Teorema de tipo Katznelson-Tzafriri para semigrupos integrados

María Martínez Martínez

Universidad de Zaragoza

V Encuentro de Análisis Funcional y Aplicaciones
Salobreña, 23 de abril de 2009

Estabilidad

X un espacio de Banach
$\mathfrak{B}(X)$ el álgebra de los operadores lineales y acotados en X

Estabilidad

X un espacio de Banach
$\mathfrak{B}(X)$ el álgebra de los operadores lineales y acotados en X

$T \in \mathfrak{B}(X)$ es estable si $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0,\ \forall x \in X.$

Estabilidad

X un espacio de Banach
$\mathfrak{B}(X)$ el álgebra de los operadores lineales y acotados en X

$T \in \mathfrak{B}(X)$ es estable si $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$, $\forall x \in X$.

Un semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ en X es estable si $\lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0$, $\forall x \in X$.

Estabilidad

X un espacio de Banach
$\mathfrak{B}(X)$ el álgebra de los operadores lineales y acotados en X

$T \in \mathfrak{B}(X)$ es estable si $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0,\ \forall x \in X$.

Un semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ en X es estable si $\lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0,\ \forall x \in X$.

Relación con el Problema Abstracto de Cauchy:

Sea A un operador lineal y cerrado en X.

$$(\mathrm{PC}) \begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = x, & x \in D(A). \end{cases}$$

- (C_0)-semigrupos estables $\Leftrightarrow$ (PC) bien planteados y estables (en el sentido de Lyapunov)

Estabilidad en *Teoría de operadores*:

- Clasificación de semigrupos de contracciones
- Problemas de semejanza
- Teoría del espacio invariante

Theorem (C. Ambrozie, V. Müller; JFA, 04)

Todo operador en X polinomialmente acotado, estable y cuyo espectro contenga a la circunferencia unidad tiene un subespacio invariante no trivial.

Estabilidad en *Teoría de operadores*:

- Clasificación de semigrupos de contracciones
- Problemas de semejanza
- Teoría del espacio invariante

Theorem (C. Ambrozie, V. Müller; JFA, 04)

Todo operador en X polinomialmente acotado, estable y cuyo espectro contenga a la circunferencia unidad tiene un subespacio invariante no trivial.

Estabilidad en *Análisis complejo, Teoría espectral, Análisis armónico*:

- Teoremas de estructura para los subespacios invariantes del operador de multiplicación de Bergman
- Nuevos principios del máximo para funciones armónicas
- Nuevos teoremas tauberianos

Teorema de Katznelson-Tzafriri

Condiciones suficientes para estabilidad de $T \in \mathfrak{B}(X)$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$:

Teorema de Katznelson-Tzafriri

Condiciones suficientes para estabilidad de $T \in \mathfrak{B}(X)$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$:

- T^* no admite trayectorias completas acotadas (M. Lin; 71)

Teorema de Katznelson-Tzafriri

Condiciones suficientes para estabilidad de $T \in \mathfrak{B}(X)$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$:

- T^* no admite trayectorias completas acotadas (M. Lin; 71)
- T supercíclico (S. Ansari, P. Bourdon; 97)

Teorema de Katznelson-Tzafriri

Condiciones suficientes para estabilidad de $T \in \mathfrak{B}(X)$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$:

- T^* no admite trayectorias completas acotadas (M. Lin; 71)
- T supercíclico (S. Ansari, P. Bourdon; 97)
- $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ contable y $P\sigma(T^*) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ (W. Arendt, C.J.K. Batty; Y.L. Lyubich, V.Q. Phong; 88)

Teorema de Katznelson-Tzafriri

Condiciones suficientes para estabilidad de $T \in \mathfrak{B}(X)$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$:

- T^* no admite trayectorias completas acotadas (M. Lin; 71)
- T supercíclico (S. Ansari, P. Bourdon; 97)
- $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ contable y $P\sigma(T^*) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ (W. Arendt, C.J.K. Batty; Y.L. Lyubich, V.Q. Phong; 88)
- Síntesis espectral:

Teorema de Katznelson-Tzafriri

Condiciones suficientes para estabilidad de $T \in \mathfrak{B}(X)$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$:

- T^* no admite trayectorias completas acotadas (M. Lin; 71)
- T supercíclico (S. Ansari, P. Bourdon; 97)
- $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ contable y $P\sigma(T^*) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ (W. Arendt, C.J.K. Batty; Y.L. Lyubich, V.Q. Phong; 88)
- Síntesis espectral:

Theorem (Y. Katznelson, L. Tzafriri; JFA, 86)

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in W(\mathbb{T})$ es de síntesis espectral respecto de $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ entonces $\lim_{n\to\infty} \|T^n f(T)\| = 0$, donde $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n$.

Teorema de Katznelson-Tzafriri

Condiciones suficientes para estabilidad de $T \in \mathfrak{B}(X)$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$:

- T^* no admite trayectorias completas acotadas (M. Lin; 71)
- T supercíclico (S. Ansari, P. Bourdon; 97)
- $\sigma(T)\cap\mathbb{T}$ contable y $P\sigma(T^*)\cap\mathbb{T}=\emptyset$ (W. Arendt, C.J.K. Batty; Y.L. Lyubich, V.Q. Phong; 88)
- Síntesis espectral:

Theorem (Y. Katznelson, L. Tzafriri; JFA, 86)

Si $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in W(\mathbb{T})$ es de síntesis espectral respecto de $\sigma(T)\cap\mathbb{T}$ entonces $\lim_{n\to\infty} \|T^n f(T)\| = 0$, donde $f(T)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n$.

