Quermassintegrales: desigualdades funcionales y diferenciabilidad

E. Saorín Gómez

(Parte I: Trabajo conjunto con M. A. Hernández Cifre)

(Parte II: Trabajo conjunto con A. Colesanti)

Universidad de Murcia

Salobreña, Abril 2008

Notación

- $\mathcal{K}^n$ = cuerpos convexos (conjuntos convexos compactos) en $\mathbb{R}^n$,

Notación

- $\mathcal{K}^n$ = cuerpos convexos (conjuntos convexos compactos) en $\mathbb{R}^n$,
- K = cuerpo convexo arbitrario,

Notación

- $\mathcal{K}^n$ = cuerpos convexos (conjuntos convexos compactos) en $\mathbb{R}^n$,
- K = cuerpo convexo arbitrario, B^n = bola euclídea unidad,

Notación

- $\mathcal{K}^n$ = cuerpos convexos (conjuntos convexos compactos) en $\mathbb{R}^n$,
- K = cuerpo convexo arbitrario, B^n = bola euclídea unidad,
- $\mathrm{V}(K)$ = volumen (medida de Lebesgue) de K,

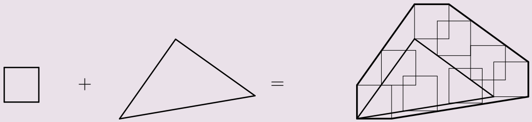
Notación

- $\mathcal{K}^n$ = cuerpos convexos (conjuntos convexos compactos) en $\mathbb{R}^n$,
- K = cuerpo convexo arbitrario, B^n = bola euclídea unidad,
- $\mathrm{V}(K)$ = volumen (medida de Lebesgue) de K,
- $\mathcal{H}^k$ = medida de Hausdorff k-dimensional,

Notación

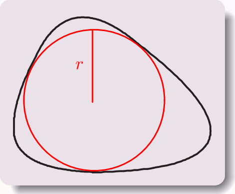
- $\mathcal{K}^n$ = cuerpos convexos (conjuntos convexos compactos) en $\mathbb{R}^n$,
- K = cuerpo convexo arbitrario, B^n = bola euclídea unidad,
- $\mathrm{V}(K)$ = volumen (medida de Lebesgue) de K,
- $\mathcal{H}^k$ = medida de Hausdorff k-dimensional,
- $+$ = suma de Minkowski (vectorial),

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b\in B}(A + b)$$



Notación

- $\mathcal{K}^n$ = cuerpos convexos (conjuntos convexos compactos) en $\mathbb{R}^n$,
- K = cuerpo convexo arbitrario, B^n = bola euclídea unidad,
- $\mathrm{V}(K)$ = volumen (medida de Lebesgue) de K,
- $\mathcal{H}^k$ = medida de Hausdorff k-dimensional,
- $+$ = suma de Minkowski (vectorial),
- $\mathrm{r}(K)$ = inradio de K,



Notación

- $\mathcal{K}^n$ = cuerpos convexos (conjuntos convexos compactos) en $\mathbb{R}^n$,
- K = cuerpo convexo arbitrario, B^n = bola euclídea unidad,
- $\mathrm{V}(K)$ = volumen (medida de Lebesgue) de K,
- $\mathcal{H}^k$ = medida de Hausdorff k-dimensional,
- $+$ = suma de Minkowski (vectorial),
- $\mathrm{r}(K)$ = inradio de K,
- Cada $K \in \mathcal{K}^n$ se puede identificar con su *función soporte* h_K.

$$h_K : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h_K(u) = \sup\big\{\langle x, u\rangle : x \in K\big\}$$

Quermassintegrales: diferenciabilidad

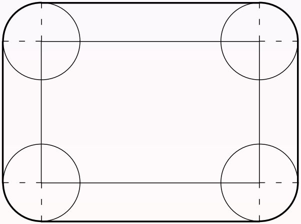
Trabajo conjunto con M. A. Hernández Cifre

(Universidad de Murcia)

El cuerpo paralelo exterior

El cuerpo paralelo exterior

$$\left.\begin{array}{l} K \in \mathcal{K}^n \\ \rho \geq 0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow K + \rho B^n = \textit{cuerpo paralelo exterior} \text{ de } K \text{ a distancia } \rho.$$

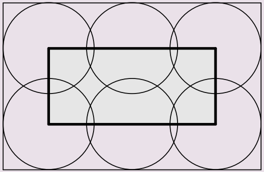


El cuerpo paralelo interior

El cuerpo paralelo interior

$$\left.\begin{array}{l} K \text{ cuerpo convexo} \\ 0 \leq \rho \leq \mathrm{r}(K) \end{array}\right\} \rightsquigarrow K \sim \rho B^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \rho B^n + x \subset K\right\}$$

$K \sim \rho B^n =$ *cuerpo paralelo interior* de K a distancia ρ.

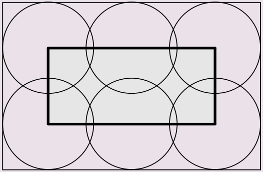


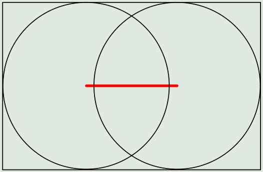
El cuerpo paralelo interior

El cuerpo paralelo interior

$$\left.\begin{array}{l} K \text{ cuerpo convexo} \\ 0 \leq \rho \leq \mathrm{r}(K) \end{array}\right\} \rightsquigarrow K \sim \rho B^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \rho B^n + x \subset K\right\}$$

$K \sim \rho B^n =$ *cuerpo paralelo interior* de K a distancia ρ.





Si $\rho = \mathrm{r}(K) \rightsquigarrow \mathrm{ker}(K) = \left\{\text{incentros de } K\right\}$.

El sistema completo de cuerpos paralelos

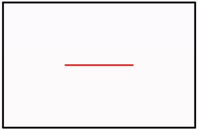
El sistema completo de cuerpos paralelos de K

$$K_\rho := \begin{cases} K \sim (-\rho)B^n & \text{para } -\mathrm{r}(K) \leq \rho \leq 0, \\ K + \rho B^n & \text{para } 0 \leq \rho < \infty. \end{cases}$$

El sistema completo de cuerpos paralelos

El sistema completo de cuerpos paralelos de K

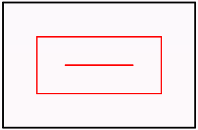
$$K_\rho := \begin{cases} K \sim (-\rho)B^n & \text{para } -\mathrm{r}(K) \leq \rho \leq 0, \\ K + \rho B^n & \text{para } 0 \leq \rho < \infty. \end{cases}$$



El sistema completo de cuerpos paralelos

El sistema completo de cuerpos paralelos de K

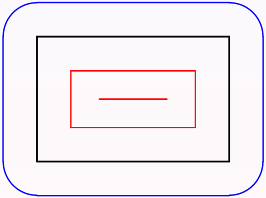
$$K_\rho := \begin{cases} K \sim (-\rho)B^n & \text{para } -\mathrm{r}(K) \leq \rho \leq 0, \\ K + \rho B^n & \text{para } 0 \leq \rho < \infty. \end{cases}$$



