)^*$, $< \cdot, \cdot >$ paridad dual $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$

$\gamma_0(u) = g \Leftrightarrow$ para todo $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $< \gamma_0(u), w > = < g, w >$

condiciones de contorno

$$u = g \text{ en } \Gamma \text{ representa } \gamma_0(u) = g$$

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \text{ operador traza}$$

extensión lineal y continua a $H^1(\Omega)$ del operador lineal y continuo

$$\gamma_0 : C^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^2(\Gamma), \quad \gamma_0(x) = x_{|\Gamma}$$

$H^{1/2}(\Gamma) := \gamma_0(H^1(\Omega)) \subset L^2(\Gamma)$.

imponiendo débilmente las condiciones de contorno

$H^{-1/2}(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma)^*$, $< \cdot, \cdot >$ paridad dual $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$

$\gamma_0(u) = g \Leftrightarrow$ para todo $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $< \gamma_0(u), w > = < g, w >$

$$\text{encontrar } u \in H^1(\Omega) \ : \ u_{|\Gamma} = g, \ v \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv$$

ecuación variacional con restricciones

$E := H^1(\Omega)$, $F := H^{-1/2}(\Gamma)$, $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineales y continuas, $x_0^* \in E^*$, $y_0^* \in F^*$

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v, \qquad b(v,w) := < \gamma_0(v), w >$$

$$x_0^*(v) := \int_\Omega fv, \qquad y_0^*(w) := < g, w >$$

$Z := \{v \in E : w \in F \Rightarrow b(v,w) = 0\} = H_0^1(\Omega)$

$$\text{encontrar } u \in E \text{ tal que } \begin{cases} z \in Z & \Rightarrow a(u,z) = x_0^*(z) \\ w \in F & \Rightarrow b(u,w) = y_0^*(w) \end{cases}$$

$$\text{encontrar } u \in H^1(\Omega) \;:\; u_{|\Gamma} = g,\; v \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv$$

ecuación variacional con restricciones

$E := H^1(\Omega)$, $F := H^{-1/2}(\Gamma)$, $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineales y continuas, $x_0^* \in E^*$, $y_0^* \in F^*$

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v, \qquad b(v,w) := < \gamma_0(v), w >$$

$$x_0^*(v) := \int_\Omega fv, \qquad y_0^*(w) := < g, w >$$

$Z := \{v \in E : w \in F \Rightarrow b(v,w) = 0\} = H_0^1(\Omega)$

$$\text{encontrar } u \in E \text{ tal que } \begin{cases} z \in Z & \Rightarrow a(u,z) = x_0^*(z) \\ w \in F & \Rightarrow b(u,w) = y_0^*(w) \end{cases}$$

encontrar $u \in H^1(\Omega)\ :\ u_{|\Gamma} = g,\ v \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv$

ecuación variacional con restricciones

$E := H^1(\Omega)$, $F := H^{-1/2}(\Gamma)$, $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineales y continuas, $x_0^* \in E^*$, $y_0^* \in F^*$

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v, \qquad b(v,w) :=< \gamma_0(v), w >$$

$$x_0^*(v) := \int_\Omega fv, \qquad y_0^*(w) :=< g, w >$$

$Z := \{v \in E : w \in F \Rightarrow b(v,w) = 0\} = H_0^1(\Omega)$

encontrar $u \in E$ tal que $\begin{cases} z \in Z & \Rightarrow a(u,z) = x_0^*(z) \\ w \in F & \Rightarrow b(u,w) = y_0^*(w) \end{cases}$

Problema

E, F Hilbert, $x_0^* \in E^*$, $y_0^* \in F^*$, $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineales continuas, $Z := \{v \in E : w \in F \Rightarrow b(v, w) = 0\}$

$$\text{encontrar } u \in E \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{ll} z \in Z & \Rightarrow a(u, z) = x_0^*(z) \\ w \in F & \Rightarrow b(u, w) = y_0^*(w) \end{array} \right.$$

Corolario

E reflexivo real, F normado real, $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineales, a continua, $w \in F \Rightarrow b(\cdot, w) \in E^*$, $x_0^* \in E^*$, $y_0^* \in F^*$

$$Z := \{v \in E : b(v, \cdot) = 0\} \quad \text{y} \quad G := \{v \in E : b(v, \cdot) = y_0^*\}$$

$$\text{existe } u \in E \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{ll} z \in Z & \Rightarrow a(u, z) = x_0^*(z) \\ w \in F & \Rightarrow b(u, w) = y_0^*(w) \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$G \neq \emptyset \text{ y para algún } v \in G \text{ existe } \alpha \geq 0 \ :$$

$$z \in Z \Rightarrow x_0^*(z) - a(v, z) \leq \alpha \|a(\cdot, z)_{|Z}\|$$

En caso afirmativo, si existe $z \in Z$ con $a(\cdot, z)_{|Z} \neq 0$, entonces

$$\|u\| = \min_{v \in G} \left(\sup_{z \in Z,\ a(\cdot, z)_{|Z} \neq 0} \frac{x_0^*(z) - a(v, z)}{\|a(\cdot, z)_{|Z}\|} + \|v\| \right)$$