- $W(\mathbb{T}) = \left\{\mathcal{F}c \,:\, c \equiv (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})\right\}$.

Teorema de Katznelson-Tzafriri

Condiciones suficientes para estabilidad de $T \in \mathfrak{B}(X)$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$:

- T^* no admite trayectorias completas acotadas (M. Lin; 71)
- T supercíclico (S. Ansari, P. Bourdon; 97)
- $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ contable y $P\sigma(T^*) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ (W. Arendt, C.J.K. Batty; Y.L. Lyubich, V.Q. Phong; 88)
- Síntesis espectral:

Theorem (Y. Katznelson, L. Tzafriri; JFA, 86)

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in W(\mathbb{T})$ es de síntesis espectral respecto de $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ entonces $\lim_{n\to\infty} \|T^n f(T)\| = 0$, donde $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n$.

- $W(\mathbb{T}) = \left\{ \mathcal{F}c \,:\, c \equiv (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}) \right\}$.
- $f \in W(\mathbb{T})$ es de síntesis espectral respecto de un cerrado $F \subseteq \mathbb{T}$ si existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W(\mathbb{T})$ tal que:
  - (i) $\|f - f_n\|_W \to 0$ $(n \to \infty)$ y
  - (ii) Cada f_n se anula en un entorno U_n de F.

Versión análoga para (C_0)-semigrupos

Theorem (V.Q. Phong, JFA; J. Esterle, E. Strouse, F.Zouakia, JOT; 92)

Sea A el generador infinitesimal de un (C_0)-semigrupo acotado $(T(t))_{t\geq 0}$ en X y sea $\pi : L^1(\mathbb{R}^+) \to \mathfrak{B}(X)$ el homomorfismo asociado al semigrupo:

$$\pi(f)x := \int_0^\infty f(t)\, T(t)x\, \mathrm{d}t\,, \qquad x \in X\,,\ f \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ es de síntesis espectral respecto de $(i\sigma(A)) \cap \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)\pi(f)\| = 0.$$

Versión análoga para (C_0)-semigrupos

Theorem (V.Q. Phong, JFA; J. Esterle, E. Strouse, F.Zouakia, JOT; 92)

Sea A el generador infinitesimal de un (C_0)-semigrupo acotado $(T(t))_{t\geq 0}$ en X y sea $\pi : L^1(\mathbb{R}^+) \to \mathfrak{B}(X)$ el homomorfismo asociado al semigrupo:

$$\pi(f)x := \int_0^\infty f(t)\, T(t)x \,\mathrm{d}t\,, \qquad x \in X\,,\ f \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ es de síntesis espectral respecto de $(i\sigma(A)) \cap \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to\infty} \| T(t)\pi(f)\| = 0.$$

- $f \in L^1(\mathbb{R})$ es una función de síntesis espectral respecto de un cerrado $F \subseteq \mathbb{R}$ si existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(\mathbb{R})$ tal que:
  (i) $\|f - f_n\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$
  (ii) Cada $\mathcal{F}f_n$ se anula en un entorno U_n de F.

Extensión a semigrupos α-veces integrados

Teorema

Para $\alpha \geq 0$, sea $(T_\alpha(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ un semigrupo α veces integrado, $\sup_{t>0} t^{-\alpha} \| T_\alpha(t)\| < \infty$, verificando la propiedad C_0^α. Sea A su generador y $\pi : \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha) \to \mathfrak{B}(X)$ el homomorfismo dado por

$$\pi(f)x := \int_0^\infty W_+^\alpha f(t)\, T_\alpha(t)x \,\mathrm{d}t\,, \;\; x \in X\,,\; f \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha).$$

Si $f \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ es de síntesis espectral respecto de $(i\sigma(A)) \cap \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} \| T_\alpha(t)\, \pi(f)\| = 0\,.$$

Semigrupos α-veces integrados

- Ejemplo motivador: integración de un semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$,

$$T_\alpha(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(s)\, \mathrm{d}s\,, \qquad t \geq 0.$$

Semigrupos α-veces integrados

- Ejemplo motivador: integración de un semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$,

$$T_\alpha(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad t \geq 0.$$

- Un semigrupo α veces integrado es una familia fuertemente continua de operadores $(T_\alpha(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ tal que $T_\alpha(0) = 0$ y

$$T_\alpha(t)T_\alpha(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_t^{t+s} - \int_0^s \right) (t+s-r)^{\alpha-1} T_\alpha(r)\,\mathrm{d}r,\ s,t \geq 0.$$

Semigrupos α-veces integrados

- Ejemplo motivador: integración de un semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$,

$$T_\alpha(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad t \geq 0.$$

- Un semigrupo α veces integrado es una familia fuertemente continua de operadores $(T_\alpha(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ tal que $T_\alpha(0) = 0$ y

$$T_\alpha(t)T_\alpha(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_t^{t+s} - \int_0^s \right) (t+s-r)^{\alpha-1} T_\alpha(r)\,\mathrm{d}r,\ s,t \geq 0.$$

- Si existen $C \geq 0$ y $w \in \mathbb{R}$ tal que $\|T_\alpha(t)\| \leq C\,e^{wt}$, se define el *generador* A de $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ mediante

$$(\lambda - A)^{-1} := \lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\alpha(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \Re\lambda > w.$$

