La constante de isotropía de politopos

David Alonso Gutiérrez

Universidad de Zaragoza

Abril 2009

Contenidos

- Introducción

Contenidos

- Introducción
- Isotropía

Contenidos

- Introducción
- Isotropía
- Politopos aleatorios

Contenidos

- Introducción
- Isotropía
- Politopos aleatorios
- Proyecciones de B_1^N

Contenidos

- Introducción
- Isotropía
- Politopos aleatorios
- Proyecciones de B_1^N
- Politopos aleatorios con vértices en la esfera.

Análisis funcional y convexidad

- En la primera mitad del siglo XX el análisis funcional había desarrollado técnicas para el estudio de los espacios de dimensión infinita.

Análisis funcional y convexidad

- En la primera mitad del siglo XX el análisis funcional había desarrollado técnicas para el estudio de los espacios de dimensión infinita.

- En los años 70 se intentaron estudiar los espacios de dimensión infinita a través del estudio de propiedades de espacios de dimensión n cuando n tiende a infinito (tipo, cotipo...) y se empezó a a utilizar la probabilidad para el estudio de los espacios de dimensión finita.

Análisis funcional y convexidad

- En la primera mitad del siglo XX el análisis funcional había desarrollado técnicas para el estudio de los espacios de dimensión infinita.
- En los años 70 se intentaron estudiar los espacios de dimensión infinita a través del estudio de propiedades de espacios de dimensión n cuando n tiende a infinito (tipo, cotipo...) y se empezó a a utilizar la probabilidad para el estudio de los espacios de dimensión finita.
- La teoría local de los espacios normados estudia las propiedades de la estructura de los espacios de Banach de dimensión finita y sus propiedades asintóticas cuando la dimensión tiende a infinito.

Teorema de Dvoretzky

Teorema Dvoretzky

l_2 es finitamente representable en todo espacio de Banach X.

Teorema de Dvoretzky

Teorema Dvoretzky

l_2 es finitamente representable en todo espacio de Banach X.

Teorema Dvoretzky

Sea $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$. Para todo $\varepsilon \in (0,1)$ existe un subespacio E con $\mathrm{dim} E = n \geq c(\varepsilon) \log N$ tal que si $x \in E$

$$(1-\varepsilon)r|x| \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)r|x|$$

Teorema de Dvoretzky

Teorema Dvoretzky

l_2 es finitamente representable en todo espacio de Banach X.

Teorema Dvoretzky

Sea $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$. Para todo $\varepsilon \in (0,1)$ existe un subespacio E con $\dim E = n \geq c(\varepsilon) \log N$ tal que si $x \in E$

$$(1-\varepsilon) r|x| \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon) r|x|$$

Teorema Dvoretzky

Sea K la bola unidad de una norma en $\mathbb{R}^N$. Para todo $\varepsilon \in (0,1)$, la medida de probabilidad de los subespacios E de dimensión n que verifican

$$(1-\varepsilon) r(B_2^N \cap E) \subseteq K \cap E \subseteq (1+\epsilon) r(B_2^n \cap E)$$

es mayor o igual que $1 - \frac{c_1}{N^{c_2}}$ si $n \leq c(\varepsilon) \log N$.

Análisis funcional y convexidad

- Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo si es convexo, compacto y tiene interior no vacío.

Análisis funcional y convexidad

- Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo si es convexo, compacto y tiene interior no vacío.

- La teoría local y la convexidad están estrechamente relacionadas:
  - La bola unidad de toda norma en $\mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo simétrico.
  - Todo cuerpo convexo simétrico es la bola unidad de la norma dada por

$$\|x\|_K = \inf\{\lambda > 0 \,:\, x \in \lambda K\}$$

Análisis funcional y convexidad

- Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo si es convexo, compacto y tiene interior no vacío.
- La teoría local y la convexidad están estrechamente relacionadas:
  - La bola unidad de toda norma en $\mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo simétrico.
  - Todo cuerpo convexo simétrico es la bola unidad de la norma dada por

$$\|x\|_K = \inf\{\lambda > 0 \, : \, x \in \lambda K\}$$

- La interacción entre los métodos utilizados en geometría convexa y la teoría local dio lugar a lo que se conoce como análisis geométrico asintótico.

