Funciones de Lipschitz entre espacios quasi-Banach

V Encuentro de Análisis Funcional

Salobreña, Abril 2009

Introducción y antecedentes

Un espacio de Banach X tiene una estructura topológica, una estructura uniforme, una estructura métrica, y una estructura lineal.

¿Cuánta información necesitamos (aparte de la referente a la estructura lineal) para reconocer el espacio del que estamos hablando?

[Mazur-Ulam, 1932] *Una isometría suprayectiva entre espacios de Banach reales debe ser afín.*

[Kadets, 1967] *Todos los espacios de Banach separables de dimensión infinita son mutuamente homeomorfos.*

Ésto nos deja dos categorías naturales no triviales: la que se mantiene por isomorfismo de Lipschitz y la que se preserva por homeomorfismos uniformes.

Problema Fundamental (sin resolver): Si X e Y son espacios de Banach *separables* Lipschitz isomorfos, ¿son X e Y linealmente isomorfos?

Si quitamos la palabra *separable* la respuesta es NO [**Aharoni-Lindenstrauss, 1978**].

Aunque el Problema Fundamental no está solucionado en toda su generalidad y se desconoce la respuesta para espacios clásicos como ℓ_1 y L_1, existen muchos resultados positivos:

[Heinrich-Mankiewicz, 1982] *Si* $1 < p < \infty$*:*
(i) $X \approx_{Lip} \ell_p \Rightarrow X \approx \ell_p$*;*
(ii) $X \approx_{Lip} L_p \Rightarrow X \approx L_p$*.*

[Godefroy-Kalton-Lancien, 2000]

$$X \approx_{Lip} c_0 \Rightarrow X \approx c_0.$$

El **Problema Fundamental** se extiende a una clase de espacios que contiene a los de Banach, con la esperanza en encontrar contraejemplos.

Dados X e Y espacios quasi-Banach (reales) con quasi-normas arbitrarias $\|\cdot\|$, una función $f : X \to Y$ es *L-Lipschitz*, $L \geq 0$, si se cumple

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

X e Y son *Lipschitz isomorfos* si existe una biyección de Lipschitz $f : X \to Y$ de modo que tanto f como su inversa son de Lipschitz.

<u>**[F.A.-N.Kalton, Israel J., 2009]**</u> *Para cada $0 < p < 1$ existen espacios p-Banach separables X_p e Y_p que son Lipschitz isomorfos pero no linealmente isomorfos*.

<u>Dem.</u> La idea de la demostración consiste en encontrar una sucesión exacta corta de espacios p-Banach separables,

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \stackrel{q}{\longrightarrow} Z \longrightarrow 0,$$

tal que la aplicación cociente q tenga un *lifting* $f : Z \to Y$ que sea de Lipschtiz pero de modo que q no admita un lifting lineal.

Así tendremos que

$$Y \approx_{\text{Lip}} X \oplus Z \text{ pero } Y \not\approx X \oplus Z.$$

Lo cual se consigue construyendo, para cada $0 < p < 1$, adecuados espacios p-Banach llamados *p-espacios de Arens-Eels*, $Æ_p(X)$, sobre un cierto espacio de Banach X.

Estos espacios "no estándar" son la generalización de los *free spaces* que Godefroy-Kalton (Studia 2003) introdujeron con la intención de encontrar contraejemplos separables al Problema Fundamental en espacios de Banach.

Podríamos decir que a efectos de que existan liftings lineales de aplicaciones cocientes, los p-espacios de Arens-Eels se comportan como los *free spaces* no separables.

A pesar de que en espacios quasi-Banach separables la estructura de Lipschitz no determina (en general) su estructura lineal, sería interesante saber cuándo lo hace.

Para ello hay que abordar la cuestión siguiente:

Problema de linealización. *Dados X, Y espacios quasi-Banach, si existe una función de Lipschitz $f : X \to Y$ de algún tipo (inyectiva, embedding, isometría, lifting de un cociente), ¿podemos asegurar la existencia de una aplicación lineal $F : X \to Y$ del mismo tipo?*

En el caso particular de que la aplicación de Lipschitz sea una isometría la respuesta es que sí; es decir, el teorema de Mazur-Ulam vale en espacios quasi-Banach:

[F. A., J.M.A.A., 08] *La estructura isométrica de un espacio quasi-Banach determina su estructura lineal.*

En el extremo opuesto, se desconoce si el Teorema de Kadets es cierto en este contexto:

Problema. *Si X, Y son espacios quasi-Banach separables ¿son homeomorfos?*

Se sabe muy poco sobre la estructura de Lipschitz de los espacios quasi-Banach. Los pocos resultados (negativos!) que encontramos tratan de la estructura uniforme. Por ejemplo:

[Enflo, 1970] *Los espacios* L_p *y* L_q *no son unif. homeomorfos si* $0 < p < 1 < q < \infty$.

