Operadores estrictamente singulares en retículos de Banach

Pedro Tradacete Pérez

4 de abril de 2008

Tesis en curso dirigida por F. L. Hernández y J. Flores

Definición

Un RETÍCULO DE BANACH es un espacio de Banach ordenado $(E, \|\ \|, \leq)$ tal que:

- $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$, para cualesquiera $x, y, z \in E$,
- $ax \geq 0$, para todo $x \geq 0$ en E y todo número real $a \geq 0$.
- $\forall x, y \in E$ existe un ínfimo y un supremo de x e y, denotados respectivamente $x \wedge y, x \vee y \in E$.
- Podemos definir

$$x^+ = x \vee 0 \qquad x^- = (-x) \vee 0 \qquad |x| = x \vee (-x).$$

Se tiene que si $|x| \leq |y|$ entonces $\|x\| \leq \|y\|$.

Definición

Un retículo de Banach E es ORDEN CONTINUO (respectivamente σ-orden continuo) si todo conjunto dirigido $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ de E con $\bigwedge_{\alpha\in A} x_\alpha = 0$ (resp. sucesión decreciente) verifica $\lim_{\alpha\in A} \|x_\alpha\| = 0$.

Definición

Un retículo de Banach E es ORDEN CONTINUO (respectivamente σ-orden continuo) si todo conjunto dirigido $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ de E con $\bigwedge_{\alpha \in A} x_\alpha = 0$ (resp. sucesión decreciente) verifica $\lim_{\alpha \in A} \|x_\alpha\| = 0$.

Definición

Diremos que un operador $T : E \to F$ entre retículos de Banach es POSITIVO si $Tx \geq 0$ para todo $x \geq 0$.
Dados dos operadores $R, T : E \to F$ diremos que T mayora a R y escribiremos $R \leq T$ cuando $T - R$ sea positivo.

Problema de mayoración

Sean $0 \leq R \leq T : E \to F$ operadores entre retículos de Banach E y F. ¿Bajo qué condiciones en E y en F tendremos que si T verifica la propiedad $\mathcal{P}$, R también verifica $\mathcal{P}$?

Teorema (Dodds-Fremlin 1979)

Sean E, F retículos de Banach con E^* y F orden continuos. Si $0 \leq R \leq T : E \to F$ son dos operadores tales que T es compacto, entonces R es compacto.

Teorema (Dodds-Fremlin 1979)

Sean E, F retículos de Banach con E^* y F orden continuos. Si $0 \leq R \leq T : E \to F$ son dos operadores tales que T es compacto, entonces R es compacto.

Teorema (Wickstead 1981)

Sean E, F retículos de Banach con E^* o F orden continuo. Si $0 \leq R \leq T : E \to F$ son dos operadores tales que T es débilmente compacto, entonces R es débilmente compacto.

Teorema (Dodds-Fremlin 1979)

Sean E, F retículos de Banach con E^* y F orden continuos. Si $0 \leq R \leq T : E \to F$ son dos operadores tales que T es compacto, entonces R es compacto.

Teorema (Wickstead 1981)

Sean E, F retículos de Banach con E^* o F orden continuo. Si $0 \leq R \leq T : E \to F$ son dos operadores tales que T es débilmente compacto, entonces R es débilmente compacto.

Teorema (Kalton-Saab 1985)

Sean E, F retículos de Banach con F orden continuo. Si $0 \leq R \leq T : E \to F$ son dos operadores tales que T es Dunford-Pettis, entonces R es Dunford-Pettis.

Problema de la potencia

Sean $0 \leq R \leq T : E \to E$, con E retículo de Banach. Si T verifica $\mathcal{P}$, ¿existe $n \in \mathbb{N}$ tal que R^n verifique $\mathcal{P}$?

Teorema (Aliprantis-Burkinshaw 1980)

Sea E retículo de Banach. Si $0 \leq R \leq T : E \to E$ son dos operadores tales que T es compacto, entonces R^3 es compacto.