Idea demostración

$v \in G$, $G = v + Z$

$$\text{existe } z_0 \in Z \;:\; u = v + z_0,\; a(z_0,\cdot)_{|Z} = x^*_{0\,|Z} - a(v,\cdot)_{|Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{existe } \alpha \geq 0 \text{ tal que } z \in Z \Rightarrow x_0^*(z) - a(v,z) \leq \alpha \|a(\cdot,z)_{|Z}\|$$

$$\|u\| = \min_{v \in G} \left(\sup_{z \in Z,\ a(\cdot,z)_{|Z} \neq 0} \frac{x_0^*(z) - a(v,z)}{\|a(\cdot,z)_{|Z}\|} + \|v\| \right)$$

$\square$

Idea demostración

$v \in G$, $G = v + Z$

$$\text{existe } z_0 \in Z \ : \ u = v + z_0,\ a(z_0, \cdot)_{|Z} = x^*_{0\,|Z} - a(v, \cdot)_{|Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{existe } \alpha \geq 0 \text{ tal que } z \in Z \Rightarrow x_0^*(z) - a(v, z) \leq \alpha \|a(\cdot, z)_{|Z}\|$$

$$\|u\| = \min_{v \in G} \left(\sup_{z \in Z,\ a(\cdot, z)_{|Z} \neq 0} \frac{x_0^*(z) - a(v, z)}{\|a(\cdot, z)_{|Z}\|} + \|v\| \right)$$

□

Idea demostración

$v \in G$, $G = v + Z$

$$\text{existe } z_0 \in Z \;:\; u = v + z_0,\; a(z_0, \cdot)_{|Z} = x^*_{0\,|Z} - a(v, \cdot)_{|Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{existe } \alpha \geq 0 \text{ tal que } z \in Z \Rightarrow x^*_0(z) - a(v, z) \leq \alpha \|a(\cdot, z)_{|Z}\|$$

$$\|u\| = \min_{v \in G} \left(\sup_{z \in Z,\; a(\cdot, z)_{|Z} \neq 0} \frac{x^*_0(z) - a(v, z)}{\|a(\cdot, z)_{|Z}\|} + \|v\| \right)$$

$\square$

a continua, simétrica, para todo $x \in Z$, $a(x,x) \geq 0$

u solución ecuación variacional con restricciones

$$J(u) = \min_{v \in G} J(v),$$

$J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional convexo

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - x_0^*(v)$$

Corolario

E reflexivo real, F normado real, $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineales, a continua, $w \in F \Rightarrow b(\cdot, w) \in E^*$

$$Z := \{v \in E : b(v, \cdot) = 0\}$$

$y_0^* \in F^*$, existe $\lambda, \beta > 0$

$$z \in Z \Rightarrow \lambda\|z\| \leq \|a(\cdot, z)_{|Z}\|$$

$$w \in F \Rightarrow y_0^*(w) \leq \beta\|b(\cdot, w)\|$$

Entonces para todo $x_0^* \in E^*$

$$\text{existe un único } u \in E \text{ tal que } \begin{cases} z \in Z & \Rightarrow a(u, z) = x_0^*(z) \\ w \in W & \Rightarrow b(u, w) = y_0^*(w) \end{cases}$$

$$\|u\| \leq \frac{\|x_0^*\|}{\lambda} + \left(1 + \frac{\|a\|}{\lambda}\right)\beta$$

$$y_0^*(w) =< g, w >$$

$g \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$\text{existe } \beta > 0 \text{ tal que } w \in F \Rightarrow y_0^*(w) \leq \beta \|b(\cdot, w)\|$$

$$\Updownarrow$$

$$G = \{v \in H^1(\Omega) :< \gamma_0(v), \cdot >= g\} \neq \emptyset$$

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

a coercitiva en $Z = H_0^1(\Omega)$

$$\min_{v \in G} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - fv\right)$$

$$y_0^*(w) =< g, w >$$

$g \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$\text{existe } \beta > 0 \text{ tal que } w \in F \Rightarrow y_0^*(w) \leq \beta \|b(\cdot, w)\|$$

$$\Updownarrow$$

$$G = \{v \in H^1(\Omega) :< \gamma_0(v), \cdot >= g\} \neq \emptyset$$

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

a coercitiva en $Z = H_0^1(\Omega)$

$$\min_{v \in G} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - fv\right)$$

$$y_0^*(w) =< g, w >$$

$g \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$\text{existe } \beta > 0 \text{ tal que } w \in F \Rightarrow y_0^*(w) \leq \beta \|b(\cdot, w)\|$$

$$\Updownarrow$$

$$G = \{v \in H^1(\Omega) :< \gamma_0(v), \cdot >= g\} \neq \emptyset$$

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

a coercitiva en $Z = H_0^1(\Omega)$

$$\min_{v \in G} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - fv\right)$$

