Extensión de operadores y propiedades de aproximación en espacios de funciones integrables

Enrique A. Sánchez Pérez

J. M. Calabuig, O. Delgado, I. Ferrando, L.M. García, E. Jiménez, S. Okada y J. Rodríguez

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Instituto de Matemática Pura y Aplicada (I.M.P.A.).
Departamento de Matemática Aplicada.
Universidad Politécnica de Valencia.
Camino de Vera S/N, 46022, Valencia.

En esta charla presentamos las diferentes líneas de trabajo que estamos desarrollando, en colaboración con R. del Campo, A. Fernández, F. Mayoral, F. Naranjo y C. Sáez, de la universidad de Sevilla, centrada en los espacios de funciones p-integrables con respecto de una medida vectorial. Nuestro grupo está trabajando en los siguientes temas:

- Desarrollo y aplicaciones de los teoremas de estructura asociados a los espacios $L^p(m)$ de funciones p-integrables respecto de una medida vectorial.
- Extensiones de operadores definidos en espacios de funciones de Banach.
- Interpolación de espacios $L^p(m)$ para medidas positivas m.
- Aproximación de funciones en los espacios $L^2(m)$.
- Aplicaciones en la teoría del scattering cuántico.

Index

Notación y definiciones fundamentales

Notación y preliminares

- Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita,
- E un espacio de Banach y E' su dual topológico,
- B_E la bola unidad de E,
- $\mathscr{P}(A)$ es el conjunto de particiones π de A en un conjunto finito de conjuntos medibles,
- $m:\Sigma\to E$ es una medida vectorial (numerablemente aditiva),
- La *semivariación de de m sobre $A\in\Sigma$* se define como

$$\|m\|(A)=\sup_{x'\in B_{E'}}|\langle m,x'\rangle|(A)=\sup_{x'\in B_{E'}}\sup_{\pi\in\mathscr{P}(\Omega)}\sum_{B\in\pi}|\langle m,x'\rangle(B)|.$$

  Utilizamos la notación habitual:

$$\langle m,x'\rangle(B)=\langle m(B),x'\rangle \text{ para cada } B\in\Sigma,$$

- $A\in\Sigma$ se dice que es m-nulo si $\|m\|(A)=0$.

Notación y preliminares

- Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita,
- E un espacio de Banach y E' su dual topológico,
- B_E la bola unidad de E,
- $\mathscr{P}(A)$ es el conjunto de particiones π de A en un conjunto finito de conjuntos medibles,
- $m : \Sigma \to E$ es una medida vectorial (numerablemente aditiva),
- La *semivariación de de m sobre $A \in \Sigma$* se define como

$$\|m\|(A) = \sup_{x' \in B_{E'}} |\langle m, x' \rangle|(A) = \sup_{x' \in B_{E'}} \sup_{\pi \in \mathscr{P}(\Omega)} \sum_{B \in \pi} |\langle m, x' \rangle(B)|.$$

  Utilizamos la notación habitual:

$$\langle m, x' \rangle(B) = \langle m(B), x' \rangle \text{ para cada } B \in \Sigma,$$

- $A \in \Sigma$ se dice que es m-nulo si $\|m\|(A) = 0$.

Remark

Asumimos que μ y m son mutuamente absolutamente continuas.
En particular, μ puede ser una medida de Rybakov; es decir, una medida escalar ν definida como la variación de una medida del tipo $\langle m, x' \rangle$, donde $x' \in E'$, tal que m es absolutamente continua con respecto a ν.

Subespacios de funciones de Banach.

Sea $L^0(\mu)$ el espacio de todas las (clases de) funciones medibles sobre Ω.

1. Decimos que $X(\mu) \subseteq L^0(\mu)$ es un espacio de Banach de funciones con la norma $\|\cdot\|_{X(\mu)}$ si es un espacio de Banach y se cumple (1) si $f \in L^0(\mu)$ y $g \in X(\mu)$ con $|f| \leq |g|$ μ-c.p.p. entonces $f \in X(\mu)$ y $\|f\|_{X(\mu)} \leq \|g\|_{X(\mu)}$. (2) Para cada $A \in \Sigma$, la función característica χ_A está en $X(\mu)$.
2. Un subespacio de Banach de funciones $X(\mu)$ es un espacio de Banach de funciones contenido continuamente en $X(\mu)$, con el mismo order (y, en general, diferentes normas).
3. Un espacio de Banach de funciones es *orden continuo* si sucesiones crecientes acotadas en orden son convergentes en la norma.

Espacios $L^1(m)$.

Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es integrable respecto de la medida $m : \Sigma \to E$ si

1. para cada $x' \in E'$ se cumple que $f \in L^1(\langle m, x' \rangle)$, y
2. para cada $A \in \Sigma$ existe $x_A \in E$ tal que

$$\langle x_A, x' \rangle = \int_A f d\langle m, x' \rangle \text{ para cada } x' \in E'.$$

El elemento x_A se denota $\int_A f\, dm$. El espacio de todas las (clases) de funciones (iguales m-c.p.p.) se denota como $L^1(m)$. La expresión

$$\|f\|_m = \sup_{x' \in B_{E'}} \int |f| d|\langle m, x' \rangle| \text{ para cada } f \in L^1(m),$$

define una norma de retículo en $L^1(m)$ para la cual $L^1(m)$ es un espacio de Banach de funciones orden continuo y con unidad débil χ_Ω.

