Integración vectorial y de multifunciones

B. Cascales

Universidad de Murcia
http://webs.um.es/beca

IV Encuentro de Análisis Funcional y Aplicaciones
Salobreña 3-5 de Abril de 2007

Grupo UMU

Senior	Jóvenes Doctores	Becarios FPU	Extranjeros
B. Cascales	L. Oncina 1999	E. Saorín 2008	W. Schachermayer
J. Orihuela	S. Lajara 2005	M. P. Silvestre	I. Namioka
S. Troyanski	M. Muñoz 2004		
G. Vera	A. Avilés 2006		
A. J. Pallarés	J. Rodríguez 2006		
	A. J. Guirao 2007		
	C. Angosto 2007		

La declaración de intenciones

Que hacemos:

Estudiamos cuestiones que relacionan técnicas de Análisis Funcional, Topología y Teoría de la Medida, agrupadas en:

- **Integración vectorial y de multifunciones.**
- **Topología infinito dimensional.**
- **Geometría infinito dimensional.**
- **Aplicaciones del AF a las Matemáticas Financieras.**
- **Geometría convexa.**

La declaración de intenciones

Que hacemos:

Estudiamos cuestiones que relacionan técnicas de Análisis Funcional, Topología y Teoría de la Medida, agrupadas en:

- **Integración vectorial y de multifunciones.**
- **Topología infinito dimensional.**
- **Geometría infinito dimensional.**
- **Aplicaciones del AF a las Matemáticas Financieras.**
- **Geometría convexa.**

¿Por qué buscar estas interrelaciones?

La declaración de intenciones

Que hacemos:

Estudiamos cuestiones que relacionan técnicas de Análisis Funcional, Topología y Teoría de la Medida, agrupadas en:

- **Integración vectorial y de multifunciones.**
- **Topología infinito dimensional.**
- **Geometría infinito dimensional.**
- **Aplicaciones del AF a las Matemáticas Financieras.**
- **Geometría convexa.**

¿Por qué buscar estas interrelaciones?

It's a common theme of mathematics that when one mixes various diverse mathematical endeavors, like topology (geometry), algebra and analysis the end product is oftentimes much greater than a simple sum of the individual parts. . .

Respectfully yours Joe Diestel
Kent State University.

Integración vectorial y de multifunciones

Objetivos

- Recordar los conceptos de integración de Bochner y de Pettis.
- Introducir otras técnicas de integración vectorial.
- Llevar las nociones anteriores al caso de multifunciones.
- Dar aplicaciones de las técnicas introducidas.

Leitmotiv

Proposición...otra mirada a medibilidad

Para $f : \Omega \to \mathbb{R}$ son equivalentes:

1. f es medible;
2. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma^+$ existe $B \in \Sigma_A^+$ tal que $|\cdot|$-diam $f(B) < \varepsilon$. Leitmotiv 1:5

Leitmotiv

Proposición...otra mirada a medibilidad

Para $f : \Omega \to \mathbb{R}$ son equivalentes:

1. f es medible;
2. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma^+$ existe $B \in \Sigma_A^+$ tal que $|\cdot|$-diam $f(B) < \varepsilon$. Leitmotiv 1:5
3. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma^+$ existen $B_1, \ldots, B_n \in \Sigma_A^+$ tales que
$$\min_{1 \le i \le n} |\cdot|\text{-diam } (f(B_i)) \le \varepsilon.$$

Las referencias

- J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector measures*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.
- B. Cascales and J. Rodríguez, *The Birkhoff integral and the property of Bourgain*, Math. Ann. **331** (2005), no. 2, 259–279.
- B. Cascales and J. Rodríguez, *Birkhoff integral for multi-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), no. 2, 540–560, Special issue dedicated to John Horváth.
- B. Cascales, V. Kadets, and J. Rodríguez, *The Pettis integral for multi-valued functions via single-valued ones*, J. Math. Anal. Appl. **332** (2007), no. 1, 1–10.
- B. Cascales, V. Kadets, and J. Rodríguez, *Measurable selectors and set-valued Pettis integral in non-separable Banach spaces*, enviado 2007.
- B. Cascales, V. Kadets, and J. Rodríguez, *Measurability and selectors of multi-functions in Banach spaces*, en preparación.

Medibilidad: $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to X$: prob. completo y Banach

Función simple.- $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, donde $\alpha_i \in X$, $A_i \in \Sigma$.

Función μ-medible.- $\lim_n \| s_n - f \| = 0$, μ p.c.t. $w \in \Omega$.

Función débilmente medible.- $x^* f$ es medible, para cada $x^* \in X^*$.

Medibilidad: $f:(\Omega,\Sigma,\mu)\to X$: prob. completo y Banach

Función simple.- $s=\sum_{i=1}^n \alpha_i\chi_{A_i}$, donde $\alpha_i\in X$, $A_i\in\Sigma$.

Función μ-medible.- $\lim_n \| s_n - f \| = 0$, μ p.c.t. $w\in\Omega$.

Función débilmente medible.- x^*f es medible, para cada $x^*\in X^*$.

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f:\Omega\longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E\in\Sigma$ con $\mu(E)=0$ y tal que $f(\Omega\setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^*\in X^*$, la función x^*f es medible.

Medible$\neq$débilmente medible

$$f:\ [0,1]\to \ell^2([0,1])\ t\to e_t$$

Integral de Bochner

Integración de funciones simples.- Si $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, con $A_i \in \Sigma$ y $\alpha_i \in X$, es una función simple, definimos la integral

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i),$$

Integral de Bochner

Integración de funciones simples.- Si $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, con $A_i \in \Sigma$ y $\alpha_i \in X$, es una función simple, definimos la integral

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i),$$

Integral de Bochner.- $f : \Omega \longrightarrow X$ μ-medible es *integrable Bochner*, si existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ tal que

$$\lim_n \int_\Omega \| s_n - f \| \, d\mu = 0.$$

Al vector $\int_E f \, d\mu = \lim_n \int_E s_n d\mu$ se le llama integral de Bochner.