El sistema completo de cuerpos paralelos

El sistema completo de cuerpos paralelos de K

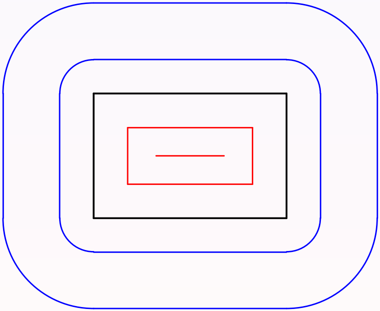
$$K_\rho := \begin{cases} K \sim (-\rho)B^n & \text{para } -\mathrm{r}(K) \leq \rho \leq 0, \\ K + \rho B^n & \text{para } 0 \leq \rho < \infty. \end{cases}$$



El sistema completo de cuerpos paralelos

El sistema completo de cuerpos paralelos de K

$$K_\rho := \begin{cases} K \sim (-\rho)B^n & \text{para } -\mathrm{r}(K) \leq \rho \leq 0, \\ K + \rho B^n & \text{para } 0 \leq \rho < \infty. \end{cases}$$



El polinomio de Steiner

El volumen del cuerpo paralelo exterior puede calcularse como:

Teorema (la fórmula de Steiner, 1840)

El volumen del cuerpo paralelo exterior de K a distancia $\rho \geq 0$, $K_\rho = K + \rho B^n$, se expresa como un polinomio de grado n (la dimensión) en el parámetro ρ, llamado **polinomio de Steiner**:

$$\mathrm{V}(K_\rho) = \mathrm{V}(K + \rho B^n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathrm{W}_i(K)\rho^i.$$

Sus coeficientes, salvo constantes, son las **quermassintegrales** del cuerpo K, $\mathrm{W}_i(K)$, para $0 \leq i \leq n$.

El polinomio de Steiner

El volumen del cuerpo paralelo exterior puede calcularse como:

Teorema (la fórmula de Steiner, 1840)

El volumen del cuerpo paralelo exterior de K a distancia $\rho \geq 0$, $K_\rho = K + \rho B^n$, se expresa como un polinomio de grado n (la dimensión) en el parámetro ρ, llamado **polinomio de Steiner**:

$$\mathrm{V}(K_\rho) = \mathrm{V}(K + \rho B^n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathrm{W}_i(K)\rho^i.$$

Sus coeficientes, salvo constantes, son las **quermassintegrales** del cuerpo K, $\mathrm{W}_i(K)$, para $0 \leq i \leq n$.

- $\mathrm{W}_0(K) = \mathrm{V}(K), \quad \mathrm{W}_n(K) = \mathrm{V}(B^n)$

El polinomio de Steiner

El volumen del cuerpo paralelo exterior puede calcularse como:

Teorema (la fórmula de Steiner, 1840)

El volumen del cuerpo paralelo exterior de K a distancia $\rho \geq 0$, $K_\rho = K + \rho B^n$, se expresa como un polinomio de grado n (la dimensión) en el parámetro ρ, llamado **polinomio de Steiner**:

$$\mathrm{V}(K_\rho) = \mathrm{V}(K + \rho B^n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathrm{W}_i(K)\rho^i.$$

Sus coeficientes, salvo constantes, son las **quermassintegrales** del cuerpo K, $\mathrm{W}_i(K)$, para $0 \leq i \leq n$.

- $\mathrm{W}_0(K) = \mathrm{V}(K), \quad \mathrm{W}_n(K) = \mathrm{V}(B^n)$
- Existen fórmulas análogas para las quermassintegrales $\mathrm{W}_i(K + \rho B^n)$

El polinomio de Steiner

Sin embargo...

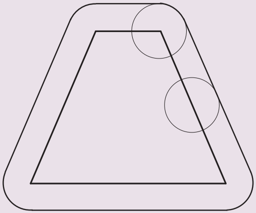
es **imposible** obtener una **fórmula explícita** para el volumen (quermassintegrales) del cuerpo paralelo interior.

El polinomio de Steiner

Sin embargo...

es **imposible** obtener una **fórmula explícita** para el volumen (quermassintegrales) del cuerpo paralelo interior.

Al contrario que en el caso de los paralelos exteriores,

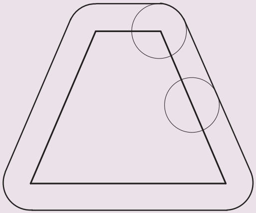


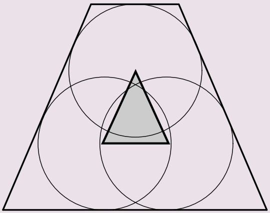
El polinomio de Steiner

Sin embargo...

es **imposible** obtener una **fórmula explícita** para el volumen (quermassintegrales) del cuerpo paralelo interior.

Al contrario que en el caso de los paralelos exteriores, no existe una regla que controle el comportamiento de los cuerpos paralelos interiores.



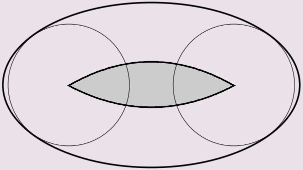


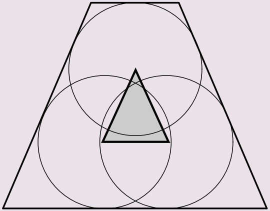
El polinomio de Steiner

Sin embargo...

es **imposible** obtener una **fórmula explícita** para el volumen (quermassintegrales) del cuerpo paralelo interior.

Al contrario que en el caso de los paralelos exteriores, no existe una regla que controle el comportamiento de los cuerpos paralelos interiores.



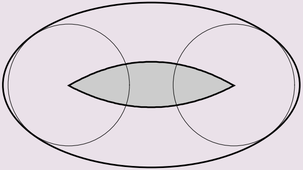


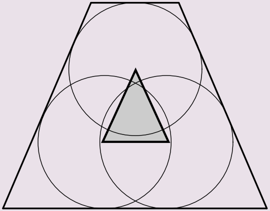
El polinomio de Steiner

Sin embargo...

es **imposible** obtener una **fórmula explícita** para el volumen (quermassintegrales) del cuerpo paralelo interior.

Al contrario que en el caso de los paralelos exteriores, no existe una regla que controle el comportamiento de los cuerpos paralelos interiores.





- Búsqueda de propiedades del funcional $\mathrm{W}_i(\rho) := \mathrm{W}_i(K_\rho)$, ya que éste no se puede conocer explícitamente.

Volúmenes mixtos

La fórmula de Steiner es un caso particular del siguiente resultado:

Volúmenes mixtos

Sean $K_1, K_2, \dots, K_m$ cuerpos convexos en $\mathbb{R}^n$ y $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$. El volumen de $\sum_{i=1}^m \lambda_i K_i$ se puede expresar como

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i K_i\right) = \sum_{i_1=1}^m \cdots \sum_{i_n=1}^m \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n} \mathrm{V}(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$$

Los coeficientes $\mathrm{V}(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$, así definidos, son los volúmenes mixtos, y son simétricos en los índices para cualquier permutación.