Semigrupos α-veces integrados

- Ejemplo motivador: integración de un semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$,

$$T_\alpha(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad t \geq 0.$$

- Un semigrupo α veces integrado es una familia fuertemente continua de operadores $(T_\alpha(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ tal que $T_\alpha(0) = 0$ y

$$T_\alpha(t)T_\alpha(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_t^{t+s} - \int_0^s \right) (t+s-r)^{\alpha-1} T_\alpha(r)\,\mathrm{d}r,\ s,t \geq 0.$$

- Si existen $C \geq 0$ y $w \in \mathbb{R}$ tal que $\|T_\alpha(t)\| \leq C\,e^{wt}$, se define el *generador* A de $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ mediante

$$(\lambda - A)^{-1} := \lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\alpha(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \Re\lambda > w.$$

- **Ejemplo:** Operador de Schrödinger $i\Delta$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \neq 2$: $T_\alpha(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{is\Delta}\mathrm{d}s$, $\|T_\alpha(t)\| \leq Ct^\alpha$, $\alpha > n\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$.

Semigrupos α-veces integrados y Ergodicidad

Sea $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo α veces integrado.

O. ElMennaoui, 1994:

- $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ es ergódico si $\exists \lim_{t\to\infty} t^{-\alpha}\|T_\alpha(t)x\|$, $\forall x \in X$.
- Definió *Abel* y *Cesàro ergodicidad* para semigrupos integrados.
- $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ ergódico $\Rightarrow$ Cesàro ergodico $\Rightarrow$ Abel ergodico.
- Los recíprocos no son ciertos en general.

Semigrupos α-veces integrados y Ergodicidad

Sea $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo α veces integrado.

O. ElMennaoui, 1994:

- $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ es ergódico si $\exists\, \text{lím}_{t\to\infty} t^{-\alpha}\|T_\alpha(t)x\|$, $\forall x \in X$.
- Definió *Abel* y *Cesàro ergodicidad* para semigrupos integrados.
- $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ ergódico $\Rightarrow$ Cesàro ergodico $\Rightarrow$ Abel ergodico.
- Los recíprocos no son ciertos en general.

$(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ es estable si $\exists\, \text{lím}_{t\to\infty} t^{-\alpha}\|T_\alpha(t)x\| = 0$, $\forall x \in X$.

Semigrupos integrados y Álgebras fraccionarias

$\boxed{\alpha = 0}$

$$(T(t))_{t\geq 0} \ (C_0)\text{-semigrupo acotado en } X$$

$$\Updownarrow \quad T(t) \equiv \pi(\delta_t)$$

$$\pi : L^1(\mathbb{R}^+) \to \mathfrak{B}(X) \text{ homomorfismo acotado, } \pi(L^1(\mathbb{R}^+))X = X$$

Semigrupos integrados y Álgebras fraccionarias

$\boxed{\alpha = 0}$

$$(T(t))_{t\geq 0} \ (C_0)\text{-semigrupo acotado en } X$$

$$\Updownarrow \quad T(t) \equiv \pi(\delta_t)$$

$$\pi : L^1(\mathbb{R}^+) \to \mathfrak{B}(X) \text{ homomorfismo acotado, } \pi(L^1(\mathbb{R}^+))X = X$$

$\boxed{\alpha > 0}$ (P.J. Miana, 02)

$$(T_\alpha(t)) \text{ semigrupo } \alpha \text{ veces integrado en } X, \ \sup_{t>0} t^{-\alpha} \, \|T_\alpha(t)\| < \infty,$$

$$\text{verificando } (C_0^\alpha)\text{: } \lim_{t\to 0^+} \Gamma(\alpha+1)\, t^{-\alpha}\, T_\alpha(t)x = x, \ \forall x \in X$$

$$\Updownarrow \quad T_\alpha(t) \equiv \pi(R_t^{\alpha-1})$$

$$\pi : \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha) \to \mathfrak{B}(X) \text{ homomorfismo acotado, } \pi(\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha))X = X$$

Derivada fraccionaria de Weyl

Sea $f \in C_c^\infty[0,\infty)$.

- Integral fraccionaria de Weyl de f de orden $\alpha > 0$ en $\mathbb{R}^+ \equiv (0,\infty)$:

$$W_+^{-\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty (s-t)^{\alpha-1} f(s)\,\mathrm{d}s, \; t > 0,$$

- Derivada fraccionaria de Weyl de f de orden $\alpha > 0$ en $\mathbb{R}^+ \equiv (0,\infty)$:

$$W_+^{\alpha} f(t) := (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} W_+^{-(n-\alpha)} f(t), \; t > 0,$$

donde $n := [\alpha] + 1$ y $[\alpha]$ es la parte entera de α.

El álgebra $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$, $\alpha > 0$

$\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ se define como la complección del espacio $C_c^\infty[0,\infty)$ en la norma ν_α dada por

$$\nu_\alpha(f) := \int_0^\infty |W_+^\alpha f(t)|\, t^\alpha \,\mathrm{d}t, \qquad f \in C_c^\infty[0,\infty).$$

El álgebra $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$, $\alpha > 0$

$\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ se define como la complección del espacio $C_c^\infty[0,\infty)$ en la norma ν_α dada por

$$\nu_\alpha(f) := \int_0^\infty |W_+^\alpha f(t)|\, t^\alpha \,\mathrm{d}t, \qquad f \in C_c^\infty[0,\infty).$$

- $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ es un álgebra de Banach:

$$f * g(x) := \int_0^x f(x-y)\, g(y)\,\mathrm{d}y\ , \ \ \mathrm{a.\ e.}\ x > 0,\ f,g \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha).$$