Propiedades de Integral de Bochner

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-medible. Son equivalentes:

1. f es integrable Bochner.
2. $\| f \|$ es integrable Lebesgue.

Propiedades de Integral de Bochner

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-medible. Son equivalentes:

1. f es integrable Bochner.
2. $\| f \|$ es integrable Lebesgue.

Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Bochner, entonces, para todo $E \in \Sigma$, se tiene que

$$\left\| \int_E f \, d\mu \right\| \leq \int_E \| f \| \, d\mu .$$

Propiedades de Integral de Bochner

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-medible. Son equivalentes:

1. f es integrable Bochner.
2. $\| f \|$ es integrable Lebesgue.

Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Bochner, entonces, para todo $E \in \Sigma$, se tiene que

$$\left\| \int_E f \, d\mu \right\| \leq \int_E \| f \| \, d\mu.$$

Consecuencia

Si $f : \Omega \to X$ es acotada entonces:

$$f \text{ integrable Bochner} \Leftrightarrow f \text{ es } \mu\text{-medible}.$$

La integral indefinida

Teorema

Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ una función integrable Bochner, y sea $F(E)=\int_E f\,d\mu$, $E\in\Sigma$. Entonces:

1. $\lim_{\mu(E)\to 0} F(E)=0$.
2. F es una medida vectorial numerablemente aditiva de variación acotada y, para cada $E\in\Sigma$, se tiene que

$$|F|(E)=\int_E \| f \|\, d\mu.$$

La integral de Pettis

Teorema de Dunford, 1937

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función débilmente medible, con $x^* f \in L^1(\mu)$ para cada $x^* \in X^*$. Entonces, la aplicación

$$X^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x^* \to \int_E x^* f \, d\mu$$

es un elemento del bidual X^{**}, para cada $E \in \Sigma$.

La integral de Pettis

Integral de Dunford $f : \Omega \longrightarrow X$ es *integrable Dunford*, si es débilmente medible y, para cada $x^* \in X^*$, se tiene que $x^* f \in L^1(\mu)$. En este caso, para cada $E \in \Sigma$, el elemento de X^{**} definido por

$$x_E^{**} : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x^* \to \int_E x^* f \, d\mu$$

se llama *integral de Dunford* de f sobre E, y se escribe

$$x_E^{**} = (D) - \int_E f \, d\mu.$$

La integral de Pettis

Integral de Dunford $f : \Omega \longrightarrow X$ es *integrable Dunford*, si es débilmente medible y, para cada $x^* \in X^*$, se tiene que $x^* f \in L^1(\mu)$. En este caso, para cada $E \in \Sigma$, el elemento de X^{**} definido por

$$x_E^{**} : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x^* \to \int_E x^* f \, d\mu$$

se llama *integral de Dunford* de f sobre E, y se escribe

$$x_E^{**} = (D) - \int_E f \, d\mu.$$

Integral de Pettis En las condiciones de la definición anterior, si $(D) - \int_E f \, d\mu \in X$, para cada $E \in \Sigma$, se dice que la función anterior es *integrable Pettis*, y el valor de la integral de Dunford sobre cada subconjunto $E \in \Sigma$ se denomina, en este caso, *integral de Pettis*.

La integral de Pettis

Observación

Integrable Bochner $\Rightarrow$ Integrable Pettis $\Rightarrow$ Integrable Dunford.

La integral de Pettis

Observación

Integrable Bochner $\Rightarrow$ Integrable Pettis $\Rightarrow$ Integrable Dunford.

Teorema de Pettis

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Pettis. Entonces, su integral indefinida $F : \Sigma \longrightarrow X$ dada por

$$F(E) = (P) - \int_E f \, d\mu, \quad E \in \Sigma,$$

es una medida n. a. en Σ que satisface $\lim_{\mu(E)\to 0} F(E) = 0$.

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Dada una función $f : \Omega \to X$, escribimos

$$Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^{\Omega}.$$

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \; x^* \in B_{X^*}\}$

Dada una función $f : \Omega \to X$, escribimos

$$Z_f := \{x^* \circ f : \; x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^\Omega.$$

Definición

Se dice que una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la propiedad de Bourgain si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma^+$, existen $B_1, \ldots, B_n \subset \Sigma_A^+$ tales que

$$\min_{1 \le i \le n} |\cdot|\text{-diam}\,(h(B_i)) \le \varepsilon \quad \text{para toda } h \in \mathscr{H}.$$

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \; x^* \in B_{X^*}\}$

Dada una función $f : \Omega \to X$, escribimos

$$Z_f := \{x^* \circ f : \; x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^\Omega.$$

Definición

Se dice que una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la propiedad de Bourgain si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma^+$, existen $B_1, \ldots, B_n \subset \Sigma_A^+$ tales que

$$\min_{1 \le i \le n} |\cdot|\text{-diam } (h(B_i)) \le \varepsilon \quad \text{para toda } h \in \mathscr{H}.$$

Para $\mathscr{H} = \{f\}$, Bourgain = “Leitmotiv” 2:5

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Dada una función $f : \Omega \to X$, escribimos

$$Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^{\Omega}.$$

Definición

Se dice que una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tiene la propiedad de Bourgain si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma^+$, existen $B_1, \dots, B_n \subset \Sigma_A^+$ tales que