La integral indefinida $m_f : \Sigma \to E$ de una función $f \in L^1(m)$ se define como

$$m_f(A) = \int_A f dm, \quad A \in \Sigma.$$

m_f es una medida numerablemente aditiva.

Espacios $L^p(m)$.

Sea $1 \leq p < \infty$. Una función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es p-integrable si $|f|^p$ es integrable respecto de m. La fórmula

$$\|f\|_{L^p(m)} = \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\int |f|^p \, d|\langle m, x' \rangle| \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para cada } f \in L^p(m),$$

define una norma de retículo en $L^p(m)$. $L^p(m)$ es un subespacio de Banach de funciones of $L^1(m)$, p-convexo, orden continuo y con la misma unidad débil.

- Un retículo de Banach E es p-convexo si existe una constante K tal que para cada subconjunto finito $x_1,...,x_n \in E$,

$$\|(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}\| \leq K(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{1/p}.$$

- Sea $T : E \to F$ un operador, donde F es un retículo. T es p-concavo si existe una constante K tal que para cada familia finita $x_1,...,x_n \in E$,

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p)^{1/p} \leq K\|(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}\|.$$

- Sea $X(\mu)$ un espacio de Banach de funciones orden continuo, y sea $T : X(\mu) \to E$ un operador. Definimos la medida vectorial (numerablemente aditiva)

$$m_T : \Sigma \to E \text{ como } m_T(A) := T(\chi_A), \quad A \in \Sigma.$$

- Un retículo de Banach E es p-convexo si existe una constante K tal que para cada subconjunto finito $x_1, ..., x_n \in E$,

$$\|(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}\| \leq K(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{1/p}.$$

- Sea $T : E \to F$ un operador, donde F es un retículo. T es p-concavo si existe una constante K tal que para cada familia finita $x_1, ..., x_n \in E$,

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p)^{1/p} \leq K\|(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}\|.$$

- Sea $X(\mu)$ un espacio de Banach de funciones orden continuo, y sea $T : X(\mu) \to E$ un operador. Definimos la medida vectorial (numerablemente aditiva)

$$m_T : \Sigma \to E \text{ como } m_T(A) := T(\chi_A), \quad A \in \Sigma.$$

- Un retículo de Banach E es p-convexo si existe una constante K tal que para cada subconjunto finito $x_1,...,x_n \in E$,

$$\|(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}\| \leq K(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{1/p}.$$

- Sea $T: E \to F$ un operador, donde F es un retículo. T es p-concavo si existe una constante K tal que para cada familia finita $x_1,...,x_n \in E$,

$$(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p)^{1/p} \leq K\|(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}\|.$$

- Sea $X(\mu)$ un espacio de Banach de funciones orden continuo, y sea $T: X(\mu) \to E$ un operador. Definimos la medida vectorial (numerablemente aditiva)

$$m_T: \Sigma \to E \text{ como } m_T(A) := T(\chi_A), \quad A \in \Sigma.$$

- Todo retículo de Banach p-convexo, orden continuo y con unidad débil es isomorfo (topológicamente y en orden) a un espacio $L^p(m)$.
- Las propiedades de convexidad de estos espacios permiten obtener información sobre la estructura de los retículos de Banach y la factorización de operadores definidos sobre ellos. Hasta el momento, hemos estudiado principalmente las siguientes:
- Versiones vectoriales del teorema de Maurey-Rosenthal. ¿Cuando un operador a valores en $L^1(m)$ factoriza a través de $L^2(m)$?
- Propiedades de dominación para formas bilineales asociadas al operador integración.
- Teoría de los operadores factorizables a través de la p-potencia. (Optimal Domain and Integral Extension of Operators acting in Function Spaces. Birkhauser)
- Aplicaciones:
  - Representaciones particulares de los espacios L^p de medidas escalares a través de los que factorizan operadores entre retículos de Banach con las propiedades de concavidad y convexidad adecuadas.
  - Contención de espacios L^p de medidas escalares en espacios $L^1(m)$ (conocido en el caso de espacios invariantes por reordenamiento).
  - ¿ Cuando un espacio $L^p(m)$ es isomorfo a un espacio L^p de una medida escalar ? Caracterizaciones en función de las propiedades de sumabilidad del operador integración.

- Todo retículo de Banach p-convexo, orden continuo y con unidad débil es isomorfo (topológicamente y en orden) a un espacio $L^p(m)$.
- Las propiedades de convexidad de estos espacios permiten obtener información sobre la estructura de los retículos de Banach y la factorización de operadores definidos sobre ellos. Hasta el momento, hemos estudiado principalmente las siguientes:
- Versiones vectoriales del teorema de Maurey-Rosenthal. ¿Cuando un operador a valores en $L^1(m)$ factoriza a través de $L^2(m)$?
- Propiedades de dominación para formas bilineales asociadas al operador integración.
- Teoría de los operadores factorizables a través de la *p*-potencia. (Optimal Domain and Integral Extension of Operators acting in Function Spaces. Birkhauser)
- Aplicaciones:
  - Representaciones particulares de los espacios L^p de medidas escalares a través de los que factorizan operadores entre retículos de Banach con las propiedades de concavidad y convexidad adecuadas.
  - Contención de espacios L^p de medidas escalares en espacios $L^1(m)$ (conocido en el caso de espacios invariantes por reordenamiento).
  - ¿ Cuando un espacio $L^p(m)$ es isomorfo a un espacio L^p de una medida escalar ? Caracterizaciones en función de las propiedades de sumabilidad del operador integración.

