Dualidad vectorial en espacios $L^p(m)$ y aplicaciones

I. Ferrando

Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada (I.U.M.P.A.).
Universidad Politécnica de Valencia.
Camino de Vera S/N, 46022, Valencia.

Index

1. **Preliminares**
2. **Dualidad vectorial**
   - Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m), X)$
   - Convergencia débil
3. **Teorema de Representación**
4. **Operadores de Multiplicación**
   - Entre espacios $L^p(m)$
   - Entre espacios de Orlicz

Index

1 **Preliminares**

2 Dualidad vectorial

Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m), X)$

Convergencia débil

3 Teorema de Representación

4 Operadores de Multiplicación

Entre espacios $L^p(m)$

Entre espacios de Orlicz

Notación

- X un espacio de Banach, $B(X)$ su bola unidad, X^* su dual y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida.
- $\mathscr{L}(X, Y)$ espacio de operadores lineales y continuos entre espacios de Banach X e Y.
- Un retículo de Banach $(Z, \|\cdot\|_Z)$ tiene la propiedad σ–Fatou si para cada $\{z_n\}_n \subseteq Z^+$ existe $x := \bigvee_n z_n \in Z$ y además $\|z_n\|_Z \uparrow \|z\|_Z$.
- $L^0(\mu)$ es el espacio de (clases de) funciones reales Σ–médibles.

Notación

- X un espacio de Banach, $B(X)$ su bola unidad, X^* su dual y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida.
- $\mathscr{L}(X, Y)$ espacio de operadores lineales y continuos entre espacios de Banach X e Y.
- Un retículo de Banach $(Z, \|\cdot\|_Z)$ tiene la propiedad σ–Fatou si para cada $\{z_n\}_n \subseteq Z^+$ existe $x := \bigvee_n z_n \in Z$ y además $\|z_n\|_Z \uparrow \|z\|_Z$.
- $L^0(\mu)$ es el espacio de (clases de) funciones reales Σ–médibles.

Notación

- X un espacio de Banach, $B(X)$ su bola unidad, X^* su dual y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida.
- $\mathscr{L}(X, Y)$ espacio de operadores lineales y continuos entre espacios de Banach X e Y.
- Un retículo de Banach $(Z, \|\cdot\|_Z)$ tiene la propiedad σ–Fatou si para cada $\{z_n\}_n \subseteq Z^+$ existe $x := \bigvee_n z_n \in Z$ y además $\|z_n\|_Z \uparrow \|z\|_Z$.
- $L^0(\mu)$ es el espacio de (clases de) funciones reales Σ–médibles.

Notación

- X un espacio de Banach, $B(X)$ su bola unidad, X^* su dual y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida.
- $\mathscr{L}(X, Y)$ espacio de operadores lineales y continuos entre espacios de Banach X e Y.
- Un retículo de Banach $(Z, \|\cdot\|_Z)$ tiene la propiedad σ–Fatou si para cada $\{z_n\}_n \subseteq Z^+$ existe $x := \bigvee_n z_n \in Z$ y además $\|z_n\|_Z \uparrow \|z\|_Z$.
- $L^0(\mu)$ es el espacio de (clases de) funciones reales Σ–médibles.

Notación

- $X(\mu)$ es un espacio de Banach de funciones, una función positiva $e \in X(\mu)$ es una unidad débil si $f \wedge (ne) \uparrow f$ para cada $f \in X(\mu)^+$.
- $X(\mu)$ es orden continuo si para $\{f_\alpha\} \subset X(\mu)^+$ tal que $inf_\alpha(f_\alpha) = 0$ se sigue $lim_\alpha \|f_\alpha\| = 0$.
- El dual de Köthe de $X(\mu)$ se define como $X(\mu)^\times := \{g \in L^0(\mu) : g \cdot X(\mu) \subseteq L^1(\mu)\}$.
- $1 < p, q < \infty$ tales que $1 = 1/p + 1/q$.

Notación

- $X(\mu)$ es un espacio de Banach de funciones, una función positiva $e \in X(\mu)$ es una unidad débil si $f \wedge (ne) \uparrow f$ para cada $f \in X(\mu)^+$.

- $X(\mu)$ es orden continuo si para $\{f_\alpha\} \subset X(\mu)^+$ tal que $inf_\alpha(f_\alpha) = 0$ se sigue $lim_\alpha \|f_\alpha\| = 0$.

- El dual de Köthe de $X(\mu)$ se define como $X(\mu)^\times := \{g \in L^0(\mu) : g \cdot X(\mu) \subseteq L^1(\mu)\}$.

- $1 < p,q < \infty$ tales que $1 = 1/p + 1/q$.

Notación

- $X(\mu)$ es un espacio de Banach de funciones, una función positiva $e \in X(\mu)$ es una unidad débil si $f \wedge (ne) \uparrow f$ para cada $f \in X(\mu)^+$.

- $X(\mu)$ es orden continuo si para $\{f_\alpha\} \subset X(\mu)^+$ tal que $inf_\alpha(f_\alpha) = 0$ se sigue $lim_\alpha \|f_\alpha\| = 0$.

- El dual de Köthe de $X(\mu)$ se define como $X(\mu)^\times := \{g \in L^0(\mu) : g \cdot X(\mu) \subseteq L^1(\mu)\}$.

- $1 < p, q < \infty$ tales que $1 = 1/p + 1/q$.

Notación

- $X(\mu)$ es un espacio de Banach de funciones, una función positiva $e \in X(\mu)$ es una unidad débil si $f \wedge (ne) \uparrow f$ para cada $f \in X(\mu)^+$.
- $X(\mu)$ es orden continuo si para $\{f_\alpha\} \subset X(\mu)^+$ tal que $inf_\alpha(f_\alpha) = 0$ se sigue $lim_\alpha \|f_\alpha\| = 0$.
- El dual de Köthe de $X(\mu)$ se define como $X(\mu)^\times := \{g \in L^0(\mu) : g \cdot X(\mu) \subseteq L^1(\mu)\}$.
- $1 < p, q < \infty$ tales que $1 = 1/p + 1/q$.

- $m : \Sigma \to X$ una medida σ–aditiva, i.e. para $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ conjuntos disjuntos en Σ,

$$m(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

- $\|m\|$ es la semivariación de m definida para $B \in \Sigma$ por

$$\|m\|(B) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle m, x^* \rangle|(B) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_{\pi \in \mathscr{P}(B)} \sum_{B_i \in \pi} |\langle m(B_i), x^* \rangle|$$

- $\mu : \Sigma \to [0, +\infty)$ es una medida de control para m si son mutuamente absolutamente continuas.

- El Teorema de Rybakov asegura que existe $x_0^* \in X^*$ tal que $|\langle m, x_0^* \rangle|$ es de control para m, $\lambda := |\langle m, x_0^* \rangle|$ es una medida de Rybakov.

- $m : \Sigma \to X$ una medida σ–aditiva, i.e. para $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ conjuntos disjuntos en Σ,

$$m(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

- $\|m\|$ es la semivariación de m definida para $B \in \Sigma$ por

$$\|m\|(B) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle m, x^* \rangle|(B) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_{\pi \in \mathscr{P}(B)} \sum_{B_i \in \pi} |\langle m(B_i), x^* \rangle|$$

- $\mu : \Sigma \to [0, +\infty)$ es una medida de control para m si son mutuamente absolutamente continuas.

- El Teorema de Rybakov asegura que existe $x_0^* \in X^*$ tal que $|\langle m, x_0^* \rangle|$ es de control para m, $\lambda := |\langle m, x_0^* \rangle|$ es una medida de Rybakov.

- $m : \Sigma \to X$ una medida σ–aditiva, i.e. para $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ conjuntos disjuntos en Σ,

$$m(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty m(A_i).$$

- $\|m\|$ es la semivariación de m definida para $B \in \Sigma$ por

$$\|m\|(B) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle m, x^* \rangle|(B) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_{\pi \in \mathscr{P}(B)} \sum_{B_i \in \pi} |\langle m(B_i), x^* \rangle|$$

- $\mu : \Sigma \to [0, +\infty)$ es una medida de control para m si son mutuamente absolutamente continuas.

- El Teorema de Rybakov asegura que existe $x_0^* \in X^*$ tal que $|\langle m, x_0^* \rangle|$ es de control para m, $\lambda := |\langle m, x_0^* \rangle|$ es una medida de Rybakov.

- $m : \Sigma \to X$ una medida σ–aditiva, i.e. para $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ conjuntos disjuntos en Σ,

$$m(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

- $\|m\|$ es la semivariación de m definida para $B \in \Sigma$ por

$$\|m\|(B) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle m, x^* \rangle|(B) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_{\pi \in \mathscr{P}(B)} \sum_{B_i \in \pi} |\langle m(B_i), x^* \rangle|$$

- $\mu : \Sigma \to [0, +\infty)$ es una medida de control para m si son mutuamente absolutamente continuas.

- El Teorema de Rybakov asegura que existe $x_0^* \in X^*$ tal que $|\langle m, x_0^* \rangle|$ es de control para m, $\lambda := |\langle m, x_0^* \rangle|$ es una medida de Rybakov.

Integrabilidad débil con respecto a una medida vectorial

1. $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$ es débil integrable con respecto a m si $f \in L^1(\langle m, x^* \rangle)$ para todo $x^* \in X^*$. Para cada $A \in \Sigma$ existe $x_A \in X^{**}$ tal que
2. $L^1_w(m)$ es el espacio de (clases de) funciones débil integrables.
3. Su norma viene dada por

$$\|f\|_1 := \sup \left\{ \int_\Omega |f| \, d|\langle m, x^* \rangle| : \|x^*\| \leq 1 \right\}, \ f \in L^1_w(m).$$

Stefansson, G.F.,
L_1 of a vector measure,
Le Matematiche, 48(1993),219–234.

Integrabilidad débil con respecto a una medida vectorial

1. $f \in \mathcal{L}^0(\lambda)$ es débil integrable con respecto a m si $f \in L^1(\langle m, x^* \rangle)$ para todo $x^* \in X^*$. Para cada $A \in \Sigma$ existe $x_A \in X^{**}$ tal que

$$\langle x_A, x^* \rangle = \int_A f d\langle m, x^* \rangle \text{ para cada } x^* \in X^*.$$

2. $L^1_w(m)$ es el espacio de (clases de) funciones débil integrables.
3. Su norma viene dada por

$$\|f\|_1 := \sup \left\{ \int_\Omega |f|\, d|\langle m, x^* \rangle| : \|x^*\| \leq 1 \right\}, \; f \in L^1_w(m).$$

Stefansson, G.F.,
L_1 of a vector measure,
Le Matematiche, 48(1993),219–234.

Integrabilidad débil con respecto a una medida vectorial

1. $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$ es débil integrable con respecto a m si $f \in L^1(\langle m, x^* \rangle)$ para todo $x^* \in X^*$. Para cada $A \in \Sigma$ existe $x_A \in X^{**}$ tal que

$$\langle \int_A f dm, x^* \rangle = \int_A f d\langle m, x^* \rangle \text{ para todo } x^* \in X^*.$$

2. $L^1_w(m)$ es el espacio de (clases de) funciones débil integrables.
3. Su norma viene dada por

$$\|f\|_1 := \sup \left\{ \int_\Omega |f| \, d|\langle m, x^* \rangle| : \|x^*\| \leq 1 \right\}, \ f \in L^1_w(m).$$

Stefansson, G.F.,
L_1 of a vector measure,
Le Matematiche, 48(1993),219–234.

Integrabilidad débil con respecto a una medida vectorial

1. $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$ es débil integrable con respecto a m si $f \in L^1(\langle m, x^* \rangle)$ para todo $x^* \in X^*$. Para cada $A \in \Sigma$ existe $x_A \in X^{**}$ tal que

$$\langle \int_A f dm, x^* \rangle = \int_A f d\langle m, x^* \rangle \text{ para todo } x^* \in X^*.$$

2. $L^1_w(m)$ es el espacio de (clases de) funciones débil integrables.
3. Su norma viene dada por

$$\|f\|_1 := \sup \left\{ \int_\Omega |f|\, d|\langle m, x^* \rangle| : \|x^*\| \le 1 \right\}, \; f \in L^1_w(m).$$

Stefansson, G.F.,
L_1 of a vector measure,
Le Matematiche, 48(1993),219–234.

Integrabilidad débil con respecto a una medida vectorial

1. $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$ es débil integrable con respecto a m si $f \in L^1(\langle m, x^* \rangle)$ para todo $x^* \in X^*$. Para cada $A \in \Sigma$ existe $x_A \in X^{**}$ tal que

$$\langle \int_A f dm, x^* \rangle = \int_A f d\langle m, x^* \rangle \text{ para todo } x^* \in X^*.$$

2. $L^1_w(m)$ es el espacio de (clases de) funciones débil integrables.
3. Su norma viene dada por

$$\|f\|_1 := \sup \left\{ \int_\Omega |f| \, d \, |\langle m, x^* \rangle| : \|x^*\| \leq 1 \right\}, \ f \in L^1_w(m).$$

Stefansson, G.F.,
L_1 of a vector measure,
Le Matematiche, 48(1993),219–234.

