UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
Departamento de Matemáticas

Caracterización de espacios prehilbertianos

Autor: Diego Francisco Yáñez Murillo.
junto con Carlos Benítez Rodríguez.

Salobreña, Granada, abril 2008

Introducción.

Introducción.

GEOMETRÍA DE ESPACIOS NORMADOS

Introducción.

GEOMETRÍA DE ESPACIOS NORMADOS

$\longrightarrow$**Ortogonalidad en Espacios Normados**

Introducción.

GEOMETRÍA DE ESPACIOS NORMADOS

→Ortogonalidad en Espacios Normados

→Caracterización de Espacios Prehilbertianos

Resultados destacados:

Resultados destacados:

J. Alonso, "Ortogonalidad en Espacios Normados", Dep. de Matemáticas, Universidad de Extremadura, Badajoz, 1984.

J. Alonso, C. Benítez, Some characteristic and non-characteristic properties of inner product spaces, *J. Approx. Theory* **55** (1988), 318–323.

J. Alonso, C. Benítez, Orthogonality in normed linear spaces: a survey. Part I: main properties, *Extracta Math.* **3** (1988), 1-15.

J. Alonso, C. Benítez, Orthogonality in normed linear spaces: a survey. Part II: relations between main orthogonalities, *Extracta Math.* **4** (1989), 121–131.

C. Benítez, Orthogonality in normed linear spaces: a classification of the different concepts and some open problems, *Rev. Mat. Univ. Complutense Madr.* **2** (1989), 53-57.

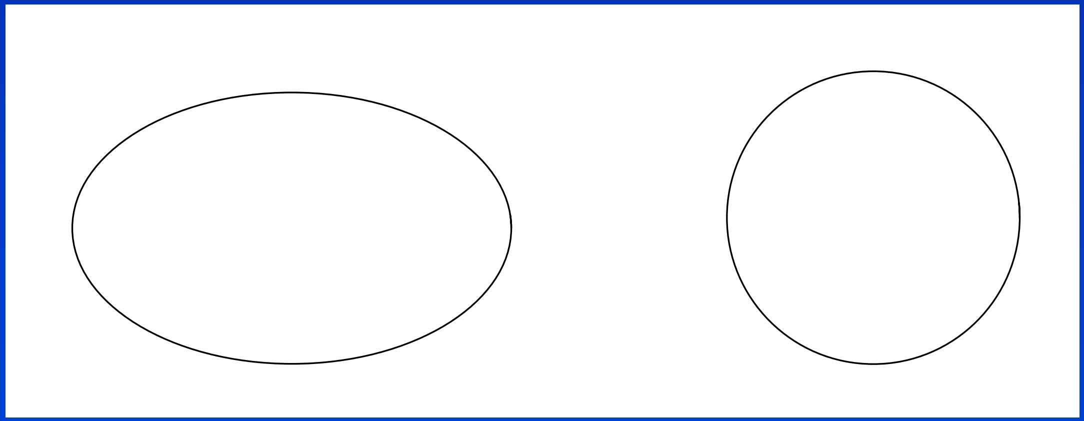
J. Alonso, C. Benítez, Complements on Diminnie Orthogonality, *Math. Nachr.* **165** (1994), 99-106.

J. Alonso, C. Benítez, Area orthogonality in normed linear spaces, *Arch. Math.* **68** (1997), 70-76.

Un espacio normado X es prehilbertiano si $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Un espacio normado X es prehilbertiano si $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Si $dim(X) = 2$, X es prehilbertiano si $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ es una elipse (circunferencia)



Antecedentes Históricos.

Antecedentes Históricos.

B.D. Roberts, On the geometry of abstract vector spaces, *Tôhoku Math. J.* **39** (1934), 42-59.

G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.* **1** (1935), 169-172.

M.M. Day, Some characterizations of inner product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947), 320-337.

R.C. James, Inner product in normed linear spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 559-566.

J.L. Joly, Caracterisations d'espaces hilbertiens au moyen de la constante rectangle, *J. Approx. Theory* **2** (1969), 301-311.

J. Desbiens, Une nouvelle caractérisation des espaces de Hilbert, *Ann. Sc. Math. Québec* **14(1)** (1990), 17-22.

Dan Amir: *Characterization of Inner Product Spaces,* Birkhauser Verlag, Basel, 1986.

$\longrightarrow$350 caracterizaciones de espacios prehilbertianos.

Dan Amir: *Characterization of Inner Product Spaces,* Birkhauser Verlag, Basel, 1986.

$\longrightarrow$ 350 caracterizaciones de espacios prehilbertianos.

Ejemplos:

Dan Amir: *Characterization of Inner Product Spaces,* Birkhauser Verlag, Basel, 1986.

$\longrightarrow$350 caracterizaciones de espacios prehilbertianos.

Ejemplos:

- **“Igualdad del paralelogramo” o “Teorema de Jordan von Newman”:**

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2), \quad (x,y\in X).$$

Dan Amir: *Characterization of Inner Product Spaces,* Birkhauser Verlag, Basel, 1986.

$\longrightarrow$350 caracterizaciones de espacios prehilbertianos.

Ejemplos:

- **"Igualdad del paralelogramo" o "Teorema de Jordan von Newman":**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad (x, y \in X).$$

- **"Teorema de Brunn, Blaschke y Kakutani":** un espacio normado real, de dimensión ≥ 3, es prehilbertiano si y sólo si existe una proyección lineal de norma 1 sobre cada subespacio bidimensional.

Dan Amir: *Characterization of Inner Product Spaces,* Birkhauser Verlag, Basel, 1986.

$\longrightarrow$350 caracterizaciones de espacios prehilbertianos.

Ejemplos:

- **“Igualdad del paralelogramo” o “Teorema de Jordan von Newman”:**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad (x, y \in X).$$

- **“Teorema de Brunn, Blaschke y Kakutani”:** un espacio normado real, de dimensión ≥ 3, es prehilbertiano si y sólo si existe una proyección lineal de norma 1 sobre cada subespacio bidimensional.

Propiedades:

Dan Amir: *Characterization of Inner Product Spaces,* Birkhauser Verlag, Basel, 1986.

$\longrightarrow$350 caracterizaciones de espacios prehilbertianos.

Ejemplos:

- **"Igualdad del paralelogramo" o "Teorema de Jordan von Newman":**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad (x, y \in X).$$

- **"Teorema de Brunn, Blaschke y Kakutani":** un espacio normado real, de dimensión ≥ 3, es prehilbertiano si y sólo si existe una proyección lineal de norma 1 sobre cada subespacio bidimensional.

Propiedades:

- X complejo es prehilbertiano, si y sólo si, lo es el espacio real subyacente.

Dan Amir: *Characterization of Inner Product Spaces,* Birkhauser Verlag, Basel, 1986.

$\longrightarrow$350 caracterizaciones de espacios prehilbertianos.

Ejemplos:

- **"Igualdad del paralelogramo" o "Teorema de Jordan von Newman":**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad (x, y \in X).$$

- **"Teorema de Brunn, Blaschke y Kakutani":** un espacio normado real, de dimensión ≥ 3, es prehilbertiano si y sólo si existe una proyección lineal de norma 1 sobre cada subespacio bidimensional.

Propiedades:

- X complejo es prehilbertiano, si y sólo si, lo es el espacio real subyacente.
- X real es prehilbertiano, si y sólo si, lo son todos sus subespacios bidimensionales.

Dan Amir: *Characterization of Inner Product Spaces,* Birkhauser Verlag, Basel, 1986.

$\longrightarrow$350 caracterizaciones de espacios prehilbertianos.

Ejemplos:

- **"Igualdad del paralelogramo" o "Teorema de Jordan von Newman":**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad (x, y \in X).$$

- **"Teorema de Brunn, Blaschke y Kakutani":** un espacio normado real, de dimensión ≥ 3, es prehilbertiano si y sólo si existe una proyección lineal de norma 1 sobre cada subespacio bidimensional.

Propiedades:

- X complejo es prehilbertiano, si y sólo si, lo es el espacio real subyacente.
- X real es prehilbertiano, si y sólo si, lo son todos sus subespacios bidimensionales.

Prehilbertiano $\leftrightarrow$ Hilbet

Dan Amir: *Characterization of Inner Product Spaces,* Birkhauser Verlag, Basel, 1986.

$\longrightarrow$350 caracterizaciones de espacios prehilbertianos.

Ejemplos:

- **“Igualdad del paralelogramo” o “Teorema de Jordan von Newman”:**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad (x, y \in X).$$

- **“Teorema de Brunn, Blaschke y Kakutani”:** un espacio normado real, de dimensión ≥ 3, es prehilbertiano si y sólo si existe una proyección lineal de norma 1 sobre cada subespacio bidimensional.

Propiedades:

- X complejo es prehilbertiano, si y sólo si, lo es el espacio real subyacente.
- X real es prehilbertiano, si y sólo si, lo son todos sus subespacios bidimensionales.

Prehilbertiano $\leftrightarrow$ Hilbet

Planteamiento de la caracterización

Planteamiento de la caracterización

Observación geométrica:

Planteamiento de la caracterización

Observación geométrica:

Sea X el plano euclídeo.

Planteamiento de la caracterización

Observación geométrica:

Sea X el plano euclídeo.

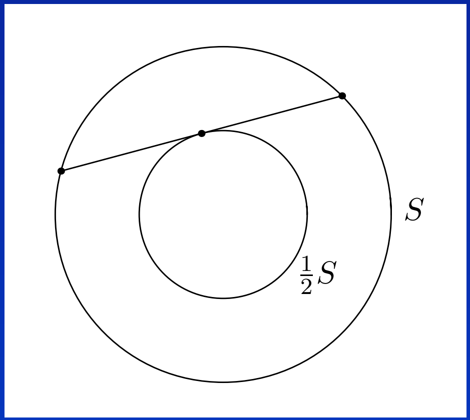
Si $X = l_2(2)$ (S es una circunferencia).

Planteamiento de la caracterización

Observación geométrica:

Sea X el plano euclídeo.

Si $X = l_2(2)$ (S es una circunferencia).Cualquiera que sea la cuerda con extremos en S que soporta a su homotética de radio $1/2$, $\frac{1}{2}S$, lo hace en su punto medio.

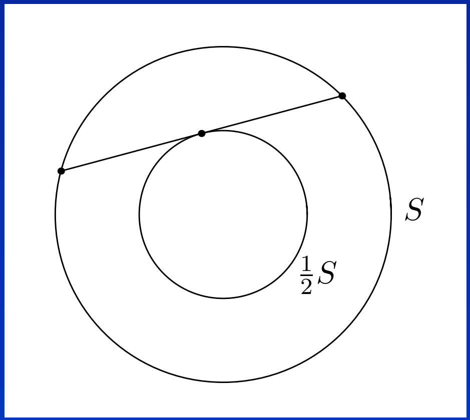


Planteamiento de la caracterización

Observación geométrica:

Sea X el plano euclídeo.

Si $X = l_2(2)$ (S es una circunferencia).Cualquiera que sea la cuerda con extremos en S que soporta a su homotética de radio $1/2$, $\frac{1}{2}S$, lo hace en su punto medio.



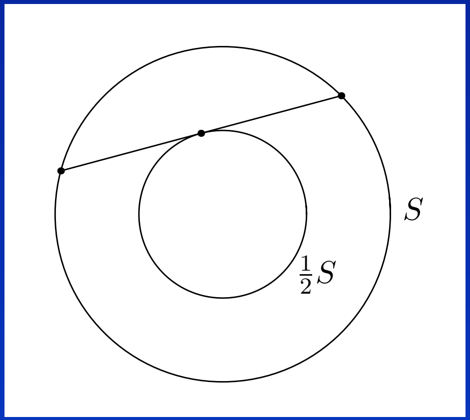
Si $X = l_\infty(2)$ (S es un cuadrado).