- Todo retículo de Banach p-convexo, orden continuo y con unidad débil es isomorfo (topológicamente y en orden) a un espacio $L^p(m)$.
- Las propiedades de convexidad de estos espacios permiten obtener información sobre la estructura de los retículos de Banach y la factorización de operadores definidos sobre ellos. Hasta el momento, hemos estudiado principalmente las siguientes:
- Versiones vectoriales del teorema de Maurey-Rosenthal. ¿Cuando un operador a valores en $L^1(m)$ factoriza a través de $L^2(m)$?
- Propiedades de dominación para formas bilineales asociadas al operador integración.
- Teoría de los operadores factorizables a través de la p-potencia. (Optimal Domain and Integral Extension of Operators acting in Function Spaces. Birkhauser)
- Aplicaciones:
  - Representaciones particulares de los espacios L^p de medidas escalares a través de los que factorizan operadores entre retículos de Banach con las propiedades de concavidad y convexidad adecuadas.
  - Contención de espacios L^p de medidas escalares en espacios $L^1(m)$ (conocido en el caso de espacios invariantes por reordenamiento).
  - ¿ Cuando un espacio $L^p(m)$ es isomorfo a un espacio L^p de una medida escalar ? Caracterizaciones en función de las propiedades de sumabilidad del operador integración.

Theorem

(A. Fernández et al.) Sean X e Y retículos de Banach. Sean $n:\Sigma\to X$ y $m:\Gamma\to Y$ medidas vectoriales positivas numerablemente aditivas. Sea $p>1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un operador $T:L^p(n)\to(L^{p'}(m))'$.

(1) *Existe una constante $K>0$ tal que para cada conjunto finito de funciones $f_1,...,f_n\in L^p(n)$, se cumple*

$$\|(\sum_{i=1}^{n}|T(f_i)|^p)^{\frac{1}{p}}\|_{(L^{p'}(m))'}\leq K\|(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^p)^{\frac{1}{p}}\|_{L^p(n)}.$$

(2) *T factoriza de la siguiente forma:*

$$\begin{array}{ccc} L^p(n) & \xrightarrow{\quad T\quad} & (L^{p'}(m))' \\ \downarrow i & & \nearrow i' \\ L^p(\langle n,x_0'\rangle) & \xrightarrow{\hat{T}} & L^p(\langle m,y_0'\rangle) \end{array}$$

donde $x_0'\in B_{X'}$, $y_0'\in B_{Y'}$, i es la inclusión canónica (cociente), i' es el operador adjunto de la inclusión y $\hat{T}$ es la extensión de T.

Theorem

(J.M. Calabuig, J. Rodríguez, E.S.) Sea μ una medida de Rybakov para m. Sean $1 \leq p < \infty$ y $1 < r \leq q$ tales que $1/r = 1/p + 1/q$. Sea $S = B_{(L^1(m))'}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) *Existe una constante $K > 0$ tal que para cada conjunto de funciones $f_1, \dots, f_n \in L^p(m)$ y $g_1, \dots, g_n \in L^q(m)$, se cumple la desigualdad*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \Big\| \int f_i g_i \, dm \Big\|^r \Big)^{1/r} \leq K \Big\| \big(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^p \big)^{1/p} \Big\|_{L^p(m)} \cdot \Big\| \big(\sum_{i=1}^{n} |g_i|^q \big)^{1/q} \Big\|_{L^q(m)}.$$

(2) *Existen un par de elementos $u_0, v_0 \in S$ tales que*

$$\Big\| \int fg \, dm \Big\| \leq K \Big(\int |f|^p u_0 \, d\mu \Big)^{1/p} \cdot \Big(\int |g|^q v_0 \, d\mu \Big)^{1/q}$$

para cada $f \in L^p(m)$ y $g \in L^q(m)$.

(3) La forma bilineal definida por la integral factoriza a través de $L^p(u_0\,d\mu) \times L^q(v_0\,d\mu)$.

(4) Existen dos medidas ν_1 y ν_2 equivalentes a m cuyas derivadas Radon-Nikodým pertenecen a S tales que

$$L^p(\nu_1) \hookrightarrow L^1_{q',\nu_2}(m).$$

(5) Existe un elemento $h_0 \in S$ tal que

$$L^r(m) \subseteq L^r(h_0 d\mu) \subseteq L^1(m).$$

(6) El operador integración $I_m : L^1(m) \to X$ es r-cóncavo.

(7) El conjunto S es acotado cuando se considera como subconjunto de $L^{r'}(\mu)$.

Definition

Sea E un retículo de Banach y sea X un espacio de Banach. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Un operador $T : E \to X$ es positivamente p-sumante si existe una constante $K > 0$ tal que para cada conjunto $z_1, ..., z_n \in E$ de elementos positivos,

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \|Tz_i\|^p\Big)^{1/p} \leq K \sup_{z' \in B_{E'}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |\langle z_i, z'\rangle|^p\Big)^{1/p}.$$

Theorem

Sea $X(\mu)$ un espacio de Banach de funciones orden continuo y con unidad débil. Son equivalentes:

1. *Para cada medida vectorial m que representa el espacio $X(\mu)$ y cada $1 \leq p < \infty$, el operador integración es positivamente p-sumante.*
2. *Existe una medida vectorial m que representa $X(\mu)$ y algún $1 \leq p < \infty$ tal que el operador integración es positivamente p-sumante.*
3. *Existe una medida vectorial m que representa $X(\mu)$ y un $1 \leq p < \infty$ tal que el operador integración es absolutamente p-sumante.*
4. *Existe una medida vectorial m que representa $X(\mu)$ y una función h que pertenece a un subconjunto positivamente normante S para $L^1(m_0)$ tal que that $L^1(m_0) = L^1(h\, d\mu)$.*

Medidas vectoriales y (sub)espacios de $L^1(m)$.

