Cohetes: Física complicada hecha fácil (o algo así)

© *Julio de 2011 por Larry Engelhardt*
Traducido por Francisco Esquembre (Marzo de 2013)

En este documento examinamos la dinámica de los cohetes. Éste es un tema complejo, pero usando una computadora – y resolviendo el problema numéricamente – seremos de hecho capaces de obtener resultados sin realizar una inversión de tiempo y esfuerzo más allá de lo razonable. (Traducción: Va a requerir algo de trabajo, ¡pero puede usted hacerlo!)

Dado que la dinámica de los cohetes es compleja, vamos a realizar nuestro modelo en etapas.[1] En primer lugar, introduciremos la teoría y la implementación de la *propulsión*, y usando (solamente) la fuerza de propulsión, comparará usted sus resultados numéricos con resultados analíticos bien conocidos. A continuación, incluiremos la *gravedad*, que es (obviamente) importante sobre la superficie de la Tierra o cerca de ella. Asumiendo una fuerza gravitatoria constante (lo que es apropiado en tanto que el cohete no suba demasiado alto), comparará de nuevo sus resultados numéricos con resultados analíticos. Después, incorporaremos la forma *universal* de la gravedad de Newton, que es dependiente de la altitud. Finalmente, incluiremos un modelo simplificado – aunque algo sofisticado – de *resistencia del aire*.[2] Esta fuerza es importante a altas velocidades y también depende de la altitud de una manera no trivial. Pero, antes de entrar en ninguno de estos detalles, aquí está su tarea…

1. Tarea

El objetivo de este documento es que usted desarrolle e implemente un modelo de computadora para simular el lanzamiento de un cohete a la Estación Espacial Internacional (EEI), que orbita a una altitud de 355 km. Le indicaremos a continuación los valores de los parámetros para un cohete específico, pero su programa debe estar construido de modo que el usuario pueda fácilmente introducir valores diferentes de estos parámetros para simular diferentes cohetes.

[1] Un poco de doble sentido hay, sí.

[2] Para una discusión más sofisticada – y todavía relativamente accesible – de la física del vuelo, consulte N. Harris McClamroch, "Steady Aircraft Flight and Performance," Princeton University Press (2011).

El cohete que se usará para el lanzamiento que debe usted simular tiene las siguientes propiedades:[3]

- La masa en vacío (sin combustible ni carga) es de 10.000 kg
- La máxima capacidad de combustible es de 10.000 kg de combustible para cohetes
- La velocidad de salida de los gases de la combustión es de 7.000 m/s
- El ritmo de consumo de combustible es de 100 kg/s
- El área de referencia (en la parte frontal del cohete) es de 10 m^2
- El coeficiente de fricción por arrastre es 0.5

Antes de que tenga lugar el lanzamiento, se le ha pedido que conteste a las siguientes preguntas:

1. Usando la máxima capacidad de combustible del cohete, ¿cuál es la máxima carga que podría transportar a la EEI?
2. Para esta misma carga, ¿que ocurriría si usáramos solo la mitad de la capacidad de combustible? (¿Podríamos llegar a la EEI? Si no es así, ¿hasta qué altitud llegaríamos? ¿Podríamos llegar a la EEI usando la mitad de la capacidad de combustible, pero transportando una carga menor?)

Además, debe usted crear gráficos de la altura frente al tiempo, velocidad frente al tiempo, y fuerza frente al tiempo (con una curva separada para cada fuerza individual).

Para completar esta tarea, necesitará usted añadir variables al Modelo. Necesitará introducir las ecuaciones correctas en la Evolución. Necesitará crear métodos para calcular las fuerzas que actúan sobre el cohete. Necesitará añadir un evento que imprima la máxima altura alcanzada, y añadir otro evento que pause la simulación si el cohete choca con el suelo. Necesitará añadir gráficos a la Vista. Finalmente, necesitará añadir campos de texto a la Vista con el fin de permitir la modificación de los parámetros de entrada.