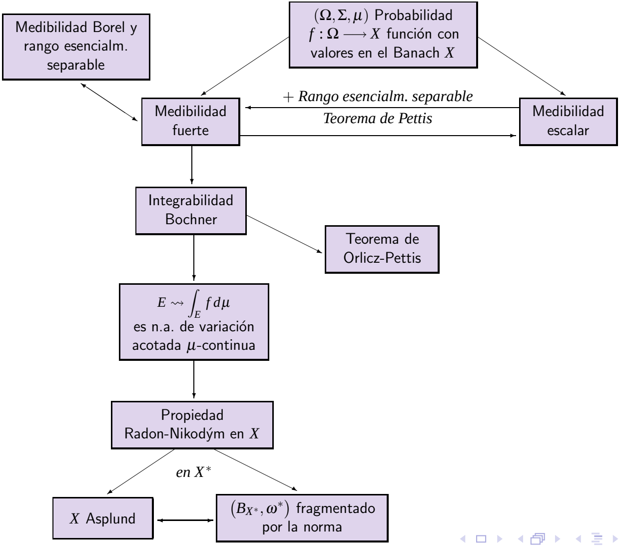
$$\min_{1 \le i \le n} |\cdot|\text{-diam } (h(B_i)) \le \varepsilon \quad \text{para toda } h \in \mathscr{H}.$$

Para $\mathscr{H} = \{f\}$, Bourgain $=$ "Leitmotiv" 2:5

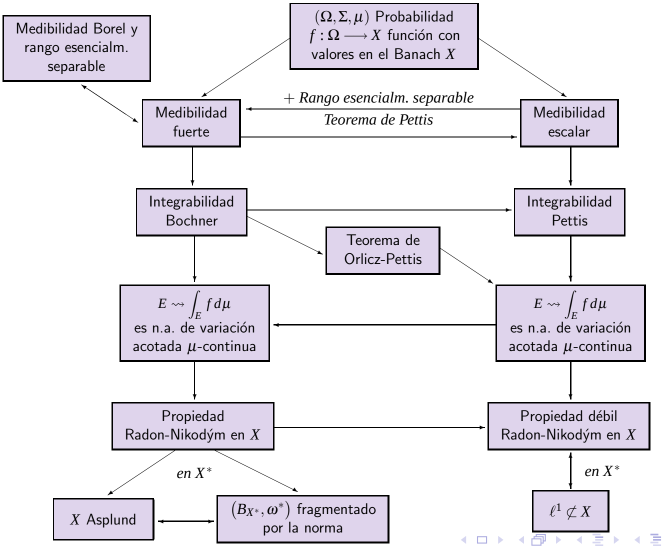
Teorema, Riddle-Saab, 1985

Sea $f : \Omega \to X$ una función acotada. Si Z_f tiene la propiedad de Bourgain, entonces f es integrable Pettis .

Integral de Bochner e Integral de Pettis



Integral de Bochner e Integral de Pettis



Mi resultado favorito

Teorema Namioka-Phelps-Stegall

Para un espacio de Banach X son equivalentes:

1. X es Asplund, *i.e.*, cada función convexa definida en un abierto convexo de X is Fréchet derivable en los puntos de un $\mathscr{G}_\delta$ denso de su dominio;
2. cada subespacio separable de X tiene dual separable;
3. (B_{X^*}, w^*) está fragmentada por la norma;
4. X^* tiene la PRN.

Resumen

Estudiamos la integrabilidad Birkhoff, una noción intermedia entre integrabilidad Bochner y Pettis, que no involucra una definición baricéntrica.

Resumen

Estudiamos la integrabilidad Birkhoff, una noción intermedia entre integrabilidad Bochner y Pettis, que no involucra una definición baricéntrica.

- La integral de Birkhoff involucra sumas y límites de Riemann, [Bir35].

Resumen

Estudiamos la integrabilidad Birkhoff, una noción intermedia entre integrabilidad Bochner y Pettis, que no involucra una definición baricéntrica.

- La integral de Birkhoff involucra sumas y límites de Riemann, [Bir35].
- En $\mathbb{R}$, las integrales de Birkhoff y Lebesgue coinciden, [Fre15].

Resumen

Estudiamos la integrabilidad Birkhoff, una noción intermedia entre integrabilidad Bochner y Pettis, que no involucra una definición baricéntrica.

- La integral de Birkhoff involucra sumas y límites de Riemann, [Bir35].
- En $\mathbb{R}$, las integrales de Birkhoff y Lebesgue coinciden, [Fre15].
- Para espacios de Banach infinito-dimensionales, se tiene que

$$\textbf{Bochner} \implies \textbf{Birkhoff} \implies \textbf{Pettis}$$

Resumen

Estudiamos la integrabilidad Birkhoff, una noción intermedia entre integrabilidad Bochner y Pettis, que no involucra una definición baricéntrica.

- La integral de Birkhoff involucra sumas y límites de Riemann, [Bir35].
- En $\mathbb{R}$, las integrales de Birkhoff y Lebesgue coinciden, [Fre15].
- Para espacios de Banach infinito-dimensionales, se tiene que

$$\textbf{Bochner} \Longrightarrow \textbf{Birkhoff} \Longrightarrow \textbf{Pettis}$$

- Ninguno de los recíprocos es válido en general, [Bir35, Pet38], [Phi40].

Resumen

Estudiamos la integrabilidad Birkhoff, una noción intermedia entre integrabilidad Bochner y Pettis, que no involucra una definición baricéntrica.