Volúmenes mixtos

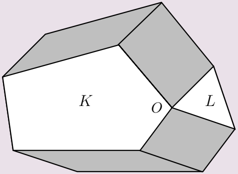
- $\mathrm{W}_i(K) = \mathrm{V}\big(K[n-i], B^n[i]\big)$.

Volúmenes mixtos

- $\mathrm{W}_i(K) = \mathrm{V}\big(K[n-i], B^n[i]\big)$.
- $\mathrm{V}(K, \ldots, K) = \mathrm{V}\big(K[n]\big) = \mathrm{V}(K)$.

Volúmenes mixtos

- $\mathrm{W}_i(K) = \mathrm{V}\big(K[n-i], B^n[i]\big)$.
- $\mathrm{V}(K, \dots, K) = \mathrm{V}\big(K[n]\big) = \mathrm{V}(K)$.

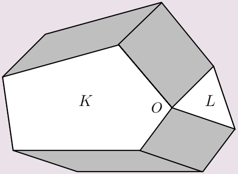


$$V(K+L) = 2V(K,L) + V(K) + V(L)$$

$$V(K,L) = \frac{1}{2}\left[V(K+L) - V(K) - V(L)\right]$$

Volúmenes mixtos

- $\mathrm{W}_i(K) = \mathrm{V}\big(K[n-i], B^n[i]\big)$.
- $\mathrm{V}(K,\dots,K) = \mathrm{V}\big(K[n]\big) = \mathrm{V}(K)$.



$$V(K+L) = 2V(K,L) + V(K) + V(L)$$

$$V(K,L) = \frac{1}{2}\big[V(K+L) - V(K) - V(L)\big]$$

- En general,

$$\mathrm{V}(K_1,\dots,K_n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\mathrm{V}(K_{i_1}+K_{i_2}+\cdots+K_{i_k}).$$

Medidas de área

Existencia

Fijados $n-1$ cuerpos convexos $K_2, \ldots, K_n$, existe una única medida de Borel no negativa $\mathrm{S}(K_2, \ldots, K_n; \cdot)$ (llamada *medida de área mixta*) tal que, para cada cuerpo convexo K_1,

$$\mathrm{V}(K_1, K_2, \ldots, K_n) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{K_1}(x)\, d\mathrm{S}(K_2, \ldots, K_n; x).$$

Medidas de área

Existencia

Fijados $n-1$ cuerpos convexos $K_2, \ldots, K_n$, existe una única medida de Borel no negativa $\mathrm{S}(K_2, \ldots, K_n; \cdot)$ (llamada *medida de área mixta*) tal que, para cada cuerpo convexo K_1,

$$\mathrm{V}(K_1, K_2, \ldots, K_n) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{K_1}(x)\, d\mathrm{S}(K_2, \ldots, K_n; x).$$

Medida de área de K de orden j

Dado K, la medida de área de K de orden $j = 1, \ldots, n-1$ se obtiene como la medida de área mixta

$$\mathrm{S}_j(K, \cdot) = \mathrm{S}\big(K[j], B^n[n-j-1]; \cdot\big).$$

Medidas de área

Existencia

Fijados $n-1$ cuerpos convexos $K_2, \ldots, K_n$, existe una única medida de Borel no negativa $\mathrm{S}(K_2, \ldots, K_n; \cdot)$ (llamada *medida de área mixta*) tal que, para cada cuerpo convexo K_1,

$$\mathrm{V}(K_1, K_2, \ldots, K_n) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{K_1}(x)\, d\mathrm{S}(K_2, \ldots, K_n; x).$$

Expresión integral de las quermassintegrales de K

$$\mathrm{W}_i(K) = \mathrm{V}\big(K[n-i], B^n[i]\big) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(x)\, d\mathrm{S}\big(K[n-i-1], B^n[i]; x\big).$$

Desigualdad de Brunn-Minkowski

Desigualdad de Brunn-Minkowski (para cuerpos convexos)

La raíz $(n-i)$-ésima de la i-ésima quermassintegral $\mathrm{W}_i : \mathcal{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, es una función cóncava, i.e., para $t \in [0,1]$ y $K, L \in \mathcal{K}^n$

$$\mathrm{W}_i\big(tK + (1-t)L\big)^{\frac{1}{n-i}} \geq t\mathrm{W}_i(K)^{\frac{1}{n-i}} + (1-t)\mathrm{W}_i(L)^{\frac{1}{n-i}}.$$

Desigualdad de Brunn-Minkowski

Desigualdad de Brunn-Minkowski (para cuerpos convexos)

La raíz $(n-i)$-ésima de la i-ésima quermassintegral $\mathrm{W}_i : \mathcal{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, es una función cóncava, i.e., para $t \in [0,1]$ y $K, L \in \mathcal{K}^n$

$$\mathrm{W}_i\big(tK + (1-t)L\big)^{\frac{1}{n-i}} \geq t\mathrm{W}_i(K)^{\frac{1}{n-i}} + (1-t)\mathrm{W}_i(L)^{\frac{1}{n-i}}.$$

Un poco más general...

Desigualdad de Brunn-Minkowski (para conjuntos medibles)

Sean X, Y conjuntos no vacíos, acotados y medibles en $\mathbb{R}^n$ y $0 < \lambda < 1$, tal que $(1-\lambda)X + \lambda Y$ sea medible. Entonces

$$\mathrm{V}\big((1-\lambda)X + \lambda Y\big)^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)\mathrm{V}(X)^{\frac{1}{n}} + \lambda \mathrm{V}(Y)^{\frac{1}{n}}.$$

Desigualdad de Brunn-Minkowski

Aún más general...

Desigualdad de Prékopa-Leindler

Sean f, g y h funciones integrables, no negativas en $\mathbb{R}^n$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $h\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx\right)^{\lambda}.$$

Un poco más general...

Desigualdad de Brunn-Minkowski (para conjuntos medibles)

Sean X, Y conjuntos no vacíos, acotados y medibles en $\mathbb{R}^n$ y $0 < \lambda < 1$, tal que $(1-\lambda)X + \lambda Y$ sea medible. Entonces

$$\mathrm{V}\big((1-\lambda)X + \lambda Y\big)^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)\mathrm{V}(X)^{\frac{1}{n}} + \lambda \mathrm{V}(Y)^{\frac{1}{n}}.$$

Diferenciabilidad de las quermassintegrales

Denotando como $\mathrm{W}_i(\rho) = \mathrm{W}_i(K_\rho)$

Otra versión del teorema de Brunn-Minkowski:

La raíz $(n-i)$-ésima de la i-ésima quermassintegral W_i, $i = 0, \dots, n$, es una función cóncava en $\big[-\mathrm{r}(K), \infty\big)$.