Integrabilidad débil con respecto a una medida vectorial

1. $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$ es débil integrable con respecto a m si $f \in L^1(\langle m, x^* \rangle)$ para todo $x^* \in X^*$. Para cada $A \in \Sigma$ existe $x_A \in X^{**}$ tal que

$$\langle \int_A f dm, x^* \rangle = \int_A f d\langle m, x^* \rangle \text{ para todo } x^* \in X^*.$$

2. $L^1_w(m)$ es el espacio de (clases de) funciones débil integrables.
3. Su norma viene dada por

$$\|f\|_1 := \sup \left\{ \int_\Omega |f|\, d|\langle m, x^* \rangle| : \|x^*\| \leq 1 \right\}, \; f \in L^1_w(m).$$

4. $(L^1_w(m), \|\cdot\|_1)$ es un retículo de Banach con la propiedad σ–Fatou.

Integrabilidad débil con respecto a una medida vectorial

1. $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$ es débil integrable con respecto a m si $f \in L^1(\langle m, x^* \rangle)$ para todo $x^* \in X^*$. Para cada $A \in \Sigma$ existe $x_A \in X^{**}$ tal que

$$\langle \int_A f dm, x^* \rangle = \int_A f d\langle m, x^* \rangle \text{ para todo } x^* \in X^*.$$

2. $L^1_w(m)$ es el espacio de (clases de) funciones débil integrables.
3. Su norma viene dada por

$$\|f\|_1 := \sup \left\{ \int_\Omega |f| \, d \, |\langle m, x^* \rangle| : \|x^*\| \leq 1 \right\}, \ f \in L^1_w(m).$$

Stefansson, G.F.,
L_1 of a vector measure,
Le Matematiche, **48**(1993),219–234.

Integrabilidad respecto a una medida vectorial

- $f \in L^1_w(m)$ is integrable con respecto a m si el vector $\int_A f dm \in X$ para todo $A \in \Sigma$. $L^1(m)$ es un ideal cerrado de $L^1_w(m)$.
- $(L^1(m), \|\cdot\|_1)$ con el orden natural λ-a.e. es un retículo de Banach orden continuo con unidad débil.

R.G. Bartle, N. Dunford and J. Schwartz,
Weak compactness and vector measures,
Canad. J. Math., **7**(1955), 289–305.

D.R. Lewis,
Integration with respect to vector measures,
Pacific J. Math., **33**(1970),157–165.

Integrabilidad respecto a una medida vectorial

- $f \in L^1_w(m)$ is integrable con respecto a m si el vector $\int_A f dm \in X$ para todo $A \in \Sigma$. $L^1(m)$ es un ideal cerrado de $L^1_w(m)$.
- $(L^1(m), \|\cdot\|_1)$ con el orden natural λ-a.e. es un retículo de Banach orden continuo con unidad débil.

R.G. Bartle, N. Dunford and J. Schwartz,
Weak compactness and vector measures,
Canad. J. Math., **7**(1955), 289–305.

D.R. Lewis,
Integration with respect to vector measures,
Pacific J. Math., **33**(1970),157–165.

Funciones p-integrables

1. Si $1<p<\infty$, $f\in\mathcal{L}^0(\lambda)$ es débil p-integrable con respecto a m si $|f|^p\in L^1_w(m)$ y p-integrable si $|f|^p\in L^1(m)$.
2. La norma viene dada por

$$\|f\|_p := \sup\left\{\int_\Omega |f|^p d|\langle m,x^*\rangle|\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad f\in L^p_w(m).$$

$\mathscr{S}(\Sigma)$ es denso en el espacio de funciones p-integrables. $(L^p(m),\|\cdot\|_p)$ es un retículo de Banach orden continuo con unidad débil.

A. Fernández et al.
Spaces of p–integrable functions with respect to a vector measure
Positivity, **10** (2006), 1–16.

E.A. Sánchez Pérez,
Compactness arguments for spaces of p-integrable functions with respect to a vector measure and factorization of operators through Lebesgue-Bochner spaces,
Illinois J. Math. **43**,3(2001), 907–923.

Funciones p-integrables

1. Si $1 < p < \infty$, $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$ es débil p-integrable con respecto a m si $|f|^p \in L^1_w(m)$ y p-integrable si $|f|^p \in L^1(m)$.
2. La norma viene dada por

$$\|f\|_p := \sup\left\{\int_\Omega |f|^p d|\langle m, x^*\rangle|\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^p_w(m).$$

$\mathscr{S}(\Sigma)$ es denso en el espacio de funciones p-integrables.
$(L^p(m), \|\cdot\|_p)$ es un retículo de Banach orden continuo con unidad débil.

A. Fernández et al.
Spaces of p–integrable functions with respect to a vector measure
Positivity, **10** (2006), 1–16.

E.A. Sánchez Pérez,
Compactness arguments for spaces of p-integrable functions with respect to a vector measure and factorization of operators through Lebesgue-Bochner spaces,
Illinois J. Math. **43**,3(2001), 907–923.

Funciones p-integrables

1. Si $1 < p < \infty$, $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$ es débil p-integrable con respecto a m si $|f|^p \in L^1_w(m)$ y p-integrable si $|f|^p \in L^1(m)$.
2. La norma viene dada por

$$\|f\|_p := \sup\left\{ \int_\Omega |f|^p d|\langle m, x^* \rangle| \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^p_w(m).$$

$\mathscr{S}(\Sigma)$ es denso en el espacio de funciones p-integrables.
$(L^p(m), \|\cdot\|_p)$ es un retículo de Banach orden continuo con unidad débil.

A. Fernández et al.
Spaces of p–integrable functions with respect to a vector measure
Positivity, **10** (2006), 1–16.

E.A. Sánchez Pérez,
Compactness arguments for spaces of p-integrable functions with respect to a vector measure and factorization of operators through Lebesgue-Bochner spaces,
Illinois J. Math. **43,3**(2001), 907–923.

Funciones p-integrables

1. Si $1 < p < \infty$, $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$ es débil p-integrable con respecto a m si $|f|^p \in L^1_w(m)$ y p-integrable si $|f|^p \in L^1(m)$.
2. La norma viene dada por

$$\|f\|_p := \sup \left\{ \int_\Omega |f|^p d|\langle m, x^* \rangle| \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^p_w(m).$$

$\mathscr{S}(\Sigma)$ es denso en el espacio de funciones p-integrables. $(L^p(m), \|\cdot\|_p)$ es un retículo de Banach orden continuo con unidad débil.

A. Fernández et al.
Spaces of p–integrable functions with respect to a vector measure
Positivity, **10** (2006), 1–16.

E.A. Sánchez Pérez,
Compactness arguments for spaces of p-integrable functions with respect to a vector measure and factorization of operators through Lebesgue-Bochner spaces,
Illinois J. Math. **43,3**(2001), 907–923.

Teoremas de representación

Teorema(G.P. Curbera)

Sea E un retículo de Banach orden continuo con unidad débil, existe una medida vectorial m tal que E y $L^1(m)$ son isométricos en orden.

Teorema(A. Fernández et al.)

Si E es un retículo de Banach p–convexo, orden continuo y con unidad débil, entonces existe una medida vectorial m con valores en E tal que E y $L^p(m)$ son orden isomorfos.

Teorema(G. P. Curbera, W. J. Ricker)

Sea $1 \leq p < \infty$ y E es un retículo de Banach p–convexo, σ–Fatou con unidad débil en su parte orden continua, entonces existe una medida vectorial m con valores en E_a tal que E y $L^p_w(m)$ son orden isomorfos.

S. Okada, W. J. Ricker and E.A. Sánchez Pérez,
Optimal Domain and Integral Extensions of Operators acting in Function Spaces,
Birkhauser, Operator Theory To appear

Teoremas de representación

Teorema(G.P. Curbera)

Sea E un retículo de Banach orden continuo con unidad débil, existe una medida vectorial m tal que E y $L^1(m)$ son isométricos en orden.

Teorema(A. Fernández et al.)

Si E es un retículo de Banach p–convexo, orden continuo y con unidad débil, entonces existe una medida vectorial m con valores en E tal que E y $L^p(m)$ son orden isomorfos.

Teorema(G. P. Curbera, W. J. Ricker)

Sea $1 \leq p < \infty$ y E es un retículo de Banach p–convexo, σ–Fatou con unidad débil en su parte orden continua, entonces existe una medida vectorial m con valores en E_a tal que E y $L^p_w(m)$ son orden isomorfos.

S. Okada, W. J. Ricker and E.A. Sánchez Pérez,
Optimal Domain and Integral Extensions of Operators acting in Function Spaces,
Birkhauser, Operator Theory To appear

Teoremas de representación

Teorema(G.P. Curbera)

Sea E un retículo de Banach orden continuo con unidad débil, existe una medida vectorial m tal que E y $L^1(m)$ son isométricos en orden.

Teorema(A. Fernández et al.)

Si E es un retículo de Banach p–convexo, orden continuo y con unidad débil, entonces existe una medida vectorial m con valores en E tal que E y $L^p(m)$ son orden isomorfos.

Teorema(G. P. Curbera, W. J. Ricker)

Sea $1 \leq p < \infty$ y E es un retículo de Banach p–convexo, σ–Fatou con unidad débil en su parte orden continua, entonces existe una medida vectorial m con valores en E_a tal que E y $L^p_w(m)$ son orden isomorfos.

S. Okada, W. J. Ricker and E.A. Sánchez Pérez,
Optimal Domain and Integral Extensions of Operators acting in Function Spaces,
Birkhauser, Operator Theory To appear

Teoremas de representación

Teorema(G.P. Curbera)

Sea E un retículo de Banach orden continuo con unidad débil, existe una medida vectorial m tal que E y $L^1(m)$ son isométricos en orden.

Teorema(A. Fernández et al.)

Si E es un retículo de Banach p–convexo, orden continuo y con unidad débil, entonces existe una medida vectorial m con valores en E tal que E y $L^p(m)$ son orden isomorfos.

Teorema(G. P. Curbera, W. J. Ricker)

Sea $1 \leq p < \infty$ y E es un retículo de Banach p–convexo, σ–Fatou con unidad débil en su parte orden continua, entonces existe una medida vectorial m con valores en E_a tal que E y $L^p_w(m)$ son orden isomorfos.

S. Okada, W. J. Ricker and E.A. Sánchez Pérez,
Optimal Domain and Integral Extensions of Operators acting in Function Spaces,
Birkhauser, Operator Theory To appear

El operador integración

Asociado a $L^1(m)$ definimos el *operador integración* $I : L^1(m) \longrightarrow X$ dado por

$$f \longmapsto \int_\Omega f dm.$$

I es siempre lineal, continuo y de norma igual a 1.

Para $g \in \mathscr{L}^0(\lambda)$ podemos considerar el *operador multiplicación*

$$M_g : f \in L^0(\lambda) \longrightarrow M_g(f) = gf \in L^0(\lambda).$$

El operador integración

Asociado a $L^1(m)$ definimos el *operador integración* $I : L^1(m) \longrightarrow X$ dado por

$$f \longmapsto \int_\Omega f dm.$$

I es siempre lineal, continuo y de norma igual a 1.

Para $g \in \mathscr{L}^0(\lambda)$ podemos considerar el *operador multiplicación*

$$M_g : f \in L^0(\lambda) \longrightarrow M_g(f) = gf \in L^0(\lambda).$$

Propiedades útiles

Para $p, q > 1$**,** $g \in L^q(m)$

$$L^q(m) \cdot L^p(m) = L^q_w(m) \cdot L^p(m) = L^1(m).$$

Propiedades útiles

Para $p, q > 1$, $g \in L^q(m)$

1. $$L^q(m) \cdot L^p(m) = L^q_w(m) \cdot L^p(m) = L^1(m).$$

$$L^q(m) \cdot L^p(m) = L^q_w(m) \cdot L^p(m) = L^1(m).$$

Propiedades útiles

Para $p, q > 1$**,** $g \in L^q(m)$

1. $L^q(m) \cdot L^p(m) = L^q_w(m) \cdot L^p(m) = L^1(m)$.

2. $$L^q_w(m) \cdot L^p_w(m) = L^1_w(m).$$

Propiedades útiles

Para $p, q > 1$**,** $g \in L^q(m)$

1. $L^q(m) \cdot L^p(m) = L^q_w(m) \cdot L^p(m) = L^1(m)$.
2. $L^q_w(m) \cdot L^p_w(m) = L^1_w(m)$.
3. $M_g : L^p(m) \to L^1(m)$, $M_g(f) := gf$, es un operador lineal y continuo tal que: $\|M_g(f)\|_1 \leq \|g\|_q . \|f\|_p$.

Propiedades útiles

Para $p, q > 1$**,** $g \in L^q(m)$

1. $L^q(m) \cdot L^p(m) = L^q_w(m) \cdot L^p(m) = L^1(m)$.
2. $L^q_w(m) \cdot L^p_w(m) = L^1_w(m)$.
3. $M_g : L^p(m) \to L^1(m)$, $M_g(f) := gf$, es un operador lineal y continuo tal que: $\|M_g(f)\|_1 \leq \|g\|_q . \|f\|_p$.
4. $f \in L^p(m)$, $\|f\|_p = \sup\{\|fg\|_1 : \|g\|_q \leq 1\}$.