- La integral de Birkhoff involucra sumas y límites de Riemann, [Bir35].
- En $\mathbb{R}$, las integrales de Birkhoff y Lebesgue coinciden, [Fre15].
- Para espacios de Banach infinito-dimensionales, se tiene que

$$\textbf{Bochner} \Longrightarrow \textbf{Birkhoff} \Longrightarrow \textbf{Pettis}$$

- Ninguno de los recíprocos es válido en general, [Bir35, Pet38], [Phi40].
- Para espacios de Banach separables: **Birkhoff = Pettis**. Así, la integral de Pettis *puede* calcularse como un límite, [Pet38].

A primera vista

El resultado fundamental

Caracterizamos la integrabilidad Birkhoff utilizando una noción de medibilidad *propiedad de Bourgain*.

A primera vista

El resultado fundamental

Caracterizamos la integrabilidad Birkhoff utilizando una noción de medibilidad *propiedad de Bourgain*.

Consecuencias

- Caracterización de la WRNP en espacios de Banach duales vía densidades de Radon-Nikodým integrables Birkhoff, en lugar de integrables Pettis.

A primera vista

El resultado fundamental

Caracterizamos la integrabilidad Birkhoff utilizando una noción de medibilidad *propiedad de Bourgain*.

Consecuencias

- Caracterización de la WRNP en espacios de Banach duales vía densidades de Radon-Nikodým integrables Birkhoff, en lugar de integrables Pettis.
- Integrabilidad incondicional Riemann-Lebesgue (Kadets et al., 2000-2002, [KSS+02, KT00]) es equivalente a integrabilidad Birkhoff.

Dada $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, para cada partición Γ de Ω en una cantidad contable de elementos (A_n) de Σ, definimos:

$$J^*(f,\Gamma) = \sum_n \sup_{A_n} f \ \mu(A_n) \quad \text{y} \quad J_*(f,\Gamma) = \sum_n \inf_{A_n} f \ \mu(A_n),$$

(suponiendo que ambas series están bien definidas y son absolutamente convergentes).

Dada $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, para cada partición Γ de Ω en una cantidad contable de elementos (A_n) de Σ, definimos:

$$J^*(f,\Gamma) = \sum_n \sup_{A_n} f \;\mu(A_n) \quad \text{y} \quad J_*(f,\Gamma) = \sum_n \inf_{A_n} f \;\mu(A_n),$$

(suponiendo que ambas series están bien definidas y son absolutamente convergentes).Entonces,

$$J_*(f,\Gamma) \leq J^*(f,\Gamma')$$

siempre que $J_*(f,\Gamma)$ y $J^*(f,\Gamma')$ estén definidas.

Dada $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, para cada partición Γ de Ω en una cantidad contable de elementos (A_n) de Σ, definimos:

$$J^*(f,\Gamma) = \sum_n \sup_{A_n} f \ \mu(A_n) \quad \text{y} \quad J_*(f,\Gamma) = \sum_n \inf_{A_n} f \ \mu(A_n),$$

(suponiendo que ambas series están bien definidas y son absolutamente convergentes).Entonces,

$$J_*(f,\Gamma) \leq J^*(f,\Gamma')$$

siempre que $J_*(f,\Gamma)$ y $J^*(f,\Gamma')$ estén definidas.
Por lo tanto, la intersección de los *rangos integrales relativos*

$$J_*(f,\Gamma) \leq x \leq J^*(f,\Gamma),$$

para Γ variable es no vacía.

Existe un único punto $x \Leftrightarrow f$ es integrable Lebesgue y $x = \int_\Omega f \ d\mu$.

Dada $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, para cada partición Γ de Ω en una cantidad contable de elementos (A_n) de Σ, definimos:

$$J^*(f,\Gamma)=\sum_n \sup_{A_n} f\ \mu(A_n) \quad \text{y} \quad J_*(f,\Gamma)=\sum_n \inf_{A_n} f\ \mu(A_n),$$

(suponiendo que ambas series están bien definidas y son absolutamente convergentes).Entonces,

$$J_*(f,\Gamma)\le J^*(f,\Gamma')$$

siempre que $J_*(f,\Gamma)$ y $J^*(f,\Gamma')$ estén definidas.
Por lo tanto, la intersección de los *rangos integrales relativos*

$$J_*(f,\Gamma)\le x\le J^*(f,\Gamma),$$

para Γ variable es no vacía.

Existe un único punto $x \Leftrightarrow f$ es integrable Lebesgue y $x=\int_\Omega f\ d\mu$.

$\Leftarrow$"Leitmotiv" 3:5

Fréchet 1915

Esta forma de presentar la teoría de integración del Sr. Lebesgue tiene la ventaja, sobre la forma en la que el Sr. Lebesgue presentó su teoría, de que está mucho más cercana al punto de vista de Riemann-Darboux con el que muchos estudiantes están familiarizados.

Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función. Si Γ es una partición de Ω en una cantidad contable de elementos (A_n) de Σ, la función f se dice **sumable** respecto a Γ si la restricción $f|_{A_n}$ es acotada cuando $\mu(A_n) > 0$, y el conjunto de sumas

$$J(f,\Gamma) = \left\{ \sum_n f(t_n)\mu(A_n) : t_n \in A_n \right\}$$

está formado por series

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Si Γ es una partición de Ω en una cantidad contable de elementos (A_n) de Σ, la función f se dice **sumable** respecto a Γ si la restricción $f|_{A_n}$ es acotada cuando $\mu(A_n) > 0$, y el conjunto de sumas

$$J(f,\Gamma) = \left\{ \sum_n f(t_n)\mu(A_n) : t_n \in A_n \right\}$$

está formado por series incondicionalmente convergentes.

Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función. Si Γ es una partición de Ω en una cantidad contable de elementos (A_n) de Σ, la función f se dice **sumable** respecto a Γ si la restricción $f|_{A_n}$ es acotada cuando $\mu(A_n) > 0$, y el conjunto de sumas

$$J(f,\Gamma) = \left\{ \sum_n f(t_n)\mu(A_n) : t_n \in A_n \right\}$$

está formado por series incondicionalmente convergentes. La función f se dice **integrable Birkhoff** si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición contable $\Gamma = (A_n)$ de Ω en Σ para la que f es sumable y $\|\cdot\|$-diam $\big(J(f,\Gamma)\big) < \varepsilon$.

Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ una función. Si Γ es una partición de Ω en una cantidad contable de elementos (A_n) de Σ, la función f se dice **sumable** respecto a Γ si la restricción $f|_{A_n}$ es acotada cuando $\mu(A_n)>0$, y el conjunto de sumas

$$J(f,\Gamma)=\left\{\sum_n f(t_n)\mu(A_n): t_n\in A_n\right\}$$

está formado por series incondicionalmente convergentes. La función f se dice **integrable Birkhoff** si, para cada $\varepsilon>0$, existe una partición contable $\Gamma=(A_n)$ de Ω en Σ para la que f es sumable y $\|\cdot\|\text{-diam}\,\big(J(f,\Gamma)\big)<\varepsilon$.

En este caso, la **integral de Birkhoff** $(\text{Birkhoff})\int_\Omega f\,d\mu$ de f es el único punto en la intersección

$$\bigcap\left\{\overline{\mathrm{co}\big(J(f,\Gamma)\big)}: f \text{ es sumable respecto de } \Gamma\right\}.$$

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función acotada. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *f es integrable Birkhoff.*

(ii) *$Z_f = \left\{\langle x^*, f\rangle : \; x^* \in B_{X^*}\right\}$ tiene la propiedad de Bourgain.*

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función acotada. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *f es integrable Birkhoff.*

(ii) *$Z_f = \{\langle x^*, f\rangle : x^* \in B_{X^*}\}$ tiene la propiedad de Bourgain.*

Observación

- $f : \Omega \longrightarrow X$ acotada: su integrabilidad Bochner es equivalente a la medibilidad fuerte. La propiedad de Bourgain es a la integrabilidad Birkhoff, lo que la medibilidad fuerte es a la integrabilidad Bochner.

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función acotada. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *f es integrable Birkhoff.*

(ii) *$Z_f = \left\{\langle x^*, f\rangle : \ x^* \in B_{X^*}\right\}$ tiene la propiedad de Bourgain.*

Observación

- $f : \Omega \longrightarrow X$ acotada: su integrabilidad Bochner es equivalente a la medibilidad fuerte. La propiedad de Bourgain es a la integrabilidad Birkhoff, lo que la medibilidad fuerte es a la integrabilidad Bochner.
- La condición que durante más de 30 años apareció como suficiente para integrabilidad Pettis is necesaria y suficiente para integrabilidad Birkhoff.

Teorema

Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función. Son equivalentes:

1. *f es integrable Birkhoff.*
2. *Existe $x \in X$ verificando: para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición contable Γ de Ω en Σ tal que f es sumable y*

$$\left\| S(f,\Gamma,T) - x \right\| < \varepsilon \text{ para toda elección } T \text{ en } \Gamma.$$

3. [a] *Existe $y \in X$ verificando: para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición contable Γ de Ω en Σ tal que f es sumable respecto a cada partición contable Γ' más fina que Γ y*

$$\left\| S(f,\Gamma',T') - y \right\| < \varepsilon \qquad \text{para toda elección } T' \text{ en } \Gamma'.$$

En este caso, $x = y = \int_\Omega f\, d\mu$.

[a] Esta es la definición de RL de [KSS+02, KT00]

Teorema

Sea X un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:

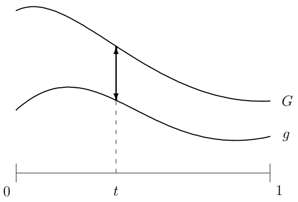
1. *X^* tiene la propiedad débil de Radon-Nikodým.*
2. *X no contiene copias de ℓ^1.*
3. *Para todo espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) y toda medida vectorial μ-continua y numerablemente aditiva $\nu : \Sigma \longrightarrow X^*$, de variación σ-finita, existe una función integrable Birkhoff $f : \Omega \longrightarrow X^*$ tal que*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu,$$

para todo $E \in \Sigma$.

La integral para una multifunción

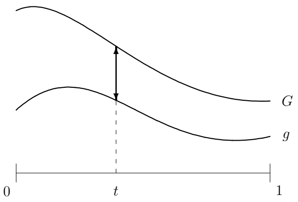
$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos

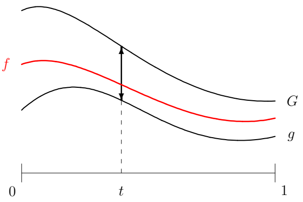


Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



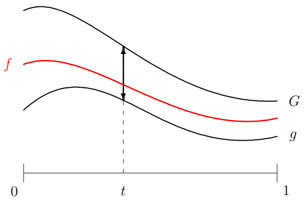
Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;
2. tomar todos los posibles selectores *integrables* f de F y considerar

$$\int F \, d\mu = \left\{ \int f \, d\mu : f \text{ integra. sel.} F \right\}.$$