Planteamiento de la caracterización

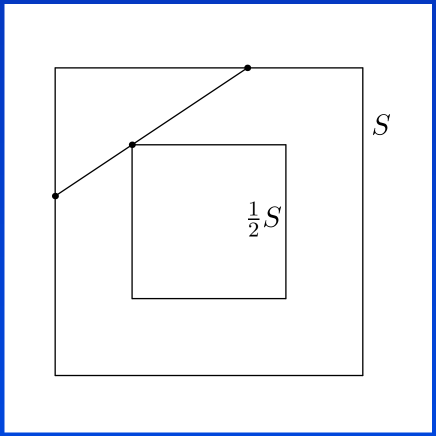
Observación geométrica:

Sea X el plano euclídeo.

Si $X = l_2(2)$ (S es una circunferencia).Cualquiera que sea la cuerda con extremos en S que soporta a su homotética de radio $1/2$, $\frac{1}{2}S$, lo hace en su punto medio.



Si $X = l_\infty(2)$ (S es un cuadrado).

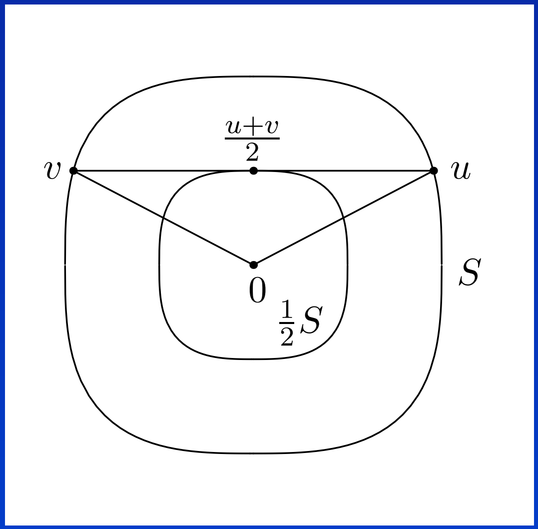


La “hipótesis $(\frac{1}{2}S)$”.

La “hipótesis $(\frac{1}{2}S)$”.

Definición: Un espacio normado X (real o complejo) verifica la “hipótesis $(\frac{1}{2}S)$” si:

$$u, v \in S, \inf_{\tau \in [0,1]} \|(1-\tau)u + \tau v\| = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \in \frac{1}{2}S.$$

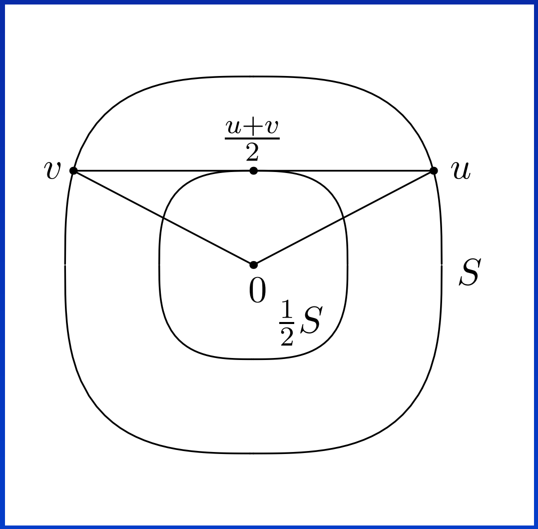


Es decir, si cualquiera que sea la cuerda con extremos en S, que soporta a $\frac{1}{2}S$, lo hace en su putno medio.

La “hipótesis $(\frac{1}{2}S)$”.

Definición: Un espacio normado X (real o complejo) verifica la “hipótesis $(\frac{1}{2}S)$” si:

$$u, v \in S, \inf_{\tau\in[0,1]} \|(1-\tau)u + \tau v\| = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \in \frac{1}{2}S.$$



Es decir, si cualquiera que sea la cuerda con extremos en S, que soporta a $\frac{1}{2}S$, lo hace en su putno medio.

¿“Hipótesis $(\frac{1}{2}S)$” caracteriza a los espacios prehilbertianos?

ÍNDICE:

ÍNDICE:

- "Hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

ÍNDICE:

- “Hipótesis $(\frac{1}{2}S)$”.

  $*$Notaciones y “herramientas”.

  $*$Propiedades con la “Hipótesis $(\frac{1}{2}S)$”.

  $*$Caracterización de espacios prehilbertianos.

  $*$Aplicaciones.

ÍNDICE:

- “Hipótesis $(\frac{1}{2}S)$”.

  $*$Notaciones y “herramientas”.

  $*$Propiedades con la “Hipótesis $(\frac{1}{2}S)$”.

  $*$Caracterización de espacios prehilbertianos.

  $*$Aplicaciones.

  $\longrightarrow$Resultado de Gurarii y Sozonov.

ÍNDICE:

- “Hipótesis $(\frac{1}{2}S)$”.

    $*$Notaciones y “herramientas”.

    $*$Propiedades con la “Hipótesis $(\frac{1}{2}S)$”.

    $*$Caracterización de espacios prehilbertianos.

    $*$Aplicaciones.

    $\longrightarrow$Resultado de Gurarii y Sozonov.

    $\longrightarrow$Localización de medianas de Fermat-Torricelli.

Notaciones y “herramientas”.

Notaciones y “herramientas”.

Basta considerar:

Notaciones y “herramientas”.

Basta considerar:

$$X = \mathbb{R}^2,$$

Notaciones y “herramientas”.

Basta considerar:

$$X = \mathbb{R}^2,$$

$$S = \{x \in X : \|x\| = 1\},$$

Notaciones y “herramientas”.

Basta considerar:

$$X = \mathbb{R}^2,$$

$$S = \{x \in X : \|x\| = 1\},$$

$$B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Notaciones y “herramientas”.

Basta considerar:

$$X = \mathbb{R}^2,$$

$$S = \{x \in X : \|x\| = 1\},$$

$$B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Denotamos $\frac{1}{2}S = \{x \in X : \|x\| = \frac{1}{2}\}$.

Notaciones y "herramientas".

Basta considerar:

$$X = \mathbb{R}^2,$$

$$S = \{x \in X : \|x\| = 1\},$$

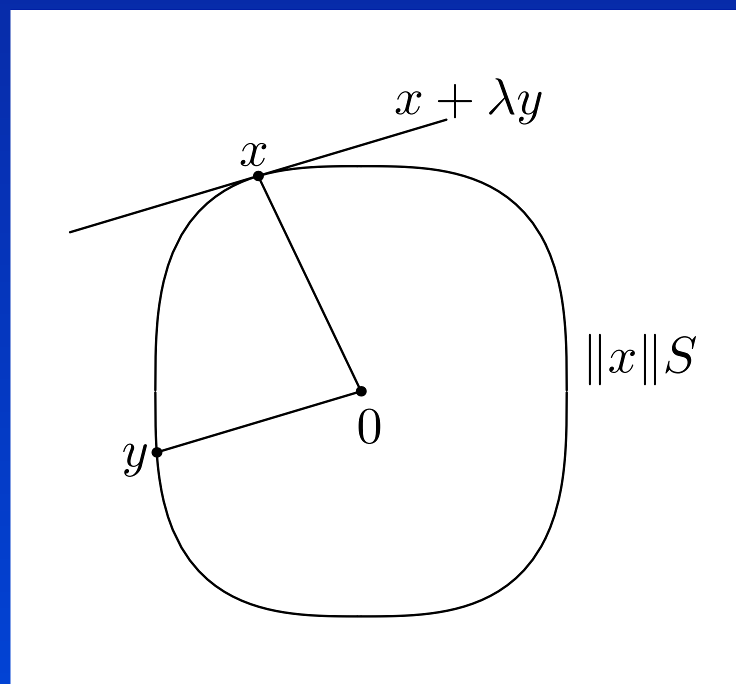
$$B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Denotamos $\frac{1}{2}S = \{x \in X : \|x\| = \frac{1}{2}\}$.

Sean $x, y \in X$

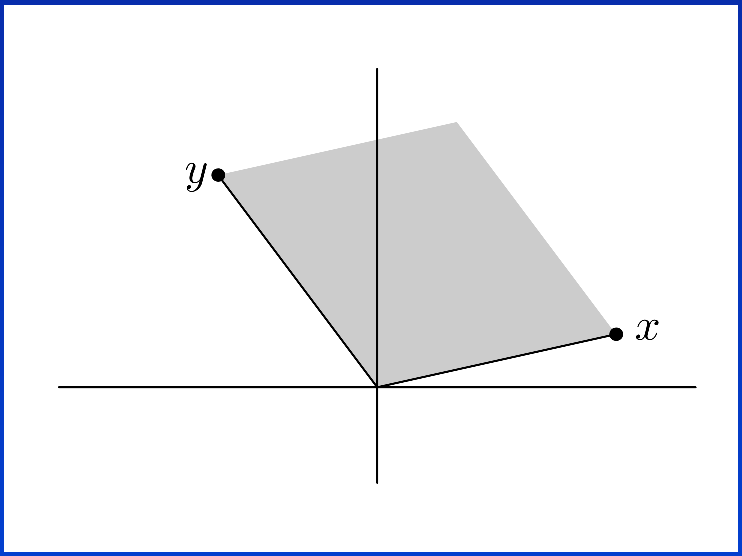
$x \perp y$ (x B-ortogonal -u ortogonal en sentido Birkhoff- a y):

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$



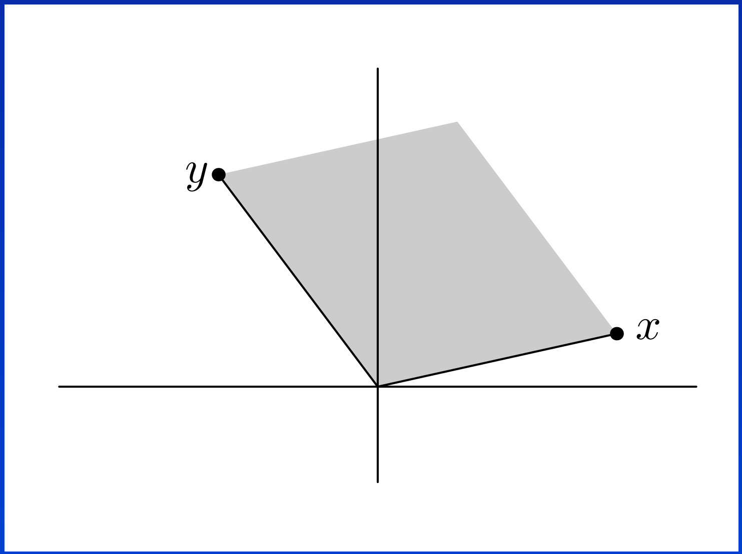
$x \prec y$: x e y son linealmente independientes y x precede estrictamente a y en la orientación positiva de X.
Es decir, si $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$$x \wedge y = x_1 y_2 - x_2 y_1 > 0.$$



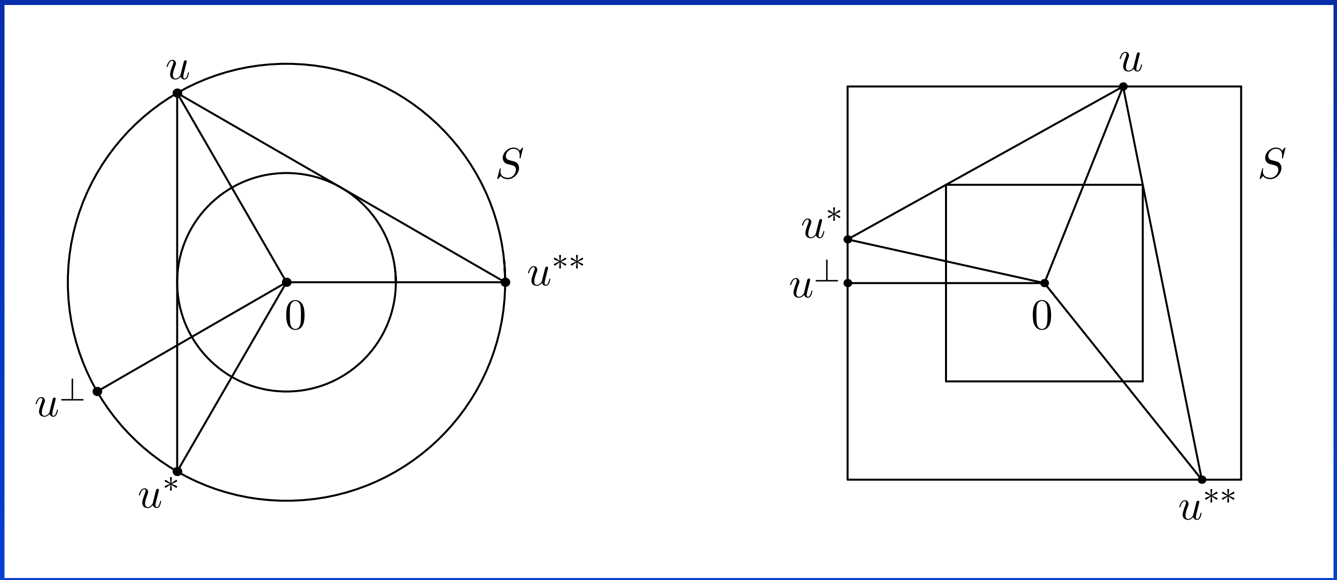
$x \prec y$: x e y son linealmente independientes y x precede estrictamente a y en la orientación positiva de X.
Es decir, si $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$$x \wedge y = x_1 y_2 - x_2 y_1 > 0.$$



$x \wedge y$ es el área del paralelogramo que determinan los vectores x e y.