Diferenciabilidad de las quermassintegrales

Denotando como $\mathrm{W}_i(\rho) = \mathrm{W}_i(K_\rho)$

Otra versión del teorema de Brunn-Minkowski:

La raíz $(n-i)$-ésima de la i-ésima quermassintegral W_i, $i = 0, \dots, n$, es una función cóncava en $\big[-\mathrm{r}(K), \infty\big)$.

$$+$$

Lema

El sistema completo de cuerpos paralelos es una familia cóncava, i.e., verifican

$$(1-\rho)K_\rho + \rho K_\sigma \subset K_{(1-\rho)\rho+\rho\sigma}.$$

Diferenciabilidad de las quermassintegrales

Entonces...

Diferenciabilidad de las quermassintegrales

Entonces...

...siempre se cumple:

i) Las relaciones

$$'\mathrm{W}_i(\rho) \geq \mathrm{W}_i'(\rho) \quad \text{y} \quad \mathrm{W}_i'(\rho) \geq (n-i)\mathrm{W}_{i+1}(\rho)$$

se verifican para todo $i = 0, \ldots, n-1$.

Diferenciabilidad de las quermassintegrales

Entonces...

...siempre se cumple:

i) Las relaciones

$$'\mathrm{W}_i(\rho) \geq \mathrm{W}_i'(\rho) \quad \text{y} \quad \mathrm{W}_i'(\rho) \geq (n-i)\mathrm{W}_{i+1}(\rho)$$

se verifican para todo $i = 0, \dots, n-1$.

ii) Si $i = 0$, se obtiene la igualdad para la derivada del volumen:

$$'\mathrm{V}(\rho) = \mathrm{V}'(\rho) = n\mathrm{W}_1(\rho).$$

Diferenciabilidad de las quermassintegrales

Entonces...

...siempre se cumple:

i) Las relaciones

$$'\mathrm{W}_i(\rho) \geq \mathrm{W}_i'(\rho) \quad \text{y} \quad \mathrm{W}_i'(\rho) \geq (n-i)\mathrm{W}_{i+1}(\rho)$$

se verifican para todo $i = 0, \ldots, n-1$.

ii) Si $i = 0$, se obtiene la igualdad para la derivada del volumen:

$$'\mathrm{V}(\rho) = \mathrm{V}'(\rho) = n\mathrm{W}_1(\rho).$$

iii) Si $\rho \geq 0$, todas las quermassintegrales son diferenciables y

$$\mathrm{W}_i'(\rho) = (n-i)\mathrm{W}_{i+1}(\rho).$$

Las clases $\mathcal{R}_p$

Definición

Un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ **pertenece a la clase $\mathcal{R}_p$**, $0 \leq p \leq n-1$, si

$$'\mathrm{W}_i(\rho) = \mathrm{W}_i'(\rho) = (n-i)\mathrm{W}_{i+1}(\rho)$$

para todo $0 \leq i \leq p$ y $-\mathrm{r}(K) \leq \rho < \infty$.

Las clases $\mathcal{R}_p$

Definición

Un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ **pertenece a la clase $\mathcal{R}_p$**, $0 \leq p \leq n-1$, si

$$'\mathrm{W}_i(\rho) = \mathrm{W}'_i(\rho) = (n-i)\mathrm{W}_{i+1}(\rho)$$

para todo $0 \leq i \leq p$ y $-\mathrm{r}(K) \leq \rho < \infty$.

- $\mathcal{R}_0$ es la familia de todos los cuerpos convexos en $\mathbb{R}^n$.

Las clases $\mathcal{R}_p$

Definición

Un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ **pertenece a la clase $\mathcal{R}_p$**, $0 \leq p \leq n-1$, si

$$'\mathrm{W}_i(\rho) = \mathrm{W}_i'(\rho) = (n-i)\mathrm{W}_{i+1}(\rho)$$

para todo $0 \leq i \leq p$ y $-\mathrm{r}(K) \leq \rho < \infty$.

- $\mathcal{R}_0$ es la familia de todos los cuerpos convexos en $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{R}_{i+1} \subset \mathcal{R}_i$, $i = 0, \ldots, n-2$ (estrictamente).

Las clases $\mathcal{R}_p$

Definición

Un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ **pertenece a la clase $\mathcal{R}_\mathrm{p}$**, $0 \leq p \leq n-1$, si

$$'\mathrm{W}_i(\rho) = \mathrm{W}_i'(\rho) = (n-i)\mathrm{W}_{i+1}(\rho)$$

para todo $0 \leq i \leq p$ y $-\mathrm{r}(K) \leq \rho < \infty$.

- $\mathcal{R}_0$ es la familia de todos los cuerpos convexos en $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{R}_{i+1} \subset \mathcal{R}_i$, $i = 0, \ldots, n-2$ (estrictamente).
- **Problema:** Encontrar propiedades de los cuerpos convexos que pertenecen a las clases $\mathcal{R}_p$.

Las clases $\mathcal{R}_p$

Teorema (caracterización de $\mathcal{R}_{n-1}$)

Los **únicos conjuntos** en $\mathcal{R}_{n-1}$ son los cuerpos paralelos exteriores de cuerpos convexos k-dimensionales, para $0 \leq k \leq n-1$:

$$\mathcal{R}_{n-1} = \left\{ K + \rho B^n : \dim K \leq n-1 \right\}.$$

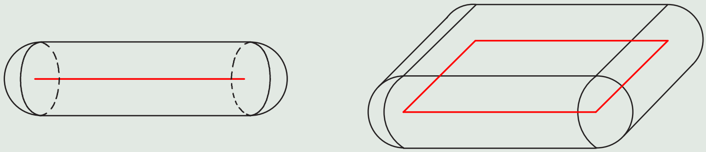
Las clases $\mathcal{R}_p$

Teorema (caracterización de $\mathcal{R}_{n-1}$)

Los **únicos conjuntos** en $\mathcal{R}_{n-1}$ son los cuerpos paralelos exteriores de cuerpos convexos k-dimensionales, para $0 \leq k \leq n-1$:

$$\mathcal{R}_{n-1} = \left\{ K + \rho B^n : \dim K \leq n-1 \right\}.$$

Cuerpos convexos en $\mathcal{R}_2 \subset \mathbb{R}^3$



Vectores r-extremos

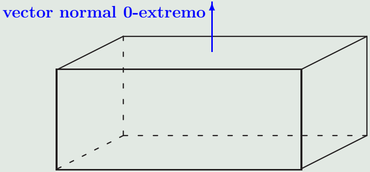
Definición:

$u \in \mathbb{R}^n$ es un **vector normal r-extremo** de K si no se puede escribir $u = u_1 + \cdots + u_{r+2}$, con u_i L.I., normales, en el mismo punto frontera.

Vectores r-extremos

Definición:

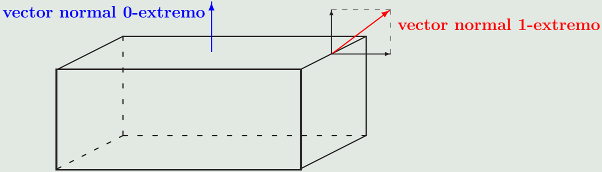
$u \in \mathbb{R}^n$ es un **vector normal r-extremo** de K si no se puede escribir $u = u_1 + \cdots + u_{r+2}$, con u_i L.I., normales, en el mismo punto frontera.