$Y(\mu)$-semivariación.

Sea $m : \Sigma \to E$ una medida vectorial e $Y(\mu)$ un espacio de funciones de Banach (μ equivalente a m). La $Y(\mu)$-semivariación $\|m\|_{Y(\mu)}$ de m se define como

$$\|m\|_{Y(\mu)} := \sup\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{A_i} m(A_i) \right\|_E : \sum_{i=1}^{n} \alpha_{A_i} \chi_{A_i} \in B_{Y(\mu)} \right\}.$$

Espacios $L^1_{Y(\mu)}(m)$.

Definimos $L^1_{Y(\mu)}(m)$ como el espacio de todas las clases (iguales μ-c.p.p.) f de $L^1(m)$ tal que las medidas vectoriales asociadas m_f, tienen $Y(\mu)$-semivariación finita, con la norma

$$\|f\|_{L^1_{Y(\mu)}(m)} := \|m_f\|_{Y(\mu)} = \sup_{\substack{\varphi \text{ simple} \\ \varphi \in B_{Y(\mu)}}} \left\| \int f \varphi dm \right\|_E .$$

$L^1_{Y(\mu)}(m)$ es siempre un subespacio de funciones de Banach de $L^1(m)$.

$Y(\mu)$-semivariación.

Sea $m:\Sigma\to E$ una medida vectorial e $Y(\mu)$ un espacio de funciones de Banach (μ equivalente a m). La $Y(\mu)$-semivariación $\|m\|_{Y(\mu)}$ de m se define como

$$\|m\|_{Y(\mu)} := \sup\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{A_i} m(A_i) \right\|_E : \sum_{i=1}^{n} \alpha_{A_i}\chi_{A_i} \in B_{Y(\mu)} \right\}.$$

Espacios $L^1_{Y(\mu)}(m)$.

Definimos $L^1_{Y(\mu)}(m)$ como el espacio de todas las clases (iguales μ-c.p.p.) f de $L^1(m)$ tal que las medidas vectoriales asociadas m_f, tienen $Y(\mu)$-semivariación finita, con la norma

$$\|f\|_{L^1_{Y(\mu)}(m)} := \|m_f\|_{Y(\mu)} = \sup_{\substack{\varphi \text{ simple} \\ \varphi\in B_{Y(\mu)}}} \left\| \int f\varphi dm \right\|_E .$$

$L^1_{Y(\mu)}(m)$ es siempre un subespacio de funciones de Banach de $L^1(m)$.

Example

Algunos subespacios de $L^1(m)$ bien conocidos se pueden representar como $L^1_{Y(\mu)}(m)$.

1. Como consecuencia de la fórmula equivalente para la semivariación

$$\|m\| = \sup\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{A_i} m(A_i) \right\|_E : \sum_{i=1}^{n} \alpha_{A_i} \chi_{A_i} \in B_{L^\infty(\mu)} \right\} = \|m\|_{L^\infty(\mu)},$$

donde μ es una medida positiva equivalente a m, se puede probar que $L^1(m) = L^1_{L^\infty(\mu)}(m)$.

2. Sea $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/p' = 1$. Es conocido que para cada $f \in L^p(m)$, la expresión

$$\|m_f\|_{L^{p'}(m)} = \sup_{\substack{\varphi \text{ simple} \\ \varphi \in B_{L^{p'}(m)}}} \left\| \int f\varphi dm \right\|_E$$

es igual a $\|f\|_{L^p(m)}$. De hecho, $L^p_w(m) = L^1_{L^{p'}(m)}(m)$.

Example

Algunos subespacios de $L^1(m)$ bien conocidos se pueden representar como $L^1_{Y(\mu)}(m)$.

1. Como consecuencia de la fórmula equivalente para la semivariación

$$\|m\| = \sup\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{A_i} m(A_i) \right\|_E : \sum_{i=1}^{n} \alpha_{A_i} \chi_{A_i} \in B_{L^\infty(\mu)} \right\} = \|m\|_{L^\infty(\mu)},$$

donde μ es una medida positiva equivalente a m, se puede probar que $L^1(m) = L^1_{L^\infty(\mu)}(m)$.

2. Sea $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/p' = 1$. Es conocido que para cada $f \in L^p(m)$, la expresión

$$\|m_f\|_{L^{p'}(m)} = \sup_{\substack{\varphi \text{ simple} \\ \varphi \in B_{L^{p'}(m)}}} \left\| \int f \varphi dm \right\|_E$$

es igual a $\|f\|_{L^p(m)}$. De hecho, $L^p_w(m) = L^1_{L^{p'}(m)}(m)$.

Example

Algunos subespacios de $L^1(m)$ bien conocidos se pueden representar como $L^1_{Y(\mu)}(m)$.