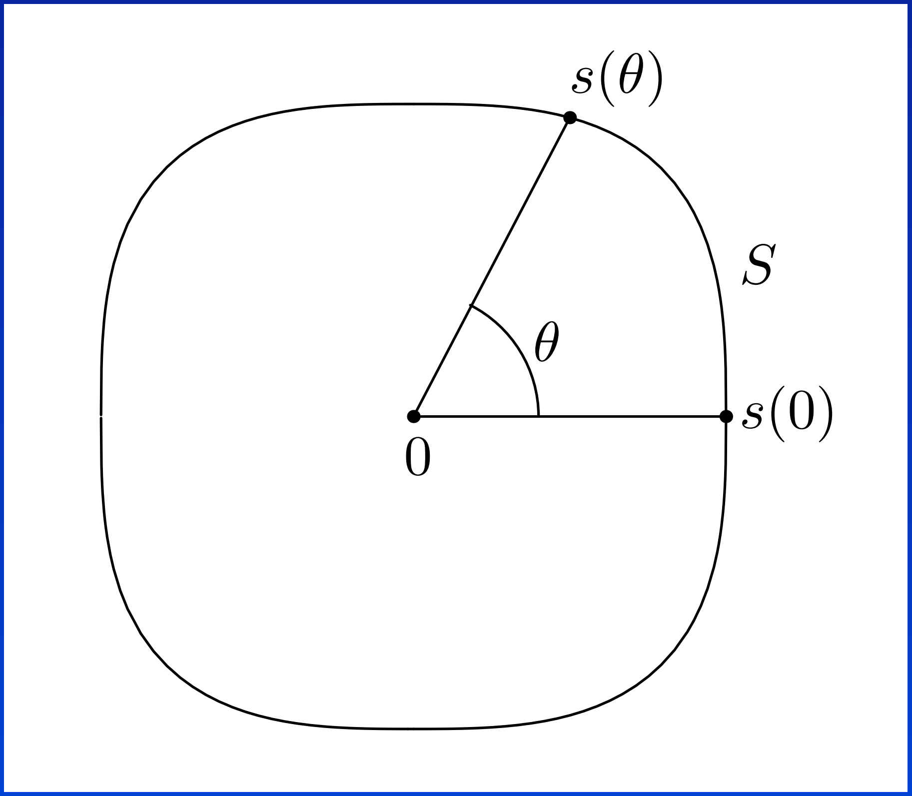
Para cada punto $u \in S$, los puntos u^* y u^{**} son los puntos de S tales que: $u^{**} \prec u \prec u^*$ y los segmentos $[u^{**}, u]$ y $[u, u^*]$ soportan a a ρS.



Parametrización de Joly de S:

Parametrización de Joly de S:

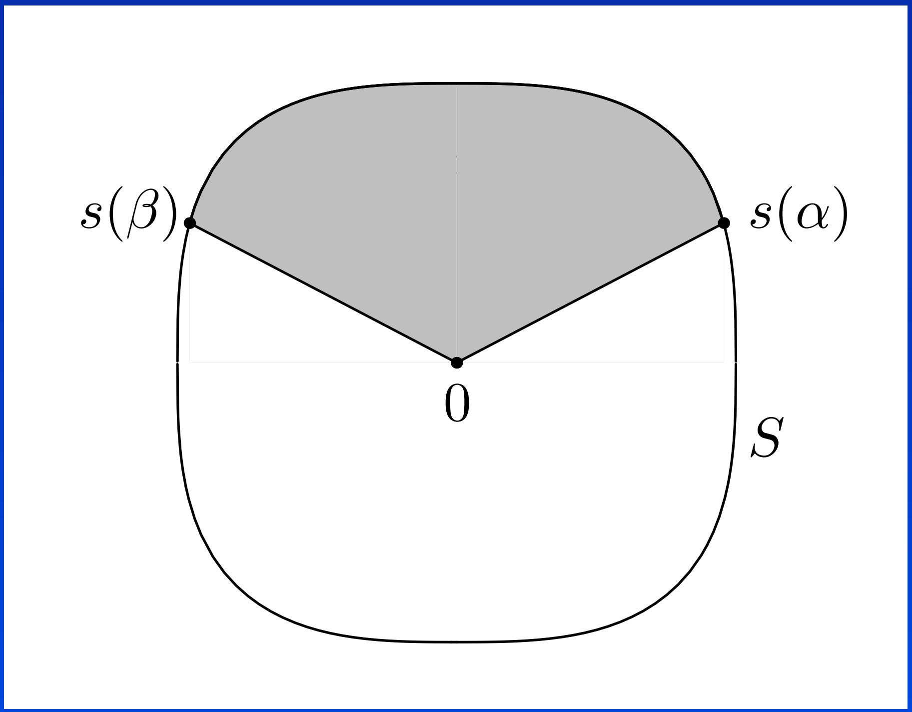
Para cada $\theta \in [0, 2\pi]$, $s(\theta)$ es el punto de S que forma un ángulo θ con un punto incial prefijado $s(0) \in S$



La aplicación $s : \theta \in [0, 2\pi] \to s(\theta) \in S$ es una parametrización natural continua y de variación acotada de S.

$\forall\, 0 \leq \alpha < \beta \leq \alpha + \pi$

$$A(B_{s(\alpha)s(\beta)}) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta s(\theta) \wedge ds(\theta) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [s_1(\theta)ds_2(\theta) - s_2(\theta)ds_1(\theta)]$$



Propiedades con la “hipótesis $(\frac{1}{2}S)$”.

Propiedades con la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Propiedades: Si X verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$" entonces, para cada $u \in S$, se tiene que,

Propiedades con la “hipótesis $(\frac{1}{2}S)$”.

Propiedades: Si X verifica la “hipótesis $(\frac{1}{2}S)$” entonces, para cada $u \in S$, se tiene que,

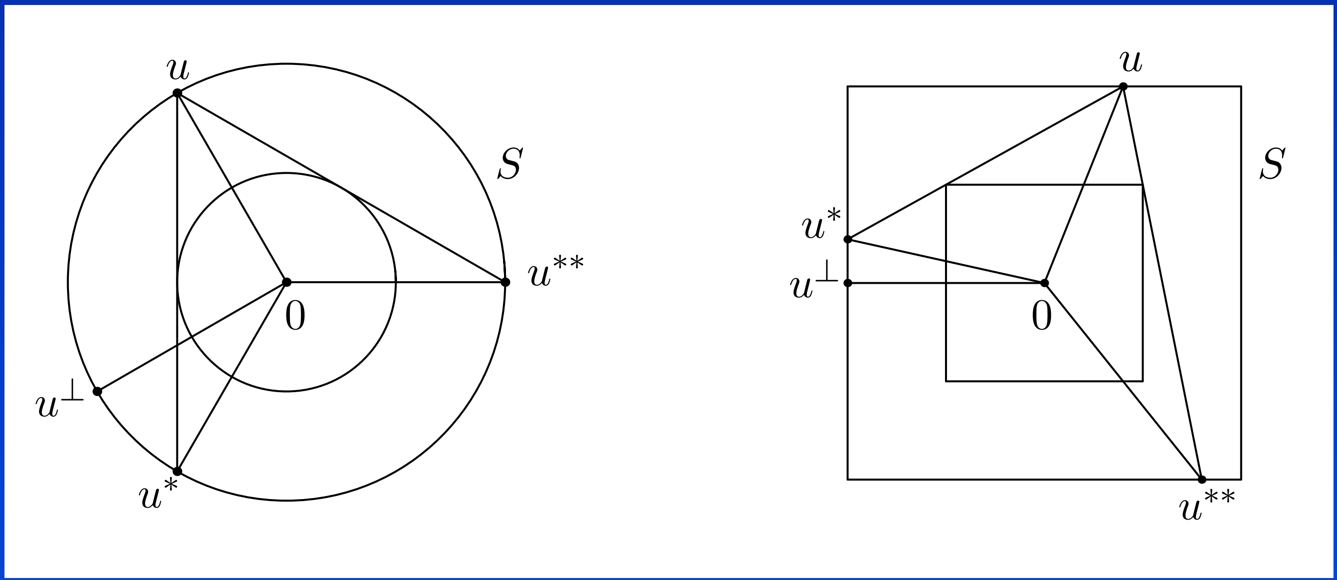
(i) X es regular (liso y estrictamente convexo)

Propiedades con la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Propiedades: Si X verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$" entonces, para cada $u \in S$, se tiene que,

(i) X es regular (liso y estrictamente convexo)

En particular, para cada $u \in S$, existe un único $u^{\perp}$ en S tal que: $u \prec u^{\perp}$ y $u \perp u^{\perp}$.



(ii) Las aplicaciones:

$$s^* : \theta \in [0, 2\pi] \rightarrow s^*(\theta) \in S,$$

$$s^\perp : \theta \in [0, 2\pi] \rightarrow s^\perp(\theta) \in S,$$

son parametrizaciones de S continuas y de variación acotada (S curva convexa).

(ii) Las aplicaciones:

$$s^* : \theta \in [0, 2\pi] \to s^*(\theta) \in S,$$

$$s^\perp : \theta \in [0, 2\pi] \to s^\perp(\theta) \in S,$$

son parametrizaciones de S continuas y de variación acotada (S curva convexa).

(iii) Las aplicaciones $s, s^* : [0, 2\pi] \longrightarrow S$ son diferenciables y se tiene que $s' = ps^\perp$ y $s^{*\prime} = qs^{*\perp}$.