Vectores r-extremos

Definición:

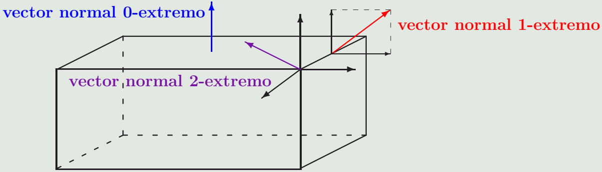
$u \in \mathbb{R}^n$ es un **vector normal r-extremo** de K si no se puede escribir $u = u_1 + \cdots + u_{r+2}$, con u_i L.I., normales, en el mismo punto frontera.



Vectores r-extremos

Definición:

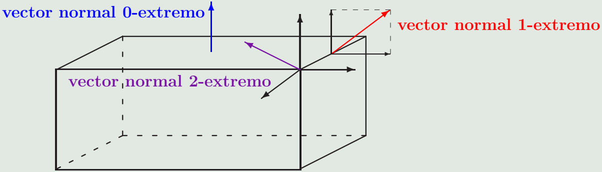
$u \in \mathbb{R}^n$ es un **vector normal r-extremo** de K si no se puede escribir $u = u_1 + \cdots + u_{r+2}$, con u_i L.I., normales, en el mismo punto frontera.



Vectores r-extremos

Definición:

$u \in \mathbb{R}^n$ es un **vector normal r-extremo** de K si no se puede escribir $u = u_1 + \cdots + u_{r+2}$, con u_i L.I., normales, en el mismo punto frontera.



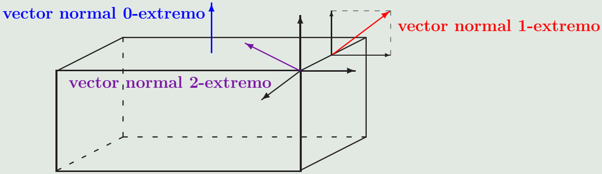
Vectores normales r-extremos

- $\mathcal{U}_0(K) \subset \mathcal{U}_1(K) \subset \cdots \subset \mathcal{U}_{n-1}(K)$

Vectores r-extremos

Definición:

$u \in \mathbb{R}^n$ es un **vector normal r-extremo** de K si no se puede escribir $u = u_1 + \cdots + u_{r+2}$, con u_i L.I., normales, en el mismo punto frontera.



Vectores normales r-extremos

- $\mathcal{U}_0(K) \subset \mathcal{U}_1(K) \subset \cdots \subset \mathcal{U}_{n-1}(K)$
- $\mathcal{U}_0(K) \supset \{$vectores normales en puntos frontera regulares de $K\}$

El cuerpo forma

Definición:

El **cuerpo forma** de un cuerpo convexo K, representado por K^*, es

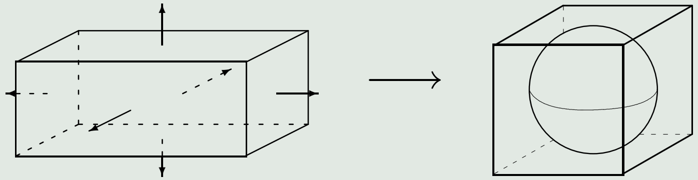
$$K^* = \bigcap_{u \in \mathcal{U}_0(K)} H^-(B^n, u).$$

El cuerpo forma

Definición:

El **cuerpo forma** de un cuerpo convexo K, representado por K^*, es

$$K^* = \bigcap_{u \in \mathcal{U}_0(K)} H^-(B^n, u).$$

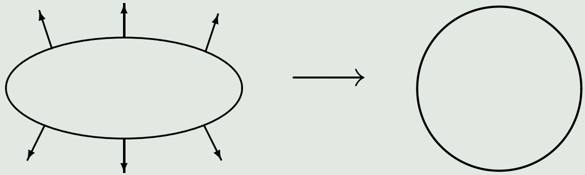


El cuerpo forma

Definición:

El **cuerpo forma** de un cuerpo convexo K, representado por K^*, es

$$K^* = \bigcap_{u \in \mathcal{U}_0(K)} H^-(B^n, u).$$

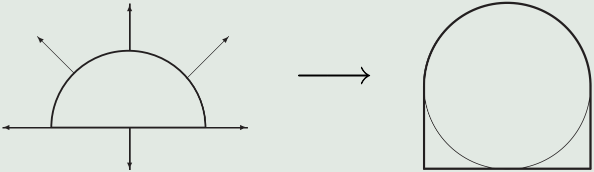


El cuerpo forma

Definición:

El **cuerpo forma** de un cuerpo convexo K, representado por K^*, es

$$K^* = \bigcap_{u \in \mathcal{U}_0(K)} H^-(B^n, u).$$



Las clases $\mathcal{R}_p$

Teorema:

Si $K \in \mathcal{R}_p$ entonces, para todo $\rho \in \big(-\mathrm{r}(K), 0\big]$

- $h(K_\rho^*, u) \equiv 1$ para todo $u \in \mathrm{cl}\,\mathcal{U}_p(K_\rho)$.

Las clases $\mathcal{R}_p$

Teorema:

Si $K \in \mathcal{R}_p$ entonces, para todo $\rho \in \big(-\mathrm{r}(K), 0\big]$

- $h(K_\rho^*, u) \equiv 1$ para todo $u \in \mathrm{cl}\,\mathcal{U}_p(K_\rho)$.
- $\mathrm{S}\Big(K_\rho[n-p-1], B^n[p]; \cdot\Big) = \mathrm{S}\Big(K_\rho^*, K_\rho[n-p-1], B^n[p-1]; \cdot\Big)$

Las clases $\mathcal{R}_p$

Teorema:

Si $K \in \mathcal{R}_p$ entonces, para todo $\rho \in \bigl(-\mathrm{r}(K), 0\bigr]$

- $h(K_\rho^*, u) \equiv 1$ para todo $u \in \mathrm{cl}\,\mathcal{U}_p(K_\rho)$.
- $\mathrm{S}\Bigl(K_\rho[n-p-1], B^n[p]; \cdot\Bigr) = \mathrm{S}\Bigl(K_\rho^*, K_\rho[n-p-1], B^n[p-1]; \cdot\Bigr)$
- Se da la igualdad en la desigualdad de Aleksandrov-Fenchel:

$$\mathrm{V}\bigl(K_\rho^*, K_\rho[n-i-1], B^n[i]\bigr)^2 = \mathrm{V}\bigl(K_\rho^*[2], K_\rho[n-i-1], B^n[i-1]\bigr)$$
$$\mathrm{V}\bigl(K_\rho[n-i-1], B^n[i+1]\bigr)$$

Las clases $\mathcal{R}_p$

Teorema:

Si $K \in \mathcal{R}_p$ entonces, para todo $\rho \in \big(-\mathrm{r}(K), 0\big]$

- $h(K_\rho^*, u) \equiv 1$ para todo $u \in \mathrm{cl}\,\mathcal{U}_p(K_\rho)$.
- $\mathrm{S}\Big(K_\rho[n-p-1], B^n[p]; \cdot\Big) = \mathrm{S}\Big(K_\rho^*, K_\rho[n-p-1], B^n[p-1]; \cdot\Big)$
- Se da la igualdad en la desigualdad de Aleksandrov-Fenchel:

$$\mathrm{V}\big(K_\rho^*, K_\rho[n-i-1], B^n[i]\big)^2 = \mathrm{V}\big(K_\rho^*[2], K_\rho[n-i-1], B^n[i-1]\big)$$
$$\mathrm{V}\big(K_\rho[n-i-1], B^n[i+1]\big)$$

Consecuencias:

- No existen politopos en $\mathcal{R}_p$, para todo $1 \leq p \leq n-1$.