La integral para una multifunción

$F:\Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

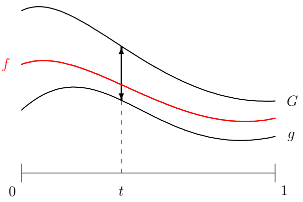
1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j\circ F$;
2. tomar todos los posibles selectores *integrables* f de F y considerar

$$\int F\,d\mu = \left\{\int f\,d\mu : f \text{ integra. sel.} F\right\}.$$

1. Debreu usó la técnica de la inmersión con la integral de Bochner en $cK(X)$ –convexos compactos de X;

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

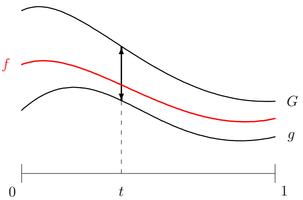
1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y (= \ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;
2. tomar todos los posibles selectores *integrables* f de F y considerar

$$\int F \, d\mu = \left\{ \int f \, d\mu : f \text{ integra. sel.} F \right\}.$$

1. Debreu usó la técnica de la inmersión con la integral de Bochner en $cK(X)$ –convexos compactos de X;
2. Aumann uso la técnica de los selectores;

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

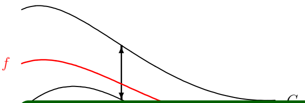
1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;
2. tomar todos los posibles selectores *integrables* f de F y considerar

$$\int F\,d\mu = \left\{ \int f\,d\mu : f \text{ integra. sel.} F \right\}.$$

1. Debreu usó la técnica de la inmersión con la integral de Bochner en $cK(X)$ –convexos compactos de X;
2. Aumann uso la técnica de los selectores;
3. Debreu premio nobel en Economía 1983; Aumann en 2005.

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;

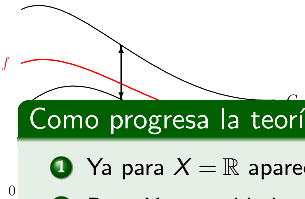
s

Como progresa la teoría

1. Ya para $X = \mathbb{R}$ aparecen espacios de Banach no separables $\ell_\infty([-1,1])$.

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;

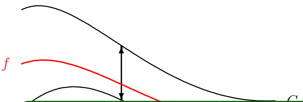
s

Como progresa la teoría

1. Ya para $X = \mathbb{R}$ aparecen espacios de Banach no separables $\ell_\infty([-1,1])$.
2. Para X separable hay teorías de integración satisfactorias aunque quedan problemas: hemos resuelto algunos en varios artículos.

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

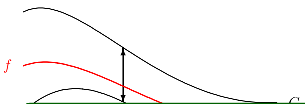
1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;

Como progresa la teoría

1. Ya para $X = \mathbb{R}$ aparecen espacios de Banach no separables $\ell_\infty([-1, 1])$.
2. Para X separable hay teorías de integración satisfactorias aunque quedan problemas: hemos resuelto algunos en varios artículos.
3. El caso X separable funciona porque existe un teorema de selección para funciones medibles, Kuratowski and Ryll-Nardzewski 1965.

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



0

Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y (= \ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;

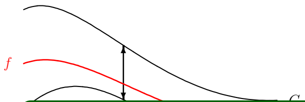
s

Como progresa la teoría

1. Ya para $X = \mathbb{R}$ aparecen espacios de Banach no separables $\ell_\infty([-1,1])$.
2. Para X separable hay teorías de integración satisfactorias aunque quedan problemas: hemos resuelto algunos en varios artículos.
3. El caso X separable funciona porque existe un teorema de selección para funciones medibles, Kuratowski and Ryll-Nardzewski 1965.
4. No hay versiones Kuratowski and Ryll-Nardzewski en el caso no separable.

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(= \ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;

s

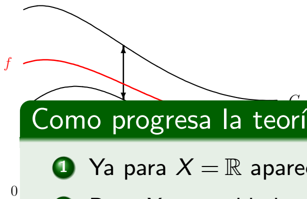
0

Como progresa la teoría

1. Ya para $X = \mathbb{R}$ aparecen espacios de Banach no separables $\ell_\infty([-1,1])$.
2. Para X separable hay teorías de integración satisfactorias aunque quedan problemas: hemos resuelto algunos en varios artículos.
3. El caso X separable funciona porque existe un teorema de selección para funciones medibles, Kuratowski and Ryll-Nardzewski 1965.
4. No hay versiones Kuratowski and Ryll-Nardzewski en el caso no separable.
5. Desatascamos el caso no separable.

La integral para una multifunción

$F:\Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j\circ F$;

Como progresa la teoría

1. Ya para $X=\mathbb{R}$ aparecen espacios de Banach no separables $\ell_\infty([-1,1])$.
2. Para X separable hay teorías de integración satisfactorias aunque quedan problemas: hemos resuelto algunos en varios artículos.
3. El caso X separable funciona porque existe un teorema de selección para funciones medibles, Kuratowski and Ryll-Nardzewski 1965.
4. No hay versiones Kuratowski and Ryll-Nardzewski en el caso no separable.
5. Desatascamos el caso no separable.
6. Caracterizamos la existencia de selectores medibles obteniendo Kuratowski and Ryll-Nardzewski en particular y versiones no separables del mismo.

Integración Pettis para multifunciones

Theorem, [CKR]

Sea X un espacio de Banach y $F:\Omega\to cwk(X)$ una multifunción integrable Pettis. Entonces:

- cada selector escalarmente medible es Pettis integrable;
- F admite selectores escalarmente medibles.

Además, F admite una colección $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mathrm{dens}(X^*,w^*)}$ de selectores Pettis integrable tales que

$$F(\omega)=\overline{\{f_\alpha(\omega):\ \alpha<\mathrm{dens}(X^*,w^*)\}}\quad \text{for every } \omega\in\Omega.$$

Se tiene, $\int_A F\,d\mu=\overline{IS_F(A)}$ para cada $A\in\Sigma$.