El álgebra $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$, $\alpha > 0$

$\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ se define como la complección del espacio $C_c^\infty[0,\infty)$ en la norma ν_α dada por

$$\nu_\alpha(f) := \int_0^\infty |W_+^\alpha f(t)|\, t^\alpha \,\mathrm{d}t, \qquad f \in C_c^\infty[0,\infty).$$

- $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ es un álgebra de Banach:

$$f * g(x) := \int_0^x f(x-y)\, g(y)\,\mathrm{d}y\ ,\ \ \text{a. e. } x > 0,\ f, g \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha).$$

- $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha) \hookrightarrow \mathcal{T}_+^{(\beta)}(t^\beta) \hookrightarrow \mathcal{T}_+^{(0)}(t^0) \equiv L^1(\mathbb{R}^+)$, $\alpha \geq \beta \geq 0$.

El álgebra $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$, $\alpha > 0$

$\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ se define como la complección del espacio $C_c^\infty[0,\infty)$ en la norma ν_α dada por

$$\nu_\alpha(f) := \int_0^\infty |W_+^\alpha f(t)|\, t^\alpha\, \mathrm{d}t, \qquad f \in C_c^\infty[0,\infty).$$

- $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ es un álgebra de Banach:
$$f * g(x) := \int_0^x f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y\ , \ \ \text{a. e. } x > 0,\ f, g \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha).$$
- $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha) \hookrightarrow \mathcal{T}_+^{(\beta)}(t^\beta) \hookrightarrow \mathcal{T}_+^{(0)}(t^0) \equiv L^1(\mathbb{R}^+)$, $\alpha \geq \beta \geq 0$.
- $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)^* = \{L_\phi\, ;\, \phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ definida c.t.p., $t^{-\alpha}\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^+)\}$ y
$$L_\phi(f) = \int_0^\infty W_+^\alpha f(t)\, \phi(t)\, \mathrm{d}t, \quad L_\phi \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)^*,\ f \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha).$$

Núcleos de Riesz

Para $\alpha > 0$, $(R_t^{\alpha-1})_{t>0}$ denota a la familia de los *núcleos de Riesz*:

$$R_t^{\alpha-1}(s) := \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si} \quad 0 \leq s < t, \\ 0 & \text{si} \quad s \geq t. \end{cases}$$

Núcleos de Riesz

Para $\alpha > 0$, $(R_t^{\alpha-1})_{t>0}$ denota a la familia de los *núcleos de Riesz*:

$$R_t^{\alpha-1}(s) := \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si} \quad 0 \leq s < t, \\ 0 & \text{si} \quad s \geq t. \end{cases}$$

- $R_t^{\alpha-1} * \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha) \subseteq \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ para cada $t > 0$.

Núcleos de Riesz

Para $\alpha > 0$, $(R_t^{\alpha-1})_{t>0}$ denota a la familia de los *núcleos de Riesz*:

$$R_t^{\alpha-1}(s) := \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si} \quad 0 \leq s < t, \\ 0 & \text{si} \quad s \geq t. \end{cases}$$

- $R_t^{\alpha-1} * \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha) \subseteq \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ para cada $t > 0$.
- $f * g = \displaystyle\int_0^\infty W_+^\alpha f(t)\,(R_t^{\alpha-1} * g)\,\mathrm{d}t\,,\;\; f, g \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$.

$\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)$ y $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$

- $\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)$ se define análogamente como la complección de $C_c^\infty(-\infty, 0]$ en la norma

$$\nu_\alpha(f) := \int_{-\infty}^{0} |W_-^\alpha f(t)| \, (-t)^\alpha \, \mathrm{d}t, \qquad f \in C_c^\infty(-\infty, 0].$$

$\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)$ y $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$

- $\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)$ se define análogamente como la complección de $C_c^\infty(-\infty, 0]$ en la norma

$$\nu_\alpha(f) := \int_{-\infty}^0 |W_-^\alpha f(t)| \, (-t)^\alpha \, \mathrm{d}t, \qquad f \in C_c^\infty(-\infty, 0].$$

- $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha) := \mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha) \oplus \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha).$

$\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)$ y $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$

- $\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)$ se define análogamente como la complección de $C_c^\infty(-\infty,0]$ en la norma

$$\nu_\alpha(f) := \int_{-\infty}^{0} |W_-^\alpha f(t)| \, (-t)^\alpha \, \mathrm{d}t, \qquad f \in C_c^\infty(-\infty,0].$$

- $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha) := \mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha) \oplus \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$.
- $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ es un álgebra de Banach respecto del producto de convolución usual en $\mathbb{R}$ y la norma $\nu_\alpha(f) := \nu_\alpha(f^-) + \nu_\alpha(f^+)$.