Las clases $\mathcal{R}_p$

Teorema:

Si $K \in \mathcal{R}_p$ entonces, para todo $\rho \in \big(-\mathrm{r}(K), 0\big]$

- $h(K_\rho^*, u) \equiv 1$ para todo $u \in \mathrm{cl}\,\mathcal{U}_p(K_\rho)$.
- $\mathrm{S}\Big(K_\rho[n-p-1], B^n[p]; \cdot\Big) = \mathrm{S}\Big(K_\rho^*, K_\rho[n-p-1], B^n[p-1]; \cdot\Big)$
- Se da la igualdad en la desigualdad de Aleksandrov-Fenchel:

$$\mathrm{V}\big(K_\rho^*, K_\rho[n-i-1], B^n[i]\big)^2 = \mathrm{V}\big(K_\rho^*[2], K_\rho[n-i-1], B^n[i-1]\big)$$
$$\mathrm{V}\big(K_\rho[n-i-1], B^n[i+1]\big)$$

Consecuencias:

- No existen politopos en $\mathcal{R}_p$, para todo $1 \le p \le n-1$.
- Se pueden caracterizar los cuerpos convexos de determinadas familias que están en $\mathcal{R}_p$...

Quermassintegrales: desigualdades funcionales

Trabajo conjunto con A. Colesanti

(Universidad de Florencia)

Funciones simétricas de una matriz A

Definición: Funciones simétricas de una matriz

Sea $A = (a_{ij})_{ij}$ una matriz simétrica $N \times N$ con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Se define la $k-$ésima función elemental simétrica de A como

$$s_0(A) = 1, \quad s_k(A) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le N} \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}\,, \quad \text{si } k \ge 1.$$

En particular, $s_1(A)$ y $s_N(A)$ son la **traza** y el **determinante** de A.

Funciones simétricas de una matriz A

Definición: Funciones simétricas de una matriz

Sea $A = (a_{ij})_{ij}$ una matriz simétrica $N \times N$ con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Se define la $k-$ésima función elemental simétrica de A como

$$s_0(A) = 1, \quad s_k(A) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}\,, \quad \text{si } k \geq 1.$$

En particular, $s_1(A)$ y $s_N(A)$ son la **traza** y el **determinante** de A.

Las derivadas de $s_k(A)$ para $k = 1, \ldots, N$ están bien definidas y se denotan por

$$s_k^{ij}(A) = \frac{\partial s_k(A)}{\partial a_{ij}}.$$

La matriz $\left(s_k^{ij}(A)\right)_{ij}$ es también simétrica.

En el caso $k = N$, $\left(s_N^{ij}(A)\right)_{ij}$ es la matriz **cofactor** de A.

Lema clave

Un lema para operadores hessianos en la esfera

Sean $u \in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ y $\{E_1, \ldots, E_{n-1}\}$ un referencial local ortonormal de campos de vectores en $\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\mathrm{div}_j \left(s_k^{ij}(\nabla^2 u + uI) \right) := \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial E_j} s_k^{ij}(\nabla^2 u + uI) = 0,$$

donde $\dfrac{\partial}{\partial E_j}$ es la diferencial covariante actuando en E_j.

Lema clave

Un lema para operadores hessianos en la esfera

Sean $u \in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ y $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$ un referencial local ortonormal de campos de vectores en $\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces, para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\mathrm{div}_j \left(s_k^{ij}(\nabla^2 u + uI) \right) := \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial E_j} s_k^{ij}(\nabla^2 u + uI) = 0,$$

donde $\dfrac{\partial}{\partial E_j}$ es la diferencial covariante actuando en E_j.

- ∇^2 denota el Hessiano (en $\mathbb{S}^{n-1}$).
- I denota la matriz identidad.

Lema clave

Un lema para operadores hessianos en la esfera

Sean $u \in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ y $\{E_1, \ldots, E_{n-1}\}$ un referencial local ortonormal de campos de vectores en $\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\mathrm{div}_j\left(s_k^{ij}(\nabla^2 u + uI)\right) := \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial E_j} s_k^{ij}(\nabla^2 u + uI) = 0,$$

donde $\dfrac{\partial}{\partial E_j}$ es la diferencial covariante actuando en E_j.

- ∇^2 denota el Hessiano (en $\mathbb{S}^{n-1}$).
- I denota la matriz identidad.
- El caso $k = n-1$ fue probado por Cheng y Yau (1976).
- El resultado análogo en $\mathbb{R}^n$ fue probado por Reilly (1973).

Cuerpos convexos de clase C^2_+

Definición: cuerpo de clase C^2_+

K se dice que es *de clase C^2_+* si $\partial K \in C^2$ y su curvatura de Gauss es **estrictamente positiva** en cada punto de ∂K.

Cuerpos convexos de clase C^2_+

Definición: cuerpo de clase C^2_+

K se dice que es *de clase C^2_+* si $\partial K \in C^2$ y su curvatura de Gauss es **estrictamente positiva** en cada punto de ∂K.

K es de clase C^2_+ si y sólo si

$h_k \in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$ y la matriz $\big((h_K)_{ij} + h_K\delta_{ij}\big)_{ij}$ es definida positiva en cada punto de $\mathbb{S}^{n-1}$.

Cuerpos convexos de clase C^2_+

Definición: cuerpo de clase C^2_+

K se dice que es *de clase C^2_+* si $\partial K \in C^2$ y su curvatura de Gauss es **estrictamente positiva** en cada punto de ∂K.

- $K \in C^2_+ \Longrightarrow$ su aplicación de Gauss ν_K es un difeomorfismo entre ∂K y $\mathbb{S}^{n-1}$.

K es de clase C^2_+ si y sólo si

$h_k \in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$ y la matriz $\big((h_K)_{ij} + h_K\delta_{ij}\big)_{ij}$ es definida positiva en cada punto de $\mathbb{S}^{n-1}$.

Cuerpos convexos de clase C^2_+

Definición: cuerpo de clase C^2_+

K se dice que es *de clase C^2_+* si $\partial K \in C^2$ y su curvatura de Gauss es **estrictamente positiva** en cada punto de ∂K.