Propiedades útiles

Para $p, q > 1$**,** $g \in L^q(m)$

1. $L^q(m) \cdot L^p(m) = L^q_w(m) \cdot L^p(m) = L^1(m)$.
2. $L^q_w(m) \cdot L^p_w(m) = L^1_w(m)$.
3. $M_g : L^p(m) \to L^1(m)$, $M_g(f) := gf$, es un operador lineal y continuo tal que: $\|M_g(f)\|_1 \leq \|g\|_q . \|f\|_p$.
4. $f \in L^p(m)$, $\|f\|_p = \sup\{\|fg\|_1 : \|g\|_q \leq 1\}$.
5. $\|f\|_p = \sup \left\{ \| \int fgdm \|_X : g \in B_{L_q(m)} \right\}, \; f \in L^p(m)$

Propiedades útiles

Para $p, q > 1$, $g \in L^q(m)$

1. $L^q(m) \cdot L^p(m) = L^q_w(m) \cdot L^p(m) = L^1(m)$.
2. $L^q_w(m) \cdot L^p_w(m) = L^1_w(m)$.
3. $M_g : L^p(m) \to L^1(m)$, $M_g(f) := gf$, es un operador lineal y continuo tal que: $\|M_g(f)\|_1 \leq \|g\|_q . \|f\|_p$.
4. $f \in L^p(m)$, $\|f\|_p = \sup\{\|fg\|_1 : \|g\|_q \leq 1\}$.
5. $\|f\|_p = \sup\left\{\|\int fgdm\|_X : g \in B_{L_q(m)}\right\}$, $f \in L^p(m)$

Index

1 Preliminares

2 **Dualidad vectorial**

Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m), X)$

Convergencia débil

3 Teorema de Representación

4 Operadores de Multiplicación

Entre espacios $L^p(m)$

Entre espacios de Orlicz

Basándonos en los resultados previos, observamos que existe una estrecha relación de dualidad entre los los espacios $L^p(m)$ y $L^q(m)$ para p, q exponentes conjugados. esta relación queda patente en el siguiente lema.

Lema

Sea $g \in L^q(m)$. El operador integración $I_g : L^p(m) \longrightarrow X$ definido por $I_g(f) = \int fgdm$, es lineal, continuo, y cumple

$$\|I_g(f)\| \leq \|g\|_q . \|f\|_p .$$

Basándonos en los resultados previos, observamos que existe una estrecha relación de dualidad entre los los espacios $L^p(m)$ y $L^q(m)$ para p, q exponentes conjugados. esta relación queda patente en el siguiente lema.

Lema

Sea $g \in L^q(m)$. El operador integración $I_g : L^p(m) \longrightarrow X$ definido por $I_g(f) = \int fgdm$, es lineal, continuo, y cumple

$$\|I_g(f)\| \leq \|g\|_q . \|f\|_p .$$

Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m),X)$

Dualidad clásica

$(X(\mu))' = (X(\mu),\sigma(X(\mu),X'(\mu)))' \overset{(\star)}{=} (X(\mu))^\times$

$(\star)$cuando $X(\mu)$ es orden continuo.

Dualidad vectorial

$B: L^p(m)\times L^{p'}(m) \longrightarrow X,\ B(f,g) := \int fgdm = I_g(f)$

Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m), X)$

Dualidad clásica

$$(X(\mu))' = (X(\mu), \sigma(X(\mu), X'(\mu)))' =^{(\star)} (X(\mu))^{\times}$$

$(\star)$cuando $X(\mu)$ es orden continuo.

Dualidad vectorial

$$B : L^p(m) \times L^{p'}(m) \longrightarrow X, \; B(f,g) := \int fgdm = I_g(f)$$

Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m),X)$

Dualidad clásica

$$(X(\mu))' = (X(\mu),\sigma(X(\mu),X'(\mu)))' =^{(\star)} (X(\mu))^{\times}$$

$(\star)$cuando $X(\mu)$ es orden continuo.

Dualidad vectorial

$$B : L^p(m)\times L^{p'}(m) \longrightarrow X,\ B(f,g) := \int fgdm = I_g(f)$$

Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m),X)$

Dualidad clásica

$(X(\mu))' = (X(\mu),\sigma(X(\mu),X'(\mu)))' =^{(\star)} (X(\mu))^{\times}$

$(\star)$cuando $X(\mu)$ es orden continuo.

Dualidad vectorial

$B : L^p(m)\times L^{p'}(m) \longrightarrow X,\ B(f,g) := \int fgdm = I_g(f)$

- $(L^p(m),\|\,.\,\|)^V = \mathscr{L}(L^p(m),X)$

Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m), X)$

Dualidad clásica

$(X(\mu))' = (X(\mu), \sigma(X(\mu), X'(\mu)))' =^{(\star)} (X(\mu))^{\times}$

$(\star)$cuando $X(\mu)$ es orden continuo.

Dualidad vectorial

$B : L^p(m) \times L^{p'}(m) \longrightarrow X,\ B(f,g) := \int fgdm = I_g(f)$

- $(L^p(m), \|\,.\,\|)^V = \mathscr{L}(L^p(m), X)$,
- $(L^p(m), \sigma_m)^V = \mathscr{L}((L^p(m), \sigma_m), X)$

Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m),X)$

Dualidad clásica

$$(X(\mu))' = (X(\mu),\sigma(X(\mu),X'(\mu)))' \overset{(\star)}{=} (X(\mu))^{\times}$$

$(\star)$cuando $X(\mu)$ es orden continuo.

Dualidad vectorial

$$B : L^p(m) \times L^{p'}(m) \longrightarrow X,\; B(f,g) := \int fgdm = I_g(f)$$

- $(L^p(m),\|\,.\,\|)^V = \mathscr{L}(L^p(m),X)$,
- $(L^p(m),\sigma_m)^V = \mathscr{L}((L^p(m),\sigma_m),X)$,
- $(L^p(m),X)^{\times_m} = \{T \in \mathscr{L}(L^p(m),X) : T = I_g, g \in L^0(m)\}$

Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m),X)$

Dualidad clásica

$$(X(\mu))' = (X(\mu),\sigma(X(\mu),X'(\mu)))' \overset{(\star)}{=} (X(\mu))^{\times}$$

$(\star)$cuando $X(\mu)$ es orden continuo.

Dualidad vectorial

$$B : L^p(m)\times L^{p'}(m) \longrightarrow X,\ \ B(f,g) := \int fgdm = I_g(f)$$

- $(L^p(m),\|\,.\,\|)^V = \mathscr{L}(L^p(m),X)$,
- $(L^p(m),\sigma_m)^V = \mathscr{L}((L^p(m),\sigma_m),X)$,
- $(L^p(m),X)^{\times_m} = \{T\in\mathscr{L}(L^p(m),X) : T = I_g, g\in L^0(m)\}$.

$(L^p(m), \|.\|)^V$

$L^q(m) \hookrightarrow (L^p(m), \|.\|)^V$

Si definimos

$$i : L^q(m) \hookrightarrow (L^p(m), \|.\|)^V$$

dada por $i(g) := I_g$, se sigue que i es una inclusión continua e isométrica puesto que

$$\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left\| \int fgdm \right\| = \|I_g\|.$$

$(L^p(m), \|.\|)^V \hookrightarrow^i (L^p(m) \otimes_\pi X^*)^*$

Definimos

$$i : (L^p(m), \|.\|)^V \hookrightarrow (L^p(m) \otimes_\pi X^*)^*$$

como $i(G) := T_G$ con $G : L^p(m) \longrightarrow X$ y $T_G(z) = \langle G(f), x^* \rangle$ para $z = f \otimes x^* \in (L^p(m) \otimes_\pi X^*)$.

$(L^p(m), \|\,.\,\|)^V$

$L^q(m) \hookrightarrow (L^p(m), \|\,.\,\|)^V$

Si definimos

$$i : L^q(m) \hookrightarrow (L^p(m), \|\,.\,\|)^V$$

dada por $i(g) := I_g$, se sigue que i es una inclusión continua e isométrica puesto que

$$\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left\| \int fgdm \right\| = \|I_g\|.$$

$(L^p(m), \|\,.\,\|)^V \hookrightarrow^i (L^p(m) \otimes_\pi X^*)^*$

Definimos

$$i : (L^p(m), \|\,.\,\|)^V \hookrightarrow (L^p(m) \otimes_\pi X^*)^*$$

como $i(G) := T_G$ con $G : L^p(m) \longrightarrow X$ y $T_G(z) = \langle G(f), x^* \rangle$ para $z = f \otimes x^* \in (L^p(m) \otimes_\pi X^*)$.

$(L^p(m), \|\,.\,\|)^V$

$L^q(m) \hookrightarrow (L^p(m), \|\,.\,\|)^V$

Si definimos

$$i : L^q(m) \hookrightarrow (L^p(m), \|\,.\,\|)^V$$

dada por $i(g) := I_g$, se sigue que i es una inclusión continua e isométrica puesto que

$$\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left\| \int fgdm \right\| = \|I_g\|.$$

$(L^p(m), \|\,.\,\|)^V \hookrightarrow^i (L^p(m) \otimes_\pi X^*)^*$

Definimos

$$i : (L^p(m), \|\,.\,\|)^V \hookrightarrow (L^p(m) \otimes_\pi X^*)^*$$

como $i(G) := T_G$ con $G : L^p(m) \longrightarrow X$ y $T_G(z) = \langle G(f), x^* \rangle$ para $z = f \otimes x^* \in (L^p(m) \otimes_\pi X^*)$.

$(L^p(m), \|\,.\,\|)^V$

$L^q(m) \hookrightarrow (L^p(m), \|\,.\,\|)^V$

Si definimos

$$i : L^q(m) \hookrightarrow (L^p(m), \|\,.\,\|)^V$$

dada por $i(g) := I_g$, se sigue que i es una inclusión continua e isométrica puesto que

$$\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left\| \int fgdm \right\| = \|I_g\|.$$

$(L^p(m), \|\,.\,\|)^V \overset{i}{\hookrightarrow} (L^p(m) \otimes_\pi X^*)^*$

Definimos

$$i : (L^p(m), \|\,.\,\|)^V \hookrightarrow (L^p(m) \otimes_\pi X^*)^*$$

como $i(G) := T_G$ con $G : L^p(m) \longrightarrow X$ y $T_G(z) = \langle G(f), x^* \rangle$ para $z = f \otimes x^* \in (L^p(m) \otimes_\pi X^*)$.

$(L^p(m), \|.\|)^V$

1. $L^q(m) \hookrightarrow (L^p(m), \|.\|)^V \hookrightarrow (L^p(m) \otimes_\pi X^*)^*$
2. Si $m : \Sigma \longrightarrow X^*, (L^p(m), \|.\|)^V = (L^p(m) \otimes_\pi X^{**})^*$,
3. Si $m : \Sigma \longrightarrow X^*$ con X reflexivo,

$$(L^p(m), \|.\|)^V = (L^p(m) \otimes_\pi X)^*.$$

$(L^p(m), \|\,.\,\|)^V$

1. $L^q(m) \hookrightarrow (L^p(m), \|\,.\,\|)^V \hookrightarrow (L^p(m) \otimes_\pi X^*)^*$
2. Si $m : \Sigma \longrightarrow X^*$, $(L^p(m), \|\,.\,\|)^V = (L^p(m) \otimes_\pi X^{**})^*$,
3. Si $m : \Sigma \longrightarrow X^*$ con X reflexivo,

$$(L^p(m), \|\,.\,\|)^V = (L^p(m) \otimes_\pi X)^*.$$

$(L^p(m), \|\,.\,\|)^V$

1. $L^q(m) \hookrightarrow (L^p(m), \|\,.\,\|)^V \hookrightarrow (L^p(m) \otimes_\pi X^*)^*$
2. Si $m : \Sigma \longrightarrow X^*, (L^p(m), \|\,.\,\|)^V = (L^p(m) \otimes_\pi X^{**})^*,$
3. Si $m : \Sigma \longrightarrow X^*$ con X reflexivo,

$$(L^p(m), \|\,.\,\|)^V = (L^p(m) \otimes_\pi X)^*.$$

Topología débil asociada al operador integración

Sea $B : L^p(m) \times L^q(m) \longrightarrow (X, \|\,.\,\|)$ definida por

$$B(f,g) := \int_\Omega fgdm,$$

genera una familia de seminormas $\{p_g : g \in L^q(m)\}$ en $L^p(m)$ como sigue:

$$p_g(f) = \|B(f,g)\|_X = \left\| \int_\Omega fgdm \right\|_X .$$

$\{p_g : g \in L^q(m)\}$ define la m-topología.

Topología débil asociada al operador integración

Sea $B : L^p(m) \times L^q(m) \longrightarrow (X, \| \,.\, \|)$ definida por

$$B(f,g) := \int_\Omega fgdm,$$

genera una familia de seminormas $\{p_g : g \in L^q(m)\}$ en $L^p(m)$ como sigue:

$$p_g(f) = \|B(f,g)\|_X = \left\| \int_\Omega fgdm \right\|_X .$$

$\{p_g : g \in L^q(m)\}$ define la *m-topología*.

Caracterización de $(L^p(m), \sigma_m)^V$

Teorema

Son equivalentes:

1. $G \in (L^p(m), \sigma_m)^V$,
2. existen $\{g_1, \dots, g_n\}$ en $L^q(m)$ tales que

$$\|G(f)\|_X \leq \sum_{i=1}^{n} \| \int f g_i dm \|_X,$$

3.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "T"'] & & X \\ & T(X) \subseteq X^n. \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

con $T(f) = (\int f g_1 dm, \dots, \int f g_n dm)$ y Φ continua.