$\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)$ y $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$

- $\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)$ se define análogamente como la complección de $C_c^\infty(-\infty,0]$ en la norma

$$\nu_\alpha(f) := \int_{-\infty}^{0} |W_-^\alpha f(t)|\,(-t)^\alpha\,\mathrm{d}t, \qquad f \in C_c^\infty(-\infty,0].$$

- $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha) := \mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha) \oplus \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$.
- $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ es un álgebra de Banach respecto del producto de convolución usual en $\mathbb{R}$ y la norma $\nu_\alpha(f) := \nu_\alpha(f^-) + \nu_\alpha(f^+)$.
- $W^\alpha f := W_+^\alpha f^+ + W_-^\alpha f^- \Rightarrow \nu_\alpha(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |W^\alpha f(t)||t|^\alpha \mathrm{d}t.$

$\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)$ y $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$

- $\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)$ se define análogamente como la complección de $C_c^\infty(-\infty,0]$ en la norma

$$\nu_\alpha(f) := \int_{-\infty}^0 |W_-^\alpha f(t)|\,(-t)^\alpha\,\mathrm{d}t, \qquad f \in C_c^\infty(-\infty,0].$$

- $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha) := \mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha) \oplus \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$.
- $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ es un álgebra de Banach respecto del producto de convolución usual en $\mathbb{R}$ y la norma $\nu_\alpha(f) := \nu_\alpha(f^-) + \nu_\alpha(f^+)$.
- $W^\alpha f := W_+^\alpha f^+ + W_-^\alpha f^- \Rightarrow \nu_\alpha(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |W^\alpha f(t)||t|^\alpha \mathrm{d}t.$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es densa en $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$.

Teorema principal

Teorema

Para $\alpha \geq 0$, sea $(T_\alpha(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ un semigrupo α veces integrado, $\sup_{t>0} t^{-\alpha} \| T_\alpha(t) \| < \infty$, verificando la propiedad C_0^α. Sea A su generador y $\pi : \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha) \to \mathfrak{B}(X)$ el homomorfismo dado por

$$\pi(f)x := \int_0^\infty W_+^\alpha f(t)\, T_\alpha(t)x \,\mathrm{d}t\,, \quad x \in X\,,\ f \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha).$$

Si $f \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ es de síntesis espectral respecto de $(i\sigma(A)) \cap \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} \| T_\alpha(t)\, \pi(f) \| = 0\,.$$

Notación

- Si $L_\varphi \in \mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*$ y $\mu \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$,

$$L_\varphi * \mu\,(g) = \int_{-\infty}^{\infty} W^\alpha g(s)\, L_{\tilde{\varphi}}(R_{-s}^{\alpha-1} * \mu)\,\mathrm{d}s\,, \quad g \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha).$$

- $\psi(s) := L_{\tilde{\varphi}}(R_{-s}^{\alpha-1} * \mu),\ s \in \mathbb{R}.$
- Definimos

$$L_\varphi \circ \mu := L_{\psi^-} \qquad L_\varphi \diamond \mu := L_{\psi^+}$$

- $|s|^{-\alpha}\psi \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow L_\varphi \circ \mu \in \mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*\,,\ L_\varphi \diamond \mu \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)^*.$
- **Nota:** $L_\varphi \circ \mu = (L_\varphi * \mu)_{|\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)},\ L_\varphi \diamond \mu = (L_\varphi * \mu)_{|\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)}.$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} \left\| \pi(R_t^{\alpha-1} * f) \right\| = 0} \iff \boxed{\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} \left\| T_\alpha(t)\, \pi(f) \right\| = 0}$$

Sea $\mu \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$, $\mu_n := t_n^{-\alpha}(R_{t_n}^{\alpha-1} * \mu)$:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} \left\|\pi(R_t^{\alpha-1} * f)\right\| = 0} \Longleftrightarrow \boxed{\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} \left\| T_\alpha(t)\, \pi(f)\right\| = 0}$$

Sea $\mu \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, $\mu_n := t_n^{-\alpha}(R_{t_n}^{\alpha-1} * \mu)$:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} \left\|\pi(R_t^{\alpha-1} * f)\right\| = 0} \Longleftrightarrow \boxed{\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} \left\| T_\alpha(t)\, \pi(f)\right\| = 0}$$

$\Uparrow$ $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ posee unidad aproximada acotada

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left\|\pi(\mu_n * f)\right\| = 0}$$

Sea $\mu \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, $\mu_n := t_n^{-\alpha}(R_{t_n}^{\alpha-1} * \mu)$:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} \left\|\pi(R_t^{\alpha-1} * f)\right\| = 0} \Longleftrightarrow \boxed{\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} \left\| T_\alpha(t)\, \pi(f)\right\| = 0}$$

$\Uparrow$ $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ posee unidad aproximada acotada

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \|\pi(\mu_n * f)\| = 0}$$

$\Uparrow$ Hahn-Banach: $\|\pi(\mu_n * f)\| = \langle \Lambda_n , \pi(\mu_n * f)\rangle$ con $(\Lambda_n) \subseteq \mathcal{A}^*$, $\mathcal{A} := \overline{\pi(\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha))}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \langle \pi^*(\Lambda_n) , \mu_n * f\rangle = 0}$$

Sea $\mu \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$, $\mu_n := t_n^{-\alpha}(R_{t_n}^{\alpha-1} * \mu)$:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} \left\|\pi(R_t^{\alpha-1} * f)\right\| = 0} \iff \boxed{\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} \left\| T_\alpha(t)\, \pi(f)\right\| = 0}$$

$\Uparrow$ $\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ posee unidad aproximada acotada

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \|\pi(\mu_n * f)\| = 0}$$

$\Uparrow$ Hahn-Banach: $\|\pi(\mu_n * f)\| = \langle \Lambda_n \,, \pi(\mu_n * f)\rangle$ con $(\Lambda_n) \subseteq \mathcal{A}^*$, $\mathcal{A} := \overline{\pi(\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha))}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \langle \pi^*(\Lambda_n)\,, \mu_n * f\rangle = 0}$$

$\Uparrow$

Lema fundamental

$\lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \circ \mu_n \circ f = 0$ en $\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*$, donde $L_{\tilde{\varphi}_n} = \pi^*(\Lambda_n)$.