[Weston, 1993] *Los espacios* L_p *y* ℓ_q *no son uniformemente homeomorfos si* $0 < p, q < 1$.

A diferencia de lo que sucede en espacios de Banach, la condición de Lipschitz entre espacios quasi-Banach

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

no es puramente métrica, ya que la aplicación

$$X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \to \|x - y\|$$

no es una distancia (es una *quasi-distancia*).

Así las cosas, no es sorprendente que la conexión entre las estructuras métricas y lineal en un espacio p-Banach para $0 < p < 1$ pueda ser muy diferente del caso $p = 1$.

[Godefroy-Kalton, Studia 2003] *Si un esp. de Banach Y contiene un subconjunto isométrico a un esp. de Banach separable X, entonces Y contiene un subespacio linealmente e isométricamente isomorfo a X.*

[F.A.-Kalton, Israel J., 2009] *Si $0 < p < 1$, existen un espacio p-Banach separable X y un espacio p-Banach Y tales que:*
(i) Y contiene un subconjunto isométrico a X;
(ii) Si $T : X \to Y$ es un operador lineal y acotado, entonces $T = 0$.

Nota. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio p-Banach ($0 < p < 1$), entonces $d_p(x, y) = \|x - y\|^p$ define una distancia en X.

Pero la estructura de Lipschitz de $(X, \|\cdot\|)$ puede ser muy diferente de la de (X, d_p).

Por ejemplo, si $0 < p \leq 1$ sabemos que $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ no se encaja en el sentido de Lipschitz dentro del espacio quasi-Banach $(\ell_q, \|\cdot\|_q)$; en cambio (ℓ_p, d_p) sí que lo hace dentro de (ℓ_q, d_q).

Para comprender las dificultades de partida al intentar linealizar las funciones de Lipschitz entre espacios quasi-Banach, primero hay que entender mejor la idiosincrasia propia de las funciones de Lipschitz entre estos espacios.

La moraleja será que cuando, como es natural, intentamos trasladar algunas propiedades de las funciones de Lipschitz entre espacios de Banach, al contexto de los espacios quasi-Banach, generalmente tales técnicas implican convexidad local.

Las func. de Lipschitz entre esp. de Banach:

– Son abundantes;

– Disfrutan de un alto grado de flexibilidad: se pueden pegar, juntar y truncar sin modificar la condición de Lipschitz;

– Cuando el espacio imagen es la recta real se pueden extender a todo el espacio sin modificar la constante de Lipschitz (**[McShane, 1934]**);

– Son "suaves", lo que hace de la diferenciación una herramienta clave en la clasificación de los espacios de Banach por isomorfismo de Lipschitz (**[Heinrich-Mankiewicz, 1982]**).

En cambio, en espacios quasi-Banach nos encontramos con que:

• Antes de ponerse a demostrar propiedades generales de funciones de Lipschitz entre espacios quasi-Banach, conviene asegurarse de que hay alguna!

(a) Si $0 < p < 1$, las únicas funciones de Lipschitz $f : L_p \to \mathbb{R}$ son las constantes;

(b) Si $0 < p < q \leq 1$, cualquier función de Lipschitz de L_p en L_q es constante;

(c) Análogamente, cualquier función de Lipschitz de L_p en ℓ_q es constante.

Veamos que $\mathrm{Lip}_0(L_p) = \{0\}$ si $0 < p < 1$.

Propiedad. *Sean (X, d) un espacio métrico métricamente convexo e (Y, ρ) un espacio métrico cualquiera. Si $f : X \to Y$ verifica*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq C d^{\alpha}(x, y), \quad x, y \in X$$

para $C > 0$ y $\alpha > 1$, entonces f es constante.

Sea $f \in \mathrm{Lip}_0(L_p)$, i.e., $f(0) = 0$ y

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|_p, \quad x, y \in L_p.$$

Entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq C(\|x - y\|_p^p)^{1/p}, \quad x, y \in L_p.$$

Como L_p es métricamente convexo, y $1/p > 1$, se sigue que f es constante.