Caracterización de $(L^p(m), \sigma_m)^V$

Teorema

Son equivalentes:

1. $G \in (L^p(m), \sigma_m)^V$,
2. existen $\{g_1, \ldots, g_n\}$ en $L^q(m)$ tales que

$$\|G(f)\|_X \leq \sum_{i=1}^{n} \| \int f g_i dm \|_X ,$$

3.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "T"'] & & X \\ & T(X) \subseteq X^n . \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

con $T(f) = (\int f g_1 dm, \ldots, \int f g_n dm)$ y Φ continua.

Caracterización de $(L^p(m),\sigma_m)^V$

Teorema

Son equivalentes:

1. $G \in (L^p(m),\sigma_m)^V$,
2. existen $\{g_1,\dots,g_n\}$ en $L^q(m)$ tales que

$$\|G(f)\|_X \leq \sum_{i=1}^{n} \| \int fg_i dm\|_X ,$$

3.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "T"'] & & X \\ & T(X) \subseteq X^n . \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

con $T(f) = (\int fg_1 dm,\dots,\int fg_n dm)$ y Φ continua.

$(L^p(m), \sigma_m)^V \hookrightarrow ((L^p(m), \sigma_m) \otimes_\pi X^*)^*$

Tomamos $i : (L^p(m), \sigma_m)^V \longrightarrow ((L^p(m), \sigma_m) \otimes_\pi X^*)^*$ definida por $i(G) = T_G$ con:

$$T_G(z) := \sum_{j=1}^{m} \langle G(f_j), x_j^* \rangle, \quad z = \sum_{j=1}^{m} f_j \otimes x_j^*,$$

i bien definida ya que T_G es continua con respecto a la la π topología.

Es claro que $(L^p(m), \sigma_m)^V \subset (L^p(m), \|\,.\,\|)^V$.

$(L^p(m), \sigma_m)^V \hookrightarrow ((L^p(m), \sigma_m) \otimes_\pi X^*)^*$

Tomamos $i : (L^p(m), \sigma_m)^V \longrightarrow ((L^p(m), \sigma_m) \otimes_\pi X^*)^*$ definida por $i(G) = T_G$ con:

$$T_G(z) := \sum_{j=1}^{m} \langle G(f_j), x_j^* \rangle, \quad z = \sum_{j=1}^{m} f_j \otimes x_j^*,$$

i bien definida ya que T_G es continua con respecto a la la π topología.

Es claro que $(L^p(m), \sigma_m)^V \subset (L^p(m), \|\,.\,\|)^V$.

$(L^p(m),\sigma_m)^V \hookrightarrow ((L^p(m),\sigma_m)\otimes_\pi X^*)^*$

Tomamos $i:(L^p(m),\sigma_m)^V \longrightarrow ((L^p(m),\sigma_m)\otimes_\pi X^*)^*$ definida por $i(G)=T_G$ con:

$$T_G(z) := \sum_{j=1}^m \langle G(f_j), x_j^*\rangle, \quad z=\sum_{j=1}^m f_j\otimes x_j^*,$$

i bien definida ya que T_G es continua con respecto a la la π topología.

Es claro que $(L^p(m),\sigma_m)^V \subset (L^p(m),\|\,.\,\|)^V$.

Metrizabilidad de $B(L^p(m))$ con respecto a σ_m

Teorema Si $B(L^q(m))$ es separable, entonces la bola unidad de $L^p(m)$ es σ_m–metrizable.

Decimos que la σ–álgebra Σ es *m-esencialmente numerablemente generada* si existe una sub–σ–álgebra Σ_0 tal que para cada $A \in \Sigma$ existe $B \in \Sigma_0$ tal que $A \setminus B$ y $B \setminus A$ son m–nulos.

Teorema (A. Fernández et al.) Para todo $p \geq 1$ son equivalentes:

- $L^p(m)$ es separable.
- $L^1(m)$ es separable.
- Σ es m–esencialmente numerablemente generada.
- Σ es $|\langle m, x^* \rangle|$–esencialmente numerablemente generada para toda medida de Rybakov para m.

Metrizabilidad de $B(L^p(m))$ con respecto a σ_m

Teorema Si $B(L^q(m))$ es separable, entonces la bola unidad de $L^p(m)$ es σ_m–metrizable.

Decimos que la σ–álgebra Σ es *m*-esencialmente numerablemente generada si existe una sub–σ–álgebra Σ_0 tal que para cada $A \in \Sigma$ existe $B \in \Sigma_0$ tal que $A \setminus B$ y $B \setminus A$ son m–nulos.

Teorema (A. Fernández et al.) Para todo $p \geq 1$ son equivalentes:

- $L^p(m)$ es separable.
- $L^1(m)$ es separable.
- Σ es m–esencialmente numerablemente generada.
- Σ es $|\langle m, x^* \rangle|$–esencialmente numerablemente generada para toda medida de Rybakov para m.

Metrizabilidad de $B(L^p(m))$ con respecto a σ_m

Teorema Si $B(L^q(m))$ es separable, entonces la bola unidad de $L^p(m)$ es σ_m–metrizable.

Decimos que la σ–álgebra Σ es *m-esencialmente numerablemente generada* si existe una sub–σ–álgebra Σ_0 tal que para cada $A \in \Sigma$ existe $B \in \Sigma_0$ tal que $A \setminus B$ y $B \setminus A$ son m–nulos.

Teorema (A. Fernández et al.) Para todo $p \geq 1$ son equivalentes:

- $L^p(m)$ es separable.
- $L^1(m)$ es separable.
- Σ es m–esencialmente numerablemente generada.
- Σ es $|\langle m, x^* \rangle|$–esencialmente numerablemente generada para toda medida de Rybakov para m.

Condición necesaria

Decimos que $L^p(m)$ tiene la propiedad de σ_m–separación si para todo subespacio propio S existe $g \neq 0 \in L^q(m)$ tal que $\|\int hgdm\| = 0$ para todo $h \in S$.

Proposición Si la bola unidad cerrada de $L^p(m)$ es σ_m–metrizable y $L^q(m)$ tiene la propiedad de σ_m–separación, entonces $L^q(m)$ es separable.

Condición necesaria

Decimos que $L^p(m)$ tiene la propiedad de σ_m–separación si para todo subespacio propio S existe $g \neq 0 \in L^q(m)$ tal que $\|\int hgdm\| = 0$ para todo $h \in S$.

Proposición Si la bola unidad cerrada de $L^p(m)$ es σ_m–metrizable y $L^q(m)$ tiene la propiedad de σ_m–separación, entonces $L^q(m)$ es separable.

Ejemplos

Se verifica $\sigma(L^p(m),L^p(m)^*) \preceq \sigma_m \preceq \sigma_{\|\cdot\|_p}$, pero coincide en algunos casos.

Ejemplo 1 La topología m-débil y la débil coinciden al considerar $L^p(m)$, $1 \leq p < \infty$, siendo m una medida escalar positiva.

Ejemplo 2 Sea $X(\mu)$ un espacio de Banach de funciones orden continuo y con unidad débil, y $m : \Sigma \to X(\mu)$ definida por $m(A) = \chi_A$ para cada A medible. Se verifica:

- $L^1(m) = X(\mu)$,
- $\int fdm = f$ para cada $f \in X(\mu)$,

y por tanto, la σ_m coincide con la topología fuerte de $X(\mu)$.

Ejemplos

Se verifica $\sigma(L^p(m), L^p(m)^*) \preceq \sigma_m \preceq \sigma_{\|\cdot\|_p}$, pero coincide en algunos casos.

Ejemplo 1 La topología m-débil y la débil coinciden al considerar $L^p(m)$, $1 \leq p < \infty$, siendo m una medida escalar positiva.

Ejemplo 2 Sea $X(\mu)$ un espacio de Banach de funciones orden continuo y con unidad débil, y $m : \Sigma \to X(\mu)$ definida por $m(A) = \chi_A$ para cada A medible. Se verifica:

- $L^1(m) = X(\mu)$,
- $\int f dm = f$ para cada $f \in X(\mu)$,

y por tanto, la σ_m coincide con la topología fuerte de $X(\mu)$.

Ejemplos

Se verifica $\sigma(L^p(m), L^p(m)^*) \preceq \sigma_m \preceq \sigma_{\|\cdot\|_p}$, pero coincide en algunos casos.

Ejemplo 1 La topología m-débil y la débil coinciden al considerar $L^p(m)$, $1 \leq p < \infty$, siendo m una medida escalar positiva.

Ejemplo 2 Sea $X(\mu)$ un espacio de Banach de funciones orden continuo y con unidad débil, y $m : \Sigma \to X(\mu)$ definida por $m(A) = \chi_A$ para cada A medible. Se verifica:

- $L^1(m) = X(\mu)$,
- $\int f dm = f$ para cada $f \in X(\mu)$,

y por tanto, la σ_m coincide con la topología fuerte de $X(\mu)$.

$(L^p(m), X)^{\times_m}$

Definimos el dual de Köthe vectorial del espacio $L^p(m)$ como

$$(L^p(m), X)^{\times_m} :=$$

$$\{G : L^p(m) \longrightarrow X : \exists g_0 \in \mathscr{L}^0(\lambda), G(f) = \int f g_0 \, dm, f \in L^p(m)\}.$$

Se verifica que

$$(L^p(m), X)^{\times_m} = \mathrm{M}(L^p(m), L^1(m))$$

$$\mathrm{M}(L^p(m), L^1(m)) := \{g \in \mathscr{L}^0(\lambda) \; fg \in L^1(m) \text{ para cada } f \in L^p(m)\}$$

De hecho, se prueba que $\mathrm{M}(L^p(m), L^1(m)) = L^q_w(m)$, y por tanto

$$(L^p(m), X)^{\times_m} = L^q_w(m).$$

$(L^p(m),X)^{\times m}$

Definimos el dual de Köthe vectorial del espacio $L^p(m)$ como

$$(L^p(m),X)^{\times m} :=$$

$$\{G : L^p(m) \longrightarrow X : \exists g_0 \in \mathscr{L}^0(\lambda), G(f) = \int f g_0 dm, f \in L^p(m)\}.$$

Se verifica que

$$(L^p(m),X)^{\times m} = \mathrm{M}(L^p(m),L^1(m))$$

$$\mathrm{M}(L^p(m),L^1(m)) := \{g \in \mathscr{L}^0(\lambda)\ fg \in L^1(m) \text{ para cada } f \in L^p(m)\}$$

De hecho, se prueba que $\mathrm{M}(L^p(m),L^1(m)) = L^q_w(m)$, y por tanto

$$(L^p(m),X)^{\times m} = L^q_w(m).$$

$(L^p(m),X)^{\times_m}$

Definimos el dual de Köthe vectorial del espacio $L^p(m)$ como

$$(L^p(m),X)^{\times_m} :=$$

$$\{G : L^p(m) \longrightarrow X : \exists g_0 \in \mathscr{L}^0(\lambda), G(f) = \int f g_0 \, dm, f \in L^p(m)\}.$$

Se verifica que

$$(L^p(m),X)^{\times_m} = \mathrm{M}(L^p(m), L^1(m))$$

$$\mathrm{M}(L^p(m),L^1(m)) := \{g \in \mathscr{L}^0(\lambda) \; fg \in L^1(m) \text{ para cada } f \in L^p(m)\}$$

De hecho, se prueba que $\mathrm{M}(L^p(m),L^1(m)) = L^q_w(m)$, y por tanto

$$(L^p(m),X)^{\times_m} = L^q_w(m).$$

Caracterización de $(L^p(m), X)^{\times m}$

Teorema $G \in \mathscr{L}(L^p(m), X)$, son equivalentes

1. $G \in (L^p(m), X)^{\times m}$,
2. existen $\{g_1, \ldots, g_n\} \in L^q_w(m)$ tales que
$$|\langle G(f), x^* \rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} \int |\langle f g_i dm, x^* \rangle|, \quad f \in L^p(m),\, x^* \in X^*,$$
3. existe $g_0 \in L^q_w(m)$ tal que
$$|\langle G(f), x^* \rangle| \leq \int |f g_0| d|\langle m, x^* \rangle|.$$

Caracterización de $(L^p(m),X)^{\times m}$

Teorema $G\in\mathscr{L}(L^p(m),X)$, son equivalentes

1. $G\in(L^p(m),X)^{\times m}$,
2. existen $\{g_1,\dots,g_n\}\in L^q_w(m)$ tales que
$$|\langle G(f),x^*\rangle|\le\sum_{i=1}^n\int|\langle fg_i dm,x^*\rangle|,\quad f\in L^p(m),\ x^*\in X^*,$$
3. existe $g_0\in L^q_w(m)$ tal que
$$|\langle G(f),x^*\rangle|\le\int|fg_0|d|\langle m,x^*\rangle|.$$

Caracterización de $(L^p(m), X)^{\times m}$

Teorema $G \in \mathscr{L}(L^p(m), X)$, son equivalentes

1. $G \in (L^p(m), X)^{\times m}$,
2. existen $\{g_1, \ldots, g_n\} \in L^q_w(m)$ tales que

$$|\langle G(f), x^* \rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} \int |\langle f g_i dm, x^* \rangle|, \quad f \in L^p(m),\ x^* \in X^*,$$

3. existe $g_0 \in L^q_w(m)$ tal que

$$|\langle G(f), x^* \rangle| \leq \int |f g_0| d|\langle m, x^* \rangle|.$$

Caracterización de $(L^p(m),X)^{\times m}$

Teorema $G \in \mathscr{L}(L^p(m),X)$, son equivalentes

1. $G \in (L^p(m),X)^{\times m}$,
2. existen $\{g_1,\dots,g_n\} \in L^q_w(m)$ tales que
$$|\langle G(f),x^*\rangle| \le \sum_{i=1}^{n}\int |\langle fg_i dm, x^*\rangle|, \quad f \in L^p(m),\ x^* \in X^*,$$
3. existe $g_0 \in L^q_w(m)$ tal que
$$|\langle G(f),x^*\rangle| \le \int |fg_0|\, d|\langle m,x^*\rangle|.$$

Consecuencias

Corolario(P.A.U) $S \in L^q_w(m)$ es acotado en norma si y sólo si el conjunto $\{\|\int fgdm\| : g \in S\}$ está acotado para todo $f \in L^p(m)$.