Corolario

E reflexivo real, F normado real, $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineales, a continua, $w \in F \Rightarrow b(\cdot, w) \in E^*$

$$Z := \{v \in E : b(v, \cdot) = 0\}$$

existe $\lambda, \beta > 0$

$$z \in Z \Rightarrow \lambda \|z\|^2 \leq a(z, z)$$

$$w \in F \Rightarrow \|w\| \leq \beta \|b(\cdot, w)\|$$

Entonces, para todo $x_0^* \in E^*$, $y_0^* \in F^*$

$$\text{existe un único } u \in E \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{ll} z \in Z & \Rightarrow a(u, z) = x_0^*(z) \\ w \in W & \Rightarrow b(u, w) = y_0^*(w) \end{array} \right.$$

$$\|u\| \leq \frac{\|x_0^*\|}{\lambda} + \left(1 + \frac{\|a\|}{\lambda}\right) \frac{\|y_0^*\|}{\beta}$$

Esquema

Sketch del algoritmo numérico

$$x_0 \in E \; : \; a(x_0, \cdot) = y_0^*$$

- Unisolvencia en subespacios finito dimensionales $E_j \times F_j$
- Estabilidad
- Propiedad de aproximación en E:

$$\lim_{j \geq 1} \operatorname{dist}(x, E_j) = 0$$

Sketch del algoritmo numérico

$$x_0 \in E \ : \ a(x_0, \cdot) = y_0^*$$

- Unisolvencia en subespacios finito dimensionales $E_j \times F_j$
- Estabilidad
- Propiedad de aproximación en E:

$$\lim_{j \geq 1} \operatorname{dist}(x, E_j) = 0$$

$$x_0 \in E \; : \; a(x_0, \cdot) = y_0^*$$

- Unisolvencia en subespacios finito dimensionales $E_j \times F_j$
- Estabilidad
- Propiedad de aproximación en E:

$$\lim_{j \geq 1} \operatorname{dist}(x, E_j) = 0$$

$$x_0 \in E \ : \ a(x_0, \cdot) = y_0^*$$

- Unisolvencia en subespacios finito dimensionales $E_j \times F_j$
- Estabilidad
- Propiedad de aproximación en E:

$$\lim_{j \geq 1} \operatorname{dist}(x, E_j) = 0$$

1. E espacio de Banach reflexivo real, F espacio de Banach real, $a : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal, continua, $y_0^* \in F^*$ tales que

$$\text{existe } x_0 \in E \;:\; y_0^* = a(x_0, \cdot)$$

Bases de Schauder $\{u_k\}_{k \geq 1}$ en E $\{v_k\}_{k \geq 1}$ en F

2. $$E_j := \text{lin}\{u_1, \ldots, u_j\}, \; F_j := \text{lin}\{v_1, \ldots, v_j\}$$

3. Resolvemos el problema variacional (sistema ecuaciones lineales)

$$\text{encontrar } x_j \in E_j \;:\; a(x_j, \cdot) = y^*_{0\,|F_j}$$

4. $$\lim_{j \geq 1} \|x_j - x_0\| = 0$$

1. E espacio de Banach reflexivo real, F espacio de Banach real, $a : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal, continua, $y_0^* \in F^*$ tales que

$$\text{existe } x_0 \in E \ : \ y_0^* = a(x_0, \cdot)$$

Bases de Schauder $\{u_k\}_{k \geq 1}$ en E $\{v_k\}_{k \geq 1}$ en F

2. $$E_j := \text{lin}\{u_1, \dots, u_j\}, \ F_j := \text{lin}\{v_1, \dots, v_j\}$$

3. Resolvemos el problema variacional (sistema ecuaciones lineales)

$$\text{encontrar } x_j \in E_j \ : \ a(x_j, \cdot) = y_0^*{}_{|F_j}$$

4. $$\lim_{j \geq 1} \|x_j - x_0\| = 0$$

1. E espacio de Banach reflexivo real, F espacio de Banach real, $a : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal, continua, $y_0^* \in F^*$ tales que
$$\text{existe } x_0 \in E \ : \ y_0^* = a(x_0, \cdot)$$
Bases de Schauder $\{u_k\}_{k\geq 1}$ en E $\{v_k\}_{k\geq 1}$ en F
2. $$E_j := \text{lin}\{u_1, \ldots, u_j\}, \ F_j := \text{lin}\{v_1, \ldots, v_j\}$$
3. Resolvemos el problema variacional (sistema ecuaciones lineales)
$$\text{encontrar } x_j \in E_j \ : \ a(x_j, \cdot) = y_0^*{}_{|F_j}$$
4. $$\lim_{j\geq 1} \|x_j - x_0\| = 0$$