1. Como consecuencia de la fórmula equivalente para la semivariación

$$\|m\| = \sup\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{A_i} m(A_i) \right\|_E : \sum_{i=1}^{n} \alpha_{A_i} \chi_{A_i} \in B_{L^\infty(\mu)} \right\} = \|m\|_{L^\infty(\mu)},$$

   donde μ es una medida positiva equivalente a m, se puede probar que $L^1(m) = L^1_{L^\infty(\mu)}(m)$.

2. Sea $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/p' = 1$. Es conocido que para cada $f \in L^p(m)$, la expresión

$$\|m_f\|_{L^{p'}(m)} = \sup_{\substack{\varphi \text{ simple} \\ \varphi \in B_{L^{p'}(m)}}} \left\| \int f \varphi dm \right\|_E$$

   es igual a $\|f\|_{L^p(m)}$. De hecho, $L^p_w(m) = L^1_{L^{p'}(m)}(m)$.

Example

Algunos subespacios de $L^1(m)$ bien conocidos se pueden representar como $L^1_{Y(\mu)}(m)$.

1. Como consecuencia de la fórmula equivalente para la semivariación

$$\|m\| = \sup\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{A_i} m(A_i) \right\|_E : \sum_{i=1}^{n} \alpha_{A_i} \chi_{A_i} \in B_{L^\infty(\mu)} \right\} = \|m\|_{L^\infty(\mu)},$$

   donde μ es una medida positiva equivalente a m, se puede probar que $L^1(m) = L^1_{L^\infty(\mu)}(m)$.

2. Sea $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/p' = 1$. Es conocido que para cada $f \in L^p(m)$, la expresión

$$\|m_f\|_{L^{p'}(m)} = \sup_{\substack{\varphi \text{ simple} \\ \varphi \in B_{L^{p'}(m)}}} \left\| \int f \varphi dm \right\|_E$$

   es igual a $\|f\|_{L^p(m)}$. De hecho, $L^p_w(m) = L^1_{L^{p'}(m)}(m)$.

- Los espacios $L^1_{p,\mu}(m)$. Consideremos el espacio $Y(\mu) = L^p(\mu)$ (siendo μ una medida positiva finita). En el contexto de ciertas extensiones del teorema de Bennett-Maurey-Nahoum sobre factorizaciones de series incondicionalmente convergentes en $L^1[0,1]$ hemos estudiado el espacio

$$L^1_{p,\mu}(m) := L^1_{L^p(\mu)}(m).$$

$L^1_{p,\mu}(m)$ coincide con el espacio de operadores de multiplicación de $L^{p'}(\mu)$ en $L^1(m)$.

Teoremas de extensión para operadores $Y(\mu)$-extensibles.

Sea $X(\mu)$ un espacio de funciones de Banach. Un operador $T : X(\mu) \to E$ se dice que es μ-determinado si el conjunto de conjuntos $\|m_T\|$-nulos es igual al conjunto de conjuntos μ-nulos.
Sea $Y(\mu)$ un espacio de funciones de Banach que contiene a las funciones simples.

Operadores $Y(\mu)$-extensibles.

Un operador μ-determinado $T : X(\mu) \to E$ es $Y(\mu)$-*extensible* si existe una constante $K > 0$ tal que

$$\|T(f\varphi)\| \leq K \|f\|_{X(\mu)} \|\varphi\|_{Y(\mu)}$$

para cada función $f \in X(\mu)$ y cada función simple φ.

Ejemplos:

- Operadores $L^p(\mu)$-extensibles, asociados a los espacios $L^1_{L^{p'}(\mu)}(m)$ comentados antes.
- Operadores que factorizan a través de la p-potencia. Si $X(\mu)$ (μ finita) es un espacio de Banach de funciones, definimos su p-potencia $X(\mu)_{[p]}$ como el espacio quasi-Banach de las (clases de) funciones medibles f tales que $|f|^{1/p} \in X(\mu)$. La quasi-norma viene dada por $\|f\|_{X_{[p]}} := \||f|^{1/p}\|_X^p$.
Un operador $T : X(\mu) \to E$ es factorizable a través de la p-potencia (p-th power factorable) si existe una constante $K > 0$ tal que para toda $f \in X(\mu)$,
$$\|T(f)\| \leq K \|f\|_{X_{[p]}}.$$
Un operador μ-determinado ($X(\mu)$ orden continuo) es factorizable a través de la p-potencia si factoriza a través del espacio $L^p(m_T)$; como $L^p(m_T)$ está contenido isométricamente en $L^1_{L^{p'}(m_T)}(m_T)$, se puede probar que T es factorizable a través de la p-potencia si y solo si es $L^{p'}(m_T)$-extensible.

Theorem

(J.M. Calabuig, O.Delgado, E.S.) Sea $X(\mu)$ un espacio de funciones de Banach orden continuo y con unidad débil. Sea $Y(\mu)$ un espacio de funciones de Banach que cumple que las funciones simples son densas. Si $T : X(\mu) \to E$ es μ-determinado, son equivalentes:

- *T es $Y(\mu)$-extensible.*
- *T se puede factorizar a través del espacio $L^1_{Y(\mu)}(m_T)$ como*

$$\begin{tikzcd} X(\mu) \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, dotted, "i"'] & & E \\ & L^1_{Y(\mu)}(m_T) \arrow[ur, dotted, "\mathrm{I}_{Y(\mu)}"'] & \end{tikzcd}$$

donde el operador integración $\mathrm{I}_{Y(\mu)}$ es también $Y(\mu)$-extensible.