- $Z_1(\pi) := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{z+1} \in \sigma(\pi(u)) \right\}$ con $u := e^{-(\cdot)} \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$.
- $Z(\pi)$ es el complementario de la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus Z_1(\pi)$ que contiene a $\mathbb{C}^+$.

- $Z_1(\pi) := \left\{ z \in \mathbb{C} \, : \, \frac{1}{z+1} \in \sigma(\pi(u)) \right\}$ con $u := e^{-(\cdot)} \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$.
- $Z(\pi)$ es el complementario de la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus Z_1(\pi)$ que contiene a $\mathbb{C}^+$.

Lema

$-iZ(\pi) \cap \mathbb{R} = i\,\sigma(A) \cap \mathbb{R}$.

- $Z_1(\pi) := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{z+1} \in \sigma(\pi(u)) \right\}$ con $u := e^{-(\cdot)} \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$.
- $Z(\pi)$ es el complementario de la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus Z_1(\pi)$ que contiene a $\mathbb{C}^+$.

Lema

$-iZ(\pi) \cap \mathbb{R} = i\,\sigma(A) \cap \mathbb{R}$.

Proposición

Sea φ tal que $L_{\tilde{\varphi}} = \pi^*(\Lambda)$ para algún $\Lambda \in \mathcal{A}^*$.

(i) $\mathcal{L}(L_\varphi)$ se extiende analíticamente a $\mathbb{C} \setminus Z(\pi)$ mediante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus Z(\pi) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \left\langle \Lambda\,,\, \pi(u)(\mathrm{I} - (z+1)\pi(u))^{-1} \right\rangle . \end{array}$$

(ii) $\mathcal{L}(L_\varphi \circ \mu)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus Z(\pi)$ para cada $\mu \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)$ y

$\mathcal{L}(L_\varphi \circ \mu) + \mathcal{L}(L_\varphi \diamond \mu) = \mathcal{L}(L_\varphi)\,\mathcal{L}(\mu)$ en $\mathbb{C}^+ \setminus Z(\pi)$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \circ \mu_n \circ f = 0}$$

- Existe $\lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \circ \mu_n =: L_{\rho_1} \in \mathcal{T}_{-}^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*$
- $L_{\rho_1} \circ f = 0$ en $\mathcal{T}_{-}^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \circ \mu_n \circ f = 0}$$

- Existe $\lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \circ \mu_n =: L_{\rho_1} \in \mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*$
- $L_{\rho_1} \circ f = 0$ en $\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*$

$$\boxed{L_{\rho_1} \circ f = 0}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \circ \mu_n \circ f = 0}$$

- Existe $\lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \circ \mu_n =: L_{\rho_1} \in \mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*$
- $L_{\rho_1} \circ f = 0$ en $\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*$

$$\boxed{L_{\rho_1} \circ f = 0}$$

- $\mathcal{L}(L_{\varphi_n} \circ \mu_n) + \mathcal{L}(L_{\varphi_n} \diamond \mu_n) = \mathcal{L}(L_{\varphi_n})\,\mathcal{L}(\mu_n)$ en $\mathbb{C}^+ \setminus Z(\pi)$.

$\boxed{\lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \circ \mu_n \circ f = 0}$

- Existe $\lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \circ \mu_n =: L_{\rho_1} \in \mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*$
- $L_{\rho_1} \circ f = 0$ en $\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*$

$\boxed{L_{\rho_1} \circ f = 0}$

- $\mathcal{L}(L_{\varphi_n} \circ \mu_n) + \mathcal{L}(L_{\varphi_n} \diamond \mu_n) = \mathcal{L}(L_{\varphi_n})\,\mathcal{L}(\mu_n)$ en $\mathbb{C}^+ \setminus Z(\pi)$.
- $\mathcal{L}(L_{\rho_1}) + \mathcal{L}(L_{\rho_2}) = 0$ en $\mathbb{C}^+ \setminus Z(\pi)$, donde

  $L_{\rho_2} := \lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \diamond \mu_n \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)^*$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \circ \mu_n \circ f = 0}$$

- Existe $\lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \circ \mu_n =: L_{\rho_1} \in \mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*$
- $L_{\rho_1} \circ f = 0$ en $\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)^*$

$$\boxed{L_{\rho_1} \circ f = 0}$$

- $\mathcal{L}(L_{\varphi_n} \circ \mu_n) + \mathcal{L}(L_{\varphi_n} \diamond \mu_n) = \mathcal{L}(L_{\varphi_n})\,\mathcal{L}(\mu_n)$ en $\mathbb{C}^+ \setminus Z(\pi)$.
- $\mathcal{L}(L_{\rho_1}) + \mathcal{L}(L_{\rho_2}) = 0$ en $\mathbb{C}^+ \setminus Z(\pi)$, donde

  $L_{\rho_2} := \lim_{n\to\infty} L_{\varphi_n} \diamond \mu_n \in \mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha)^*$.
- $\mathcal{L}(L_{\rho_1})$ y $\mathcal{L}(L_{\rho_2})$ tienen extensiones continuas a $i\mathbb{R}\backslash Z(\pi)$ y siguen manteniendo la igualdad anterior en $i\mathbb{R}\backslash Z(\pi)$.

Lema

Si $\mathcal{L}(L_{\rho_1}) + \mathcal{L}(L_{\rho_2}) = 0$ en $i\mathbb{R} \setminus Z(\pi)$ y $g \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ tal que $Sop(\mathcal{F}g) \subseteq \mathbb{R} \setminus -iZ(\pi) \Rightarrow (L_{\rho_1} + L_{\rho_2}) * g = 0$.