1. E espacio de Banach reflexivo real, F espacio de Banach real, $a : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal, continua, $y_0^* \in F^*$ tales que

$$\text{existe } x_0 \in E \ : \ y_0^* = a(x_0, \cdot)$$

   Bases de Schauder $\{u_k\}_{k \geq 1}$ en E $\{v_k\}_{k \geq 1}$ en F

2. $$E_j := \mathrm{lin}\{u_1, \ldots, u_j\}, \ F_j := \mathrm{lin}\{v_1, \ldots, v_j\}$$

3. Resolvemos el problema variacional (sistema ecuaciones lineales)

$$\text{encontrar } x_j \in E_j \ : \ a(x_j, \cdot) = y_{0 \,|F_j}^*$$

4. $$\lim_{j \geq 1} \|x_j - x_0\| = 0$$

Esquema

edo no lineal

$f \in C([\alpha, \alpha+\beta] \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Lipschitz

encontrar $x \in C^m([\alpha, \alpha+\beta], \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{m)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{m-1)}(t)), \quad t \in [\alpha, \alpha+\beta] \\ x(\alpha) = \theta_0,\ x'(\alpha) = \theta_1,\ \ldots,\ x^{m-1)}(\alpha) = \theta_{m-1} \end{array} \right.$$

encontrar punto fijo $T : C^{m-1}([\alpha, \alpha+\beta], \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^{m-1}([\alpha, \alpha+\beta], \mathbb{R}^n)$

$$(Tx)(t) := \theta_0 + (t-\alpha)\theta_1 + \frac{(t-\alpha)^2}{2!}\theta_2 + \cdots + \frac{(t-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!}\theta_{m-1} +$$

$$\int_\alpha^t \int_\alpha^{s_1} \cdots \int_\alpha^{s_{m-1}} f(s_m, x(s_m), x'(s_m), \ldots x^{m-1)}(s_m)) ds_m \cdots ds_2 ds_1$$

edo no lineal

$f \in C([\alpha, \alpha+\beta] \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Lipschitz

encontrar $x \in C^m([\alpha, \alpha+\beta], \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases} x^{m)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{m-1)}(t)), & t \in [\alpha, \alpha+\beta] \\ x(\alpha) = \theta_0,\ x'(\alpha) = \theta_1,\ \ldots,\ x^{m-1)}(\alpha) = \theta_{m-1} \end{cases}$$

encontrar punto fijo $T : C^{m-1}([\alpha, \alpha+\beta], \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^{m-1}([\alpha, \alpha+\beta], \mathbb{R}^n)$

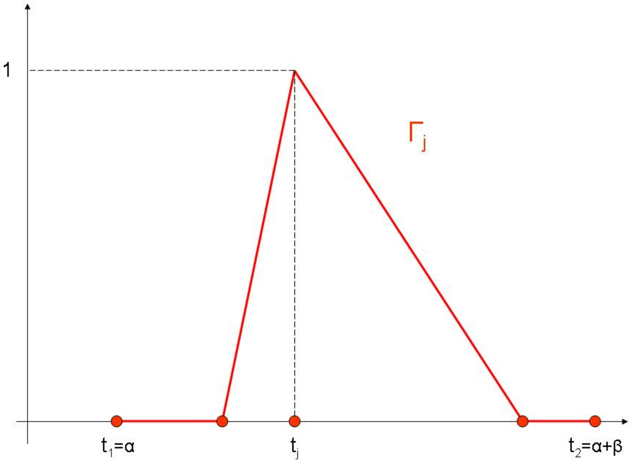
$$(Tx)(t) := \theta_0 + (t-\alpha)\theta_1 + \frac{(t-\alpha)^2}{2!}\theta_2 + \cdots + \frac{(t-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!}\theta_{m-1} +$$

$$\int_\alpha^t \int_\alpha^{s_1} \cdots \int_\alpha^{s_{m-1}} f(s_m, x(s_m), x'(s_m), \ldots x^{m-1)}(s_m))\, ds_m \cdots ds_2\, ds_1$$

$$\overline{\{t_1, t_2, \dots\}} = [\alpha, \alpha + \beta], \quad t_1 = \alpha,\ t_2 = \alpha + \beta$$

$\{\Gamma_j\}_{j \geq 1}$

$$\Gamma_1(t) = 1$$



Proposición

$n \geq 1$, $f = (f_k)_{k=1,\dots,n} \in C([\alpha, \alpha+\beta] \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$,
$x = (x_k)_{k=1,\dots,n} \in C^{m-1}([\alpha, \alpha+\beta], \mathbb{R}^n)$, $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1} \in \mathbb{R}^n$.
$\varphi = (\varphi_k)_{k=1,\dots,n} \in C([\alpha, \alpha+\beta], \mathbb{R}^n))$, $\varphi(t) = f(t, x(t), \dots, x^{m-1)}(t))$.
Entonces, para todo $t \in [\alpha, \alpha+\beta]$

$$(Tx)(t) = \theta_0 + (t-\alpha)\theta_1 + \frac{(t-\alpha)^2}{2!}\theta_2 + \cdots + \frac{(t-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!}\theta_{m-1}$$

$$+ \left(\sum_{i\geq 1} \lambda_k^{(i)} \int_\alpha^t \int_\alpha^{s_1} \cdots \int_\alpha^{s_{m-1}} \Gamma_i(s_m)ds_m \cdots ds_1 \right)_{k=1,\dots,n},$$

$$\lambda_k^{(1)} = \varphi_k(t_1)$$

y

$$\lambda_k^{(i)} = \varphi_k(t_i) - \sum_{p=1}^{i-1} \lambda_k^{(p)} \Gamma_p(t_i), \quad \text{si } i \geq 2$$

¿$T^j\bar{x}$?