Teorema Sea $(T_n)_n \subset (L^p(m), X)^{\times m}$, donde cada $T_n = I_{g_n}$ con $g_n \in L^q_w(m)$ tal que

1. g_n creciente,
2. para cada $f \in L^p(m)$, $T_n(f) \rightarrow_w T(f)$,

entonces $T \in (L^p(m), X)^{\times m}$ y $\|T_n\| \rightarrow \|T\|$.

Consecuencias

Corolario(P.A.U) $S \in L^q_w(m)$ es acotado en norma si y sólo si el conjunto $\{\|\int fgdm\| : g \in S\}$ está acotado para todo $f \in L^p(m)$.

Teorema Sea $(T_n)_n \subset (L^p(m), X)^{\times m}$, donde cada $T_n = I_{g_n}$ con $g_n \in L^q_w(m)$ tal que

1. g_n creciente,
2. para cada $f \in L^p(m)$, $T_n(f) \rightarrow_w T(f)$,

entonces $T \in (L^p(m), X)^{\times m}$ y $\|T_n\| \rightarrow \|T\|$.

Problema

L^p clásicos

Si μ es una medida de probabilidad y $1 \leq p < \infty$ una red acotada $(f_\alpha) \to_w f$ si y sólo si

$$\int_A f_\alpha \, d\mu \to \int_A f \, d\mu,$$

para cada A medible.

Problema

$L^1(m)$ G. P. Curbera [1] y S. Okada [3] prueban que, si $L^1(m)$ no contiene subespacios complementados isomorfos a ℓ^1

$$(f_\alpha) \subset L^1(m) \rightarrow_w f \quad \text{sii} \quad \int_A f_\alpha \, dm \rightarrow_w \int_A f \, dm \in X, \; A \in \Sigma.$$

Para *sucesiones* acotadas esta caracterización sólo es válida si el rango de m es relativamente compacto en norma [3], pero no en general [2].

G. P. Curbera,
When L^1 of a vector measure is an AL-space,
Pacific J. Math., **162** (1994), no. 2, 287–303.

G. P. Curbera,
Banach space properties of L^1 of a vector measure,
Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), no. 12, 3797–3806.

S. Okada,
The dual space of $L^1(\mu)$ for a vector measure μ,
J. Math. Anal. Appl., **177** (1993), no. 2, 583–599

Construcción

1. Para $f \in L^p(m)$ definimos el operador

$$M_f : L^q(m) \to X, \quad M_f(g) := \int_\Omega fg \, dm,$$

se cumple $\|M_f\| = \|f\|_p$.

2. El conjunto $\Gamma := \{\gamma_{g,x^*} : \ g \in B_{L^q(m)}, \ x^* \in B_{X^*}\} \subset B_{L^p(m)^*}$ con

$$\gamma_{g,x^*}(f) := \int_\Omega fg \, d\langle x^*, m\rangle \subset B_{L^p(m)^*}$$

es normante.

3. $L^p(m)^* = L^p(m)^\times$ es decir, $L^p(m)^* = \{\varphi_h : h \in \mathscr{H}\}$ siendo

$$\mathscr{H} := \{h \in L^0(m) : \ fh \in L^1(\lambda) \text{ para todo } f \in L^p(m)\}$$

con dualidad definida por $\langle f, \varphi_h \rangle := \int_\Omega fh \, d\lambda$.

Construcción

1. Para $f \in L^p(m)$ definimos el operador

$$M_f : L^q(m) \to X, \quad M_f(g) := \int_\Omega fg \, dm,$$

se cumple $\|M_f\| = \|f\|_p$.

2. El conjunto $\Gamma := \{\gamma_{g,x^*} : \; g \in B_{L^q(m)}, \; x^* \in B_{X^*}\} \subset B_{L^p(m)^*}$ con

$$\gamma_{g,x^*}(f) := \int_\Omega fg \, d\langle x^*, m\rangle \subset B_{L^p(m)^*}$$

es normante.

3. $L^p(m)^* = L^p(m)^\times$ es decir, $L^p(m)^* = \{\varphi_h : h \in \mathscr{H}\}$ siendo

$$\mathscr{H} := \{h \in L^0(m) : \; fh \in L^1(\lambda) \text{ para todo } f \in L^p(m)\}$$

con dualidad definida por $\langle f, \varphi_h\rangle := \int_\Omega fh \, d\lambda$.

Construcción

1. Para $f \in L^p(m)$ definimos el operador

$$M_f : L^q(m) \to X, \quad M_f(g) := \int_\Omega fg\, dm,$$

se cumple $\|M_f\| = \|f\|_p$.

2. El conjunto $\Gamma := \{\gamma_{g,x^*} : \; g \in B_{L^q(m)}, \; x^* \in B_{X^*}\} \subset B_{L^p(m)^*}$ con

$$\gamma_{g,x^*}(f) := \int_\Omega fg\, d\langle x^*, m\rangle \subset B_{L^p(m)^*}$$

es normante.

3. $L^p(m)^* = L^p(m)^\times$ es decir, $L^p(m)^* = \{\varphi_h : h \in \mathscr{H}\}$ siendo

$$\mathscr{H} := \{h \in L^0(m) : \; fh \in L^1(\lambda) \text{ para todo } f \in L^p(m)\}$$

con dualidad definida por $\langle f, \varphi_h\rangle := \int_\Omega fh\, d\lambda$.

Resultados

Teorema

$L^p(m)^*$ es orden continuo y tiene unidad débil. En particular, $L^p(m)^*$ es débilmente compactamente generado (WCG).

Corolario

Todo subespacio de $L^p(m)$ es WCG.

Corolario

Todo subespacio separable de $L^p(m)$ tiene dual separable. En particular, $L^p(m)$ es separable si y sólo si $L^p(m)^*$ es separable.

Resultados

Teorema

$L^p(m)^*$ es orden continuo y tiene unidad débil. En particular, $L^p(m)^*$ es débilmente compactamente generado (WCG).

Corolario

Todo subespacio de $L^p(m)$ es WCG.

Corolario

Todo subespacio separable de $L^p(m)$ tiene dual separable. En particular, $L^p(m)$ es separable si y sólo si $L^p(m)^*$ es separable.

Resultados

Teorema

$L^p(m)^*$ es orden continuo y tiene unidad débil. En particular, $L^p(m)^*$ es débilmente compactamente generado (WCG).

Corolario

Todo subespacio de $L^p(m)$ es WCG.

Corolario

Todo subespacio separable de $L^p(m)$ tiene dual separable. En particular, $L^p(m)$ es separable si y sólo si $L^p(m)^*$ es separable.

Caracterización

Teorema(I. F., J. Rodríguez)

La topología débil y $\sigma(L^p(m), \Gamma)$ coinciden en cualquier acotado de $L^p(m)$. Por tanto, una red acotada (f_α) en $L^p(m)$ converge débilmente a $f \in L^p(m)$ si y sólo si $\int_A f_\alpha \, dm \to \int_A f \, dm$ débilmente en X para cada $A \in \Sigma$.

Caracterización

Teorema(I. F., J. Rodríguez)

La topología débil y $\sigma(L^p(m), \Gamma)$ coinciden en cualquier acotado de $L^p(m)$. Por tanto, una red acotada (f_α) en $L^p(m)$ converge débilmente a $f \in L^p(m)$ si y sólo si $\int_A f_\alpha \, dm \to \int_A f \, dm$ débilmente en X para cada $A \in \Sigma$.

Un conjunto $\mathscr{F} \subset L^p(m)$ está acotado si y sólo si el conjunto de integrales $\{\int_\Omega fg \, dm : f \in \mathscr{F}\} \subset X$ acotado para cada $g \in L^q(m)$. Esto es consecuencia de Principio de Acotación Uniforme aplicado a la familia $\{M_f : f \in \mathscr{F}\}$ de operadores de $L^q(m)$ en X.

Caracterización

Teorema(I. F., J. Rodríguez)

La topología débil y $\sigma(L^p(m), \Gamma)$ coinciden en cualquier acotado de $L^p(m)$. Por tanto, una red acotada (f_α) en $L^p(m)$ converge débilmente a $f \in L^p(m)$ si y sólo si $\int_A f_\alpha \, dm \to \int_A f \, dm$ débilmente en X para cada $A \in \Sigma$.

Corolario

Una sucesión (f_n) en $L^p(\nu)$ converge débilmente a $f \in L^p(m)$ si y sólo si $f_n \to f$ en la topología $\sigma(L^p(m), \Gamma)$.

Index

1 Preliminares

2 Dualidad vectorial
  Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m), X)$
  Convergencia débil

3 **Teorema de Representación**

4 Operadores de Multiplicación
  Entre espacios $L^p(m)$
  Entre espacios de Orlicz

Construcción

1. En $L^p(m)$ consideramos la topología $\sigma(L^p(m), \Gamma) = \sigma_{m-w}$.
2. Dotamos a $L^q(m) \otimes X^*$ con una topología τ generada por la familia de seminormas $\{p_f : f \in L^p(m)\}$ con

$$p_f(z) := \left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle \int g_i f \, dm, x_i^* \right\rangle \right|, \quad z = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i^* \in L^q(m) \otimes X^*.$$

3. Definimos el funcional $\varphi_f : L^q(m) \otimes X^* \longrightarrow \mathbb{R}$, como $\varphi_f(z) := \sum_{i=1}^{n} \langle I_f(g_i), x_i^* \rangle$ donde $z = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i^*$ $\in L^p(m) \otimes X'$

Proposición La aplicación $\Upsilon : (L^p(m), \sigma_{m-w}) \to ((L^q(m) \otimes_\tau X^*)^*, \tau_{weak^*})$ dada por $\Upsilon(f) := \varphi_f$, es un isomorfismo.

Construcción

1. En $L^p(m)$ consideramos la topología $\sigma(L^p(m), \Gamma) = \sigma_{m-w}$.
2. Dotamos a $L^q(m) \otimes X^*$ con una topología τ generada por la familia de seminormas $\{p_f : f \in L^p(m)\}$ con

$$p_f(z) := \left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle \int g_i f \, dm, x_i^* \right\rangle \right|, \qquad z = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i^* \in L^q(m) \otimes X^*.$$

3. Definimos el funcional $\varphi_f : L^q(m) \otimes X^* \longrightarrow \mathbb{R}$, como $\varphi_f(z) := \sum_{i=1}^{n} \langle I_f(g_i), x_i^* \rangle$ donde $z = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i^* \in L^p(m) \otimes X'$

Proposición La aplicación $\Upsilon : (L^p(m), \sigma_{m-w}) \to ((L^q(m) \otimes_\tau X^*)^*, \tau_{weak^*})$ dada por $\Upsilon(f) := \varphi_f$, es un isomorfismo.

Construcción

1. En $L^p(m)$ consideramos la topología $\sigma(L^p(m),\Gamma) = \sigma_{m-w}$.
2. Dotamos a $L^q(m)\otimes X^*$ con una topología τ generada por la familia de seminormas $\{p_f : f \in L^p(m)\}$ con

$$p_f(z) := \left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle \int g_i f\, dm, x_i^* \right\rangle \right|, \quad z = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i^* \in L^q(m)\otimes X^*.$$

3. Definimos el funcional $\varphi_f : L^q(m)\otimes X^* \longrightarrow \mathbb{R}$, como $\varphi_f(z) := \sum_{i=1}^{n} \langle I_f(g_i), x_i^* \rangle$ donde $z = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i^*$ $\in L^p(m)\otimes X'$

Proposición La aplicación $\Upsilon : (L^p(m),\sigma_{m-w}) \to ((L^q(m)\otimes_\tau X^*)^*, \tau_{weak^*})$ dada por $\Upsilon(f) := \varphi_f$, es un isomorfismo.

Construcción

1. En $L^p(m)$ consideramos la topología $\sigma(L^p(m), \Gamma) = \sigma_{m-w}$.
2. Dotamos a $L^q(m) \otimes X^*$ con una topología τ generada por la familia de seminormas $\{p_f : f \in L^p(m)\}$ con

$$p_f(z) := \left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle \int g_i f \, dm, x_i^* \right\rangle \right|, \qquad z = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i^* \in L^q(m) \otimes X^*.$$

3. Definimos el funcional $\varphi_f : L^q(m) \otimes X^* \longrightarrow \mathbb{R}$, como $\varphi_f(z) := \sum_{i=1}^{n} \langle I_f(g_i), x_i^* \rangle$ donde $z = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i^*$ $\in L^p(m) \otimes X'$

Proposición La aplicación $\Upsilon : (L^p(m), \sigma_{m-w}) \to ((L^q(m) \otimes_\tau X^*)^*, \tau_{weak^*})$ dada por $\Upsilon(f) := \varphi_f$, es un isomorfismo.