Teorema (Aliprantis-Burkinshaw 1980)

Sea E retículo de Banach. Si $0 \leq R \leq T : E \to E$ son dos operadores tales que T es compacto, entonces R^3 es compacto.

Teorema (Aliprantis-Burkinshaw 1981)

Sea E retículo de Banach. Si $0 \leq R \leq T : E \to E$ son dos operadores tales que T es débilmente compacto, entonces R^2 es débilmente compacto.

Teorema (Aliprantis-Burkinshaw 1980)

Sea E retículo de Banach. Si $0 \leq R \leq T : E \to E$ son dos operadores tales que T es compacto, entonces R^3 es compacto.

Teorema (Aliprantis-Burkinshaw 1981)

Sea E retículo de Banach. Si $0 \leq R \leq T : E \to E$ son dos operadores tales que T es débilmente compacto, entonces R^2 es débilmente compacto.

Teorema (Kalton-Saab 1985)

Sea E retículo de Banach. Si $0 \leq R \leq T : E \to E$ son dos operadores tales que T es Dunford-Pettis, entonces R^2 es Dunford-Pettis.

Definición

Un operador $T : E \to F$ entre espacios de Banach es ESTRICTAMENTE SINGULAR (SS) si no es un isomorfismo al restringirlo a ningún subespacio de dimensión infinita de E.

Definición

Un operador $T : E \to F$ entre espacios de Banach es ESTRICTAMENTE SINGULAR (SS) si no es un isomorfismo al restringirlo a ningún subespacio de dimensión infinita de E.

Teorema (Flores-Hernández-T.)

Sean E, F retículos de Banach tales que E satisface la propiedad de la división subsecuencial, E y F son orden continuos. Si $0 \leq R \leq T : E \to F$ son dos operadores tales que T es SS, entonces R es SS.

Definición

Un operador $T : E \to F$ entre espacios de Banach es ESTRICTAMENTE SINGULAR (SS) si no es un isomorfismo al restringirlo a ningún subespacio de dimensión infinita de E.

Teorema (Flores-Hernández-T.)

Sean E, F retículos de Banach tales que E satisface la propiedad de la división subsecuencial, E y F son orden continuos. Si $0 \leq R \leq T : E \to F$ son dos operadores tales que T es SS, entonces R es SS.

Teorema (Flores-Hernández-T.)

Sea E retículo de Banach. Si $0 \leq R \leq T : E \to E$ son dos operadores tales que T es SS, entonces R^4 es SS.
Si E es orden continuo, entonces en las mismas condiciones se tiene que R^2 es SS.

Ejemplo

Existen operadores $0 \leq R \leq T : L_1(0,1) \to \ell_\infty$, siendo T estrictamente singular y R un isomorfismo.

Ejemplo

Existen operadores $0 \leq R \leq T : L_1(0,1) \to \ell_\infty$, siendo T estrictamente singular y R un isomorfismo.

En efecto, definimos $T(f) = (\int f, \int f, \ldots)$.
Para definir R, consideramos una sucesión (f_n) densa en $L_1(0,1)_+$ y funcionales $g_n \in L_1(0,1)^* = L_\infty(0,1)$ positivos y de norma menor o igual que uno, tales que

$$\|f_n\| = \int g_n f_n.$$

Definimos $R(f) = (\int g_1 f, \int g_2 f, \ldots)$.

Definición

Decimos que un operador entre retículos de Banach $T : E \to F$ es ORDEN DÉBILMENTE COMPACTO si para todo $x \in E_+$, $T[-x, x]$ es relativamente débilmente compacto en F.

Definición

Decimos que un operador entre retículos de Banach $T : E \to F$ es ORDEN DÉBILMENTE COMPACTO si para todo $x \in E_+$, $T[-x, x]$ es relativamente débilmente compacto en F.