Funciones aproximantes

$n \geq 1$, $f = (f_k)_{k=1,\dots,n} \in C([\alpha, \alpha+\beta] \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Lipschitz, $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in C^{m-1}([\alpha, \alpha+\beta], \mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$ y $n_1, \dots, n_p \geq 1$,

$$y_0(t) := \bar{x}(t)$$

$r = 1, \dots, p$

$$L_{r-1}(t) := f(t, y_{r-1}(t), y'_{r-1}(t), \dots, y^{m-1)}_{r-1}(t))$$

$$y_r(t) := \theta_0 + (t-\alpha)\theta_1 + \frac{(t-\alpha)^2}{2!}\theta_2 + \cdots + \frac{(t-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!}\theta_{m-1}$$

$$+ \int_\alpha^t \int_\alpha^{s_1} \cdots \int_\alpha^{s_{m-1}} (Q_{n_r}(L_{r-1}(s_m)))_{k=1,\dots,n}\, ds_m \cdots ds_2\, ds_1$$

¿$T^j \bar{x}$?

Funciones aproximantes

$n \geq 1$, $f = (f_k)_{k=1,\ldots,n} \in C([\alpha, \alpha+\beta] \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Lipschitz, $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in C^{m-1}([\alpha, \alpha+\beta], \mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$ y $n_1, \ldots, n_p \geq 1$,

$$y_0(t) := \bar{x}(t)$$

$r = 1, \ldots, p$

$$L_{r-1}(t) := f(t, y_{r-1}(t), y'_{r-1}(t), \ldots, y^{m-1)}_{r-1}(t))$$

$$y_r(t) := \theta_0 + (t-\alpha)\theta_1 + \frac{(t-\alpha)^2}{2!}\theta_2 + \cdots + \frac{(t-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!}\theta_{m-1}$$

$$+ \int_\alpha^t \int_\alpha^{s_1} \cdots \int_\alpha^{s_{m-1}} (Q_{n_r}(L_{r-1}(s_m)))_{k=1,\ldots,n}\, ds_m \cdots ds_2 ds_1$$

Error

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ tales que para todo $r = 1, \ldots, p$,

$$\| Ty_{r-1} - y_r \| < \varepsilon_r$$

u solución de la edo. Entonces

$$\|u - y_p\| \leq \frac{\beta^{pm}}{((m-1)p)!} M^p e^{M\beta} \| T\bar{x} - \bar{x} \| + \sum_{r=1}^{p} \varepsilon_r \frac{\beta^{m(p-r)}}{((m-1)(p-r))!} M^{p-r}$$

Si además $f(t, x_1, \ldots, x_m) \in C^1([\alpha, \alpha+\beta] \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial}{\partial t} f$, $\frac{\partial}{\partial x_1} f, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m} f$ lipschitzianas, entonces

$$\{L'_r\}_{r\geq 1} \text{ acotada}$$

$$\|Ty_{r-1} - y_r\| \leq \beta^m \|L_r - (Q_{n_r}(L_r)_k)_{k=1,\ldots,n}\|_\infty \leq 2\beta^m \|L'_r\|_\infty h$$

Si además $f(t, x_1, \ldots, x_m) \in C^1([\alpha, \alpha+\beta] \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial}{\partial t} f$, $\frac{\partial}{\partial x_1} f, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m} f$ lipschitzianas, entonces

$$\{L_r'\}_{r\geq 1} \text{ acotada}$$

$$\|Ty_{r-1} - y_r\| \leq \beta^m \|L_r - (Q_{n_r}(L_r)_k)_{k=1,\ldots,n}\|_\infty \leq 2\beta^m \|L_r'\|_\infty h$$

Esquema

Ecuación de Lienard (escalar)

$$\begin{cases} y''(t) + y(t)y'(t) + y(t) + y^2(t) = \cos^2 t - \sin t \cos t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\ , \quad (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

$y(t) = \cos t$

$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := \int_1^x f(s)ds = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

encontar $x \in C^1([0,1], \mathbb{R}^2)$ tal que $x(0) = (1,0)$ y

$$x'(t) = \Phi(t, x(t)), \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$\Phi : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\Phi(t, (x_1, x_2)) := (x_2 - \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{2}, -x_1 - x_1^2 + \cos^2 t - \sin t \cos t)$$

$x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ solución pvi si, y sólo si, $x_1(t)$ solución ecuación de Lienard