- Introducimos una topología uniforme asociada a τ en $L^q(m) \otimes X'$.
  - Generada por las seminormas

$$u(z) = \sup_{\|f\|_q \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle \int g_i f dm, x_i^* \right\rangle \right|,$$

    donde $z = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i^* \in L^q(m) \otimes X^*$.
  - La denotamos τ_u.

- El cociente $\frac{L^q(m) \otimes X^*}{\ker u}$
  - definimos la topología cociente $\tau_{\tilde{u}}$ generada por $\tilde{u}([z]) := u(z)$, for $z \in L^q(m) \otimes X^*$.
  - La norma en $(\frac{L^q(m) \otimes X^*}{\ker u}, \tau_{\tilde{u}})^*$ es

$$\|\tilde{\phi}\|_{\tilde{u}} := \sup_{\tilde{u}([z]) \leq 1} |\tilde{\phi}([z])|.$$

- Introducimos una topología uniforme asociada a τ en $L^q(m) \otimes X'$.
  - Generada por las seminormas

$$u(z) = \sup_{\|f\|_q \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle \int g_i f dm, x_i^* \right\rangle \right|,$$

donde $z = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i^* \in L^q(m) \otimes X^*$.

  - La denotamos τ_u.

- El cociente $\frac{L^q(m) \otimes X^*}{\ker u}$
  - definimos la topología cociente $\tau_{\tilde{u}}$ generada por $\tilde{u}([z]) := u(z)$, for $z \in L^q(m) \otimes X^*$.
  - La norma en $(\frac{L^q(m) \otimes X^*}{\ker u}, \tau_{\tilde{u}})^*$ es

$$\|\tilde{\phi}\|_{\tilde{u}} := \sup_{\tilde{u}([z]) \leq 1} |\tilde{\phi}([z])|.$$

- Introducimos una topología uniforme asociada a τ en $L^q(m) \otimes X'$.
  - Generada por las seminormas

$$u(z) = \sup_{\|f\|_q \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \left\langle \int g_i f dm, x_i^* \right\rangle \right|,$$

  donde $z = \sum_{i=1}^n g_i \otimes x_i^* \in L^q(m) \otimes X^*$.
  - La denotamos τ_u.

- El cociente $\frac{L^q(m) \otimes X^*}{\ker u}$
  - definimos la topología cociente $\tau_{\tilde{u}}$ generada por $\tilde{u}([z]) := u(z)$, for $z \in L^q(m) \otimes X^*$.
  - La norma en $(\frac{L^q(m) \otimes X^*}{\ker u}, \tau_{\tilde{u}})^*$ es

$$\|\tilde{\phi}\|_{\tilde{u}} := \sup_{\tilde{u}([z]) \leq 1} |\tilde{\phi}([z])|.$$

- Introducimos una topología uniforme asociada a τ en $L^q(m) \otimes X'$.
  - Generada por las seminormas

$$u(z) = \sup_{\|f\|_q \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle \int g_i f dm, x_i^* \right\rangle \right|,$$

donde $z = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i^* \in L^q(m) \otimes X^*$.

  - La denotamos τ_u.

- El cociente $\frac{L^q(m) \otimes X^*}{\ker u}$
  - definimos la topología cociente $\tau_{\tilde{u}}$ generada por $\tilde{u}([z]) := u(z)$, for $z \in L^q(m) \otimes X^*$.
  - La norma en $(\frac{L^q(m) \otimes X^*}{\ker u}, \tau_{\tilde{u}})^*$ es

$$\|\tilde{\phi}\|_{\tilde{u}} := \sup_{\tilde{u}([z]) \leq 1} |\tilde{\phi}([z])|.$$

- Introducimos una topología uniforme asociada a τ en $L^q(m) \otimes X'$.
  - Generada por las seminormas

$$u(z) = \sup_{\|f\|_q \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle \int g_i f dm, x_i^* \right\rangle \right|,$$

donde $z = \sum_{i=1}^n g_i \otimes x_i^* \in L^q(m) \otimes X^*$.

  - La denotamos τ_u.

- El cociente $\frac{L^q(m)\otimes X^*}{\ker u}$
  - definimos la topología cociente $\tau_{\tilde{u}}$ generada por $\tilde{u}([z]) := u(z)$, for $z \in L^q(m) \otimes X^*$.
  - La norma en $(\frac{L^q(m)\otimes X^*}{\ker u}, \tau_{\tilde{u}})^*$ es

$$\|\tilde{\phi}\|_{\tilde{u}} := \sup_{\tilde{u}([z])\leq 1} |\tilde{\phi}([z])|.$$

- Sean $1 < r, p < \infty$, s, q sus exponentes conjugados, y $([0,1], \Sigma, \mu)$ el espacio de medida de Lebesgue.
- .
- Por tanto, $\left(\frac{L^q(m) \otimes L^s(\mu)}{\ker u}, \tau_u\right)$ se identifica isométricamente con $(L^p(m))^* = L^t(\mu)$, donde $1 + 1 = 1$

Encuentro de Análisis Funcional

I. Ferrando

Preliminares

Dualidad vectorial

Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m), X)$

Convergencia débil

Teorema de Representación

Operadores de Multiplicación

Entre espacios $L^p(m)$

Entre espacios de Orlicz

- Sean $1 < r, p < \infty$, s, q sus exponentes conjugados, y $([0,1], \Sigma, \mu)$ el espacio de medida de Lebesgue.
- Definimos $m : \Sigma \to L^r(\mu)$ como $m(A) := \chi_A$, $A \in \Sigma$.
- .
- Por tanto, $\left(\frac{L^q(m) \otimes L^s(\mu)}{\ker u}, \tau_u\right)$ se identifica isométricamente con $(L^p(m))^* = L^t(\mu)$, donde

- Sean $1 < r, p < \infty$, s, q sus exponentes conjugados, y $([0,1], \Sigma, \mu)$ el espacio de medida de Lebesgue.
- Definimos $m : \Sigma \to L^r(\mu)$ como $m(A) := \chi_A$, $A \in \Sigma$.
- $L^p(m) = L^{pr}(\mu)$, $L^q(m) = L^{qr}(\mu)$.
- .
- Por tanto, $\left(\frac{L^q(m) \otimes L^s(\mu)}{\ker u}, \tau_u\right)$ se identifica isométricamente con $(L^p(m))^* = L^t(\mu)$, donde $\frac{1}{pr} + \frac{1}{t} = 1$.

- Sean $1 < r, p < \infty$, s, q sus exponentes conjugados, y $([0,1], \Sigma, \mu)$ el espacio de medida de Lebesgue.
- Definimos $m : \Sigma \to L^r(\mu)$ como $m(A) := \chi_A$, $A \in \Sigma$.
- $L^p(m) = L^{pr}(\mu)$, $L^q(m) = L^{qr}(\mu)$.
- $z = \sum_{i=1}^n g_i \otimes h_i \in L^q(m) \otimes (L^r(\mu))^* = L^{qr}(\mu) \otimes L^s(\mu)$,

$$u(z) = \sup_{f \in B(L^{pr}(\mu))} \left| \int f \sum_{i=1}^n g_i h_i d\mu \right|.$$

- .
- Por tanto $\left(\frac{L^q(m) \otimes L^s(\mu)}{\ldots}, \tau_u \right)$ se identifica

- Sean $1 < r,p < \infty$, s,q sus exponentes conjugados, y $([0,1],\Sigma,\mu)$ el espacio de medida de Lebesgue.
- Definimos $m:\Sigma \to L^r(\mu)$ como $m(A) := \chi_A$, $A \in \Sigma$.
- $L^p(m) = L^{pr}(\mu)$, $L^q(m) = L^{qr}(\mu)$.
- $z = \sum_{i=1}^n g_i \otimes h_i \in L^q(m) \otimes (L^r(\mu))^* = L^{qr}(\mu) \otimes L^s(\mu)$,

$$u(z) = \sup_{f \in B(L^{pr}(\mu))} \left| \int f \sum_{i=1}^n g_i h_i d\mu \right|.$$

- Como $\frac{1}{qr} + \frac{1}{s} = (1-\frac{1}{p})\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{pr}$, entonces $\sum_{i=1}^n g_i h_i \in (L^{pr}(\mu))^*$ y $u(z) = \|\sum_{i=1}^n g_i h_i\|_{(L^{pr}(\mu))^*}$.
- Por tanto, $\left(\frac{L^q(m)\otimes L^s(\mu)}{\ker u}, \tau_u\right)$ se identifica isométricamente con $(L^p(m))^* = L^t(\mu)$, donde

- Sean $1 < r, p < \infty$, s, q sus exponentes conjugados, y $([0,1], \Sigma, \mu)$ el espacio de medida de Lebesgue.
- Definimos $m : \Sigma \to L^r(\mu)$ como $m(A) := \chi_A$, $A \in \Sigma$.
- $L^p(m) = L^{pr}(\mu)$, $L^q(m) = L^{qr}(\mu)$.
- $z = \sum_{i=1}^n g_i \otimes h_i \in L^q(m) \otimes (L^r(\mu))^* = L^{qr}(\mu) \otimes L^s(\mu)$,

$$u(z) = \sup_{f \in B(L^{pr}(\mu))} \left| \int f \sum_{i=1}^n g_i h_i d\mu \right|.$$

- .Como $\frac{1}{qr} + \frac{1}{s} = (1 - \frac{1}{p})\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{pr}$, entonces $\sum_{i=1}^n g_i h_i \in (L^{pr}(\mu))^*$ y $u(z) = \|\sum_{i=1}^n g_i h_i\|_{(L^{pr}(\mu))^*}$
- Notar que

$$\ker u = \{z = \sum_{i=1}^n g_i \otimes h_i \in L^q(m) \otimes L^s(\mu) : \sum_{i=1}^n g_i h_i = 0 \ \mu - \text{c.p.p.}$$

- Por tanto, $\left(\frac{L^q(m) \otimes L^s(\mu)}{\ker u}, \tau_u \right)$ se identifica

- Sean $1<r,p<\infty$, s,q sus exponentes conjugados, y $([0,1],\Sigma,\mu)$ el espacio de medida de Lebesgue.
- Definimos $m:\Sigma\to L^r(\mu)$ como $m(A):=\chi_A$, $A\in\Sigma$.
- $L^p(m)=L^{pr}(\mu)$, $L^q(m)=L^{qr}(\mu)$.
- $z=\sum_{i=1}^n g_i\otimes h_i\in L^q(m)\otimes(L^r(\mu))^*=L^{qr}(\mu)\otimes L^s(\mu)$,

$$u(z)=\sup_{f\in B(L^{pr}(\mu))}\left|\int f\sum_{i=1}^n g_ih_id\mu\right|.$$

- .Como $\frac{1}{qr}+\frac{1}{s}=(1-\frac{1}{p})\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1-\frac{1}{pr}$, entonces $\sum_{i=1}^n g_ih_i\in(L^{pr}(\mu))^*$ y $u(z)=\|\sum_{i=1}^n g_ih_i\|_{(L^{pr}(\mu))^*}$
- Notar que

$$\ker u=\{z=\sum_{i=1}^n g_i\otimes h_i\in L^q(m)\otimes L^s(\mu):\sum_{i=1}^n g_ih_i=0\ \mu-\text{c.p.p.}$$

- Por tanto, $\left(\frac{L^q(m)\otimes L^s(\mu)}{\ker u},\tau_u\right)$ se identifica isométricamente con $(L^p(m))^*=L^t(\mu)$, donde $\frac{1}{pr}+\frac{1}{t}=1$.

Resultado

Teorema

Los espacios $\left(\left(\frac{L^q(m)\otimes X^*}{\ker u}, \tau_{\tilde{u}}\right)^*, \|\cdot\|_{\tilde{u}}\right)$ y $(L^p(m), \|\cdot\|_p)$ son isométricamente isomorfos si y sólo si $B(L^p(m))$ es m-débil compacta.

Corolario

Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(*i*) La bola unidad de $L^p(m)$ es compacta con respecto a la topología m-débil.

(*ii*) $\left(\frac{L^q(m)\otimes X^*}{\ker u}, \tilde{\tau}\right)^* = \left(\frac{L^q(m)\otimes X^*}{\ker u}, \tau_{\tilde{u}}\right)^*$.

(*iii*) $(L^q(m)\otimes X^*, \tau)^* = (L^q(m)\otimes X^*, \tau_u)^*$.

Resultado

Teorema

Los espacios $\left(\left(\frac{L^q(m)\otimes X^*}{\ker u}, \tau_{\tilde{u}}\right)^*, \|\cdot\|_{\tilde{u}}\right)$ y $(L^p(m), \|\cdot\|_p)$ son isométricamente isomorfos si y sólo si $B(L^p(m))$ es m-débil compacta.

Corolario

Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) La bola unidad de $L^p(m)$ es compacta con respecto a la topología m-débil.

(ii) $\left(\frac{L^q(m)\otimes X^*}{\ker u}, \tilde{\tau}\right)^* = \left(\frac{L^q(m)\otimes X^*}{\ker u}, \tau_{\tilde{u}}\right)^*$.

(iii) $(L^q(m)\otimes X^*, \tau)^* = (L^q(m)\otimes X^*, \tau_u)^*$.