Isotropía

Un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es isotrópico si tiene volumen 1 y

- $\int_K x dx = 0$ (centrado en el origen)
- $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2 \quad \forall \theta \in S^{n-1}$

Isotropía

Un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es isotrópico si tiene volumen 1 y

- $\int_K x dx = 0$ (centrado en el origen)
- $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2 \quad \forall \theta \in S^{n-1}$

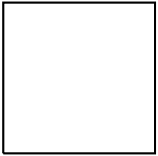
Es decir, dado un cuerpo convexo K centrado en el origen, consideramos, para cada $\theta \in S^{n-1}$ la variable aleatoria real X_θ con densidad $f_\theta(t) = |K \cap \theta^\perp + t\theta|$.

Isotropía

Un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es isotrópico si tiene volumen 1 y

- $\int_K x dx = 0$ (centrado en el origen)
- $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2 \quad \forall \theta \in S^{n-1}$

Es decir, dado un cuerpo convexo K centrado en el origen, consideramos, para cada $\theta \in S^{n-1}$ la variable aleatoria real X_θ con densidad $f_\theta(t) = |K \cap \theta^\perp + t\theta|$.

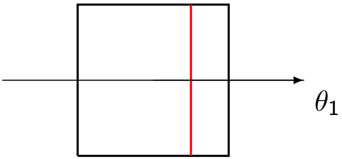


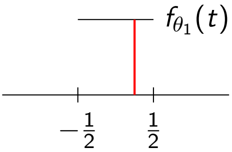
Isotropía

Un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es isotrópico si tiene volumen 1 y

- $\int_K x dx = 0$ (centrado en el origen)
- $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2 \quad \forall \theta \in S^{n-1}$

Es decir, dado un cuerpo convexo K centrado en el origen, consideramos, para cada $\theta \in S^{n-1}$ la variable aleatoria real X_θ con densidad $f_\theta(t) = |K \cap \theta^\perp + t\theta|$.



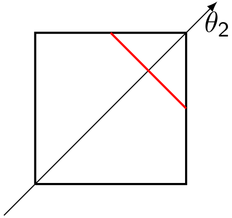


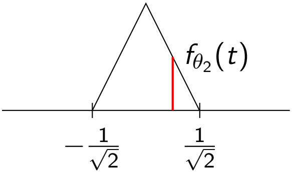
Isotropía

Un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es isotrópico si tiene volumen 1 y

- $\int_K x dx = 0$ (centrado en el origen)
- $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2 \quad \forall \theta \in S^{n-1}$

Es decir, dado un cuerpo convexo K centrado en el origen, consideramos, para cada $\theta \in S^{n-1}$ la variable aleatoria real X_θ con densidad $f_\theta(t) = |K \cap \theta^\perp + t\theta|$.



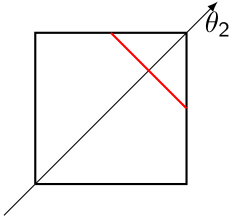


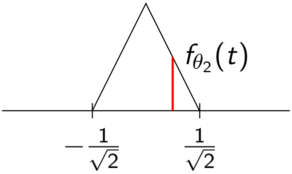
Isotropía

Un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es isotrópico si tiene volumen 1 y

- $\int_K x dx = 0$ (centrado en el origen)
- $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2 \quad \forall \theta \in S^{n-1}$

Es decir, dado un cuerpo convexo K centrado en el origen, consideramos, para cada $\theta \in S^{n-1}$ la variable aleatoria real X_θ con densidad $f_\theta(t) = |K \cap \theta^\perp + t\theta|$.





K es isotrópico si todas las X_θ tienen la misma varianza.

Isotropía

- Si K es isotrópico, la constante $L_K = \left(\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ se llama constante de isotropía de K.

Isotropía

- Si K es isotrópico, la constante $L_K = \left(\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ se llama constante de isotropía de K.
- Si K es isotrópico y $U \in O(n)$, UK es isotrópico con $L_{UK} = L_K$.

Isotropía

- Si K es isotrópico, la constante $L_K = \left(\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ se llama constante de isotropía de K.
- Si K es isotrópico y $U \in O(n)$, UK es isotrópico con $L_{UK} = L_K$.
- Si K es un cuerpo convexo simétrico, existe una transformación lineal T tal que TK es isotrópico. Si $T_1 K$ y $T_2 K$ son isotrópicos, entonces $T_1 = UT_2$ con $U \in O(n)$.