Ecuación de Lienard (escalar)

$$\begin{cases} y''(t) + y(t)y'(t) + y(t) + y^2(t) = \cos^2 t - \sin t \cos t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,, \quad (0 \le t \le 1) \end{cases}$$

$y(t) = \cos t$
$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := \int_1^x f(s)ds = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$
encontar $x \in C^1([0,1], \mathbb{R}^2)$ tal que $x(0) = (1,0)$ y

$$x'(t) = \Phi(t, x(t)), \quad (0 \le t \le 1),$$

$\Phi : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\Phi(t,(x_1,x_2)) := (x_2 - \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{2}, -x_1 - x_1^2 + \cos^2 t - \sin t \cos t)$$

$x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ solución pvi si, y sólo si, $x_1(t)$ solución ecuación de Lienard

$n \in \mathbb{N}$, $n = 2^k + 1, k \in \mathbb{N}$

$$\{t_1, t_2 \ldots t_n\} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{2^{k-1}}{2^k}\right\}$$

$$h = \frac{1}{2^k}$$

y_r, $n_1 = \cdots = n_r = n$, $\bar{x} = x(0)$

$$E_{nr} = \max_i |y_r(s_i) - u(s_i)|$$

u solución exacta pvi

	$(n=9, m=9)$	$(n=17, m=9)$	$(n=33, m=9)$
0	0	0	0
0.125	2.12×10^{-5}	5.27×10^{-6}	1.31×10^{-6}
0.250	8.61×10^{-5}	2.15×10^{-5}	5.37×10^{-6}
0.375	1.95×10^{-4}	4.88×10^{-5}	1.22×10^{-5}
0.500	3.46×10^{-4}	8.68×10^{-5}	2.17×10^{-5}
0.625	5.35×10^{-4}	1.34×10^{-4}	3.34×10^{-5}
0.750	7.57×10^{-4}	1.89×10^{-4}	4.67×10^{-5}
0.875	1.00×10^{-3}	2.48×10^{-4}	5.96×10^{-5}
1	1.26×10^{-3}	3.07×10^{-4}	6.89×10^{-5}

Sistema de edo no lineales

$$\left\{ \begin{array}{l} x''(t) = (x_1(t)x_2'(t) - t, x_2(t)(x_2(t) - x_1(t)) + te^t) \\ x(0) = (1,0),\ x'(0) = (2,1) \end{array} \right. , \qquad (0 \le t \le 1)$$

$$x(t) = (t + e^t, t)$$

$$\overline{x}(t) = (1, 0)$$

	$(n = 9, m = 4)$	$(n = 17, m = 5)$	$(n = 33, m = 5)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
0.125	$(1.08E-5, -3.54E-9)$	$(2.66E-6, -3.76E-10)$	$(6.64E-7, -7.09E-11)$
0.250	$(4.49E-5, -5.19E-8)$	$(1.11E-5, -9.37E-9)$	$(2.78E-6, -2.16E-9)$
0.375	$(1.05E-4, -3.50E-7)$	$(2.63E-5, -6.91E-8)$	$(6.58E-6, -1.66E-8)$
0.500	$(1.97E-4, -1.58E-6)$	$(4.93E-5, -2.93E-7)$	$(1.23E-5, -7.12E-8)$
0.625	$(3.18E-4, -5.88E-6)$	$(8.12E-5, -9.02E-7)$	$(2.01E-5, -2.13E-7)$
0.750	$(4.53E-4, -1.98E-5)$	$(1.22E-4, -2.20E-6)$	$(2.96E-5, -4.60E-7)$
0.875	$(5.28E-4, -6.30E-5)$	$(1.69E-4, -4.23E-6)$	$(3.66E-5, -4.53E-7)$
1	$(2.97E-4, -1.88E-4)$	$(2.05E-4, -5.19E-6)$	$(2.38E-5, 2.07E-6)$

Sistema de edo no lineales

$$\left\{ \begin{array}{l} x''(t) = (x_1(t)x_2'(t) - t, x_2(t)(x_2(t) - x_1(t)) + te^t) \\ x(0) = (1,0), \; x'(0) = (2,1) \end{array} \right. , \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

$$x(t) = (t + e^t, t)$$

$$\overline{x}(t) = (1,0)$$

	$(n = 9, m = 4)$	$(n = 17, m = 5)$	$(n = 33, m = 5)$
(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
0.125	$(1.08E-5, -3.54E-9)$	$(2.66E-6, -3.76E-10)$	$(6.64E-7, -7.09E-11)$
0.250	$(4.49E-5, -5.19E-8)$	$(1.11E-5, -9.37E-9)$	$(2.78E-6, -2.16E-9)$
0.375	$(1.05E-4, -3.50E-7)$	$(2.63E-5, -6.91E-8)$	$(6.58E-6, -1.66E-8)$
0.500	$(1.97E-4, -1.58E-6)$	$(4.93E-5, -2.93E-7)$	$(1.23E-5, -7.12E-8)$
0.625	$(3.18E-4, -5.88E-6)$	$(8.12E-5, -9.02E-7)$	$(2.01E-5, -2.13E-7)$
0.750	$(4.53E-4, -1.98E-5)$	$(1.22E-4, -2.20E-6)$	$(2.96E-5, -4.60E-7)$
0.875	$(5.28E-4, -6.30E-5)$	$(1.69E-4, -4.23E-6)$	$(3.66E-5, -4.53E-7)$
1	$(2.97E-4, -1.88E-4)$	$(2.05E-4, -5.19E-6)$	$(2.38E-5, 2.07E-6)$