Index

1 Preliminares

2 Dualidad vectorial
- Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m), X)$
- Convergencia débil

3 Teorema de Representación

4 Operadores de Multiplicación
- Entre espacios $L^p(m)$
- Entre espacios de Orlicz

Construcción

1. Sean $W(\mu), Y(\mu)$ e.B.f. tales que $W(\mu) \subset Y(\mu)$. Definimos
$$\mathrm{M}(W(\mu), Y(\mu)) = \{g \in L^0(\mu) : g.W(\mu) \subset Y(\mu)\}.$$
2. Cada $g \in \mathrm{M}(W(\mu), Y(\mu))$ genera un operator $M_g : W(\mu) \to Y(\mu)$, definido como $M_g f = gf$ para $f \in W(\mu)$.
3. M_g lineal y acotado. Podemos definir $\|g\|_{\mathrm{M}(W(\mu),Y(\mu))} \equiv \|M_g\|$, norma de M_g en $\mathscr{L}(W, Y)$.
4. $\mathrm{M}(W(\mu), Y(\mu))$ es un espacio normado, de hecho siempre μ-e.f.B.

Entre $L^p(m)$ y $L^1(m)^{(\star)}$

Para $p, q > 1$

Teorema 1

$$\begin{aligned} L^q_w &= \mathrm{M}(L^p(m), L^1(m)) \\ &= \mathrm{M}(L^p(m), L^1_w(m)) \\ &= \mathrm{M}(L^p_w(m), L^1_w(m)). \end{aligned}$$

Teorema 2

$$L^q(m) = \mathrm{M}\left(L^p_w(m), L^1(m)\right).$$

$(\star)$Estos resultados corresponden a un trabajo conjunto con R. Del Campo, A. Fernández, F. Mayoral y F. Naranjo.

R. Del Campo, A. Fernández,I. Ferrando, F. Mayoral y F. Naranjo,
Multiplication operators on spaces of integrable functions with respect to a vector measure,
J. Math. Anal. Appl., (2008), doi:10.1016/j.jmaa.2008.01.080.

Entre $L^p(m)$ y $L^1(m)^{(\star)}$

Para $p, q > 1$

Teorema 1

$$
\begin{aligned}
L^q_w &= \mathrm{M}(L^p(m), L^1(m)) \\
&= \mathrm{M}(L^p(m), L^1_w(m)) \\
&= \mathrm{M}(L^p_w(m), L^1_w(m)).
\end{aligned}
$$

Teorema 2

$$L^q(m) = \mathrm{M}\left(L^p_w(m), L^1(m)\right).$$

$(\star)$Estos resultados corresponden a un trabajo conjunto con R. Del Campo, A. Fernández, F. Mayoral y F. Naranjo.

R. Del Campo, A. Fernández,I. Ferrando, F. Mayoral y F. Naranjo,
Multiplication operators on spaces of integrable functions with respect to a vector measure,
J. Math. Anal. Appl., (2008), doi:10.1016/j.jmaa.2008.01.080.

Entre $L^p(m)$ y $L^1(m)^{(\star)}$

Para $p, q > 1$

Teorema 1

$$\begin{aligned} L^q_w &= \mathrm{M}(L^p(m), L^1(m)) \\ &= \mathrm{M}(L^p(m), L^1_w(m)) \\ &= \mathrm{M}(L^p_w(m), L^1_w(m)). \end{aligned}$$

Teorema 2

$$L^q(m) = \mathrm{M}\left(L^p_w(m), L^1(m)\right).$$

$(\star)$Estos resultados corresponden a un trabajo conjunto con R. Del Campo, A. Fernández, F. Mayoral y F. Naranjo.

R. Del Campo, A. Fernández,I. Ferrando, F. Mayoral y F. Naranjo,
Multiplication operators on spaces of integrable functions with respect to a vector measure,
J. Math. Anal. Appl., (2008), doi:10.1016/j.jmaa.2008.01.080.

Entre $L^p(m)$ y $L^p(m)^{(\star)}$

Teorema 3 Para $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} L^\infty(m) &= \mathrm{M}(L^p(m), L^p(m)) \\ &= \mathrm{M}\left(L^p_w(m), L^p_w(m)\right) \\ &= \mathrm{M}\left(L^p_w(m), L^p_w(m)\right) \end{aligned}$$

Teorema 4 Sea $g \in \mathscr{L}^0(\lambda)$ y $p \geq 1$, $M_g \in \mathscr{L}\left(L^p_w(m), L^p(m)\right)$ si y sólo si:

1. $g \in L^\infty(m)$.
2. $L^p_w(m_{G_n}) = L^p(m_{G_n})$, siendo $G_n := \left\{ w \in \Omega : |g(w)| \geq \dfrac{1}{n} \right\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Construcción

$\rho : X^* \times \mathscr{L}^0(\lambda) \to [0, +\infty]$ es una *m*–norma si

1. Para cada $x^* \in X^*$, $\rho_{x^*}(f) := \rho(x^*, f)$ verifica
   - $\rho_{x^*}(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0\lambda - \text{cpp}, \rho(\chi_\Omega) < \infty$,
   - $\rho_{x^*}(af) = |a|\rho_{x^*}(f)$, para $a \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$,
   - $\rho_{x^*}(f + g) \leq \rho_{x^*}(f) + \rho_{x^*}(g)$, $f, g \in \mathscr{L}^0(\lambda)$,
   - si $f, f_n \in \mathscr{L}^0(\lambda)$, si $0 \leq f_n \uparrow f\lambda$–cpp, $\rho_{x^*}(f_n) \uparrow \rho_{x^*}(f)$,
   - existe $C(x^*) > 0$ tal que $\int |f| d|\langle m, x^* \rangle| \leq C(x^*)\rho_{x^*}(f)$.
2. Para cada $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$, $\rho_f(x^*) := \rho(f, x^*)$ verifica
   - $|a|\rho_f(x^*) \leq \rho_f(ax^*), |a| \leq 1, x^* \in X^*$,
   - $\sup\{\rho_{\chi_\Omega}(x^*) < \infty : x^* \in B(X^*)\}$.

Construcción

$\rho : X^* \times \mathscr{L}^0(\lambda) \to [0, +\infty]$ es una m–norma si

1. Para cada $x^* \in X^*$, $\rho_{x^*}(f) := \rho(x^*, f)$ verifica
   - $\rho_{x^*}(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0\lambda - \text{cpp}, \rho(\chi_\Omega) < \infty$,
   - $\rho_{x^*}(af) = |a|\rho_{x^*}(f)$, para $a \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$,
   - $\rho_{x^*}(f+g) \leq \rho_{x^*}(f) + \rho_{x^*}(g)$, $f, g \in \mathscr{L}^0(\lambda)$,
   - si $f, f_n \in \mathscr{L}^0(\lambda)$, si $0 \leq f_n \uparrow f\lambda$–cpp, $\rho_{x^*}(f_n) \uparrow \rho_{x^*}(f)$,
   - existe $C(x^*) > 0$ tal que $\int |f| d|\langle m, x^* \rangle| \leq C(x^*)\rho_{x^*}(f)$.
2. Para cada $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$, $\rho_f(x^*) := \rho(f, x^*)$ verifica
   - $|a|\rho_f(x^*) \leq \rho_f(ax^*), |a| \leq 1, x^* \in X^*$,
   - $\sup\{\rho_{\chi_\Omega}(x^*) < \infty : x^* \in B(X^*)\}$.

Sea $\xi : \mathscr{L}^0(\lambda) \to [0, \infty]$ que verifique (1), $\{f \in \mathscr{L}^0(\lambda) : \xi(f) < \infty\}$ es un e.f.B. con la propiedad de Fatou.

Construcción

$\rho : X^* \times \mathscr{L}^0(\lambda) \to [0,+\infty]$ es una m–norma si

1. Para cada $x^* \in X^*$, $\rho_{x^*}(f) := \rho(x^*,f)$ verifica
   - $\rho_{x^*}(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0\lambda-\text{cpp}, \rho(\chi_\Omega) < \infty$,
   - $\rho_{x^*}(af) = |a|\rho_{x^*}(f)$, para $a \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$,
   - $\rho_{x^*}(f+g) \le \rho_{x^*}(f) + \rho_{x^*}(g)$, $f,g \in \mathscr{L}^0(\lambda)$,
   - si $f, f_n \in \mathscr{L}^0(\lambda)$, si $0 \le f_n \uparrow f\lambda$–cpp, $\rho_{x^*}(f_n) \uparrow \rho_{x^*}(f)$,
   - existe $C(x^*) > 0$ tal que $\int |f| d|\langle m, x^*\rangle| \le C(x^*)\rho_{x^*}(f)$.
2. Para cada $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$, $\rho_f(x^*) := \rho(f,x^*)$ verifica
   - $|a|\rho_f(x^*) \le \rho_f(ax^*), |a| \le 1, x^* \in X^*$,
   - $\sup\{\rho_{\chi_\Omega}(x^*) < \infty : x^* \in B(X^*)\}$.

Sea $\xi : \mathscr{L}^0(\lambda) \to [0,\infty]$ que verifique (1), $\{f \in \mathscr{L}^0(\lambda) : \xi(f) < \infty\}$ es un e.f.B. con la propiedad de Fatou.

Tomando como norma $\rho_m(f) := \sup_{x^* \in B(X^*)} \rho_{x^*}(f)$, el espacio $E_w(\rho_m) = \{f \in \mathscr{L}^0(\lambda) : \rho_m(|f|) < \infty\}$ es un s.f.B. de $L^1_w(m)$.

Construcción

$\rho : X^* \times \mathscr{L}^0(\lambda) \to [0, +\infty]$ es una m–norma si

1. Para cada $x^* \in X^*$, $\rho_{x^*}(f) := \rho(x^*, f)$ verifica
   - $\rho_{x^*}(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0\lambda - \text{cpp}, \rho(\chi_\Omega) < \infty$,
   - $\rho_{x^*}(af) = |a|\rho_{x^*}(f)$, para $a \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$,
   - $\rho_{x^*}(f+g) \leq \rho_{x^*}(f) + \rho_{x^*}(g)$, $f, g \in \mathscr{L}^0(\lambda)$,
   - si $f, f_n \in \mathscr{L}^0(\lambda)$, si $0 \leq f_n \uparrow f\lambda$–cpp, $\rho_{x^*}(f_n) \uparrow \rho_{x^*}(f)$,
   - existe $C(x^*) > 0$ tal que $\int |f| d|\langle m, x^* \rangle| \leq C(x^*)\rho_{x^*}(f)$.
2. Para cada $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$, $\rho_f(x^*) := \rho(f, x^*)$ verifica
   - $|a|\rho_f(x^*) \leq \rho_f(ax^*), |a| \leq 1, x^* \in X^*$,
   - $\sup\{\rho_{\chi_\Omega}(x^*) < \infty : x^* \in B(X^*)\}$.

Sea $\xi : \mathscr{L}^0(\lambda) \to [0, \infty]$ que verifique (1), $\{f \in \mathscr{L}^0(\lambda) : \xi(f) < \infty\}$ es un e.f.B. con la propiedad de Fatou.

Tomando como norma $\rho_m(f) := \sup_{x^* \in B(X^*)} \rho_{x^*}(f)$, el espacio $E_w(\rho_m) = \{f \in \mathscr{L}^0(\lambda) : \rho_m(|f|) < \infty\}$ es un s.f.B. de $L^1_w(m)$.

Se verifica que $E(\rho_m) = \overline{S(\sigma)}^{E_w(\rho_m)}$ con la norma ρ_m es s.f.B. de $L^1(m)$.

Construcción

$\rho : X^* \times \mathscr{L}^0(\lambda) \to [0,+\infty]$ es una m–norma si

1. Para cada $x^* \in X^*$, $\rho_{x^*}(f) := \rho(x^*, f)$ verifica
   - $\rho_{x^*}(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0\lambda - \text{cpp}, \rho(\chi_\Omega) < \infty$,
   - $\rho_{x^*}(af) = |a|\rho_{x^*}(f)$, para $a \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$,
   - $\rho_{x^*}(f+g) \leq \rho_{x^*}(f) + \rho_{x^*}(g)$, $f, g \in \mathscr{L}^0(\lambda)$,
   - si $f, f_n \in \mathscr{L}^0(\lambda)$, si $0 \leq f_n \uparrow f\lambda$–cpp, $\rho_{x^*}(f_n) \uparrow \rho_{x^*}(f)$,
   - existe $C(x^*) > 0$ tal que $\int |f| d|\langle m, x^*\rangle| \leq C(x^*)\rho_{x^*}(f)$.
2. Para cada $f \in \mathscr{L}^0(\lambda)$, $\rho_f(x^*) := \rho(f, x^*)$ verifica
   - $|a|\rho_f(x^*) \leq \rho_f(ax^*), |a| \leq 1, x^* \in X^*$,
   - $\sup\{\rho_{\chi_\Omega}(x^*) < \infty : x^* \in B(X^*)\}$.

Sea $\xi : \mathscr{L}^0(\lambda) \to [0,\infty]$ que verifique (1), $\{f \in \mathscr{L}^0(\lambda) : \xi(f) < \infty\}$ es un e.f.B. con la propiedad de Fatou.