Isotropía

- Si K es isotrópico, la constante $L_K = \left(\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ se llama constante de isotropía de K.

- Si K es isotrópico y $U \in O(n)$, UK es isotrópico con $L_{UK} = L_K$.

- Si K es un cuerpo convexo simétrico, existe una transformación lineal T tal que TK es isotrópico. Si $T_1 K$ y $T_2 K$ son isotrópicos, entonces $T_1 = UT_2$ con $U \in O(n)$.

- Esto permite definir la constante de isotropía de un cuerpo convexo simétrico como $L_K = L_{TK}$ con TK isotrópico.

Isotropía

- Si K es isotrópico $nL_K^2 = \int_K |x|^2 dx$.

Isotropía

- Si K es isotrópico $nL_K^2 = \int_K |x|^2 dx$.
- Si $|K|^{-\frac{1}{n}} K$ es isotrópico $nL_K^2 = \frac{1}{|K|^{1+\frac{2}{n}}} \int_K |x|^2 dx$.

Isotropía

- Si K es isotrópico $nL_K^2 = \int_K |x|^2 dx$.
- Si $|K|^{-\frac{1}{n}} K$ es isotrópico $nL_K^2 = \frac{1}{|K|^{1+\frac{2}{n}}} \int_K |x|^2 dx$.
- $nL_K^2 = \min \left\{ \frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{TK} |x|^2 dx \,:\, T \in GL(n) \right\}$.

Isotropía

$$L_K \geq L_{B_2^n} = \frac{1}{\sqrt{n+2}|B_2^n|^{\frac{1}{n}}} \geq c.$$

Isotropía

$$L_K \geq L_{B_2^n} = \frac{1}{\sqrt{n+2}|B_2^n|^{\frac{1}{n}}} \geq c.$$

CONJETURA

¿Existe una constante absoluta C tal que para todo cuerpo convexo K se tenga

$$L_K < C?$$

Isotropía

$$L_K \geq L_{B_2^n} = \frac{1}{\sqrt{n+2}|B_2^n|^{\frac{1}{n}}} \geq c.$$

CONJETURA

¿Existe una constante absoluta C tal que para todo cuerpo convexo K se tenga

$$L_K < C?$$

Se sabe que es cierto para algunas clases de cuerpos convexos (incondicionales, duales de cuerpos con el volumen ratio acotado, 2 convexos,...)

Isotropía

CONJETURA

¿Existe una constante C tal que para todo cuerpo convexo de volumen 1

$$\max_{\theta \in S^{n-1}} |K \cap \theta^{\perp}| > C?$$

Isotropía

CONJETURA

¿Existe una constante C tal que para todo cuerpo convexo de volumen 1

$$\max_{\theta \in S^{n-1}} |K \cap \theta^{\perp}| > C?$$

Si $|K| = 1$

- Existe $\theta \in S^{n-1}$ con $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \leq L_K^2$

Isotropía

CONJETURA

¿Existe una constante C tal que para todo cuerpo convexo de volumen 1

$$\max_{\theta \in S^{n-1}} |K \cap \theta^{\perp}| > C?$$

Si $|K| = 1$

- Existe $\theta \in S^{n-1}$ con $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \leq L_K^2$
- $\forall \theta \in S^{n-1}$, $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \sim \frac{1}{|K \cap \theta^{\perp}|^2}$

Isotropía

- Del teorema de John se deduce que si K es un cuerpo convexo simétrico $L_K \leq C\sqrt{n}$.

Isotropía

- Del teorema de John se deduce que si K es un cuerpo convexo simétrico $L_K \leq C\sqrt{n}$.
- Bourgain probó en 1991 que si K es simétrico $L_K \leq Cn^{\frac{1}{4}} \log n$.

Isotropía

- Del teorema de John se deduce que si K es un cuerpo convexo simétrico $L_K \leq C\sqrt{n}$.
- Bourgain probó en 1991 que si K es simétrico $L_K \leq Cn^{\frac{1}{4}} \log n$.
- En 2006 Klartag demostró que la constante de isotropía de cualquier K verifica
$$L_K \leq Cn^{\frac{1}{4}}$$
.