- Existe una constante $K > 0$ tal que para cada $f \in L^1(m)$

$$\|(m_T)_f\|_{Y(\mu)} \leq K\|f\|_{X(\mu)}$$

  donde $(m_T)_f : \Sigma \to E$ es la medida vectorial dada por $(m_T)_f(A) = \int_A f dm_T$.
- $X(\mu) \cdot Y(\mu) \subseteq L^1(m_T)$.

Theorem

Además, si $Z(\mu)$ es cualquier otro espacio de Banach de funciones que cumple

- *$X(\mu) \subseteq Z(\mu)$,*
- *T se puede extender a $Z(\mu)$ y esa extensión es $Y(\mu)$-extensible,*

entonces $Z(\mu) \subseteq L^1_{Y(\mu)}(m_T)$.

Como en muchos casos los espacios $L^1_{Y(\mu)}(m)$ se pueden representar como espacios de multiplicadores $M(Y(\mu), L^1(m))$, este tipo de factorizaciones nos ha llevado a estudiar los espacios Y-perfectos (espacios Z que cumplen que $M(M(Z,Y),Y) = Z$).

Interpolación de espacios $L^p(m)$.

- Consideremos un par de espacios de funciones de Banach (X_0, X_1), X_0 orden continuo, sobre el mismo espacio de medida (Θ, Λ, η), un espacio medible (Ω, Σ), y un par de medidas vectoriales positivas $m_0 : \Sigma \to X_0$ y $m_1 : \Sigma \to X_1$. Sea $0 < \theta < 1$ y consideremos la interpolación de retículos $X_0^{1-\theta} x_1^{\theta}$.
- Se puede construir una nueva medida vectorial numerablemente aditiva positiva que llamamos la *medida vectorial interpolada* $[m_0, m_1]_\theta : \Sigma \to X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}$:

$$[m_0, m_1]_\theta(A) := lim_\alpha \sum_{i=1}^{n} m_0^{1-\theta}(A_i) m_1^{\theta}(A_i),$$

$A \in \Sigma$

- Estamos interesados en estudiar cuando el siguiente resultado es cierto: *Sea $1 \leq p_0, p_1 < \infty$ y consideremos los espacios $L^{p_0}(m_0)$ y $L^{p_1}(m_1)$. Entonces*

$$[L^{p_0}(m_0), L^{p_1}(m_1)]_\theta = L^r([m_0, m_1]_\alpha)$$

isométricamente, donde $1/r = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ y $\alpha = \theta r/p_1$.

La condición que deben cumplir las medidas m_0 y m_1 para que se cumpla la fórmula de interpolación es lo que hemos llamado la α-compatibilidad, que consiste en que se cumplan los siguientes requisitos:

1) Es necesario que ambas medidas sean positivas.

2) También deben ser equivalentes (mismo conjunto de conjuntos nulos).

3) El espacio $L^1([m_0,m_1]_\theta)$ debe estar contenido en

$$[L^1(m_0),L^1(m_1)]_\theta.$$

continuamente con norma igual a 1.

Theorem

Sea $1 \leq p_j < \infty$, $j = 0,1$, *y* r *tal que* $1/r = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ *y* $\alpha = \frac{r\theta}{p_1}$. *Consideremos dos medidas vectoriales* $m_j : \Sigma \to X_j$, $j = 0,1$ α*-compatibles, and sean dos funciones* $0 \leq f_j \in L^1(m_j)$, $j = 0,1$. *Entonces*

$$[L^{p_0}(f_0 m_0),L^{p_1}(f_1 m_1)]_\theta = L^r(f_0^{1-\alpha} f_1^{\alpha}[m_0,m_1]_\alpha).$$

Aproximación en $L^2(m)$

Definition

Una sucesión $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ de funciones de $L^2(m)$ es m-ortogonal si se cumple que la integral $\int_\Omega f_i f_j dm = 0$ if $i \neq j$ para cada $i,j \in N$, and $\int_\Omega f_i^2 dm \neq 0$ para todo $i \in N$.

Definition

Una función integrable Bochner $\phi : \Omega \to X'$ define una medida paramétrica m_ϕ si la fórmula

$$m_\phi(\omega)(A) := \langle m, \phi(\omega) \rangle (A), \qquad A \in \Sigma$$

es una medida positiva equivalente a μ para todo $\omega \in \Omega$ μ-c.p.p.

Definition

Sea una sucesión m-ortogonal $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ y una función integrable Bochner ϕ que define la medida paramétrica m_ϕ. Sea $i \in N$ y B_i el conjunto medible

$$B_i = \{\omega \in \Omega : \langle \int_\Omega f_i^2 dm, \phi(\omega) \rangle = 0\}.$$

Definition

Definimos el i-ésimo *coeficiente de Fourier puntualmente dependiente* de una función $g \in L_2(m)$ como

$$\alpha_i^\phi(\omega) := \frac{\int_\Omega g f_i \, dm_\phi(\omega)}{\int_\Omega f_i^2 \, dm_\phi(\omega)}, \qquad si \quad \omega \in \Omega - B_i,$$

y $\alpha_i^\phi(\omega) := 0$ en otro caso.

Definition

Una sucesión de funciones medibles $(\beta_i(\omega))_{i=1}^{\infty}$, $\beta_i : \Omega \to R$, es compatible con la sucesión m-ortonormal $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ si la función

$$\psi(\omega) := \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(\omega) f_i(\eta)\right)^2 dm_{\phi}(\omega)(\eta)\right)^{\frac{1}{2}}$$

está definida μ-c.p.p. y pertenece a $L_2(\mu)$.