Teorema (Ghoussoub-Johnson 1987)

Sean E_1, E_2 retículos de Banach y $T : E_1 \to E_2$ un operador positivo, entonces existen retículos de Banach F y G, y factorizaciones:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\phi^F"'] & & E_2 \\ & F \arrow[ur, "T^F"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T^G"'] & & E_2 \\ & G \arrow[ur, "\psi^G"'] & \end{tikzcd}$$

Tales que ϕ^F y ψ^G son homomorfismos reticulares, y se tiene:

Teorema (continuación)

1. $T : E_1 \to E_2$ es orden débilmente compacto si y sólo si F tiene norma orden continua.
2. $T^* : E_2^* \to E_1^*$ es orden débilmente compacto si y sólo si G^* tiene norma orden continua.

Además, en las mismas condiciones, si $0 \leq R \leq T$ entonces R también factoriza por F y por G:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "\phi^F"'] & & E_2 \\ & F \arrow[ur, "R^F"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "R^G"'] & & E_2 \\ & G \arrow[ur, "\psi^G"'] & \end{tikzcd}$$

Siendo $0 \leq R^F \leq T^F$ y $0 \leq R^G \leq T^G$.

Teorema (Figiel-Johnson-Tzafriri 1975)

Sea E un retículo de Banach orden continuo separable ($j : E \hookrightarrow L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$). Sea $X \subset E$ un subespacio. Entonces se tiene que:

1. existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ y otra sucesión disjunta $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ tales que $\|z_n - x_n\| \to 0$;
2. o bien X es un subespacio cerrado en $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ($j|_X$ es invertible).

Definición

Dados un retículo de Banach E y un espacio de Banach X, un operador $T : E \to X$ es DISJUNTAMENTE ESTRICTAMENTE SINGULAR (DSS) si no es un isomorfismo al restringirlo a ningún subespacio generado por una sucesión de vectores disjuntos de E.

Definición

Dados un retículo de Banach E y un espacio de Banach X, un operador $T : E \to X$ es DISJUNTAMENTE ESTRICTAMENTE SINGULAR (DSS) si no es un isomorfismo al restringirlo a ningún subespacio generado por una sucesión de vectores disjuntos de E.

Teorema (Flores-Hernández 2001)

Sean E, F retículos de Banach con F orden continuo. Si $0 \leq R \leq T : E \to F$ son operadores tales que T es DSS, entonces R es DSS.

Lema

Sea E un retículo de Banach y sean $0 \leq R \leq T : E \to L^1(\mu)$. Si T es SS, entonces R también es SS.

Lema

Sea E un retículo de Banach y sean $0 \leq R \leq T : E \to L^1(\mu)$. Si T es SS, entonces R también es SS.

Teorema

Consideramos los siguientes operadores entre retículos de Banach:

$$E_1 \xrightarrow{T_1} E_2 \xrightarrow{T_2} E_3 \xrightarrow{T_3} E_4 \xrightarrow{T_4} E_5$$

$$E_1 \xrightarrow{R_1} E_2 \xrightarrow{R_2} E_3 \xrightarrow{R_3} E_4 \xrightarrow{R_4} E_5$$

Con $0 \leq R_i \leq T_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Si T_1 y T_3 son estrictamente singulares, T_2 y T_4 son orden débilmente compactos, entonces la composición $R_4 R_3 R_2 R_1$ es estrictamente singular.

Teorema (Flores-Hernández-T.)

Sea E retículo de Banach. Si $0 \leq R \leq T : E \to E$ son dos operadores tales que T es SS, entonces R^4 es SS.
Si E es orden continuo, entonces en las mismas condiciones se tiene que R^2 es SS.

Un operador $T : X \to X$ tiene un subespacio invariante si existe un subespacio cerrado $M \subset X$ distinto de $\{0\}$ y X, tal que $T(M) \subseteq M$.

Teorema (Lomonosov 1973)

Todo operador compacto no nulo en un espacio de Banach (real o complejo) de dimensión infinita tiene un subespacio hiperinvariante no trivial.

Teorema (Lomonosov 1973)

Todo operador compacto no nulo en un espacio de Banach (real o complejo) de dimensión infinita tiene un subespacio hiperinvariante no trivial.