Dem.:

Si $Sop\mathcal{F}(g)$ compacto, $L_\rho * g \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{Sop\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(g)(y)\mathcal{L}(L_\rho)(iy)\, e^{iy(\cdot)}\, \mathrm{d}y$

Lema

Si $\mathcal{L}(L_{\rho_1}) + \mathcal{L}(L_{\rho_2}) = 0$ en $i\mathbb{R} \setminus Z(\pi)$ y $g \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ tal que $Sop(\mathcal{F}g) \subseteq \mathbb{R} \setminus -iZ(\pi) \Rightarrow (L_{\rho_1} + L_{\rho_2}) * g = 0.$

Dem.:

Si $Sop\mathcal{F}(g)$ compacto, $L_\rho * g \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{Sop\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(g)(y)\mathcal{L}(L_\rho)(iy)\, e^{iy(\cdot)}\, \mathrm{d}y$

(*Hipótesis:* f es de síntesis espectral respecto de $i\sigma(A) \cap \mathbb{R} = -iZ(\pi) \cap \mathbb{R}$)

Sea $(f_n) \subseteq \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ tal que $\nu_\alpha(f - f_n) \to 0$ y $\mathcal{F}f_n = 0$ en $-iZ(\pi) \cap \mathbb{R}$:

Lema

Si $\mathcal{L}(L_{\rho_1}) + \mathcal{L}(L_{\rho_2}) = 0$ en $i\mathbb{R} \setminus Z(\pi)$ y $g \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ tal que $Sop(\mathcal{F}g) \subseteq \mathbb{R} \setminus -iZ(\pi) \Rightarrow (L_{\rho_1} + L_{\rho_2}) * g = 0.$

Dem.:

Si $Sop\mathcal{F}(g)$ compacto, $L_\rho * g \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{Sop\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(g)(y)\mathcal{L}(L_\rho)(iy)\, e^{iy(\cdot)}\, \mathrm{d}y$

(*Hipótesis:* f es de síntesis espectral respecto de $i\sigma(A) \cap \mathbb{R} = -iZ(\pi) \cap \mathbb{R}$)

Sea $(f_n) \subseteq \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ tal que $\nu_\alpha(f - f_n) \to 0$ y $\mathcal{F}f_n = 0$ en $-iZ(\pi) \cap \mathbb{R}$:

- $\nu_\alpha(f - f_n) \to 0 \Rightarrow (L_{\rho_1} + L_{\rho_2}) * (f - f_n) \to 0.$

Lema

Si $\mathcal{L}(L_{\rho_1}) + \mathcal{L}(L_{\rho_2}) = 0$ en $i\mathbb{R} \setminus Z(\pi)$ y $g \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ tal que $Sop(\mathcal{F}g) \subseteq \mathbb{R} \setminus -iZ(\pi) \Rightarrow (L_{\rho_1} + L_{\rho_2}) * g = 0$.

Dem.:

Si $Sop\mathcal{F}(g)$ compacto, $L_\rho * g \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{Sop\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(g)(y)\mathcal{L}(L_\rho)(iy)\, e^{iy(\cdot)}\, \mathrm{d}y$

(*Hipótesis:* f es de síntesis espectral respecto de $i\sigma(A) \cap \mathbb{R} = -iZ(\pi) \cap \mathbb{R}$)

Sea $(f_n) \subseteq \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ tal que $\nu_\alpha(f - f_n) \to 0$ y $\mathcal{F}f_n = 0$ en $-iZ(\pi) \cap \mathbb{R}$:

- $\nu_\alpha(f - f_n) \to 0 \Rightarrow (L_{\rho_1} + L_{\rho_2}) * (f - f_n) \to 0$.
- $(L_{\rho_1} + L_{\rho_2}) * f_n = 0 \Rightarrow (L_{\rho_1} + L_{\rho_2}) * f = 0$ en $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)^*$.

Lema

Si $\mathcal{L}(L_{\rho_1}) + \mathcal{L}(L_{\rho_2}) = 0$ en $i\mathbb{R} \setminus Z(\pi)$ y $g \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ tal que $Sop(\mathcal{F}g) \subseteq \mathbb{R} \setminus -iZ(\pi) \Rightarrow (L_{\rho_1} + L_{\rho_2}) * g = 0$.

Dem.:

Si $Sop\mathcal{F}(g)$ compacto, $L_\rho * g \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{Sop\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(g)(y)\mathcal{L}(L_\rho)(iy)\, e^{iy(\cdot)}\, \mathrm{d}y$

(*Hipótesis:* f es de síntesis espectral respecto de $i\sigma(A) \cap \mathbb{R} = -iZ(\pi) \cap \mathbb{R}$)

Sea $(f_n) \subseteq \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ tal que $\nu_\alpha(f - f_n) \to 0$ y $\mathcal{F}f_n = 0$ en $-iZ(\pi) \cap \mathbb{R}$:

- $\nu_\alpha(f - f_n) \to 0 \Rightarrow (L_{\rho_1} + L_{\rho_2}) * (f - f_n) \to 0$.
- $(L_{\rho_1} + L_{\rho_2}) * f_n = 0 \Rightarrow (L_{\rho_1} + L_{\rho_2}) * f = 0$ en $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)^*$.