Isotropía

Se empezó a estudiar la constante de isotropía de politopos aleatorios

Isotropía

Se empezó a estudiar la constante de isotropía de politopos aleatorios

Teorema [Klartag-Kozma]

Sean $G_0, \dots, G_N$ vectores aleatorios $\mathcal{N}(0,1)$ independientes en $\mathbb{R}^n$, $N \geq n$. Si

$$K = \mathrm{conv}\{\pm G_0, \dots, \pm G_N\}$$

con probabilidad mayor que $1 - Ce^{-cn}$

$$L_K < C.$$

volver

Probabilidad en $G_{N,n}$

- En $G_{N,n} = \{E \subseteq \mathbb{R}^N \ : \ E \text{ subespacio } n\text{-dimensional}\}$ existe una única medida de probabilidad, $\mu_{N,n}$ (medida de Haar) invariante por transformaciones ortogonales.

Probabilidad en $G_{N,n}$

- En $G_{N,n} = \{E \subseteq \mathbb{R}^N \,:\, E \text{ subespacio } n\text{-dimensional}\}$ existe una única medida de probabilidad, $\mu_{N,n}$ (medida de Haar) invariante por transformaciones ortogonales.

- Si $G \in \mathcal{M}(N \times n)$ es una matriz aleatoria cuyas entradas g_{ij} son variables aleatorias independientes $\mathcal{N}(0,1)$

$$\mu_{N,n}(A) = \mathbb{P}\{\mathrm{Im}\ G \in A\}$$

para cualquier A Boreliano en $G_{N,n}$

Proyecciones de B_1^N

- Si $G \in \mathcal{M}(N \times n)$ y $E = \mathrm{Im}\ G \in G_{N,n}$ se tiene que

$$G^t_{|E} P_E B_1^N = \mathrm{conv}\{\pm G_1, \ldots, \pm G_N\}$$

donde G_i son las filas de G.

Proyecciones de B_1^N

- Si $G \in \mathcal{M}(N \times n)$ y $E = \mathrm{Im}\ G \in G_{N,n}$ se tiene que

$$G^t_{|E} P_E B_1^N = \mathrm{conv}\{\pm G_1, \dots, \pm G_N\}$$

  donde G_i son las filas de G.

- El resultado de Klartag y Kozma KK se puede leer como

$$\mu_{N,n}\{E \in G_{N,n} \, : \, L_{P_E B_1^N} < C\} > 1 - Ce^{-cn}$$

Proyecciones de B_1^N

- Si $G \in \mathcal{M}(N \times n)$ y $E = \mathrm{Im}\ G \in G_{N,n}$ se tiene que

$$G^t_{|E} P_E B_1^N = \mathrm{conv}\{\pm G_1, \dots, \pm G_N\}$$

donde G_i son las filas de G.

- El resultado de Klartag y Kozma ▸ KK se puede leer como

$$\mu_{N,n}\{E \in G_{N,n} \ : \ L_{P_E B_1^N} < C\} > 1 - Ce^{-cn}$$

- Si $n < c \log N$ el teorema de Dvoretzky ▸ DV nos dice que

$$c_1 W(B_1^N) B_2^n \subseteq P_E B_1^N \subseteq c_2 W(B_1^N) B_2^n$$

con probabilidad mayor que $1 - \frac{c_1}{N^{c_2}}$

Preguntas

Esto plantea las siguientes preguntas

Preguntas

Esto plantea las siguientes preguntas

- "Casi todas" las proyecciones de B_1^N tienen la constante de isotropía acotada, pero ¿se puede decir algo determinista?

Preguntas

Esto plantea las siguientes preguntas

- "Casi todas" las proyecciones de B_1^N tienen la constante de isotropía acotada, pero ¿se puede decir algo determinista?
- Si considero politopos aleatorios con los vertices con otra distribución de probabilidad, ¿cómo es su constante de isotropía?

Proyecciones de B_1^N

- Todo espacio de Banach separable es isométrico a un cociente de l^1 (Banach-Mazur).