(ii) Las aplicaciones:

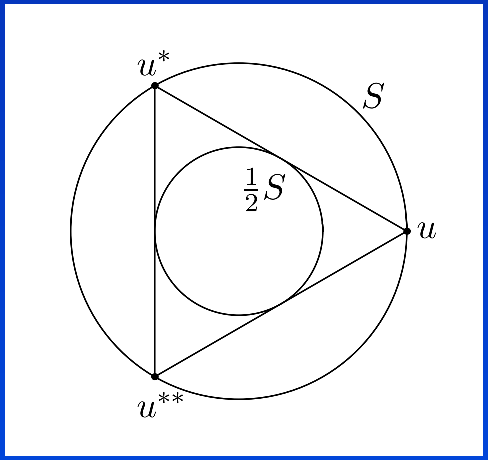
$$s^* : \theta \in [0, 2\pi] \longrightarrow s^*(\theta) \in S,$$

$$s^\perp : \theta \in [0, 2\pi] \longrightarrow s^\perp(\theta) \in S,$$

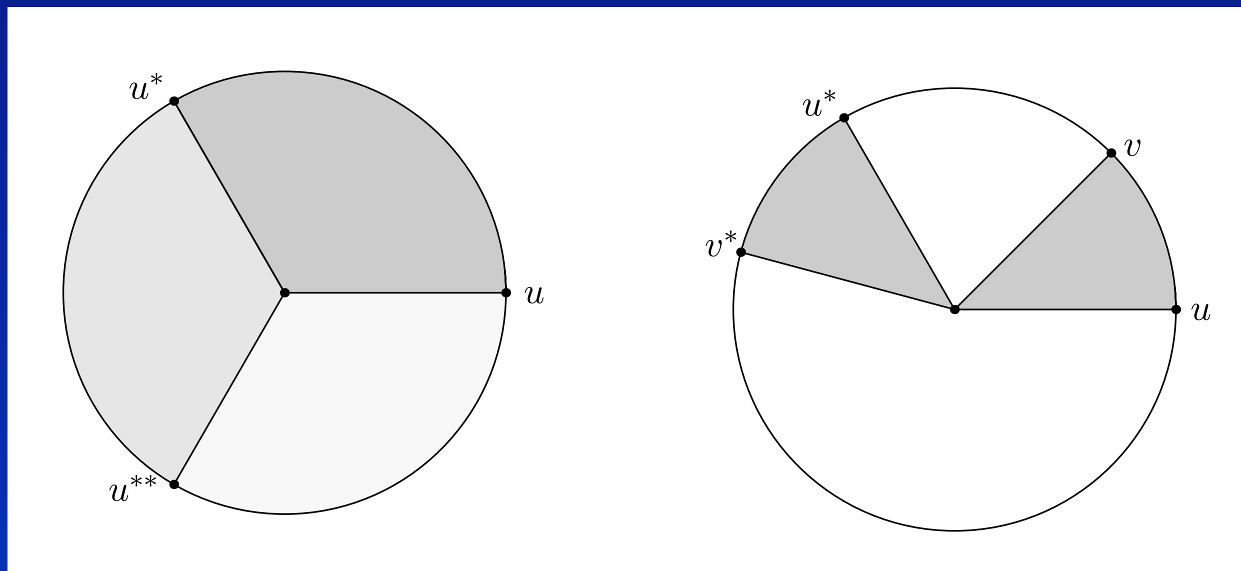
son parametrizaciones de S continuas y de variación acotada (S curva convexa).

(iii) Las aplicaciones $s, s^* : [0, 2\pi] \longrightarrow S$ son diferenciables y se tiene que $s' = ps^\perp$ y $s^{*\prime} = qs^{*\perp}$.

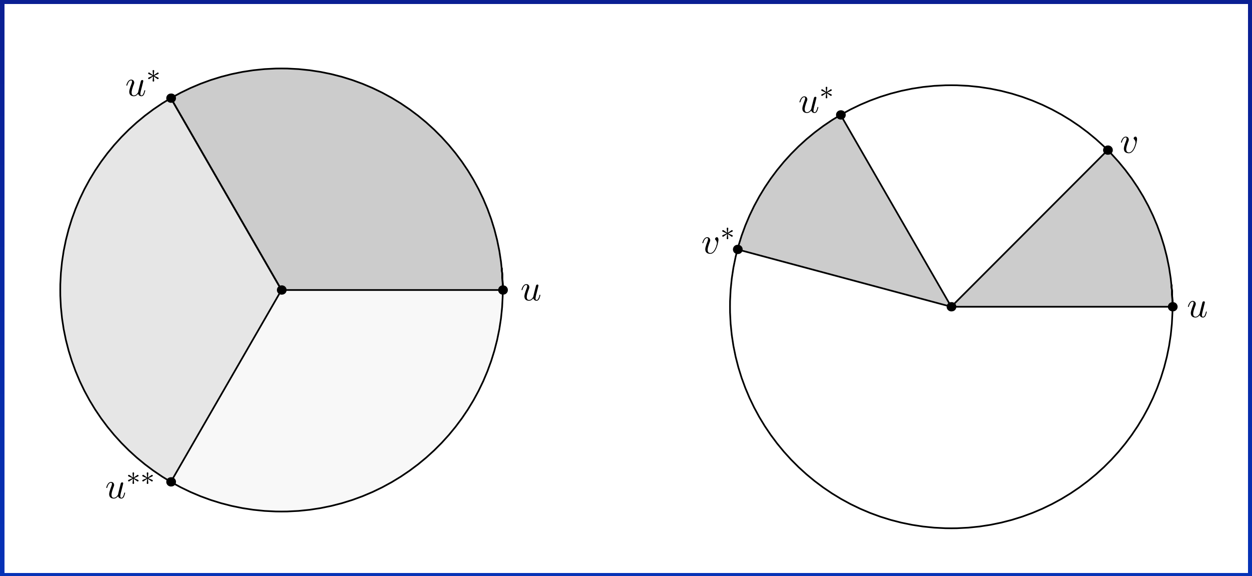
(iv) $(u^*)^* = u^{**}$.



(v) $\forall u \in S$, $A(B_{uu^*}) = A(B_{u^*u^{**}}) = A(B_{u^{**}u})$,y estos sectores son disjuntos.

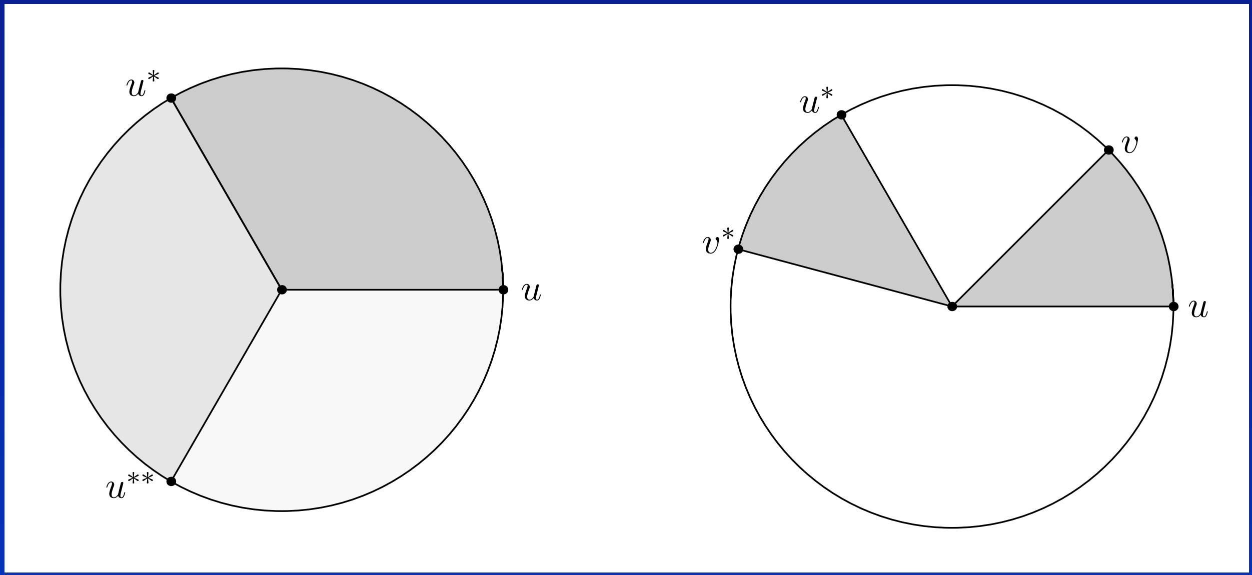


(v) $\forall u \in S$, $A(B_{uu^*}) = A(B_{u^*u^{**}}) = A(B_{u^{**}u})$,y estos sectores son disjuntos.



(vi) $u, v \in S$,$u \prec v \Rightarrow A(B_{uv}) = A(B_{u^*v^*})$.

(v) $\forall u \in S$, $A(B_{uu^*}) = A(B_{u^*u^{**}}) = A(B_{u^{**}u})$,y estos sectores son disjuntos.



(vi) $u, v \in S$,$u \prec v \Rightarrow$ $A(B_{uv}) = A(B_{u^*v^*})$.

(vii) $u \in S \rightarrow u \wedge u^* \in \mathbb{R}$ es constante.

Teorema 1: X es prehilbertiano si y sólo si verifica la “hipótesis $(\frac{1}{2}S)$”.

Teorema 1: X es prehilbertiano si y sólo si verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Demostración:

Teorema 1: X es prehilbertiano si y sólo si verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Demostración:

Si X es prehilbertiano,

Teorema 1: X es prehilbertiano si y sólo si verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Demostración:

Si X es prehilbertiano, entonces $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$,

Teorema 1: X es prehilbertiano si y sólo si verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Demostración:

Si X es prehilbertiano, entonces $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$,y es fácil ver que la función convexa

$$F(t) = \|(1-t)u + tv\|, 0 \leq t \leq 1,$$

alcanza un mínimo en $t = 1/2$.

Teorema 1: X es prehilbertiano si y sólo si verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Demostración:

Si X es prehilbertiano, entonces $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$,y es fácil ver que la función convexa

$$F(t) = \|(1-t)u + tv\|, 0 \leq t \leq 1,$$

alcanza un mínimo en $t = 1/2$.

Para el recríproco:

Teorema 1: X es prehilbertiano si y sólo si verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Demostración:

Si X es prehilbertiano, entonces $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$,y es fácil ver que la función convexa

$$F(t) = \|(1-t)u + tv\|, 0 \leq t \leq 1,$$

alcanza un mínimo en $t = 1/2$.

Para el recríproco: Basta considerar $X = \mathbb{R}^2$, S esfera unidad.

Teorema 1: X es prehilbertiano si y sólo si verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Demostración:

Si X es prehilbertiano, entonces $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$,y es fácil ver que la función convexa

$$F(t) = \|(1-t)u + tv\|, 0 \leq t \leq 1,$$

alcanza un mínimo en $t = 1/2$.

Para el recríproco: Basta considerar $X = \mathbb{R}^2$, S esfera unidad.

Sea $s : \theta \in [0, 2\pi] \to s(\theta) \in S$ una parametrización natural de S.

Teorema 1: X es prehilbertiano si y sólo si verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Demostración:

Si X es prehilbertiano, entonces $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$,y es fácil ver que la función convexa

$$F(t) = \|(1-t)u + tv\|, 0 \leq t \leq 1,$$

alcanza un mínimo en $t = 1/2$.

Para el recríproco: Basta considerar $X = \mathbb{R}^2$, S esfera unidad.

Sea $s : \theta \in [0, 2\pi] \to s(\theta) \in S$ una parametrización natural de S.