2. Plantilla para el cohete – Llama y combustible

Comience abriendo el fichero para EJS llamado `CohetePlantilla.ejs` (que contiene una plantilla para este proyecto), ejecutándolo, y observando lo que pasa. Este programa contiene una representación visual de un cohete, pero observará que se ha implementado muy poco de la física del problema en el modelo. En particular, cuando ejecute el programa, observará que el cohete va consumiendo su combustible – y la masa del combustible restante va decreciendo –

[3] El significado de cada una de estas propiedades se discute en las secciones que siguen.

¡pero el combustible nunca se agota! Al contrario, el cohete (aparentemente) parece seguir quemando combustible, incluso cuando la masa del combustible se hace negativa. Desafortunadamente, esto no es realista. ¡Si lo fuera, nuestros problemas energéticos estarían resueltos!

Antes de pensar en cómo *resolver* el problema del combustible, comencemos echándole un vistazo a la Vista para ver cómo se ha creado la visualización del cohete. Encontrará un elemento en la Vista llamado “rocketGroup” (grupo del cohete), que contiene la representación visual del cohete. Usar un elemento de tipo “grupo” en la Vista de EJS es un modo muy cómodo de construir una imagen – formada a partir de elementos de la Vista más sencillos – que puede ser trasladada y/o girada como una única entidad.[4] De esta manera, se garantiza que todas piezas del cohete ascienden juntas.[5] Dentro del elemento rocketGroup, haga doble clic sobre el elemento llamado “flame” (llama), para ver las propiedades de la imagen de la llama. Se ha introducido la siguiente (*correcta*) línea de código para controlar la visibilidad de la llama.

Listing 1: Visibilidad de la llama del cohete.

```
(t>0) && (burnRate>0)
```

Recuerde que, en Java, “&&” es el operador “*y lógico*”. Esto significa que *si* `(t>0)` es verdadero *y* `(burnRate>0)` es verdadero, *entonces* la llama será visible. En caso contrario, la llama no será visible. La primera parte, `(t>0)`, garantiza que la llama no será visible antes de que empiece el lanzamiento (en `t=0`). La segunda parte, `(burnRate>0)`, especifica que la llama se mostrará *sólo* si el combustible del cohete se está quemando, de modo que si `burnRate=0`, la llama no será visible. ¡Esto debe darle una pista de lo que se necesita para resolver el problema del combustible del cohete “negativo” que se quema!

La razón de que se siga quemando combustible del cohete incluso después de que se haya acabado tiene que ver con el ritmo de consumo o de “quemado” de combustible, “burnRate”.

Una importante propiedad de cualquier cohete es el ritmo al que se expulsa combustible, también conocido como *ritmo de quemado*. Matemáticamente, el ritmo de quemado es

$$r = \frac{dm}{dt}, \text{ o, si } r \text{ es constante,} \tag{1a}$$

$$r = \frac{\Delta m}{\Delta t}. \tag{1b}$$

Aquí, Δm representa la masa de combustible expulsada por el cohete durante el intervalo de tiempo Δt. Por ejemplo, si un cohete tiene un ritmo de quemado de $r = 100$ kg/s, y si comienza con 10 kg de combustible, este combustible durará 0.1 segundos. Mire en EJS en la página del `Modelo`, `Evolución`, y verá dónde

[4] Otro bonito ejemplo de la combinación de elementos de la Vista en un “grupo” puede verse en www.compadre.org/osp/items/detail.cfm?ID=8243.

[5] Si quiere usted modificar el dibujo del cohete, o reemplazarlo con una imagen de la que disponga, adelante. Esto no afectará a la *física* en modo alguno.

se implementa la Ec. (1). (El signo negativo en la evolución especifica que la masa *restante* del combustible debe *decrecer* con el tiempo.)

Para arreglar el problema del combustible, ¿qué *debería* ocurrir cuando la masa de combustible del cohete fuese igual a cero? ¿Cómo puede conseguirse eso? Recuerde que EJS incluye un mecanismo para detectar situaciones como ésta, denominado “Evento”. Adelante, añada un evento a la simulación para solucionar el problema del combustible. Entonces estará usted en condiciones de empezar con la verdadera física, que comienza en la siguiente sección.