Tomando como norma $\rho_m(f) := \sup_{x^* \in B(X^*)} \rho_{x^*}(f)$, el espacio $E_w(\rho_m) = \{f \in \mathscr{L}^0(\lambda) : \rho_m(|f|) < \infty\}$ es un s.f.B. de $L^1_w(m)$.

Se verifica que $E(\rho_m) = \overline{S(\sigma)}^{E_w(\rho_m)}$ con la norma ρ_m es s.f.B. de $L^1(m)$.

Espacios de Orlicz respecto a una medida vectorial

Consideramos $\rho : X^* \times L^0(\lambda) \to [0, +\infty]$ una m–norma definida como

$$\rho(x^*, f) := \|f\|_{L^\Phi(|\langle m, x^*\rangle|)} = inf \left\{ k > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{k}\right) d|\langle m, x^*\rangle| \leq 1 \right\}$$

Y el el espacio débil de Orlicz con respecto a la medida vectorial m como

$$L^\Phi_w(m) = \left\{ f \in L^0(\lambda) : \|f\|_{m,\Phi} := \sup\{\rho(x^*, f) : x^* \in B(X^*)\} < \infty \right\}.$$

$\overline{\mathscr{S}(\Sigma)}^{\|\cdot\|_{m,\Phi}}$ es el espacio de Orlicz con respecto a m, $L^\Phi(m)$.

O. Delgado,
Banach function subspaces of L^1 of a vector measure and related Orlicz spaces, *Indag. Mathem., N.S.*, **15**(2006), no. 4, 485–495.

Espacios de Orlicz respecto a una medida vectorial

Consideramos $\rho : X^* \times L^0(\lambda) \to [0, +\infty]$ una m–norma definida como

$$\rho(x^*, f) := \|f\|_{L^\Phi(|\langle m, x^* \rangle|)} = inf \left\{ k > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{k}\right) d|\langle m, x^* \rangle| \leq 1 \right\}$$

Y el el espacio débil de Orlicz con respecto a la medida vectorial m como

$$L^\Phi_w(m) = \left\{ f \in L^0(\lambda) : \|f\|_{m,\Phi} := \sup\{\rho(x^*, f) : x^* \in B(X^*)\} < \infty \right\}.$$

$\overline{\mathscr{S}(\Sigma)}^{\|\cdot\|_{m,\Phi}}$ es el espacio de Orlicz con respecto a m, $L^\Phi(m)$.

O. Delgado,
Banach function subspaces of L^1 of a vector measure and related Orlicz spaces, *Indag. Mathem., N.S.*, **15**(2006), no. 4, 485–495.

Espacios de Orlicz respecto a una medida vectorial

Consideramos $\rho : X^* \times L^0(\lambda) \to [0, +\infty]$ una m–norma definida como

$$\rho(x^*, f) := \|f\|_{L^\Phi(|\langle m, x^*\rangle|)} = inf \left\{ k > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{k}\right) d|\langle m, x^*\rangle| \leq 1 \right\}$$

Y el el espacio débil de Orlicz con respecto a la medida vectorial m como

$$L^\Phi_w(m) = \left\{ f \in L^0(\lambda) : \|f\|_{m,\Phi} := \sup\{\rho(x^*, f) : x^* \in B(X^*)\} < \infty \right\}.$$

$\overline{\mathscr{S}(\Sigma)}^{\|\cdot\|_{m,\Phi}}$ es el espacio de Orlicz con respecto a m, $L^\Phi(m)$.

O. Delgado,
Banach function subspaces of L^1 of a vector measure and related Orlicz spaces, *Indag. Mathem., N.S.*, **15**(2006), no. 4, 485–495.

Clases de Orlicz respecto a una medida vectorial

Definimos

$$
\begin{aligned}
O_w^{\Phi}(m) &:= \{f \in L^0(\lambda) : \Phi(|f|) \in L_w^1(m)\} \\
O^{\Phi}(m) &:= \{f \in L^0(\lambda) : \Phi(|f|) \in L^1(m)\}.
\end{aligned}
$$

Se verifica

1. $O_w^{\Phi}(m) \subset L_w^{\Phi}(m) \hookrightarrow L^1(m)$.

   Si Φ tiene la propiedad Δ_2:

2. $L_w^{\Phi}(m) = O_w^{\Phi}(m)$,
3. $L^{\Phi}(m) = O^{\Phi}(m)$.

Clases de Orlicz respecto a una medida vectorial

Definimos

$$
\begin{aligned}
O_w^\Phi(m) &:= \{f \in L^0(\lambda) : \Phi(|f|) \in L_w^1(m)\} \\
O^\Phi(m) &:= \{f \in L^0(\lambda) : \Phi(|f|) \in L^1(m)\}.
\end{aligned}
$$

Se verifica

1. $O_w^\Phi(m) \subset L_w^\Phi(m) \hookrightarrow L^1(m)$.

   Si Φ tiene la propiedad Δ_2:

2. $L_w^\Phi(m) = O_w^\Phi(m)$,
3. $L^\Phi(m) = O^\Phi(m)$.

Clases de Orlicz respecto a una medida vectorial

Definimos

$$
\begin{aligned}
O^{\Phi}_w(m) &:= \{f \in L^0(\lambda) : \Phi(|f|) \in L^1_w(m)\} \\
O^{\Phi}(m) &:= \{f \in L^0(\lambda) : \Phi(|f|) \in L^1(m)\}.
\end{aligned}
$$

Se verifica

1. $O^{\Phi}_w(m) \subset L^{\Phi}_w(m) \hookrightarrow L^1(m)$.

Si Φ tiene la propiedad Δ_2:

2. $L^{\Phi}_w(m) = O^{\Phi}_w(m)$,
3. $L^{\Phi}(m) = O^{\Phi}(m)$.

Clases de Orlicz respecto a una medida vectorial

Definimos

$$\begin{aligned} O_w^{\Phi}(m) &:= \{f \in L^0(\lambda) : \Phi(|f|) \in L_w^1(m)\} \\ O^{\Phi}(m) &:= \{f \in L^0(\lambda) : \Phi(|f|) \in L^1(m)\}. \end{aligned}$$

Se verifica

1. $O_w^{\Phi}(m) \subset L_w^{\Phi}(m) \hookrightarrow L^1(m)$.

   Si Φ tiene la propiedad Δ_2:
2. $L_w^{\Phi}(m) = O_w^{\Phi}(m)$,
3. $L^{\Phi}(m) = O^{\Phi}(m)$.

Relación $L^{\Phi}(m) - L^{\Psi}(m)$

Sea Ψ la función de Young conjugada de Φ.

Lema Sea $f \in L^{\Phi}_w(m)$ y $g \in L^{\Psi}_w(m)$, entonces $fg \in L^1_w(m)$ y

$$\|fg\|_1 \leq 2\|f\|_{m,\Phi} \cdot \|g\|_{m,\Psi}.$$

Además

- $L^{\Psi}(m) \cdot L^{\Phi}_w(m) \subset L^1(m)$.
- $L^{\Psi}_w \cdot L^{\Phi}_w = L^1_w(m)$.
- Si Ψ tiene la Δ_2–propiedad, entonces $L^{\Psi}(m) \cdot L^{\Phi}_w(m) = L^1(m)$.
- Si Ψ y Φ tienen la Δ_2–propiedad, entonces $L^{\Psi}(m) \cdot L^{\Phi}(m) = L^1(m)$.

Relación $L^\Phi(m) - L^\Psi(m)$

Sea Ψ la función de Young conjugada de Φ.

Lema Sea $f \in L^\Phi_w(m)$ y $g \in L^\Psi_w(m)$, entonces $fg \in L^1_w(m)$ y

$$\|fg\|_1 \leq 2\|f\|_{m,\Phi} \cdot \|g\|_{m,\Psi}.$$

Además

- $L^\Psi(m) \cdot L^\Phi_w(m) \subset L^1(m)$.
- $L^\Psi_w \cdot L^\Phi_w = L^1_w(m)$.
- Si Ψ tiene la Δ_2–propiedad, entonces $L^\Psi(m) \cdot L^\Phi_w(m) = L^1(m)$.
- Si Ψ y Φ tienen la Δ_2–propiedad, entonces $L^\Psi(m) \cdot L^\Phi(m) = L^1(m)$.

Relación $L^{\Phi}(m) - L^{\Psi}(m)$

Sea Ψ la función de Young conjugada de Φ.

Lema Sea $f \in L^{\Phi}_w(m)$ y $g \in L^{\Psi}_w(m)$, entonces $fg \in L^1_w(m)$ y

$$\|fg\|_1 \leq 2\|f\|_{m,\Phi} \cdot \|g\|_{m,\Psi}.$$

Además

- $L^{\Psi}(m) \cdot L^{\Phi}_w(m) \subset L^1(m)$.
- $L^{\Psi}_w \cdot L^{\Phi}_w = L^1_w(m)$.
- Si Ψ tiene la Δ_2–propiedad, entonces $L^{\Psi}(m) \cdot L^{\Phi}_w(m) = L^1(m)$.
- Si Ψ y Φ tienen la Δ_2–propiedad, entonces $L^{\Psi}(m) \cdot L^{\Phi}(m) = L^1(m)$.

Multiplicadores

Teorema Para Ψ con Δ_2–propiedad,

1. $\|g\|_{m,\Psi} \leq \|g\|_{\mathrm{M}(L^{\Phi}_w(m),L^1_w(m))} \leq 2\|g\|_{m,\Psi}, \ \forall g \in L^{\Psi}_w(m).$
2. Si Φ tiene la propiedad Δ_2,
   $\|g\|_{m,\Psi} \leq \|g\|_{\mathrm{M}(L^{\Phi}(m),L^1(m))} \leq 2\|g\|_{m,\Psi}, \ \forall g \in L^{\Psi}(m).$
3. $$\begin{aligned} L^{\Psi}_w(m) &= \mathrm{M}(L^{\Phi}(m),L^1(m)) \\ &= \mathrm{M}(L^{\Phi}(m),L^1_w(m)) \\ &= \mathrm{M}(L^{\Phi}_w(m),L^1_w(m)). \end{aligned}$$
4. $L^{\Psi}(m) = \mathrm{M}(L^{\Phi}_w(m),L^1(m))$

Multiplicadores

Teorema Para Ψ con Δ_2–propiedad,

1. $\|g\|_{m,\Psi} \leq \|g\|_{\mathrm{M}(L^\Phi_w(m), L^1_w(m))} \leq 2\|g\|_{m,\Psi}, \ \forall g \in L^\Psi_w(m).$
2. Si Φ tiene la propiedad Δ_2,
   $\|g\|_{m,\Psi} \leq \|g\|_{\mathrm{M}(L^\Phi(m), L^1(m))} \leq 2\|g\|_{m,\Psi}, \ \forall g \in L^\Psi(m).$
3. $$\begin{aligned} L^\Psi_w(m) &= \mathrm{M}(L^\Phi(m), L^1(m)) \\ &= \mathrm{M}(L^\Phi(m), L^1_w(m)) \\ &= \mathrm{M}(L^\Phi_w(m), L^1_w(m)). \end{aligned}$$
4. $L^\Psi(m) = \mathrm{M}(L^\Phi_w(m), L^1(m))$

Multiplicadores

Teorema Para Ψ con Δ_2–propiedad,

1. $\|g\|_{m,\Psi} \leq \|g\|_{\mathrm{M}(L^\Phi_w(m), L^1_w(m))} \leq 2\|g\|_{m,\Psi}, \ \forall g \in L^\Psi_w(m).$
2. Si Φ tiene la propiedad Δ_2,
   $\|g\|_{m,\Psi} \leq \|g\|_{\mathrm{M}(L^\Phi(m), L^1(m))} \leq 2\|g\|_{m,\Psi}, \ \forall g \in L^\Psi(m).$
3. $$\begin{aligned} L^\Psi_w(m) &= \mathrm{M}(L^\Phi(m), L^1(m)) \\ &= \mathrm{M}(L^\Phi(m), L^1_w(m)) \\ &= \mathrm{M}(L^\Phi_w(m), L^1_w(m)). \end{aligned}$$
4. $L^\Psi(m) = \mathrm{M}(L^\Phi_w(m), L^1(m))$

Multiplicadores

Teorema Para Ψ con Δ_2–propiedad,

1. $\|g\|_{m,\Psi} \leq \|g\|_{\mathrm{M}(L^{\Phi}_w(m),L^1_w(m))} \leq 2\|g\|_{m,\Psi}, \ \forall g \in L^{\Psi}_w(m).$
2. Si Φ tiene la propiedad Δ_2,
   $\|g\|_{m,\Psi} \leq \|g\|_{\mathrm{M}(L^{\Phi}(m),L^1(m))} \leq 2\|g\|_{m,\Psi}, \ \forall g \in L^{\Psi}(m).$
3. $$\begin{aligned} L^{\Psi}_w(m) &= \mathrm{M}(L^{\Phi}(m),L^1(m)) \\ &= \mathrm{M}(L^{\Phi}(m),L^1_w(m)) \\ &= \mathrm{M}(L^{\Phi}_w(m),L^1_w(m)). \end{aligned}$$
4. $L^{\Psi}(m) = \mathrm{M}(L^{\Phi}_w(m),L^1(m))$

Preliminares

Dualidad vectorial

Subespacios de $\mathscr{L}(L^p(m), X)$

Convergencia débil

Teorema de Representación

Operadores de Multiplicación

Entre espacios $L^p(m)$

Entre espacios de Orlicz