- $K \in C^2_+ \Longrightarrow$ su aplicación de Gauss ν_K es un difeomorfismo entre ∂K y $\mathbb{S}^{n-1}$.
- Los valores propios de $D\nu_K$ (aplicación de Weingarten de ∂K) son las curvaturas principales de K.

K es de clase C^2_+ si y sólo si

$h_k \in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$ y la matriz $\big((h_K)_{ij} + h_K\delta_{ij}\big)_{ij}$ es definida positiva en cada punto de $\mathbb{S}^{n-1}$.

Cuerpos convexos de clase C^2_+

Definición: cuerpo de clase C^2_+

K se dice que es *de clase C^2_+* si $\partial K \in C^2$ y su curvatura de Gauss es **estrictamente positiva** en cada punto de ∂K.

- $K \in C^2_+ \Longrightarrow$ su aplicación de Gauss ν_K es un difeomorfismo entre ∂K y $\mathbb{S}^{n-1}$.
- Los valores propios de $D\nu_K$ (aplicación de Weingarten de ∂K) son las curvaturas principales de K.
- $D\nu_K^{-1} \equiv \big((h_K)_{ij} + h_K\delta_{ij}\big)_{ij} = \Xi^{-1}$

K es de clase C^2_+ si y sólo si

$h_k \in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$ y la matriz $\big((h_K)_{ij} + h_K\delta_{ij}\big)_{ij}$ es definida positiva en cada punto de $\mathbb{S}^{n-1}$.

Cuerpos convexos de clase C^2_+

Definición: cuerpo de clase C^2_+

K se dice que es *de clase C^2_+* si $\partial K \in C^2$ y su curvatura de Gauss es **estrictamente positiva** en cada punto de ∂K.

$$\mathfrak{C} = \left\{ h \in C^2(\mathbb{S}^{n-1}) : \left((h_K)_{ij} + h\delta_{ij}\right)_{ij} > 0 \ \text{ en } \ \mathbb{S}^{n-1} \right\}$$

está formado por las funciones soporte de cuerpos convexos de clase C^2_+.

K es de clase C^2_+ si y sólo si

$h_k \in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$ y la matriz $\left((h_K)_{ij} + h_K\delta_{ij}\right)_{ij}$ es definida positiva en cada punto de $\mathbb{S}^{n-1}$.

Cuerpos convexos de clase C^2_+

Definición: cuerpo de clase C^2_+

K se dice que es *de clase C^2_+* si $\partial K \in C^2$ y su curvatura de Gauss es **estrictamente positiva** en cada punto de ∂K.

$$\mathfrak{C} = \left\{ h \in C^2(\mathbb{S}^{n-1}) : \left((h_K)_{ij} + h\delta_{ij}\right)_{ij} > 0 \ \text{ en } \ \mathbb{S}^{n-1} \right\}$$

está formado por las funciones soporte de cuerpos convexos de clase C^2_+.

Quermassintegral de $K \in C^2_+$

$$\mathrm{W}_i(K) = C \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K \, d\mathrm{S}_{n-i-1}(K, \cdot)$$

Cuerpos convexos de clase C^2_+

Definición: cuerpo de clase C^2_+

K se dice que es *de clase C^2_+* si $\partial K \in C^2$ y su curvatura de Gauss es **estrictamente positiva** en cada punto de ∂K.

$$\mathfrak{C} = \left\{ h \in C^2(\mathbb{S}^{n-1}) : \left((h_K)_{ij} + h\delta_{ij}\right)_{ij} > 0 \ \text{ en } \ \mathbb{S}^{n-1} \right\}$$

está formado por las funciones soporte de cuerpos convexos de clase C^2_+.

Quermassintegral de $K \in C^2_+$

$$\mathrm{W}_i(K) = \overline{C} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K \, s_{n-i-1}\left((h_K)_{ij} + h_K\delta_{ij}\right) d\mathcal{H}^{n-1}$$

Interpretación heurística de la concavidad

Desigualdad de Brunn-Minkowski

La raíz $(n-i)$-ésima de la i-ésima quermassintegral $\mathrm{W}_i : \mathcal{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, es una función cóncava, i.e., para $t \in [0,1]$ y $K, L \in \mathcal{K}^n$

$$\mathrm{W}_i(tK + (1-t)L)^{\frac{1}{n-i}} \geq t\mathrm{W}_i(K)^{\frac{1}{n-i}} + (1-t)\mathrm{W}_i(L)^{\frac{1}{n-i}}.$$

Interpretación heurística de la concavidad

Desigualdad de Brunn-Minkowski

La raíz $(n-i)$-ésima de la i-ésima quermassintegral $\mathrm{W}_i : \mathcal{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$, es una función cóncava, i.e., para $t \in [0,1]$ y $K, L \in \mathcal{K}^n$

$$\mathrm{W}_i(tK + (1-t)L)^{\frac{1}{n-i}} \geq t\mathrm{W}_i(K)^{\frac{1}{n-i}} + (1-t)\mathrm{W}_i(L)^{\frac{1}{n-i}}.$$

De forma heurística, la concavidad de $\mathrm{W}_i(\cdot)^{1/(n-i)}$ implica que la segunda variación del funcional debe ser semidefinida negativa (donde exista).

Interpretación heurística de la concavidad

$$\mathfrak{C} = \left\{ h \in C^2(\mathbb{S}^{n-1}) : \left((h_K)_{ij} + h\delta_{ij}\right)_{ij} > 0 \text{ en } \mathbb{S}^{n-1} \right\}$$

está formado por las funciones soporte de cuerpos convexos de clase C^2_+.

Interpretación heurística de la concavidad

$$\mathfrak{C} = \left\{ h \in C^2(\mathbb{S}^{n-1}) : \left((h_K)_{ij} + h\delta_{ij}\right)_{ij} > 0 \ \text{ en } \ \mathbb{S}^{n-1} \right\}$$

está formado por las funciones soporte de cuerpos convexos de clase C^2_+.

Si $h_K \in \mathfrak{C}$, $\phi \in C^\infty$ y ε es suficientemente pequeño, entonces para $|r| < \varepsilon$

$$h_K + r\phi \in \mathfrak{C}.$$

Interpretación heurística de la concavidad

$$\mathfrak{C} = \left\{ h \in C^2(\mathbb{S}^{n-1}) : \left((h_K)_{ij} + h\delta_{ij}\right)_{ij} > 0 \ \text{ en } \ \mathbb{S}^{n-1} \right\}$$

está formado por las funciones soporte de cuerpos convexos de clase C^2_+.

Si $h_K \in \mathfrak{C}$, $\phi \in C^\infty$ y ε es suficientemente pequeño, entonces para $|r| < \varepsilon$

$$h_K + r\phi \in \mathfrak{C}.$$

La raíz $(n-j)$-ésima del funcional...

$$F_j : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h \rightsquigarrow \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h\, s_{n-j-1}(\Xi^{-1})\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

es una función cóncava en $\mathfrak{C}$.

Interpretación heurística de la concavidad

$$\mathfrak{C} = \left\{ h \in C^2(\mathbb{S}^{n-1}) : \left((h_K)_{ij} + h\delta_{ij}\right)_{ij} > 0 \;\text{ en }\; \mathbb{S}^{n-1} \right\}$$

está formado por las funciones soporte de cuerpos convexos de clase C^2_+.