Existe una aplicación $k : [0, 2\pi] \to k(\theta) \in \mathbb{R}_+$ tal que, para cada $\theta \in [0, 2\pi]$ si

$$s(\theta) = \big(s_1(\theta), s_2(\theta)\big) \quad \text{y} \quad s^*(\theta) = \big(s_1^*(\theta), s_2^*(\theta)\big)$$

entonces,

$$s_1'(\theta) = k(\theta)[s_1(\theta) + 2s_1^*(\theta)]$$

$$s_2'(\theta) = k(\theta)[s_2(\theta) + 2s_2^*(\theta)]$$

$$s_1^{*\prime}(\theta) = -k(\theta)[2s_1(\theta) + s_1^*(\theta)]$$

$$s_2^{*\prime}(\theta) = -k(\theta)[2s_2(\theta) + s_2^*(\theta)]$$

entonces,

$$s_1'(\theta) = k(\theta)[s_1(\theta) + 2s_1^*(\theta)]$$

$$s_2'(\theta) = k(\theta)[s_2(\theta) + 2s_2^*(\theta)]$$

$$s_1^{*\prime}(\theta) = -k(\theta)[2s_1(\theta) + s_1^*(\theta)]$$

$$s_2^{*\prime}(\theta) = -k(\theta)[2s_2(\theta) + s_2^*(\theta)]$$

Datos iniciales,

$$(s_1(0), s_2(0)) = (1, 0) \quad \text{y} \quad (s_1^*(0), s_2^*(0)) = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}),$$

se obtiene que, $s_1^2(\theta) + s_2^2(\theta) = 1.$ ∎

APLICACIONES:

APLICACIONES:

Resultado de Gurarii y Sozonov

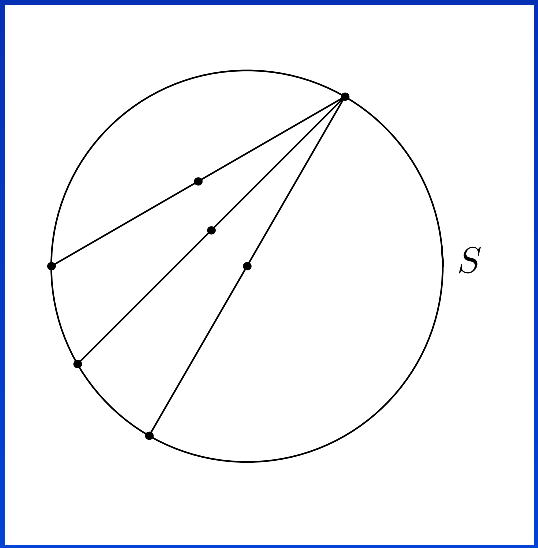
Gurarii y Sozonov (1968):

APLICACIONES:

Resultado de Gurarii y Sozonov

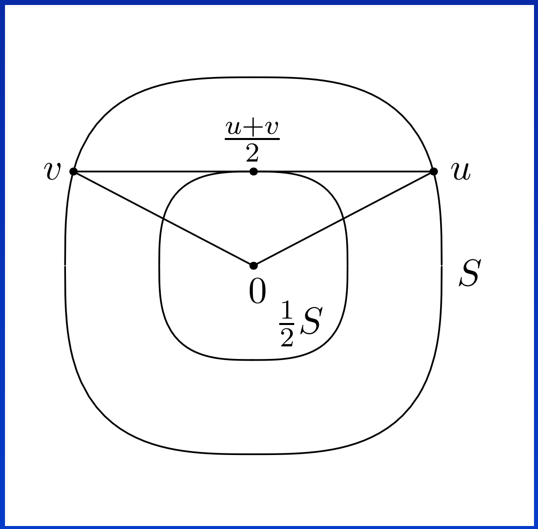
Gurarii y Sozonov (1968): X espacio normado es prehilbertiano $\Leftrightarrow$

$$u, v \in S, \inf_{\tau \in [0,1]} \|(1-\tau)u + \tau v\| = \|\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}v\|.$$



“hipótesis $(\frac{1}{2}S)$” $\Rightarrow$ basta considerar $u, v \in S$ tal que

$$\inf_{\tau\in[0,1]} \|(1-\tau)u + \tau v\| = \frac{1}{2}.$$



Medianas de Fermat-Torricelli.

Medianas de Fermat-Torricelli.

Definición: X espacio normado, $x, y, z \in X$, un punto $m \in X$ es una "mediana (de Fermat-Torricelli)" de x, y, z, si

$$\|x - m\| + \|y - m\| + \|z - m\| \leq \|x - p\| + \|y - p\| + \|z - p\|, \ (p \in X)$$

Medianas de Fermat-Torricelli.

Definición: X espacio normado, $x, y, z \in X$, un punto $m \in X$ es una "mediana (de Fermat-Torricelli)" de x, y, z, si

$$\|x - m\| + \|y - m\| + \|z - m\| \leq \|x - p\| + \|y - p\| + \|z - p\|, \ (p \in X)$$

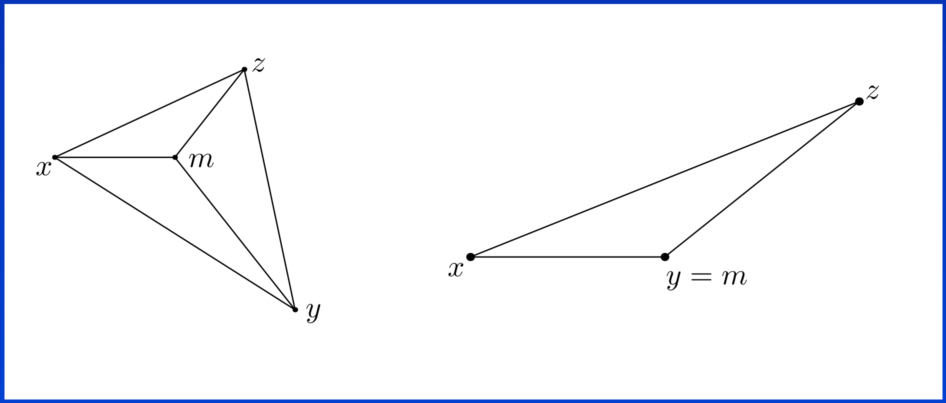
Si X es prehilbertiano,

Medianas de Fermat-Torricelli.

Definición: X espacio normado, $x, y, z \in X$, un punto $m \in X$ es una "mediana (de Fermat-Torricelli)" de x, y, z, si

$$\|x-m\|+\|y-m\|+\|z-m\| \leq \|x-p\|+\|y-p\|+\|z-p\|, \ (p \in X)$$

Si X es prehilbertiano, $\Rightarrow \forall x, y, z \in X, \exists^{\cdot} m$ y $m \in co(x, y, z)$.
(Fermat, Torricelli, Cavalieri, S XVII)

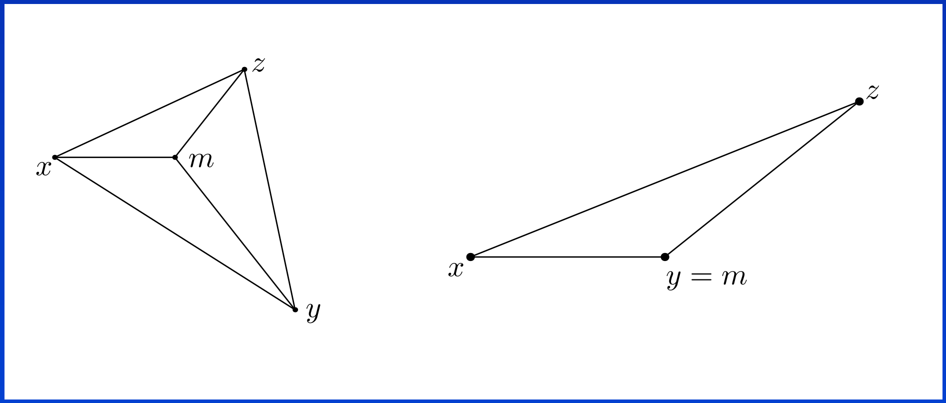


Medianas de Fermat-Torricelli.

Definición: X espacio normado, $x, y, z \in X$, un punto $m \in X$ es una "mediana (de Fermat-Torricelli)" de x, y, z, si

$$\|x-m\|+\|y-m\|+\|z-m\| \leq \|x-p\|+\|y-p\|+\|z-p\|, \ (p \in X)$$

Si X es prehilbertiano, $\Rightarrow \forall x, y, z \in X, \exists^{\cdot} m$ y $m \in co(x, y, z)$.
(Fermat, Torricelli, Cavalieri, S XVII)



Si X no es prehilbertiano, dados $x, y, z \in X$, la mediana de estos tres puntos no tiene porqué existir, ni ser única, ni estar en $co(x, y, z)$

Teorema 1: X es prehilbertiano si y sólo si verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Teorema 1: X es prehilbertiano si y sólo si verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Teorema: (Benítez, Fernández, Soriano, 2002) Sea X un espacio normado de dimensión ≥ 3, X es prehilbertiano si y sólo si, para cada $x, y, z \in X$ hay una mediana de dichos puntos en $\mathrm{co}(x, y, z)$.

Teorema 1: X es prehilbertiano si y sólo si verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Teorema: (Benítez, Fernández, Soriano, 2002) Sea X un espacio normado de dimensión ≥ 3, X es prehilbertiano si y sólo si, para cada $x, y, z \in X$ hay una mediana de dichos puntos en $\mathrm{co}(x, y, z)$.

Teorema: (Benítez, Yáñez, 2007)Un espacio normado real X liso de dimensión ≥ 3 es prehilbertiano si y sólo si, para cada $u, v, w \in S$ tales que $u + v + w = 0$, se tiene que 0 es una mediana de dichos puntos.

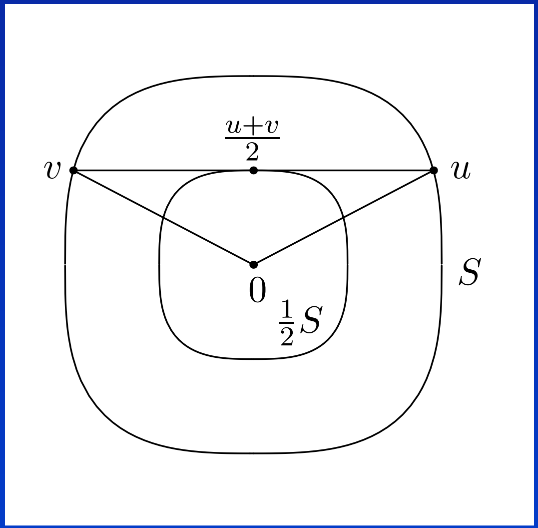
Generalización:

Generalización:

Recordemos:

Definición: Un espacio normado X (real o complejo) verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$" si:

$$u, v \in S, \inf_{\tau \in [0,1]} \|(1-\tau)u + \tau v\| = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \in \frac{1}{2}S.$$



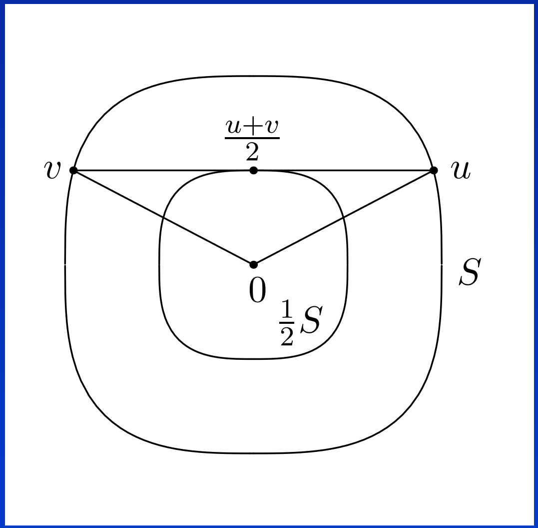
Es decir, si cualquiera que sea la cuerda con extremos en S, que soporta a $\frac{1}{2}S$, lo hace en su putno medio.

Generalización:

Recordemos:

Definición: Un espacio normado X (real o complejo) verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$" si:

$$u, v \in S, \ \inf_{\tau \in [0,1]} \|(1-\tau)u + \tau v\| = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \in \frac{1}{2}S.$$



Es decir, si cualquiera que sea la cuerda con extremos en S, que soporta a $\frac{1}{2}S$, lo hace en su putno medio.

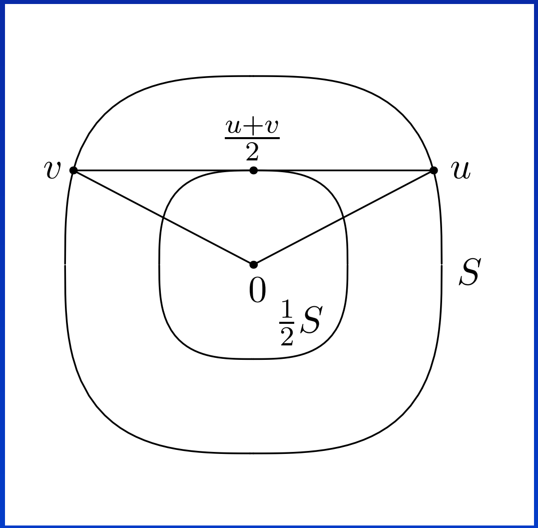
Teorema 1: X es prehilbertiano si y solo si verifica la "Hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

Generalización:

Recordemos:

Definición: Un espacio normado X (real o complejo) verifica la "hipótesis $(\frac{1}{2}S)$" si:

$$u, v \in S, \quad \inf_{\tau \in [0,1]} \|(1-\tau)u + \tau v\| = \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}v \in \tfrac{1}{2}S.$$



Es decir, si cualquiera que sea la cuerda con extremos en S, que soporta a $\frac{1}{2}S$, lo hace en su putno medio.