Integración Pettis para multifunciones

Theorem, [CKR]

Sea X un espacio de Banach y $F : \Omega \to cwk(X)$ una multifunción integrable Pettis. Entonces:

- cada selector escalarmente medible es Pettis integrable;
- F admite selectores escalarmente medibles.

Además, F admite una colección $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mathrm{dens}(X^*,w^*)}$ de selectores Pettis integrable tales que

$$F(\omega) = \overline{\{f_\alpha(\omega) : \ \alpha < \mathrm{dens}(X^*, w^*)\}} \quad \text{for every } \omega \in \Omega.$$

Se tiene, $\int_A F \, d\mu = \overline{IS_F(A)}$ para cada $A \in \Sigma$.

Observación

La prueba requiere resultados de análisis convexo más la existencia de puntos fuertemente expuestos en convexos débil compactos.

Selectores fuera del caso separable

Theorem,[CKR08]

Sea X un espacio de Banach reflexivo y $F:\Omega \to cwk(X)$. Son equivalentes:

(i) F admite un selector μ-medible.

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $A \in \Sigma^+$ existe $B \in \Sigma_B^+$ y un conjunto $D \subset X$ de diámetro $< \varepsilon$ tal que $F(t) \cap D \neq \emptyset$ para cada $t \in B$.

Selectores fuera del caso separable

Theorem,[CKR08]

Sea X un espacio de Banach reflexivo y $F : \Omega \to cwk(X)$. Son equivalentes:

(i) F admite un selector μ-medible.

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $A \in \Sigma^+$ existe $B \in \Sigma_B^+$ y un conjunto $D \subset X$ de diámetro $< \varepsilon$ tal que $F(t) \cap D \neq \emptyset$ para cada $t \in B$.

Observaciones

- (ii) es la versión multi-valuada de "leitmotiv" 4:5.

Selectores fuera del caso separable

Theorem,[CKR08]

Sea X un espacio de Banach reflexivo y $F : \Omega \to cwk(X)$. Son equivalentes:

(i) F admite un selector μ-medible.

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $A \in \Sigma^+$ existe $B \in \Sigma_B^+$ y un conjunto $D \subset X$ de diámetro $< \varepsilon$ tal que $F(t) \cap D \neq \emptyset$ para cada $t \in B$.

Observaciones

- (ii) es la versión multi-valuada de “leitmotiv” 4:5.
- La técnica anterior sirve para obtener los resultados de selección clásicos del caso separable.

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Sean X un espacio de Banach, y B un subconjunto de B_{X^*}.

Conjunto normante B es un subconjunto *1-normante* (brevemente, *normante*) de B_{X^*} si, para cada $x \in X$, se tiene que

$$\|x\| = \sup\left\{|x^*(x)| : x^* \in B\right\}.$$

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Sean X un espacio de Banach, y B un subconjunto de B_{X^*}.

Conjunto normante B es un subconjunto *1-normante* (brevemente, *normante*) de B_{X^*} si, para cada $x \in X$, se tiene que

$$\|x\| = \sup\big\{|x^*(x)| : x^* \in B\big\}.$$

Frontera de James B es una *frontera de James* para B_{X^*} si, para cada $x \in X$, se tiene que

$$\|x\| = \max\big\{|x^*(x)| : x^* \in B\big\},$$

i.e., si para cada $x \in X$, existe un elemento $b^* \in B$ tal que $|b^*(x)| = \|x\|$.

Pre-requisitos de Análisis Funcional

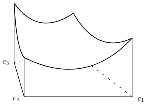
Ejemplos

- Conjunto normante: $B_{L^q(\mu,X^*)} \subset B_{\left(L^p(\mu,X),\|\ \|_p\right)^*}$

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Ejemplos

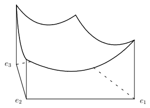
- Conjunto normante: $B_{L^q(\mu,X^*)} \subset B_{\left(L^p(\mu,X),\|\ \|_p\right)^*}$
- Frontera de James: Ext B_{X^*}

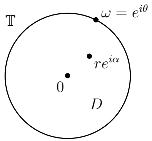


Pre-requisitos de Análisis Funcional

Ejemplos

- Conjunto normante: $B_{L^q(\mu,X^*)} \subset B_{\left(L^p(\mu,X),\|\ \|_p\right)^*}$
- Frontera de James: Ext B_{X^*}

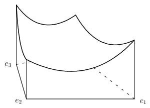


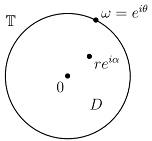


Pre-requisitos de Análisis Funcional

Ejemplos

- Conjunto normante: $B_{L^q(\mu,X^*)} \subset B_{\left(L^p(\mu,X),\|\ \|_p\right)^*}$
- Frontera de James: Ext B_{X^*}





Hay fronteras disjuntas del conjunto de puntos extremales.

Aplicaciones: El problema de la frontera

The boundary problem (Godefroy)...extremal test for compactness

Sean X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X y $\sigma(X, B)$-compacto.

es H es débilmente compacto?

Aplicaciones: El problema de la frontera

The boundary problem (Godefroy)...extremal test for compactness

Sean X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X y $\sigma(X,B)$-compacto.

es H es débilmente compacto?