Sistema de edo no lineales

$$\left\{\begin{array}{l} x''(t) = (x_1(t)x_2'(t) - t, x_2(t)(x_2(t) - x_1(t)) + te^t) \\ x(0) = (1,0),\ x'(0) = (2,1) \end{array}\right. , \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

$$x(t) = (t + e^t, t)$$

$$\overline{x}(t) = (1,0)$$

	$(n = 9, m = 4)$	$(n = 17, m = 5)$	$(n = 33, m = 5)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
0.125	$(1.08E-5, -3.54E-9)$	$(2.66E-6, -3.76E-10)$	$(6.64E-7, -7.09E-11)$
0.250	$(4.49E-5, -5.19E-8)$	$(1.11E-5, -9.37E-9)$	$(2.78E-6, -2.16E-9)$
0.375	$(1.05E-4, -3.50E-7)$	$(2.63E-5, -6.91E-8)$	$(6.58E-6, -1.66E-8)$
0.500	$(1.97E-4, -1.58E-6)$	$(4.93E-5, -2.93E-7)$	$(1.23E-5, -7.12E-8)$
0.625	$(3.18E-4, -5.88E-6)$	$(8.12E-5, -9.02E-7)$	$(2.01E-5, -2.13E-7)$
0.750	$(4.53E-4, -1.98E-5)$	$(1.22E-4, -2.20E-6)$	$(2.96E-5, -4.60E-7)$
0.875	$(5.28E-4, -6.30E-5)$	$(1.69E-4, -4.23E-6)$	$(3.66E-5, -4.53E-7)$
1	$(2.97E-4, -1.88E-4)$	$(2.05E-4, -5.19E-6)$	$(2.38E-5, 2.07E-6)$

Esquema

- Volterra no lineal de segunda clase

$$x(s) = y(s) + \int_a^s K(s,t,x(t))dt, \qquad (s \in [a,b])$$

$y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $K : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, existe $L > 0$ de forma que para todo $s,t \in [a,b],\ u,v \in \mathbb{R}$

$$|K(s,t,u) - K(s,t,v)| \leq L|u-v|$$

- Volterra integro-diferencial no lineal

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) + \displaystyle\int_a^t K(t,s,y(s))\,ds, & (t \in [a,b]) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$y_0 \in \mathbb{R}$, $K : [0,1] \times [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas, existe $L_f, L_K \geq 0$ tal que para todo $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L_f|y_1 - y_2|$$

$$\max_{a \leq t,s \leq b} |K(t,s,y_1) - K(t,s,y_2)| \leq L_K|y_1 - y_2|$$

- Volterra no lineal de segunda clase

$$x(s) = y(s) + \int_a^s K(s,t,x(t))dt, \qquad (s \in [a,b])$$

$y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $K : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, existe $L > 0$ de forma que para todo $s,t \in [a,b]$, $u,v \in \mathbb{R}$

$$|K(s,t,u) - K(s,t,v)| \leq L|u-v|$$

- Volterra integro-diferencial no lineal

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) + \displaystyle\int_a^t K(t,s,y(s))\,ds, & (t \in [a,b]) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$y_0 \in \mathbb{R}$, $K : [0,1] \times [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas, existe $L_f, L_K \geq 0$ tal que para todo $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L_f|y_1 - y_2|$$

$$\max_{a \leq t,s \leq b} |K(t,s,y_1) - K(t,s,y_2)| \leq L_K|y_1 - y_2|$$

- Fredholm de segunda clase no lineal

$$f(x) = \lambda u(x) - \int_a^b k(x, y, u(y))dy, \qquad (x \in [a, b])$$

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas

- Fredholm integro-diferencial no lineal

$$y'(x) = g(x) + \int_a^b G(x, t, y(t))dt, \qquad (x \in [a, b])$$

$g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $G : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas

- Fredholm de segunda clase no lineal

$$f(x) = \lambda u(x) - \int_a^b k(x, y, u(y))dy, \qquad (x \in [a, b])$$

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas

- Fredholm integro-diferencial no lineal

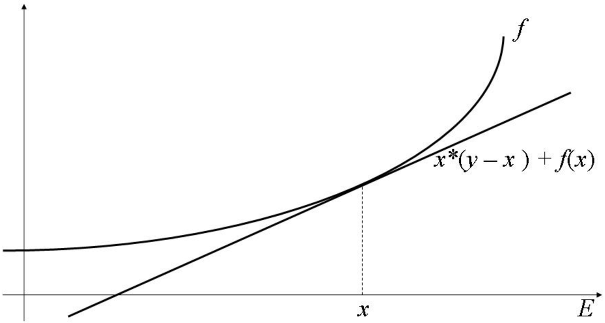
$$y'(x) = g(x) + \int_a^b G(x, t, y(t))dt, \qquad (x \in [a, b])$$