Proyecciones de B_1^N

- Todo cuerpo convexo simétrico $K \subseteq \mathbb{R}^n$ verifica que $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \geq n$ y $E \in G_{N,n}$ tal que

$$(1-\varepsilon)P_E B_1^N \subseteq K \subseteq (1+\varepsilon)P_E B_1^N$$

Proyecciones de B_1^N

- Todo cuerpo convexo simétrico $K \subseteq \mathbb{R}^n$ verifica que $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \geq n$ y $E \in G_{N,n}$ tal que

$$(1-\varepsilon)P_E B_1^N \subseteq K \subseteq (1+\varepsilon)P_E B_1^N$$

- Si existiese $C > 0$ tal que $\forall n \leq N$, $\forall E \in G_{N,n}$

$$L_{P_E B_1^N} < C$$

Proyecciones de B_1^N

- Todo cuerpo convexo simétrico $K \subseteq \mathbb{R}^n$ verifica que $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \geq n$ y $E \in G_{N,n}$ tal que

$$(1-\varepsilon) P_E B_1^N \subseteq K \subseteq (1+\varepsilon) P_E B_1^N$$

- Si existiese $C > 0$ tal que $\forall n \leq N$, $\forall E \in G_{N,n}$

$$L_{P_E B_1^N} < C$$

para cualquier $K \subseteq \mathbb{R}^n$ simétrico $\forall \varepsilon > 0$

$$L_K^2 \leq C^2 \frac{(1+\varepsilon)^n}{(1-\varepsilon)^{n+2}}$$

Proyecciones de B_1^N

Teorema (Alonso, Bastero, Bernués, Wolff

Existe una constante C tal que para todo $E \in G_{N,n}$

$$L_{P_E B_1^N} < C\sqrt{\frac{N}{n}}$$

Proyecciones de B_1^N

Teorema (Alonso, Bastero, Bernués, Wolff

Existe una constante C tal que para todo $E \in G_{N,n}$

$$L_{P_E B_1^N} < C\sqrt{\frac{N}{n}}$$

Demostración:

$$nL^2_{P_E B_1^N} \leq \frac{1}{|P_E B_1^N|^{\frac{2}{n}}} \frac{1}{|P_E B_1^N|} \int_{P_E B_1^N} |x|^2 dx$$

Proyecciones de B_1^N

- $\frac{1}{\sqrt{N}} B_2^N \subseteq B_1^N \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{N}} P_E B_2^N \subseteq P_E B_1^N \qquad \Rightarrow$

$$|P_E B_1^N|^{\frac{1}{n}} \geq \frac{c}{\sqrt{Nn}}$$

Proyecciones de B_1^N

- $\frac{1}{\sqrt{N}}B_2^N \subseteq B_1^N \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{N}}P_E B_2^N \subseteq P_E B_1^N \quad \Rightarrow$

$$|P_E B_1^N|^{\frac{1}{n}} \geq \frac{c}{\sqrt{Nn}}$$

Proposición

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^N$ Un politopo convexo, $E \in G_{N,n}$. Existe un subconjunto $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}_n(K)$ tal que para cualquier función integrable $f : E \to \mathbb{R}$,

$$\int_{P_E K} f(x)dx = \sum_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \frac{|P_E F|}{|F|} \int_F f(P_E y)dy.$$

Proyecciones de B_1^N

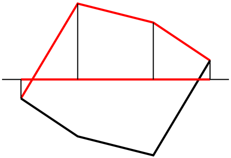
- $\frac{1}{\sqrt{N}}B_2^N \subseteq B_1^N \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{N}}P_E B_2^N \subseteq P_E B_1^N \quad \Rightarrow$

$$|P_E B_1^N|^{\frac{1}{n}} \geq \frac{c}{\sqrt{Nn}}$$

Proposición

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^N$ Un politopo convexo, $E \in G_{N,n}$. Existe un subconjunto $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}_n(K)$ tal que para cualquier función integrable $f : E \to \mathbb{R}$,

$$\int_{P_E K} f(x)dx = \sum_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \frac{|P_E F|}{|F|} \int_F f(P_E y)dy.$$



Proyecciones de B_1^N

- $|P_E B_1^N| = \sum_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} |P_E F|$

Proyecciones de B_1^N

- $|P_E B_1^N| = \sum_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} |P_E F|$