Resultados positivos:

1. 1952, Grothendieck: $X = C(K)$ y $B = \mathrm{Ext}(B_{C(K)^*})$;
2. 1963, Rainwater: $B = \mathrm{Ext}(B_{X^*})$, H $\sigma(X,B)$-suc.compact;
3. 1972, James: $B_X \subset B_{X^{**}}$ frontera, caracterización de la reflexividad;
4. 1972, Simons: H $\sigma(X,B)$-suc.compact y B cualquier frontera;
5. 1974, de Wilde: H convexo y B cualquier frontera;
6. 1982, Bourgain-Talagrand: $B = \mathrm{Ext}(B_{X^*})$.
7. 1997, Manjabacas-Vera-Cascales: si X no contiene una copia isomorfa de $\ell^1(\Gamma)$, con $|\Gamma| = \mathfrak{c}$, [CMV97, CS03].
8. 1998, Godefroy-Cascales: cuando $X = C(K)$, dotado con su norma canónica $\| \ \|_\infty$, donde K es un espacio compacto arbitrario, [CG98].

Fronteras fuertes

La versión topológica del "Leitmotiv" 5:5

- Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma^+$ existe $B \in \Sigma_A^+$ tal que $|\cdot|$-diam $f(B) < \varepsilon$.

Fronteras fuertes

La versión topológica del "Leitmotiv" 5:5

- Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma^+$ existe $B \in \Sigma_A^+$ tal que $|\cdot|$-diam $f(B) < \varepsilon$.
- $f : T \to X$ y $\varepsilon > 0$: f está ε-fragmentada si para cada subconjunto no vacío $C \subset T$ existe un abierto $O \subset T$ tal que $O \cap C \neq \emptyset$ y $\|\cdot\|$-diam $f(O \cap C) < \varepsilon$.

Fronteras fuertes

La versión topológica del “Leitmotiv” 5:5

- Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma^+$ existe $B \in \Sigma_A^+$ tal que $|\cdot|$-diam $f(B) < \varepsilon$.
- $f : T \to X$ y $\varepsilon > 0$: f está ε-fragmentada si para cada subconjunto no vacío $C \subset T$ existe un abierto $O \subset T$ tal que $O \cap C \neq \emptyset$ y $\|\cdot\|$-diam $f(O \cap C) < \varepsilon$.
- $f : T \to X$ está σ-fragmentada, si para cada ε podemos descomponer $T = \cup_n T_n$ y $f|_{T_n}$ está ε-fragmentada.

JAMES BOUNDARIES AND σ-FRAGMENTED SELECTORS

B. CASCALES, M. MUÑOZ AND J. ORIHUELA
STUDIA MATH. 2008

ABSTRACT. We study the boundary structure for w^*-compact subsets of dual Banach spaces. Being more precise, for a Banach space X, $0 < \varepsilon < 1$ and T a subset of the dual space X^* such that $\bigcup\{B(t,\varepsilon) : t \in T\}$ contains a James boundary for B_{X^*} we study different kind of conditions on T, besides T being countable, which ensure that

$$\text{(SP)} \qquad X^* = \overline{\operatorname{span} T}^{\|\cdot\|}.$$

We analyze two different non separable cases where the equality (SP) holds: (a) if $J : X \to 2^{B_{X^*}}$ is the duality mapping and there exists a σ-fragmented map $f : X \to X^*$ such that $B(f(x),\varepsilon) \cap J(x) \neq \emptyset$ for every $x \in X$, then (SP) holds for $T = f(X)$ and in this case X is Asplund; (b) if T is weakly countably K-determined then (SP) holds, X^* is weakly countably K-determined and moreover for every James boundary B of B_{X^*} we have $B_{X^*} = \overline{\operatorname{co}(B)}^{\|\cdot\|}$. Both approaches use Simons' inequality and ideas exploited by Godefroy in the separable case (*i.e.*, when T is countable). While proving (a) we prove that X is Asplund if, and only if, the duality mapping has an ε-selector, $0 < \varepsilon < 1$, that sends separable sets into separable ones. A consequence of the above is that the dual unit ball B_{X^*} is norm fragmented if, and only if, it is norm ε-fragmented for some fixed $0 < \varepsilon < 1$. Our analysis is completed by offering a characterization of those Banach spaces (non necessarily separable) without copies of ℓ^1 via the structure of the boundaries of w^*-compact sets of their duals. Several applications and complementary results are proved. Our results extend to the non separable case results by Godefroy, Contreras-Payá and Rodé.

Referencias

G. Birkhoff, *Integration of functions with values in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), no. 2, 357–378. MR 1 501 815

B. Cascales and G. Godefroy, *Angelicity and the boundary problem*, Mathematatika **45** (1998), no. 1, 105–112. MR 99f:46019

B. Cascales, V. Kadets, and J. Rodríguez, *Measurable selectors and set-valued Pettis integral in non-separable Banach spaces*, preprint.

B. Cascales, G. Manjabacas, and G. Vera, *A Krein-Šmulian type result in Banach spaces*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), no. 190, 161–167. MR 99c:46009

B. Cascales and R. Shvydkoy, *On the Krein-Šmulian theorem for weaker topologies*, Illinois J. Math. **47** (2003), no. 4, 957–976. MR MR2036985 (2004m:46044)

M. Frechet, *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait*, Bull. Soc. Math. France **43** (1915), 248–265.

V. M. Kadets, B. Shumyatskiy, R. Shvidkoy, L. Tseytlin, and K. Zheltukhin, *Some remarks on vector-valued integration*, Mat. Fiz. Anal. Geom. **9** (2002), no. 1, 48–65. MR 1 911 073

V. M. Kadets and L. Tseytlin, *On "integration" of non-integrable vector-valued functions*, Mat. Fiz. Anal. Geom. **7** (2000), no. 1, 49–65. MR 2001e:28017

B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), no. 2, 277–304. MR 1 501 970

R. S. Phillips, *Integration in a convex linear topological space*, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940),