Teorema (Lomonosov 1973)

Sea $T : X \to X$ un operador en un espacio de Banach complejo tal que existe un operador $S : X \to X$ que satisface:

- S no es un múltiplo de la identidad,
- S conmuta con T,
- S conmuta con un operador compacto no nulo.

Entonces T tiene un subespacio invariante no trivial.

Conjetura

Todo operador positivo en un retículo de Banach de dimensión mayor que dos posee un subespacio invariante (cerrado) no trivial.

Conjetura

Todo operador positivo en un retículo de Banach de dimensión mayor que dos posee un subespacio invariante (cerrado) no trivial.

La conjetura ha sido demostrada para ciertas clases de operadores positivos:

- Operadores en $C(K)$.
- Operadores quasi-nilpotentes en ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$.

Teorema (Abramovich-Aliprantis-Burkinshaw 1994)

Sea $0 \leq T : E \to E$ un operador positivo en un retículo de Banach tal que existe un operador positivo $S : E \to E$ que verifica:

- $ST \geq TS$,
- S es quasinilpotente,
- S domina a un operador AM-compacto no nulo.

Entonces existe un ideal no trivial $\mathcal{I}$ de E con $T(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.

Teorema (Abramovich-Aliprantis-Burkinshaw 1994)

Sea $0 \leq T : E \to E$ un operador positivo en un retículo de Banach tal que existe un operador positivo $S : E \to E$ que verifica:

- $ST \geq TS$,
- S es quasinilpotente,
- S domina a un operador AM-compacto no nulo.

Entonces existe un ideal no trivial $\mathcal{I}$ de E con $T(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.

Teorema (Atzmon-Godefroy-Kalton 2004)

Sea $T : E \to E$ un operador positivo en un retículo de Banach. Si existen $\alpha > 0$ y $x \in E$ tales que $\|P(T)(x)\| \geq \alpha \|P(T)\|$ para todo polinomio P con coeficientes positivos, entonces T tiene un subespacio invariante cerrado no trivial.

Teorema (Read 1999)

Existen operadores estrictamente singulares sin subespacios invariantes no triviales.

Teorema (Read 1999)

Existen operadores estrictamente singulares sin subespacios invariantes no triviales.

Teorema (Flores- T. - Troitsky)

Sea E un retículo de Banach con cotipo no trivial. Todo operador estrictamente singular positivo $T : E \to E$ tiene un subespacio invariante no trivial.

Lema

Sea E un retículo de Banach orden continuo separable y $0 \leq T : E \to E$.

$$\begin{tikzcd} L_1(\mu) \arrow[r, "\widetilde{T}"] & L_1(\mu) \\ E \arrow[u, hook] \arrow[r, "T"] & E \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

T es AM-compacto $\Leftrightarrow$ $\widetilde{T}$ es Dunford-Pettis.

Lema

Sea E un retículo de Banach separable con cotipo no trivial. Sea $(f_n) \subset E$ una sucesión que verifica $|f_n| \leq K$ para cierta constante $K < \infty$, y tal que (f_n) es equivalente a la base canónica de ℓ_2 para la norma de $L_1(\mu)$. Entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) que es equivalente a la base canónica de ℓ_2 para la norma de E.

Lema

Sea E un retículo de Banach separable con cotipo no trivial. Sea $(f_n) \subset E$ una sucesión que verifica $|f_n| \leq K$ para cierta constante $K < \infty$, y tal que (f_n) es equivalente a la base canónica de ℓ_2 para la norma de $L_1(\mu)$. Entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) que es equivalente a la base canónica de ℓ_2 para la norma de E.

Teorema

Sea E un retículo de Banach separable con cotipo no trivial. Si $0 \leq T : E \to E$ no es invertible en ningún subespacio isomorfo a ℓ_2, entonces T es AM-compacto.

Operadores estrictamente singulares en retículos de Banach

Pedro Tradacete Pérez

4 de abril de 2008

Tesis en curso dirigida por F. L. Hernández y J. Flores