3. Propulsión del cohete

3.1. Teoría

Como sabe, los gases de la combustión son expulsados por la parte posterior del cohete, y – asumiendo que la velocidad de la expulsión, v_{ex}, es suficientemente alta – el cohete sube. (Sencillo, ¿no?) Este fenómeno es conocido como ‘propulsión”, y el material que se expulsa por la parte de abajo del cohete es combustible de cohete. En esta sección derivamos la ecuación básica necesaria para implementar la fuerza de propulsión en su simulación. (Para información adicional relativa a la propulsión del cohete, consulte `http://en.wikipedia.org/wiki/Rocket#Physics` y los enlaces que encontrará allí.)

Los detalles de cómo y por qué un cohete se mueve pueden describirse usando las leyes del movimiento de Newton. En concreto, la Segunda Ley de Newton puede expresarse como

$$F = \frac{dp}{dt}, \tag{2}$$

donde F representa la fuerza total sobre un objeto, p representa el momento lineal del objeto, y t representa el tiempo.

Con el fin de simular un cohete, resolveremos esta ecuación numéricamente, tomando muchos pasos pequeños – pero discretos. Por ello, será conveniente también introducir la forma en diferencias finitas de la Ec. (2),

$$F \approx \frac{\Delta p}{\Delta t}, \tag{3}$$

dónde la aproximación será precisa siempre que el intervalo de tiempo, Δt, sea suficientemente pequeño. (Aquí Δp representa el cambio de momento lineal, impulso o “propulsión” que tiene lugar durante el intervalo de tiempo Δt.) Ahora, podemos fácilmente despejar de la Ec. (3) para obtener la ecuación de la propulsión,[6]

$$\Delta p \approx F\Delta t. \tag{4}$$

Ahora que tenemos ya unas cuantas ecuaciones para trabajar con ellas, detengámonos a pensar en cómo aplicarlas a los cohetes. Cuando se considera el

[6]El símbolo $\approx$ en la Ec. (4) puede reemplazarse por $=$ en el caso de que F no cambie en el tiempo.

lanzamiento de un cohete, hay *dos* cosas que se mueven: El cohete se mueve *hacia arriba* y un poco del combustible de cohete se mueve *hacia abajo*. Por tanto, la Ec. (4) se aplica tanto al cohete – que recibe una propulsión Δp_r en el intervalo de tiempo Δt – como a ese poco de combustible de cohete expulsado – que recibe una propulsión Δp_f en el intervalo de tiempo Δt. Finalmente, la Tercera Ley de Newton nos dice que la fuerza ejercida sobre el cohete por el combustible es igual en módulo a la fuerza ejercida sobre el combustible por el cohete. Así, $\Delta p_r = \Delta p_f$.

El párrafo anterior puede ser complicado *conceptualmente*, pero el resultado es sencillo: En cada paso de tiempo, el momento lineal del cohete aumenta en Δp_r, y esto es igual a la propulsión dada a la cantidad de combustible expulsada durante este paso de tiempo. Así pues, ¿podemos calcular Δp_r? La respuesta es "¡Sí… calculando Δp_f!", como se describe a continuación.

Recuerde, de la Sec. 2, que el ritmo de quemado del cohete puede representarse por la ecuación $r = \Delta m/\Delta t$. Reordenando esta ecuación, la masa del "poco de combustible" expulsado durante un paso de tiempo es $\Delta m = r\Delta t$. Este poco de combustible es expulsado a un velocidad de escape conocida, v_{ex}, de modo que sólo necesitamos recordar que (para velocidades que sean pequeñas comparadas con la velocidad de la luz[7]) el producto de la masa por la velocidad *es* el momento lineal. Así, la propulsión dada al poco de combustible es

$$\Delta p_f = \Delta m \times v_{ex} \tag{5a}$$

$$\Delta p_f = (r\Delta t) \times v_{ex}, \tag{5b}$$

y, como $\Delta p_f = \Delta p_r$, la propulsión dada al cohete en un paso del tiempo es