- $\frac{1}{|P_E B_1^N|} \int_{P_E B_1^N} |x|^2 dx = \sum_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \frac{|P_E F|}{|P_E B_1^N|} \frac{1}{|F|} \int_F |P_E y|^2 dy \leq$
  $\max_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \frac{1}{|F|} \int_F |y|^2 dy$

Proyecciones de B_1^N

- $|P_E B_1^N| = \sum_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} |P_E F|$

- $\frac{1}{|P_E B_1^N|} \int_{P_E B_1^N} |x|^2 dx = \sum_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \frac{|P_E F|}{|P_E B_1^N|} \frac{1}{|F|} \int_F |P_E y|^2 dy \leq$
  $\max_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \frac{1}{|F|} \int_F |y|^2 dy$

- $\frac{1}{|F|} \int_F |y|^2 dy = \frac{2}{n+2}$

Proyecciones de B_1^N.

- $L^2_{P_E B_1^N} \leq C\dfrac{N}{n}$

Proyecciones de B_1^N.

- $L^2_{P_E B_1^N} \leq C\dfrac{N}{n}$

Corolario

Sea K un politopo simétrico n-dimensional de $2N$ vértices. Entonces

$$L_K \leq C\sqrt{\frac{N}{n}}$$

Politopos aleatorios

Teorema

Sea $K = \mathrm{conv}\{\pm P_1, \ldots, \pm P_N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ donde P_i son puntos aleatorios independientes distribuidos uniformemente sobre S^{n-1}. Entonces

$$L_K < C$$

con probabilidad mayor que $1 - c_1 e^{-c_2 n}$.

Politopos aleatorios

Teorema

Sea $K = \mathrm{conv}\{\pm P_1, \dots, \pm P_N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ donde P_i son puntos aleatorios independientes distribuidos uniformemente sobre S^{n-1}. Entonces

$$L_K < C$$

con probabilidad mayor que $1 - c_1 e^{-c_2 n}$.

Demostración:

$$nL_K^2 \leq \frac{1}{|K|^{\frac{2}{n}}} \frac{1}{|K|} \int_K |x|^2 dx$$

Lemma

Existe una constante C tal que si $Cn < N < ne^{\frac{n}{2}}$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\log \frac{N}{n}}{n}}B_2^n \subseteq K$$

con probabilidad mayor que $1 - e^{-n}$.

Politopos aleatorios

Lemma

Existe una constante C tal que si $Cn < N < ne^{\frac{n}{2}}$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\log\frac{N}{n}}{n}}B_2^n \subseteq K$$

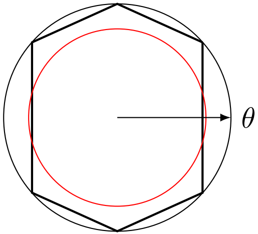
con probabilidad mayor que $1 - e^{-n}$.

Demostración:

Con probabilidad 1 las caras de K son $\mathrm{conv}\{\varepsilon_1 P_{i_1}, \ldots, \varepsilon_n P_{i_n}\}$ con $\varepsilon_i = \pm 1$.

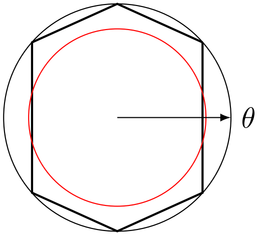
Politopos aleatorios

Si $\alpha B_2^n \nsubseteq K$ entonces existe vector $\theta \in S^{n-1}$ ortogonal a una cara tal que $|\langle P_i, \theta \rangle| \leq \alpha$ para todo i.



Politopos aleatorios

Si $\alpha B_2^n \not\subseteq K$ entonces existe vector $\theta \in S^{n-1}$ ortogonal a una cara tal que $|\langle P_i, \theta\rangle| \leq \alpha$ para todo i.



$$\mathbb{P}\{\alpha B_2^n \not\subseteq K\} \leq \binom{2N}{n} \mathbb{P}\{P \in S^{n-1} : |\langle P, \theta\rangle| \leq \alpha\}^{N-n} \leq e^{-n}$$

si $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\log \frac{N}{n}}{n}}$

Politopos aleatorios

Lema

Existen constante c, C_1, C_2 tal que si $cn < N$

$$\frac{1}{|K|}\int_K |x|^2 dx \leq C_1 \frac{\log \frac{N}{n}}{n}$$

con probabilidad mayor que $1 - 2e^{-C_2 n}$.