Teorema 1: X es prehilbertiano si y solo si verifica la "Hipótesis $(\frac{1}{2}S)$".

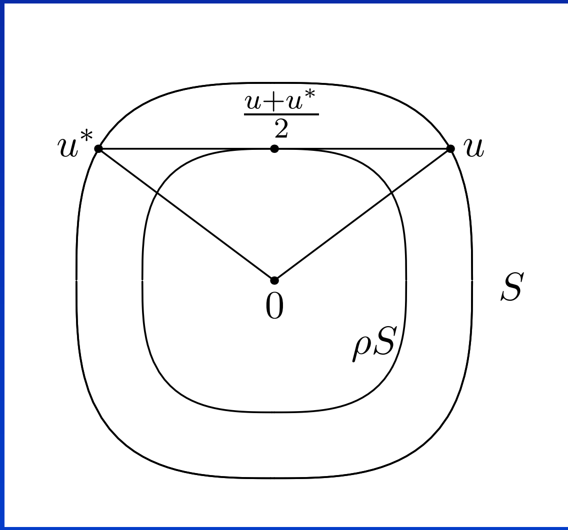
¿Será cierto para cualquier esfera homotética de radio ρ, con $0 < \rho < 1$?

La “hipótesis (ρS)”

La "hipótesis (ρS)"

Definición: Dado $0 < \rho < 1$, diremos que un espacio normado X (real o complejo), con esfera unidad S, verifica la "hipótesis (ρS)" cuando

$$u, u^* \in S, \inf_{\tau \in [0,1]} \|(1-\tau)u + \tau u^*\| = \rho \Rightarrow \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}u^* \in \rho S.$$

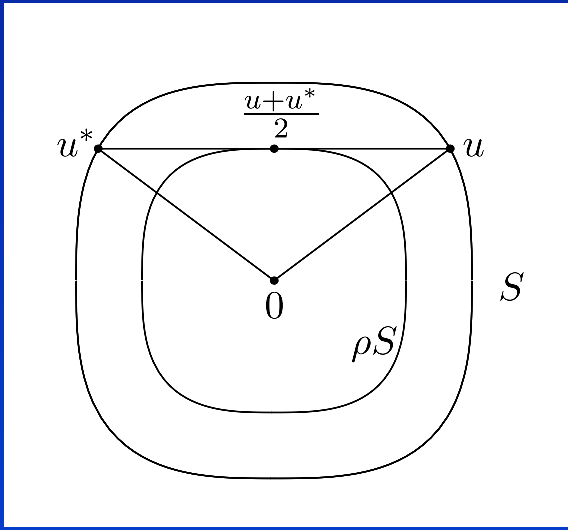


Es decir, cuando cualquiera que sea la cuerda con extremos en S, que soporta a ρS, lo hace en su punto medio.

La “hipótesis (ρS)”

Definición: Dado $0 < \rho < 1$, diremos que un espacio normado X (real o complejo), con esfera unidad S, verifica la “hipótesis (ρS)” cuando

$$u, u^* \in S, \ \inf_{\tau \in [0,1]} \|(1-\tau)u + \tau u^*\| = \rho \ \Rightarrow \ \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}u^* \in \rho S.$$



Es decir, cuando cualquiera que sea la cuerda con extremos en S, que soporta a ρS, lo hace en su punto medio.

¿“Hipótesis (ρS)” caracteriza a los espacios prehilbertianos?

ÍNDICE:

ÍNDICE:

- Generalización: la "hipótesis (ρS)".

ÍNDICE:

- Generalización: la "hipótesis (ρS)".

  * Más "herramientas":

ÍNDICE:

- Generalización: la “hipótesis (ρS)”.

  $*$Más “herramientas”:

  $\longrightarrow$ ρ-polígono asociado a un punto de la esfera.

  $\longrightarrow$ ρ-elipse asociada a un punto de la esfera.

ÍNDICE:

- Generalización: la “hipótesis (ρS)”.

  $*$Más “herramientas”:

  $\longrightarrow$ ρ-polígono asociado a un punto de la esfera.

  $\longrightarrow$ ρ-elipse asociada a un punto de la esfera.

  $*$Caso $\rho \neq \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{n})/2}, \quad (2k < n;\ n = 1,2,3,...)$.

  $*$Caso $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}, \quad (k = 1,...,m;\ m = 1,2,3,...)$.

  $*$Caso $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{k\pi}{m})/2}, \quad (k = 1,...m-1;\ m = 2,3,...)$.

ÍNDICE:

- Generalización: la "hipótesis (ρS)".

  $*$Más "herramientas":

  $\longrightarrow$$\rho$-polígono asociado a un punto de la esfera.

  $\longrightarrow$ ρ-elipse asociada a un punto de la esfera.

  $*$Caso $\rho \neq \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{n})/2}, \quad (2k < n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$.

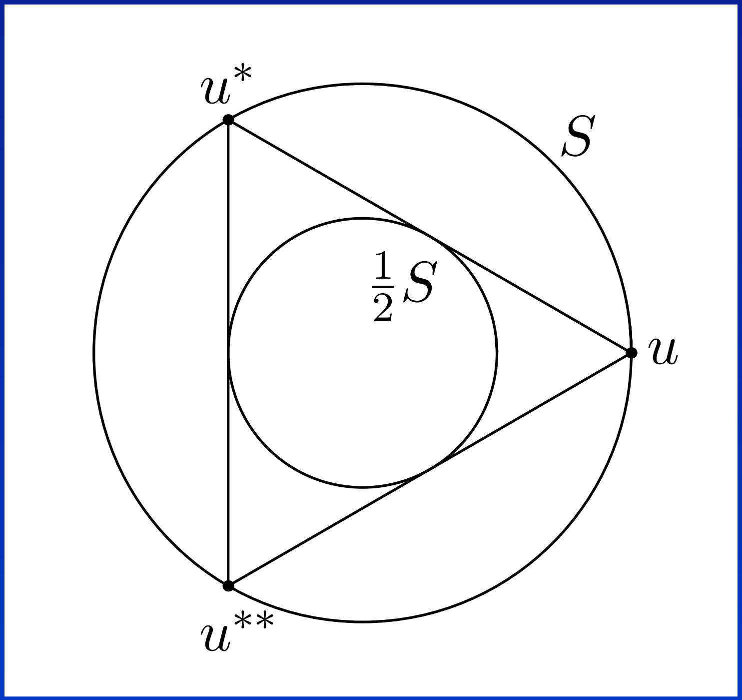
  $*$Caso $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}, \quad (k = 1, \ldots, m;\ m = 1, 2, 3, \ldots)$.

  $*$Caso $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{k\pi}{m})/2}, \quad (k = 1, \ldots m-1;\ m = 2, 3, \ldots)$.

- Conclusión.

Si X verifica la “hipótesis $(\frac{1}{2}S)$” $\Rightarrow$

Si X verifica la “hipótesis $(\frac{1}{2}S)$” $\Rightarrow$



“ρ-polígono asociado a un punto de la esfera”

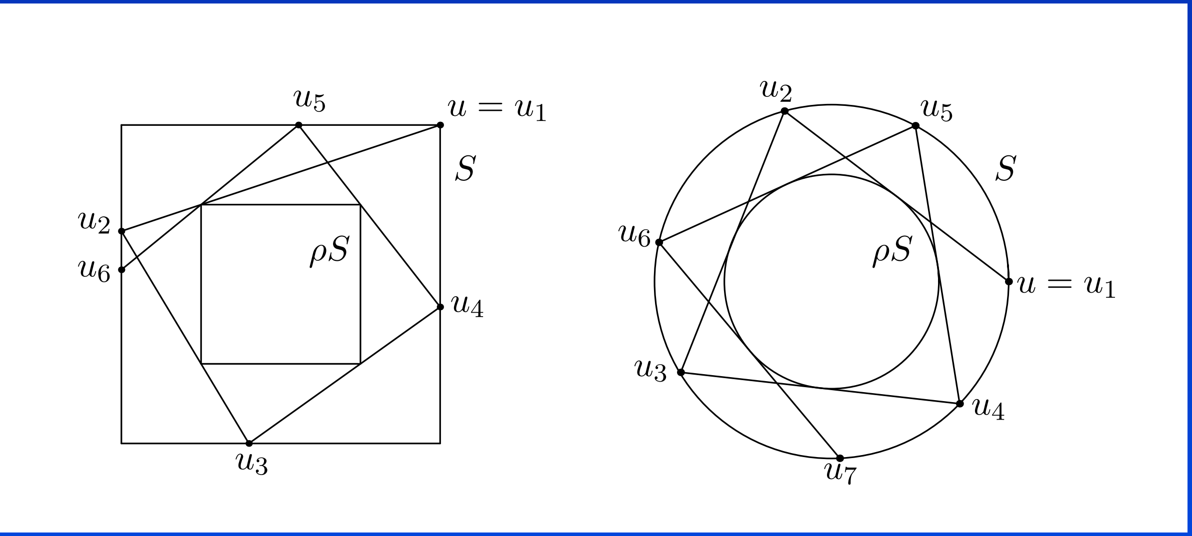
“ρ-polígono asociado a un punto de la esfera”

Sea X el espacio $\mathbb{R}^2$ dotado de una norma, S su esfera unidad , $\prec$ orientación del plano y $0 < \rho < 1$.

Definición: Dado $u \in S$, se llama ρ-polígono asociado a u a la colección $P_u = \{u_1, u_2, u_3, ...\}$ de puntos de S que se van obteniendo, a partir de $u_1 = u$, de la siguiente forma:

$$u_1 \prec u_2 \text{ y la cuerda } [u_1, u_2] \text{ soporta a } \rho S,$$

$$u_2 \prec u_3 \text{ y la cuerda } [u_2, u_3] \text{ soporta a } \rho S, \text{ etc.}$$



Este ρ-polígono puede ser:

$*$infinito

$\longrightarrow$denso en S

$\longrightarrow$no denso en S

$*$finito

$\longrightarrow$un número par de vértices

$\longrightarrow$un número impar de vértices

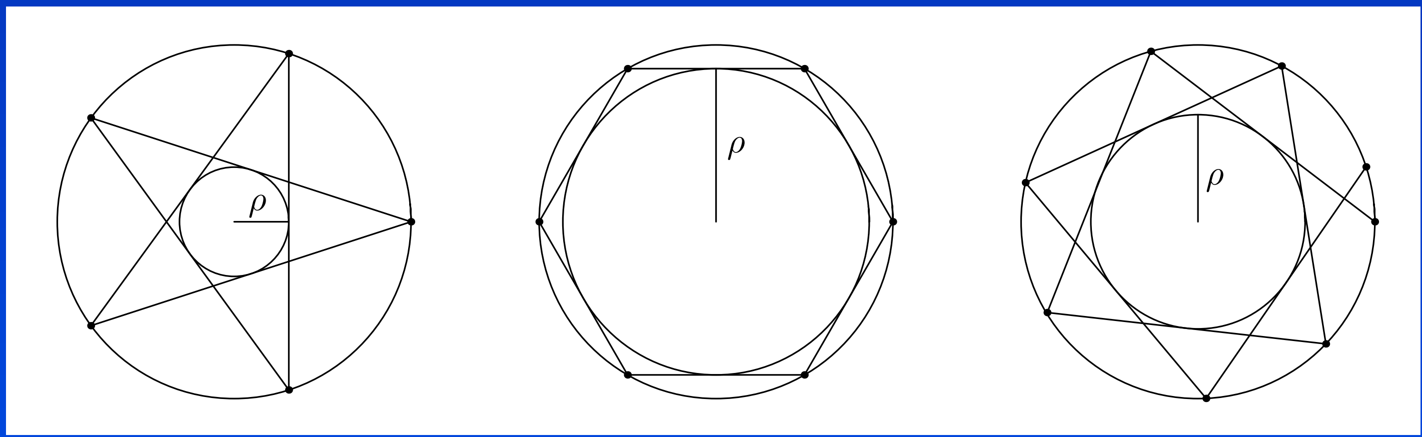
Ejemplos de ρ-polígonos:

$\star$Si $X = \ell_2(2)$, es decir, S es una circunferencia, entonces para cada $u \in S$:

Si $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}$, el ρ-polígono P_u es finito con un número impar de vértices.