Lemma

Sea $\phi \in L_1(\mu, X')$ una función que define una medida parametrizada m_ϕ y sea $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión m-ortogonal. Sea $g \in L_2(m)$. Entonces la sucesión correspondiente de coeficientes de Fourier puntualmente dependientes $(\alpha_i^{\phi})_{i=1}^{\infty}$ es compatible con $(f_i)_{i=1}^{\infty}$.

Definition

Sea $g \in L_2(m)$ y consideremos una sucesión de funciones $(\beta_i)_{i=1}^\infty$ que es compatible con $(f_i)_{i=1}^\infty$. Definimos el error ε asociado a $g \in L_2(m)$ y la sucesión $(\beta_i)_{i=1}^\infty$ como

$$\varepsilon(g,(\beta_i)_{i=1}^\infty) := \int_\Omega \Big(\int_\Omega (g(\eta) - \sum_{i=1}^\infty \beta_i(\omega) f_i(\eta))^2 d\langle m(\eta), \phi(\omega)\rangle \Big) d\mu(\omega).$$

Theorem

Sea $\phi \in L_1(\mu, X')$ una función que define una medida parametrizada m_ϕ, y sea $g \in L_2(m)$. Sea $(f_i)_{i=1}^\infty$ un sistema m-ortogonal. Si $(\beta_i(\omega))_{i=1}^\infty$ es una sucesión compatible con $(f_i)_{i=1}^\infty$, entonces

$$\varepsilon(g,(\alpha_i^\phi)_{i=1}^\infty) \le \varepsilon(g,(\beta_i)_{i=1}^\infty).$$

Ejemplo: Consideremos la medida vectorial $\lambda_0 : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\lambda_0(A) := \sum_{j=1}^{3} \mu_0(A \cap [j-1,j])e_j, \qquad A \in \Sigma,$$

siendo $([0,3],\Sigma,\mu_0)$ el espacio de medida de Lebesgue. Los siguientes polinomios son λ_0-ortogonales.
$p_1(x) := 1$,
$p_2(x) := \frac{3}{2} - \frac{11}{2}x + \frac{9}{2}x^2 - x^3$,
$p_3(x) := \frac{171}{175} - \frac{63}{5}x + \frac{393}{10}x^2 - \frac{252}{5}x^3 + \frac{309}{10}x^4 - 9x^5 + x^6$.
Sea $g(x) := \frac{3,5}{10x^2+1} + 2e^{(-3(x-1,5)^2)} \in L^2(\lambda_0)$. Consideremos diferentes funciones ϕ.
(1) Sea $\phi_1(x) := \sum_{j=1}^{3} \chi_{[j-1,j]}(x)e_j$. Los coeficientes de Fourier son las funciones

$$\alpha_i^{\phi_1}(x) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\int_{[j-1,j]} p_i g d\mu_0}{\int_{[j-1,j]} p_i^2 d\mu_0} \chi_{[j-1,j]}(x),$$

$i = 1,2,3$. Así, la aproximación obtenida a g es

$$h_1(x) := \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{\phi_1}(x)p_i(x).$$

(2) Sea $\phi_2(x) := \chi_{[0,3]} \frac{(e_1+e_2+e_3)}{\sqrt{3}}$. Los coeficientes $\alpha_i^{\phi_2}$, $i = 1,2,3$, son este caso constantes, coinciden con los del espacio de Hilbert $L_2(\mu_0)$.

$$h_2(x) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{\phi_2} p_i(x) = 1{,}22283 p_1(x) + 0{,}735055 p_2(x) + 0{,}104471 p_3(x).$$

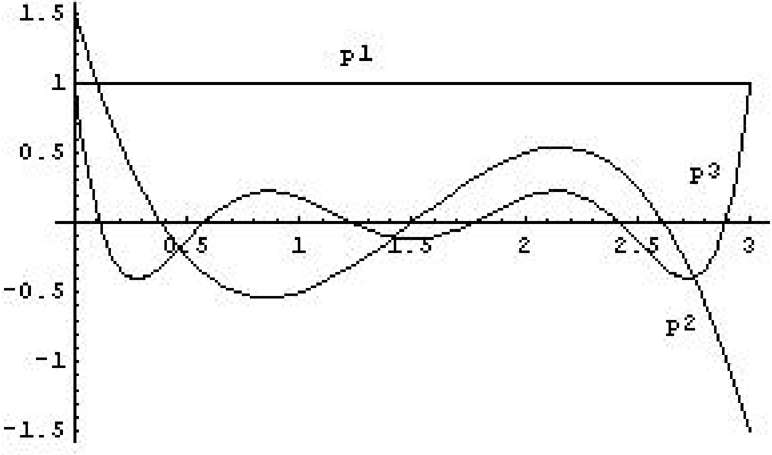
(3) Finalmente, sea $\psi(x) := \sum_{j=1}^{3} exp(-(x-(j-\frac{1}{2}))^2) e_j$, y definamos la función