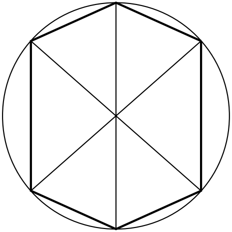
Politopos aleatorios

Lema

Existen constante c, C_1, C_2 tal que si $cn < N$

$$\frac{1}{|K|}\int_K |x|^2 dx \leq C_1 \frac{\log \frac{N}{n}}{n}$$

con probabilidad mayor que $1 - 2e^{-C_2 n}$.



$$n|K| = \sum_{i=1}^{l} d(0, F_i)|F_i|$$

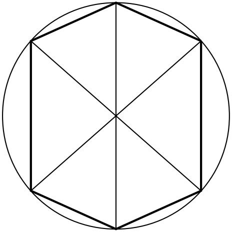
Politopos aleatorios

Lema

Existen constante c, C_1, C_2 tal que si $cn < N$

$$\frac{1}{|K|}\int_K |x|^2 dx \leq C_1 \frac{\log \frac{N}{n}}{n}$$

con probabilidad mayor que $1 - 2e^{-C_2 n}$.



$$n|K| = \sum_{i=1}^{l} d(0, F_i)|F_i|$$

$$\frac{1}{|K|}\int_K |x|^2 = \frac{1}{|K|}\sum_{i=1}^{l} \frac{d(0, F_i)}{n+2}\int_{F_i} |y|^2 dy$$

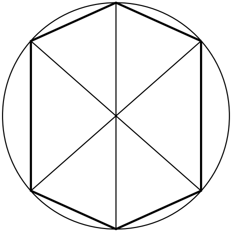
Politopos aleatorios

Lema

Existen constante c, C_1, C_2 tal que si $cn < N$

$$\frac{1}{|K|}\int_K |x|^2 dx \leq C_1 \frac{\log \frac{N}{n}}{n}$$

con probabilidad mayor que $1 - 2e^{-C_2 n}$.



$$n|K| = \sum_{i=1}^{l} d(0, F_i)|F_i|$$

$$\frac{1}{|K|}\int_K |x|^2 = \frac{1}{|K|}\sum_{i=1}^{l} \frac{d(0, F_i)}{n+2}\int_{F_i} |y|^2 dy$$

$$\frac{1}{|K|}\int_K |x|^2 \leq \frac{n}{n+2}\max_{i=1,\dots,l} \frac{1}{|F_i|}\int_{F_i} |y|^2 dy$$

Politopos aleatorios

Si $cn < N < ne^{\frac{n}{2}}$

- $\frac{1}{|K|}\int_K |x|^2 dx \leq C\frac{\log\frac{N}{n}}{n}$
- $|K|^{\frac{1}{n}} \geq C\frac{\sqrt{\frac{N}{n}}}{n}$

y en consecuencia $L_K < C$ con probabilidad mayor que $1 - c_1 e^{-c_2 n}$.

Politopos aleatorios

Si $cn < N < ne^{\frac{n}{2}}$

- $\frac{1}{|K|}\int_K |x|^2 dx \leq C\frac{\log\frac{N}{n}}{n}$
- $|K|^{\frac{1}{n}} \geq C\frac{\sqrt{\frac{N}{n}}}{n}$

y en consecuencia $L_K < C$ con probabilidad mayor que $1 - c_1 e^{-c_2 n}$.

Si $N \leq cn$

$$L_K < C$$

Politopos aleatorios

Si $cn < N < ne^{\frac{n}{2}}$

- $\frac{1}{|K|}\int_K |x|^2 dx \leq C\frac{\log\frac{N}{n}}{n}$
- $|K|^{\frac{1}{n}} \geq C\frac{\sqrt{\frac{N}{n}}}{n}$

y en consecuencia $L_K < C$ con probabilidad mayor que $1 - c_1 e^{-c_2 n}$.

Si $N \leq cn$

$$L_K < C$$

Si $N > ne^{\frac{n}{2}}$

$$cB_2^n \subseteq K \subseteq B_2^n$$

con probabilidad mayor que $1 - e^{-n}$ para n suficientemente grande.