$g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $G : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas

Esquema

Teorema de James convexo

$f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ cpis, $x \in E$, $f(x) < \infty$



$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* : \text{para todo } y \in E, \quad x^*(y - x) \leq f(y) - f(x)\}$$

Teorema de James convexo

$$f - x^* \text{ alcanza su ínfimo en } x \Leftrightarrow x^* \in \partial f(x).$$

f cuadrática

James

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad \partial f(E) = E^* \Rightarrow E \text{ reflexivo}$$

$$f - x^* \text{ alcanza su ínfimo en } x \Leftrightarrow x^* \in \partial f(x).$$

f cuadrática

James

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad \partial f(E) = E^* \Rightarrow E \text{ reflexivo}$$

$$f - x^* \text{ alcanza su ínfimo en } x \Leftrightarrow x^* \in \partial f(x).$$

f cuadrática

James

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad \partial f(E) = E^* \Rightarrow E \text{ reflexivo}$$

Proposición

E espacio de Banach real con bola unidad dual w*-secuencialmente compacta, $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ cpis

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = \infty$$

$$\partial f(E) = E^*.$$

Entonces

$$\text{para todo } c \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}((-\infty, c]) \text{ es w-compacto}$$

Problema

Dados un espacio de Banach real E y una función convexa, propia e inferiormente semicontinua $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de forma que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = \infty$$

y

$$\partial f(E) = E^*,$$

¿podemos asegurar que

$$\text{para todo } c \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}((-\infty, c]) \text{ es w-compacto?}$$

Esquema

Problema

Sean E y F espacios de Banach reflexivos reales, C y D subconjuntos convexos de E y F, respectivamente, $f : C \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ y $g : D \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ funciones cóncavas propias y $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ y $b : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ formas bilineales verificando alguna hipótesis de continuidad. Caracterizar cuándo el problema variacional mixto

$$\text{existe } (u, p) \in E \times F \ : \ \left\{ \begin{array}{l} x \in C \Rightarrow f(x) \leq a(u, x) + b(x, p) \\ y \in D \Rightarrow g(y) \leq b(u, y) \end{array} \right.$$

admite solución y obtener una estimación de las normas de las soluciones.

Bibliografía

- M.I. Berenguer, A.I. Garralda Guillem and M. Ruiz Galán, *Numerical solution of the nonlinear Volterra integro-differential equation sequentially determined*, submitted for publication.
- E. Castro, D. Gámez, A. I. Garralda Guillem and M. Ruiz Galán, *High order linear initial-value problems and Schauder bases*, Applied Mathematical Modelling, **31** (2007), 2629-2638.
- D. Gámez, A.I. Garralda Guillem and M. Ruiz Galán, *High order nonlinear initial–value problems countably determined*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **228** (2009), 77-82.
- A.I. Garralda Guillem, M. Ruiz Galán and M.C. Serrano Pérez, *Finite element methods for reflexive Banach spaces*, preprint.
- J. Orihuela and M. Ruiz Galán, *A convex James's theorem*, preprint.
- A. Palomares, M. Pasadas, V. Ramírez and M. Ruiz Galán, *A convergence result for a least-squares method using Schauder bases*, Mathematics and Computers in Simulation, **77** (2008), 274-281.
- M. Ruiz Galán, *A version of the Lax-Milgram theorem for locally convex spaces*, to appear in Journal of Convex Analysis.

Bibliografía

- M.I. Berenguer, A.I. Garralda Guillem and M. Ruiz Galán, *Numerical solution of the nonlinear Volterra integro-differential equation sequentially determined*, submitted for publication.
- E. Castro, D. Gámez, A. I. Garralda Guillem and M. Ruiz Galán, *High order linear initial-value problems and Schauder bases*, Applied Mathematical Modelling, **31** (2007), 2629-2638.
- D. Gámez, A.I. Garralda Guillem and M. Ruiz Galán, *High order nonlinear initial–value problems countably determined*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **228** (2009), 77-82.
- A.I. Garralda Guillem, M. Ruiz Galán and M.C. Serrano Pérez, *Finite element methods for reflexive Banach spaces*, preprint.
- J. Orihuela and M. Ruiz Galán, *A convex James's theorem*, preprint.
- A. Palomares, M. Pasadas, V. Ramírez and M. Ruiz Galán, *A convergence result for a least-squares method using Schauder bases*, Mathematics and Computers in Simulation, **77** (2008), 274-281.
- M. Ruiz Galán, *A version of the Lax-Milgram theorem for locally convex spaces*, to appear in Journal of Convex Analysis.

MUCHAS GRACIAS