• La convexidad local no sólo es una condición suficiente para que funcione el Teorema de extensión de McShane, sino también necesaria!

Teorema. *Supongamos que* X *es un espacio quasi-Banach tal que toda función* L*-Lipschitz* $f : E \to \mathbb{R}$ *definida en un subconjunto* E *de* X *puede extenderse a una función* L'*-Lispchitz* $F : X \to \mathbb{R}$ *con* $L' \geq L$*. Entonces* X *es localmente convexo*.

Lo cual refleja ciertas similitudes entre el comportamiento lineal y no lineal de los espacios quasi-Banach (recordar la (HBEP) de Kalton).

Otra similitud: Las funciones de Lipschitz entre espacios quasi-Banach se extienden bien a su envoltura de Banach (cuando existe):

Teorema. *Supongamos que X es un espacio quasi-Banach cuyo dual X^* separa puntos.*

(i) Sea Z esp. de Banach y $f : X \to Z$ de Lipschitz. Entonces existe una única extensión de f a la envoltura de Banach de X, $\tilde{f} : \widehat{X} \to Z$ sin que aumente la constante de Lipschitz;

(ii) Si $Y \approx_{\mathit{Lip}} X$ entonces Y^* separa puntos;

(iii) Si $Y \approx_{\mathit{Lip}} X$ entonces $\widehat{Y} \approx_L \hat{X}$.

Corolario. *Dados* $0 < p, q < 1$,

(i) $L_p \not\approx_{\text{Lip}} \ell_q$ *ya que* $\ell_q^* = \ell_\infty$ *y* $L_p^* = 0$*;*

(ii) $\ell_p \not\approx_{\text{Lip}} \ell_2(\ell_q^n)$ *ya que* $\widehat{\ell_p} = \ell_1$, $\widehat{\ell_2(\ell_q^n)} = \ell_2(\ell_1^n)$ *y* $\ell_2(\ell_1^n) \not\approx_{\text{Lip}} \ell_1$*. (Si un esp. de Banach* X *es Lipschitz isomorfo a* ℓ_1 *y* X *es un espacio dual, entonces* $X \approx \ell_1$*.)*

• En cuanto a la diferenciabilidad de func. de Lipschitz con valores en espacios quasi-Banach...

[Rolewicz, 1959] Sean $X = L_p$, $0 < p < 1$, y

$$f : [0,1] \to L_p[0,1], \qquad t \to f(t) = \chi_{[0,t]}.$$

Entonces $\|f(t) - f(s)\|_p = |t-s|^{1/p}$, luego

$$\frac{\|f(t) - f(s)\|_p}{|t-s|} = |t-s|^{\frac{1}{p}-1} \to 0 \quad \text{si } |t-s| \to 0.$$

Es decir, f es una función de Lipschitz no constante, con derivada 0 en todos los puntos!

[Kalton, 1981] *Todo espacio quasi-Banach X con $X^* = \{0\}$ admite una función de Lipschitz no constante $f : [0,1] \to X$ con derivada nula en todos los puntos.*

Sea $0 < p < 1$, y $f : [0,1] \to \ell_p$, $t \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e_n$ de Lipschitz. Componiendo con los funcionales biortogonales e_n^* asociados a la base canónica obtenemos que las funciones coordenadas

$$e_n^* \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \to a_n(t),$$

son funciones de Lipschitz reales, que sabemos que son derivables a.e. $t \in [0,1]$.

Utilizando que la base de ℓ_p es "boundedly complete" para $0 < p \leq 1$, podemos extender un teorema de Dunford-Morse de 1936 y demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t) e_n$ converge en X, digamos que a $g(t)$, a.e. $t \in [0,1]$.

¿Cómo seguimos?

El problema está en que no podemos usar integración:

<u>**[Mazur-Orlicz, 1948]**</u> *Un espacio quasi-Banach X es localmente convexo si y sólo si toda función continua $f : [0,1] \to X$ es (Bochner)-integrable.*

Es natural plantearse:

<u>**Problema:**</u> *¿Existen espacios quasi-Banach X (no localmente convexos) de modo que las funciones de Lipschitz con valores en X tengan buenas propiedades de diferenciabilidad?*

Como pasa con la integración, la convexidad local no sólo es una condición suficiente para que alguna de estas propiedades se cumpla, sino que es también necesaria.