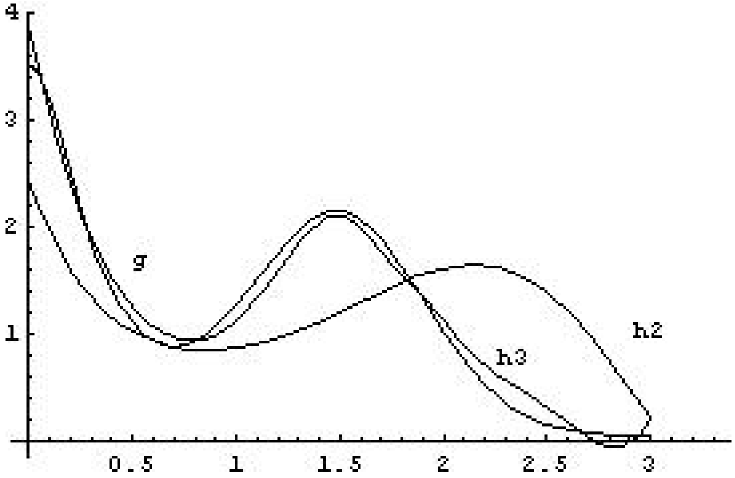
$$\phi_3(x) := \frac{\psi(x)}{\|\psi(x)\|}, \qquad x \in [0,3].$$

En este caso, la aproximación obtenida es $h_3(x) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{\phi_3}(x) p_i(x)$, siendo

$$\alpha_i^{\phi_3}(x) = \frac{\sum_{j=1}^{3} (\int_{[j-1,j]} f_i g d\mu_0) exp(-(x-(j-\frac{1}{2}))^2)}{\sum_{j=1}^{3} (\int_{[j-1,j]} f_i^2 d\mu_0) exp(-(x-(j-\frac{1}{2}))^2)},$$

$i = 1,2,3$.


1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
p1
p2
p3


4
3
2
1
0.5
1
1.5
2
2.5
3
g
h2
h3

Aplicaciones: scattering cuántico

- La teoría de scattering se puede considerar como parte de la teoría de perturbaciones en física. La idea principal es que obtener una información detallada sobre el operador autoadjunto H_0 (el hamiltoniano libre) nos permite obtener conclusiones sobre otro operador autoadjunto H (el hamiltoniano total $H = H_0 + V$, donde V es el potencial), siempre que H_0 y H difieren poco uno del otro.
- Existen dos posibles formas de enfrentarse a este problema:
(1) En la teoría de scattering dependiente del tiempo, se considera la evolución temporal del paquete de ondas asociado a una partícula bajo la influencia de la interacción con otra partícula (centro de scattering). El comportamiento asintótico de este paquete de ondas en el pasado y en el futuro lejanos es entonces aproximadamente el de la partícula libre. La transición entre ambos estados viene representada por el operador de scattering S, que contiene toda la información observable del sistema de scattering.
(2) En la teoría estacionaria, se estudian soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Estas soluciones vienen caracterizadas por ciertas propiedades asintóticas a gran distancia del centro de scattering. Los observables, en particular el operador de scattering, S, se obtienen a partir de las propiedades asintóticas de tales soluciones. **Los dos métodos son matemáticamente muy distintos.**

- El problema principal para pasar de un formalismo a otro es el siguiente: las magnitudes básicas en la teoría dependiente del tiempo se expresan en términos de una integral de Bochner a valores en un espacio de operadores, que pueden expresarse como integrales espectrales. Esta representación es conocida; para obtener el paso al formalismo independiente del tiempo, es necesario probar un teorema de Fubini adecuado, para la integración bilineal de funciones que toman valores en espacios de operadores, como las siguientes:

Definition

Una función $f:\Omega \to X_2$ es integrable respecto de la medida $m:\mathscr{S} \to Y_2$ en $X_2 \hat{\otimes}_\tau Y_2$ si para todo $x_2' \in X_2'$ e $y_2' \in Y_2'$, la función $\langle f, x_2' \rangle$ es integrable con respecto de la medida escalar $\langle m, y_2' \rangle$, y para cada $S \in \mathscr{S}$ existe $f \otimes m(S) \in X_2 \hat{\otimes}_\tau Y_2$ tal que

$$\langle f \otimes m(S), x_2' \otimes y_2' \rangle = \int_S \langle f, x_2' \rangle d\langle m, y_2' \rangle, \ \forall x_2' \in X_2',\ y_2' \in Y_2' \qquad (1)$$

Algunas referencias

- Calabuig, J.M., Delgado, O. and Sánchez Pérez, E.A. *Generalized perfect spaces*. Preprint.
- Calabuig J.M., Galaz F., Jiménez Fernández E. and Sánchez Pérez E.A., *Strong factorization of operators on spaces of vector measure integrable functions and unconditional convergence of series*. To appear in Mathematische Zeitschrift.
- Calabuig,J.M., Rodríguez, J. and Sánchez Pérez, E.A. *Vector measure representations of Banach function spaces containing L^p-spaces*. Preprint.
- Fernández, A., Mayoral, F., Naranjo, F., Sáez, C. and Sánchez-Pérez, E.A.: *Spaces of p-integrable functions with respect to a vector measure.*, Positivity, **10**(2006), 1-16.
- Okada, S., Ricker, W.J. and Sánchez Pérez, E.A., *Optimal Domains and Integral Extensions of Operators acting in Function Spaces*, Birkhauser, Basel, 2008 (to appear).
- Sánchez Pérez E.A., *Compactness arguments for spaces of p-integrable functions with respect to a vector measure and factorization of operators through Lebesgue-Bochner spaces*. Illinois J. Math. **45**,3(2001), 907-923.