Por tanto,

$$L_{\rho_1} \circ f = (L_{\rho_1} * f)_{|\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)} = -(L_{\rho_2} * f)_{|\mathcal{T}_-^{(\alpha)}((-t)^\alpha)} = 0.$$

Conjuntos de síntesis

Un cerrado $F \subseteq \mathbb{R}$ es de síntesis si toda $f \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^{\alpha})$ tal que $\mathcal{F}f = 0$ en F es de síntesis espectral para F.

- *Ejemplo trivial:* $\emptyset$

Corolario

$(T_\alpha(t))$ como en el teorema y $i\sigma(A) \cap \mathbb{R} = \emptyset \Rightarrow (T_\alpha(t))$ es estable.

Dem.: $\pi(\mathcal{T}_+^{(\alpha)}(t^\alpha))X = X$

En $L^1(\mathbb{R})$:

- Los puntos son de conjuntos de síntesis.
- Los conjuntos contables son de síntesis.

Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un (C_0)-semigrupo acotado en X y A su generador.

Theorem (W. Arendt, C. Batty, TAMS; Y.L. Lyubich, V. Phong, SM; 88)

$\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ contable y $P\sigma(A^*) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \Rightarrow (T(t))_{t\geq 0}$ estable.

Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un (C_0)-semigrupo acotado en X y A su generador.

Theorem (W. Arendt, C. Batty, TAMS; Y.L. Lyubich, V. Phong, SM; 88)

$\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ contable y $P\sigma(A^*) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \Rightarrow (T(t))_{t\geq 0}$ estable.

Theorem (J. Esterle, E. Strouse, F.Zouakia; JOT, 92)

Sea $\mathrm{I}_A := \{f \in L^1(\mathbb{R}^+) : \mathcal{F}f = 0 \text{ en } i\sigma(A) \cap \mathbb{R}\}$.

$\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ contable y $P\sigma(A^*) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \Rightarrow \pi(\mathrm{I}_A)X$ denso en X.

- $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ contable $\Rightarrow \sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ de síntesis (en $L^1(\mathbb{R})$) $\Rightarrow$ Toda función de I_A es de síntesis espectral respecto de $i\sigma(A) \cap \mathbb{R}$.

Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un (C_0)-semigrupo acotado en X y A su generador.

Theorem (W. Arendt, C. Batty, TAMS; Y.L. Lyubich, V. Phong, SM; 88)

$\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ contable y $P\sigma(A^*) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \Rightarrow (T(t))_{t\geq 0}$ estable.

$\Uparrow$ Versión contínua del Teorema de Katznelson-Tzafriri

Theorem (J. Esterle, E. Strouse, F.Zouakia; JOT, 92)

Sea $\mathrm{I}_A := \{f \in L^1(\mathbb{R}^+) : \mathcal{F}f = 0 \text{ en } i\sigma(A) \cap \mathbb{R}\}$.

$\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ contable y $P\sigma(A^*) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \Rightarrow \pi(\mathrm{I}_A)X$ denso en X.

- $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ contable $\Rightarrow \sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ de síntesis (en $L^1(\mathbb{R})$) $\Rightarrow$ Toda función de I_A es de síntesis espectral respecto de $i\sigma(A) \cap \mathbb{R}$.

Caso $\alpha > 0$

$$\mathrm{I}_p := \left\{ f \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha) : \mathcal{F}f(p) = 0 \right\}, \ p \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{J}_p := \left\{ f \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha) : \mathcal{F}f = 0 \text{ en un entorno de } p \right\}, \ p \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ Un punto $p \in \mathbb{R}$ es de síntesis si $\overline{\mathrm{J}_p} = \mathrm{I}_p$.

Caso $\alpha > 0$

$$\mathrm{I}_p := \left\{ f \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha) : \mathcal{F}f(p) = 0 \right\}, \ p \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{J}_p := \left\{ f \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha) : \mathcal{F}f = 0 \text{ en un entorno de } p \right\}, \ p \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ Un punto $p \in \mathbb{R}$ es de síntesis si $\overline{\mathrm{J}_p} = \mathrm{I}_p$.

Salvo el $\{0\}$, los puntos no son de síntesis en $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ si $\alpha > 0$

Caso $\alpha > 0$

$$\mathrm{I}_p := \left\{ f \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha) : \mathcal{F}f(p) = 0 \right\}, \ p \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{J}_p := \left\{ f \in \mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha) : \mathcal{F}f = 0 \text{ en un entorno de } p \right\}, \ p \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ Un punto $p \in \mathbb{R}$ es de síntesis si $\overline{\mathrm{J}_p} = \mathrm{I}_p$.

Salvo el $\{0\}$, los puntos no son de síntesis en $\mathcal{T}^{(\alpha)}(|t|^\alpha)$ si $\alpha > 0$.

Nota: $\mathcal{F} : \mathcal{T}^{(n)}(|t|^n) \to C_0^{(n)}(\mathbb{R})$,

$$C_0^{(n)}(\mathbb{R}) := \{\phi : \exists \phi^{(k} \text{ en } \mathbb{R} \setminus \{0\}, \, y \mapsto y^k \phi^{(k} \in C_0(\mathbb{R}), \, 0 \leq k \leq n\}.$$

Teorema: caso $\mathcal{T}^{(n)}(|t|^n)$, $n \in \mathbb{N}$

(i) $\overline{\mathrm{J}_0} = \mathrm{I}_0$

(ii) $\overline{\mathrm{J}_p} = \mathrm{I}_p^n$, $p \neq 0$, $\mathrm{I}_p^n := \left\{ f \in \mathcal{T}^{(n)}(|t|^n) : (\mathcal{F}f)^{(k}(p) = 0, \, 0 \leq k \leq n \right\}$