Tomemos como ejemplo la fórmula del Valor Medio que satisfacen las funciones diferenciables en espacios de Banach:

T.V.M. en espacios de Banach. Sean X, Y esp. de Banach. Supongamos que $f : X \to Y$ es diferenciable-Gâteaux en el intervalo $I = \{x_0 + t(y_0 - x_0) : t \in [0,1]\}$ que conecta x_0 con y_0 in X. Entonces se cumple la desigualdad

$$\|f(y_0) - f(x_0)\| \leq \sup_{x \in I} \|f'(x)\| \|y_0 - x_0\|.$$

Por contra, en espacios quasi-Banach tenemos:

Proposición. *Supongamos que* X *es un espacio quasi-Banach tal que toda función de Lipschitz* $F : [0, 1] \to X$ *satisface una fórmula del Valor Medio del tipo*

$$\|F(y) - F(x)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|F'(t)\||y - x|,$$

para $x, y \in [0, 1]$*. Entonces* X *es localmente convexo.*

Conjetura. *Sea* X *espacio quasi-Banach tal que toda función de Lipschitz* $F : [0, 1] \to X$ *es derivable en algún punto* t_0*, con derivada* $F'(t_0) \neq 0$*. Entonces* X *es localmente convexo.*

Funciones de Lipschitz y clasificación uniforme

Los métodos utilizados en la clasificación uniforme de espacios de Banach dependen de la teoría de aplicaciones de Lipschitz. La clave es:

[Corson-Klee, 1963]. *Si* $f : X \to Y$ *es un homeomorfismo uniforme entre los espacios de Banach* X, Y*, entonces existe* $C > 0$ *tal que*

$$C^{-1}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$$

para cualesquiera $x, y \in X$ *tales que* $\|x - y\| \geq 1$*.*

Es decir, si dos espacios de Banach son uniformemente homeomorfos, entonces son "Lipschitz isomorfos para grandes distancias".

El ingrediente esencial para que sea cierto el Lema de Corson-Klee y disponer de ese control inicial de un homeomorfismo uniforme entre espacios de Banach es el hecho de que estos espacios son *métricamente convexos.*

Esta característica, en combinación con las propiedades de ultraproductos establece la conexión entre las dos categorías (uniforme y Lipschitz). La herramienta de la dualidad las conecta a su vez con la lineal.

[Ribe, 1978]. *Si dos espacios de Banach son uniformemente homeomorfos entonces tienen los mismos subespacios de dimensión finita.*

La clasificación uniforme de los espacios quasi-Banach empieza con importantes desventajas:

• La principal es que los espacios p-Banach no tienen por qué ser métricamente convexos con la distancia inducida por la p-norma, por lo que las funciones uniformemente continuas definidas en ellos verifican condiciones de Lipschitz para grandes distancias mucho más débiles.

• No existen resultados sobre ultraproductos de espacios quasi-Banach.

• La relación de un espacio quasi-Banach con su dual no es tan estrecha como en un espacio de Banach, y por tanto no podemos extraer tanta información.

Proposición. *Sean X p-Banach e Y esp. de Banach. Supongamos que existe $f : X \to Y$ inyectiva tal que para ciertas constantes C, c,*

$$C^{-1}\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| \leq C\|x-y\|$$

si $\|x-y\| \geq c$. Entonces X es loc. convexo.

Problemas

1. ¿Cómo linealizar funciones de Lipschitz si (como parece) no disponemos de la herramienta de la diferenciabilidad?

Una vez sepamos ésto:

2. Sea $0 < p < 1$. Si X es un espacio quasi-Banach tal que $X \approx_{\text{Lip}} \ell_p$, ¿es $X \approx \ell_p$? Lo mismo con L_p en lugar de ℓ_p.

3. Sabemos que un espacio quasi-Banach no localmente convexo no puede ser Lipschitz isomorfo a un espacio de Banach. ¿Puede ser uniformemente homeomorfo?

Para saber más

• F. A. and N. Kalton, *Lipschitz structure of quasi-Banach spaces*, Israel J. Math. **170** (2009), 317-335.

• F. A., *Nonlinear structure of some classical quasi-Banach spaces and* F*-spaces*, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), 1312-1325.

• Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis*, vol. 1, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 48, 2000.

• N. Kalton, *The nonlinear geometry of Banach spaces*, Rev. Mat. Complut. **21** (2008), no. 1, 7-60.