Si $h_K \in \mathfrak{C}$, $\phi \in C^\infty$ y ε es suficientemente pequeño, entonces para $|r| < \varepsilon$

$$h_K + r\phi \in \mathfrak{C}.$$

La raíz $(n-j)$-ésima del funcional...

$$f(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (h_K + r\phi) s_{n-j-1}(\Xi_r^{-1}) d\mathcal{H}^{n-1}$$

es una función cóncava .

Para cuerpos de clase C^2_+

Teorema: Desigualdad de tipo Poincaré en ∂K

Sea $K \in \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo de clase C^2_+, ν_K su aplicación de Gauss y $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Para cada $\psi \in C^1(\partial K)$, si

$$\int_{\partial K} \psi s_{m-1}(D\nu_K) d\mathcal{H}^{n-1} = 0$$

entonces

$$m \int_{\partial K} \psi^2 s_m(D\nu_K) d\mathcal{H}^{n-1} \leq \int_{\partial K} \left\langle \left(s_m^{ij}(D\nu)\right) \nabla\psi, (D\nu_K)^{-1} \nabla\psi \right\rangle d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Para cuerpos de clase C^2_+

Punto de vista: Desigualdades de tipo Poincaré

Estas desigualdades se pueden ver como desigualdades de tipo Poincaré donde la norma L_2 de una función se acota por la norma L_2 de su gradiente con una condición de tipo media nula.

Para cuerpos de clase C^2_+

Punto de vista: Desigualdades de tipo Poincaré

Estas desigualdades se pueden ver como desigualdades de tipo Poincaré donde la norma L_2 de una función se acota por la norma L_2 de su gradiente con una condición de tipo media nula.

Desigualdad de Poincaré clásica: $K = B^n$

Cuando $K = B^n$ (equivalentemente $h \equiv 1$) recuperamos la desigualdad de Poincaré clásica con la constante óptima:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = 0 \implies$$

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi^2(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \leq \frac{1}{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left|\nabla\phi(x)\right|^2 d\mathcal{H}^{n-1}(x)\,.$$

Para cuerpos de clase C^2_+

Teorema: Desigualdades de tipo Poincare en $\mathbb{S}^{n-1}$

Sean K un cuerpo convexo de clase C^2_+ y $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Para cada $\phi \in C^1(\mathbb{S}^{n-1})$, si

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi s_m\big((h_K)_{ij} + h_K\delta_{ij}\big)\, d\mathcal{H}^{n-1} = 0$$

entonces

$$(n-m)\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi^2 s_{m-1}\big((h_K)_{ij} + h_K\delta_{ij}\big) d\mathcal{H}^{n-1}$$
$$\leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Big\langle \Big(s_m^{ij}\big((h_K)_{ij} + h_K\delta_{ij}\big)\Big)\nabla\phi, \nabla\phi\Big\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Cuerpos convexos generales. $\mathrm{S}_1(K,\cdot)$

- Cualquier cuerpo convexo K se puede aproximar por una sucesión de cuerpos convexos $(K_r)_r \in C^2_+$.

Cuerpos convexos generales. $\mathrm{S}_1(K,\cdot)$

- Cualquier cuerpo convexo K se puede aproximar por una sucesión de cuerpos convexos $(K_r)_r \in C^2_+$.
- Si $K_r \longrightarrow K$, entonces las medidas de área $\mathrm{S}_1(K_r,\cdot) \longrightarrow \mathrm{S}_1(K,\cdot)$ débilmente.

Cuerpos convexos generales. $\mathrm{S}_1(K,\cdot)$

- Cualquier cuerpo convexo K se puede aproximar por una sucesión de cuerpos convexos $(K_r)_r \in C^2_+$.
- Si $K_r \longrightarrow K$, entonces las medidas de área $\mathrm{S}_1(K_r,\cdot) \longrightarrow \mathrm{S}_1(K,\cdot)$ débilmente.

Teorema

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo arbitrario y $\mathrm{S}_1(K,\cdot)$ su medida de área de orden 1. Para cada $\phi \in C^1(\mathbb{S}^{n-1})$, si

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(x) d\mathrm{S}_1(K,x) = 0,$$

entonces

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi^2(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \leq \frac{1}{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left|\nabla\phi(x)\right|^2 d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Problemas de tipo Minkowski

¿Condiciones para que una medida sea la medida de área de un cuerpo convexo K?

Problemas de tipo Minkowski

Problema de tipo Minkowski

Dada una medida de Borel σ en la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ no negativa, encontrar un cuerpo convexo K cuya medida de área sea σ.

Problemas de tipo Minkowski

Problema de tipo Minkowski

Dada una medida de Borel σ en la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ no negativa, encontrar un cuerpo convexo K cuya medida de área sea σ.

Teorema (Guan, Ma, Shen, Trudinger, Wang)

Sea $f \in C^{1,1}(\mathbb{S}^{n-1})$, $f > 0$ y sea $g = 1/f$. Si

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} xf(x)d\mathcal{H}^{n-1}(x) = 0$$

y la matriz $(g_{ij} + g\delta_{ij})_{ij}$ es semidefinida positiva en casi todo punto de $\mathbb{S}^{n-1}$, entonces existe un cuerpo convexo K, unívocamente determinado salvo translaciones, tal que

$$d\mathrm{S}_1(K,\cdot) = f(\cdot)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\cdot),$$

i.e., f es la densidad de $\mathrm{S}_1(K,\cdot)$ con respecto a $\mathcal{H}^{n-1}(\cdot)$.

Desigualdades de tipo Poincaré y la función radial

Con el resultado anterior y utilizando....

Desigualdades de tipo Poincaré y la función radial

Con el resultado anterior y utilizando....

Función radial de K

La función radial ρ_K de K se define como $\rho_K(x) = \max\{\lambda \geq 0 \,|\, \lambda x \in K\}$.

Desigualdades de tipo Poincaré y la función radial

Con el resultado anterior y utilizando....

Función radial de K

La función radial ρ_K de K se define como $\rho_K(x) = \max\{\lambda \geq 0 \,|\, \lambda x \in K\}$.

Teorema: Sea $K \in \mathcal{K}^n$ con interior no vacío

Si $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^{n-1}} x\rho_K(x)d\mathcal{H}^{n-1} = 0$, entonces, para cada $\phi \in C^1(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(x)\rho_K(x)d\mathcal{H}^{n-1}(x) = 0 \Longrightarrow$$

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi^2(x)d\mathcal{H}^{n-1}(x) \leq \frac{1}{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left|\nabla\phi(x)\right|^2 d\mathcal{H}^{n-1}$$

Quermassintegrales: desigualdades funcionales y diferenciabilidad

E. Saorín Gómez

(Parte I: Trabajo conjunto con M. A. Hernández Cifre)

(Parte II: Trabajo conjunto con A. Colesanti)

Universidad de Murcia

Salobreña, Abril 2008