Si $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{k\pi}{m})/2}$, el ρ-polígono P_u es finito y con un número par de vértices.

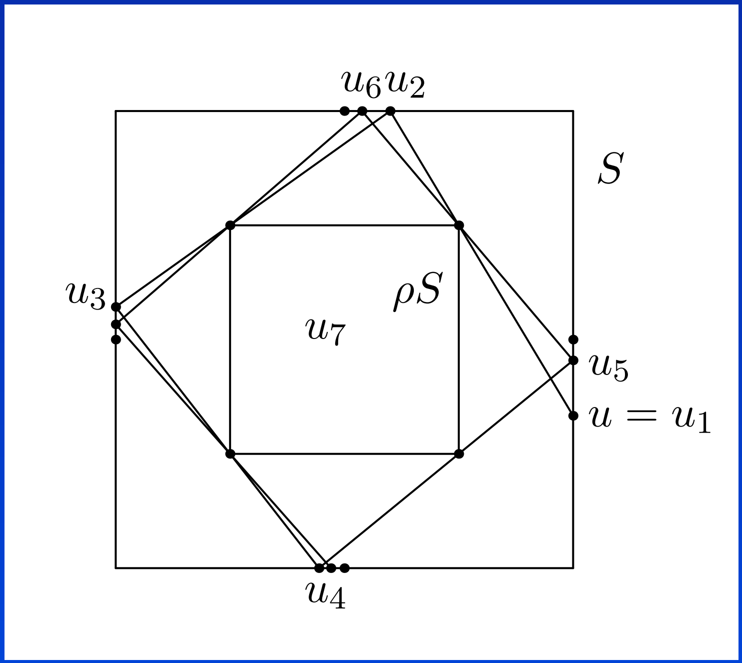
Si ρ no está en los casos anteriores, el ρ-polígono P_u es denso en S.



$\star$Si $X = \ell_\infty(2)$, es decir, S es un cuadrado, y $\rho = 1/2$, entonces:

$P_{(1,0)} = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$ es convexo con cuatro vérices.

Si $u \in S$ no es ninguno de los vértices del anterior ρ-polígono, entonces P_u tiene infinitos vértices, pero no es denso en S.



Propiedades:

Propiedades:

(i) Si P_u es denso en S para algún $u \in S$, entonces también es denso en S para todo $u \in S$.

Propiedades:

(i) Si P_u es denso en S para algún $u \in S$, entonces también es denso en S para todo $u \in S$.

(ii) Si P_u y P_v, con $u, v \in S$, son finitos entonces tienen el mismo número de puntos (vértices).

Propiedades:

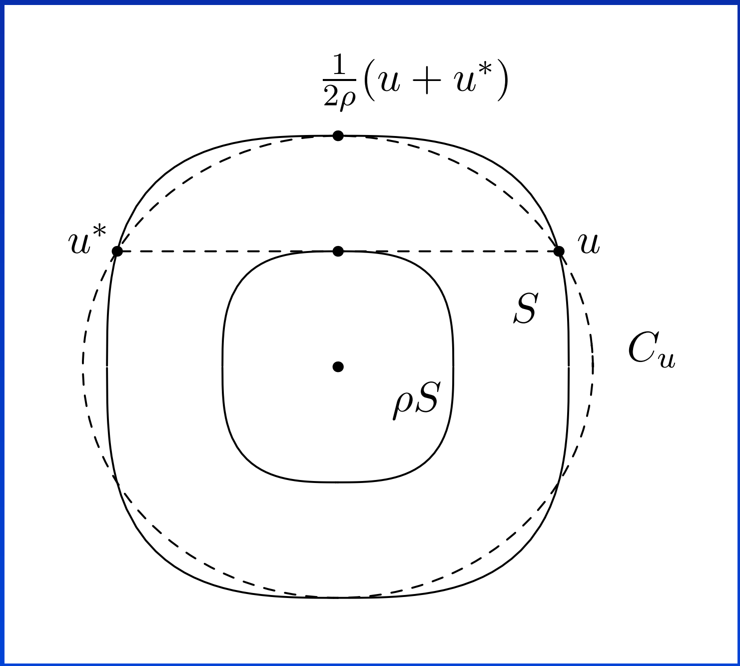
(i) Si P_u es denso en S para algún $u \in S$, entonces también es denso en S para todo $u \in S$.

(ii) Si P_u y P_v, con $u, v \in S$, son finitos entonces tienen el mismo número de puntos (vértices).

“ρ-elispse asociada a un punto de la esfera”

“ρ-elispse asociada a un punto de la esfera”

Definición: Si X verifica la “hipótesis (ρS)”. Para cada punto $u \in S$ se llama ρ-elipse asociada a u , a la elipse, C_u, centrada en 0 que pasa por los tres puntos: $u, \frac{1}{2\rho}(u+u^*), u^* \in S$.



Propiedades: Si X verifica la “hipótesis (ρS)”:

Propiedades: Si X verifica la "hipótesis (ρS)":

(i) Para cada $u \in S$, la ρ-elipse C_u es tangente a S en $\frac{1}{2\rho}(u + u^*)$.

Propiedades: Si X verifica la "hipótesis (ρS)":

(i) Para cada $u \in S$, la ρ-elipse C_u es tangente a S en $\frac{1}{2\rho}(u + u^*)$.

(ii) Existe un punto $v \in S$ tal que la ρ-elipse C_v es tangente a S en todos los puntos (vértices) $v_1, v_2, \ldots,$ del ρ-polígono P_v; es decir: $P_v \subset S \cap C_v$ y P_v es inscrito en C_v y circunstrito a ρC_v.

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, puede ser que:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, puede ser que:

$\rho \neq \sqrt{(1 + \cos\frac{2k\pi}{n})/2}, \quad (2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...)$, el ρ-polígono P_v es denso en S.

$\rho = \sqrt{(1 + \cos\frac{2k\pi}{n})/2}, \quad (2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...)$, el ρ-polígono P_v tiene un número finito de vértices,

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, puede ser que:

$\rho \neq \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{n})/2}$, $\quad (2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...)$, el ρ-polígono P_v es denso en S.

$\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{n})/2}$, $\quad (2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...)$, el ρ-polígono P_v tiene un número finito de vértices,

n par, $\quad \rho = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{k\pi}{m}}{2}}$, $\quad (k = 1, ...m;\ m = 1, 2, 3, ...)$, entonces el ρ-polígono P_v tiene un número par de vértices.

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, puede ser que:

$\rho \neq \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{n})/2}$, $\quad (2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...)$, el ρ-polígono P_v es denso en S.

$\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{n})/2}$, $\quad (2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...)$, el ρ-polígono P_v tiene un número finito de vértices,

n par, $\quad \rho = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{k\pi}{m}}{2}}$, $\quad (k = 1, ...m;\ m = 1, 2, 3, ...)$, entonces el ρ-polígono P_v tiene un número par de vértices.

n impar, $\quad \rho = \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}$, $\quad (k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...)$", el ρ-polígono P_v tiene un número impar de vértices.

Caso $\rho \neq \sqrt{\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{n}}{2}}, \quad (2k < n;\ n = 1, 2, 3, \ldots).$

Caso $\rho \neq \sqrt{\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{n}}{2}}, \quad (2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...).$

Teorema 2: Si X verifica la hipótesis (ρS), con

$$\rho \neq \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{2k\pi}{n}}{2}}, \quad (2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...),$$

entonces es prehilbertiano.

Caso $\rho \neq \sqrt{\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{n}}{2}}, \quad (2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...).$

Teorema 2: Si X verifica la hipótesis (ρS), con

$$\rho \neq \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{2k\pi}{n}}{2}}, \quad (2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...),$$

entonces es prehilbertiano.

Demostración: $P_v \subset S \cap C_v$ y P_v denso en $C_v, \Rightarrow\ S = C_v$. ∎

Caso $\rho = \sqrt{(1 + \cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}$**,** $\quad (k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...)$**”**

Caso $\rho = \sqrt{(1 + \cos \frac{2k\pi}{2m+1})/2}$, $\quad (k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...)$"

Si X verifica la "hipótesis (ρS)", hay un ρ-polígono P_v con un número impar de vértices.

Caso $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}$**,** $\quad (k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...)$**”**

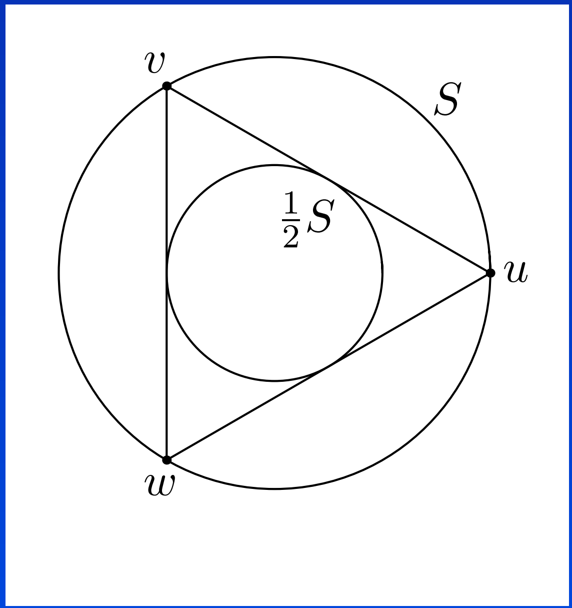
Si X verifica la “hipótesis (ρS)”, hay un ρ-polígono P_v con un número impar de vértices.

Caso particular, $\rho = \frac{1}{2}$:

Caso $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}$**,** $\quad (k=1,...,m;\ m=1,2,3,...)$**"**

Si X verifica la "hipótesis (ρS)", hay un ρ-polígono P_v con un número impar de vértices.

Caso particular, $\rho = \frac{1}{2}$:



Propiedades: Si X verifica la “hipótesis (ρS)”,

Propiedades: Si X verifica la "hipótesis (ρS)",

(i) Hay un ρ-polígono, $P_v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, con un número impar de vértices.

Propiedades: Si X verifica la "hipótesis (ρS)",

(i) Hay un ρ-polígono, $P_v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, con un número impar de vértices.

(ii) Los vértices de ese ρ-polígono P_v son tales que:

$$v_1 \wedge v_2 = ... = v_{n-1} \wedge v_n = v_n \wedge v_1,$$

$$A(B_{v_1 v_2}) = A(B_{v_2 v_3}) = \ldots = A(B_{v_n v_1}), \ldots$$

Propiedades: Si X verifica la "hipótesis (ρS)",

(i) Hay un ρ-polígono, $P_v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, con un número impar de vértices.

(ii) Los vértices de ese ρ-polígono P_v son tales que:

$$v_1 \wedge v_2 = ... = v_{n-1} \wedge v_n = v_n \wedge v_1,$$

$$A(B_{v_1 v_2}) = A(B_{v_2 v_3}) = \ldots = A(B_{v_n v_1}), \ldots$$

(iii) Todo ρ-polígono tiene el mismo número impar de vértices y todos verifican las mismas propiedades.

Propiedades: Si X verifica la "hipótesis (ρS)",

(i) Hay un ρ-polígono, $P_v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, con un número impar de vértices.

(ii) Los vértices de ese ρ-polígono P_v son tales que:

$$v_1 \wedge v_2 = ... = v_{n-1} \wedge v_n = v_n \wedge v_1,$$

$$A(B_{v_1 v_2}) = A(B_{v_2 v_3}) = \ldots = A(B_{v_n v_1}), \ldots$$

(iii) Todo ρ-polígono tiene el mismo número impar de vértices y todos verifican las mismas propiedades.

(iv) $u \in S \to u \wedge u^*$ es constante.

Propiedades: Si X verifica la "hipótesis (ρS)",

(i) Hay un ρ-polígono, $P_v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, con un número impar de vértices.

(ii) Los vértices de ese ρ-polígono P_v son tales que:

$$v_1 \wedge v_2 = ... = v_{n-1} \wedge v_n = v_n \wedge v_1,$$

$$A(B_{v_1 v_2}) = A(B_{v_2 v_3}) = \dots = A(B_{v_n v_1}), \dots$$

(iii) Todo ρ-polígono tiene el mismo número impar de vértices y todos verifican las mismas propiedades.

(iv) $u \in S \to u \wedge u^*$ es constante.

(v) $u, v \in S, u \prec v, A(B_{uv}) = A(B_{u^* v^*})$.

Teorema 3: Si X verifica la hipótesis (ρS), con

$$\rho = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{2k\pi}{2m+1}}{2}}, \quad (k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...),$$

entonces es prehilbertiano.

Teorema 3: Si X verifica la hipótesis (ρS), con

$$\rho = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{2m+1}}{2}}, \quad (k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...),$$

entonces es prehilbertiano.

Caso $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{k\pi}{m})/2}$**,** $\quad (k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...).$

Caso $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{k\pi}{m})/2}$, $\quad (k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...)$.

Propiedades: Si X verifica la hipótesis (ρS)

Caso $\rho = \sqrt{(1 + \cos\frac{k\pi}{m})/2}$, $\quad (k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...)$.

Propiedades: Si X verifica la hipótesis (ρS)

(i) Hay un ρ-polígono P_v con un número par de vértices.

Caso $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{k\pi}{m})/2}$, $\quad (k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...)$.

Propiedades: Si X verifica la hipótesis (ρS)

(i) Hay un ρ-polígono P_v con un número par de vértices.

(ii) $A(Bv_iv_{i+1})$ = constante.

Caso $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{k\pi}{m})/2}$, $\quad (k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...)$.

Propiedades: Si X verifica la hipótesis (ρS)

(i) Hay un ρ-polígono P_v con un número par de vértices.

(ii) $A(Bv_iv_{i+1}) =$ constante.

(iii) $v_i \wedge v_{i+1} =$ constante.

Caso $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{k\pi}{m})/2}$, $\quad (k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...)$.

Propiedades: Si X verifica la hipótesis (ρS)

(i) Hay un ρ-polígono P_v con un número par de vértices.

(ii) $A(Bv_i v_{i+1}) =$ constante.

(iii) $v_i \wedge v_{i+1} =$ constante.

Pero:

Los argumentos de los casos anteriores $(1/2$, denso e impar$)$ no bastan para obtener una caracterización. En concreto, no somos capaces de obtener que todos los $\rho-$polígonos tengan esas propiedades que P_v.

Caso $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{k\pi}{m})/2}$, $\quad (k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...)$.

Propiedades: Si X verifica la hipótesis (ρS)

(i) Hay un ρ-polígono P_v con un número par de vértices.

(ii) $A(Bv_iv_{i+1}) =$ constante.

(iii) $v_i \wedge v_{i+1} =$ constante.

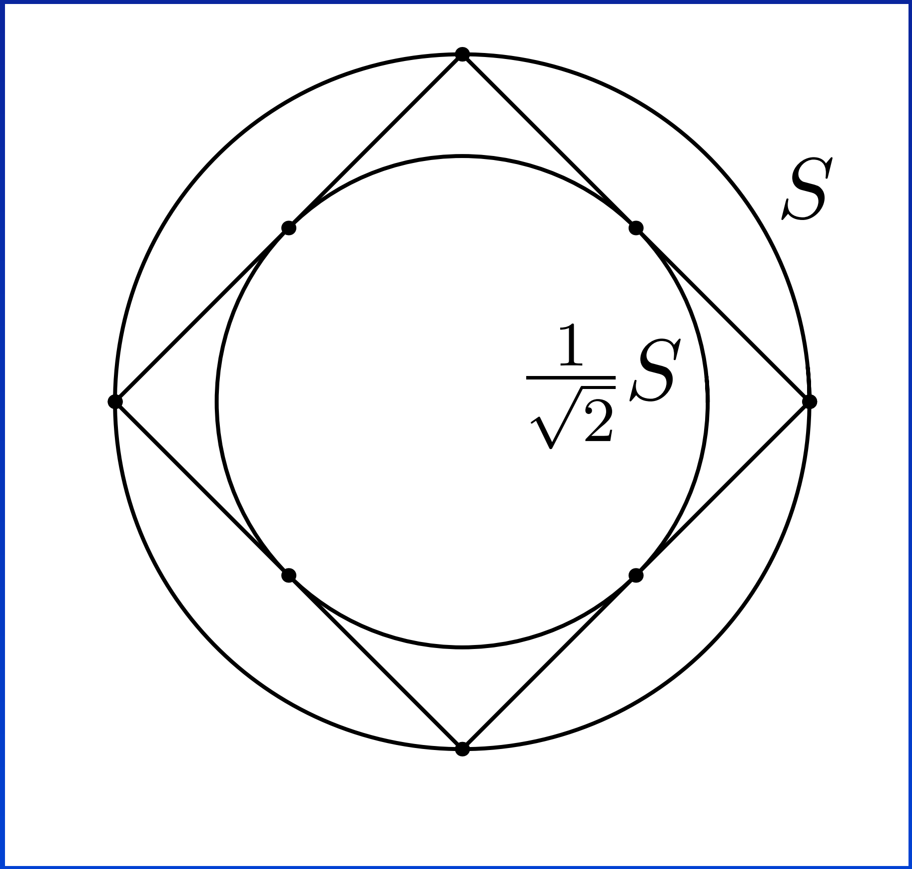
Pero:

Los argumentos de los casos anteriores (1/2, denso e impar) no bastan para obtener una caracterización. En concreto, no somos capaces de obtener que todos los $\rho-$polígonos tengan esas propiedades que P_v.

¡¡¡PROBLEMA ABIERTO!!!

Caso $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Caso $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Teorema 4: Si X verifica la hipótesis (ρS) y para cada $u_1 \in S$ existen $u_2, u_3, u_4 \in S$ tal que el cuadrilátero de esos vértices es inscrito a S y circunscrito a ρS, entonces,

(i) $u_3 = -u_1$, $u_4 = -u_2$.

(ii) $\|u_1 + u_2\| = \|u_2 + u_3\| = 2\rho$.

(iii) $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(iv) X es prehilbertiano.

Conclusión:

Conclusión:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$,

Conclusión:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, si X verifica la "hipótesis (ρS)", entonces:

Conclusión:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, si X verifica la "hipótesis (ρS)", entonces:

- si $\rho = \sqrt{(1 + \cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}$, $(k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ X es prehilbertiano

Conclusión:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, si X verifica la "hipótesis (ρS)", entonces:

- si $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}, \quad (k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...), \quad \Rightarrow \quad X$ es prehilbertiano (teorema 3).

  Caso particular: $\rho = \frac{1}{2}$(teorema 1).

Conclusión:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, si X verifica la "hipótesis (ρS)", entonces:

- si $\rho = \sqrt{(1 + \cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}$, $(k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 3).

  Caso particular: $\rho = \frac{1}{2}$(teorema 1).

- si $\rho = \sqrt{(1 + \cos\frac{k\pi}{m})/2}$, $(k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...)$,

Conclusión:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, si X verifica la "hipótesis (ρS)", entonces:

- si $\rho = \sqrt{(1 + \cos \frac{2k\pi}{2m+1})/2}$, $(k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 3).

  Caso particular: $\rho = \frac{1}{2}$(teorema 1).

- si $\rho = \sqrt{(1 + \cos \frac{k\pi}{m})/2}$, $(k = 1, ..., m - 1;\ m = 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ caso abierto.

Conclusión:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, si X verifica la "hipótesis (ρS)", entonces:

- si $\rho = \sqrt{(1 + \cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}$, $(k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 3).

  Caso particular: $\rho = \frac{1}{2}$(teorema 1).

- si $\rho = \sqrt{(1 + \cos\frac{k\pi}{m})/2}$, $(k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ caso abierto.

  Caso particular: hipótesis $(\rho S)+$ hipótesis adicional , $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 4).

Conclusión:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, si X verifica la "hipótesis (ρS)", entonces:

- si $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}, \quad (k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...), \Rightarrow X$ es prehilbertiano (teorema 3).

  Caso particular: $\rho = \frac{1}{2}$(teorema 1).

- si $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{k\pi}{m})/2}, \quad (k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...), \Rightarrow$ caso abierto.

  Caso particular: hipótesis $(\rho S)+$ hipótesis adicional , $\Rightarrow X$ es prehilbertiano (teorema 4).

- si ρ no es ninguno de los valores anteriores

Conclusión:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, si X verifica la “hipótesis (ρS)”, entonces:

- si $\rho = \sqrt{(1 + \cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}$, $(k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 3).

  Caso particular: $\rho = \frac{1}{2}$(teorema 1).

- si $\rho = \sqrt{(1 + \cos\frac{k\pi}{m})/2}$, $(k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ caso abierto.

  Caso particular: hipótesis $(\rho S)+$ hipótesis adicional , $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 4).

- si ρ no es ninguno de los valores anteriores
  $\rho \neq \sqrt{(1 + \cos\frac{2k\pi}{n})/2}$, $(2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...)$,

Conclusión:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, si X verifica la "hipótesis (ρS)", entonces:

- si $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}$, $(k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 3).

  Caso particular: $\rho = \frac{1}{2}$(teorema 1).

- si $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{k\pi}{m})/2}$, $(k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ caso abierto.

  Caso particular: hipótesis $(\rho S)+$ hipótesis adicional , $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 4).

- si ρ no es ninguno de los valores anteriores

  $\rho \neq \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{n})/2}$, $(2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ X es prehilbertiano

Conclusión:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, si X verifica la "hipótesis (ρS)", entonces:

- si $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}$, $(k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 3).

  Caso particular: $\rho = \frac{1}{2}$(teorema 1).

- si $\rho = \sqrt{(1+\cos\frac{k\pi}{m})/2}$, $(k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ caso abierto.

  Caso particular: hipótesis $(\rho S)+$ hipótesis adicional , $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 4).

- si ρ no es ninguno de los valores anteriores $\rho \neq \sqrt{(1+\cos\frac{2k\pi}{n})/2}$, $(2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 2).

Conclusión:

Fijado un valor $0 < \rho < 1$, si X verifica la "hipótesis (ρS)", entonces:

- si $\rho = \sqrt{(1 + \cos\frac{2k\pi}{2m+1})/2}$, $(k = 1, ..., m;\ m = 1, 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 3).

  Caso particular: $\rho = \frac{1}{2}$(teorema 1).

- si $\rho = \sqrt{(1 + \cos\frac{k\pi}{m})/2}$, $(k = 1, ..., m-1;\ m = 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ caso abierto.

  Caso particular: hipótesis $(\rho S)+$ hipótesis adicional , $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 4).

- si ρ no es ninguno de los valores anteriores $\rho \neq \sqrt{(1 + \cos\frac{2k\pi}{n})/2}$, $(2k < n;\ n = 1, 2, 3, ...)$, $\Rightarrow$ X es prehilbertiano (teorema 2).

Referencias:

Referencias:

C. Benítez and D. Yáñez, 'Middle points, medians, and inner products', *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), 1725–1734.

C. Benítez and D. Yáñez, 'Middle points and inner products', *Bull. London Math. Soc.* **39**, No. 5, (2007) 811-817.

D. Yáñez, 'Una caracterización bidimensional de los espacios prehilbertianos', Ph. Tesis Doctoral *Dpto Matemáticas. UEx* (2007), ISBN: $84-87042-21-1$.