$$\Delta p_r = r v_{ex} \Delta t. \tag{6}$$

Finalmente, combinando las Ec. (5) y (3), podemos escribir la *fuerza de propulsión*,

$$F_t = \frac{r v_{ex} \Delta t}{\Delta t}, \text{ o} \tag{7a}$$

$$F_t = r v_{ex}. \tag{7b}$$

En última instancia, tras una página o dos de gimnasia matemática, hemos llegado a la Ec. (7). ¡La fuerza de propulsión es simplemente el producto de *cuánto* combustible de cohete es expulsado por segundo y *cómo de rápido* escapa el combustible! Antes de seguir adelante, asegúrese de comprobar que el lado derecho de la Ec. (7) tiene en efecto las unidades correctas. Si no las tiene, reclame que le devuelvan el dinero que pagó por este documento.

3.2. Implementación

¡Ha llegado el momento de que "la fuerza (de propulsión) nos acompañe"! Como hemos visto en la sección precedente, la fuerza de propulsión ejercida

[7] Para velocidades cercanas a la velocidad de la luz, la ecuación "relativista" del momento lineal que debe ser usada es $p = \gamma m v$. Para velocidades "normales" ($v < 10^6$ m/s), $\gamma \approx 1$, de modo que queda $p = mv$.

sobre el cohete es el producto de dos parámetros: el ritmo de quemado, r, y la velocidad de escape, v_{ex}. ¡Deberíamos agradecer lo sencillo de este resultado! Para implementar la fuerza de propulsión en un programa de EJS, necesitamos simplemente dos parámetros de entrada. ¿En qué parte (de EJS) deben hacerse cambios?

Una vez que haya implementado la fuerza de propulsión, ejecute el programa para varios valores de los parámetros, y asegúrese de que los resultados parezcan razonables. No sabrá todavía si los resultados son *correctos* o no, pero debería ser capaz de discernir si son o no *razonables*. Para hacer esto, necesitará alguna *salida*. Éste es un buen momento para crear gráficos de posición, velocidad y fuerza en función del tiempo.

Nota: En este punto, incluso si ha hecho usted todo correctamente, sus resultados sólo serán válidos en el espacio exterior. Para que la simulación sea útil también en la Tierra, necesitará incluir otros efectos, como se discute en las secciones siguientes.

3.3. Resultado analítico

En este punto, debería haber implementado ya la fuerza de propulsión y verificado que su simulación proporciona resultados razonables. Ahora, comprobaremos si estos resultados son o no *correctos*. La "ecuación del cohete de Tsiolkovsky"[8] proporciona una fórmula analítica sencilla[9] para el cambio de velocidad del cohete. Esta ecuación puede escribirse como

$$\Delta v_{an} = v_{ex} \ln\left(\frac{m_0}{m}\right), \tag{8}$$

donde v_{an} representa la velocidad calculada analíticamente, m_0 es la masa inicial ($t = 0$) del cohete, y m es la masa actual del cohete (tras haber expulsado parte del combustible de cohete). Para un cohete que parte del reposo ($v = 0$ en $t = 0$), esto lleva a

$$v_{an} = v_{ex} \ln\left(\frac{m_0}{m}\right). \tag{9}$$

Para comprobar sus resultados numéricos, incluya en su programa la Ec. (9). ¿Cuál de las ventanas de EJS debe usar para introducir la ecuación? ¿Debe añadirse algo al programa antes de incluir la ecuación?

Tras implementar la Ec. (9), añada una nueva curva (rastro) a su gráfico de velocidad frente al tiempo para mostrar los resultados analíticos. ¿Parecen coincidir los resultados numéricos y los analíticos? (Si no son al menos *parecidos*, ¡algo está mal!) Calcule también el error (la diferencia entre las velocidades numérica y analítica) y dibújelo en función del tiempo. ¿Aumenta, disminuye, o permanece constante el error en función del tiempo? ¿Tiene esto sentido? Pruebe con diferentes algoritmos de solución de ecuaciones diferenciales para

[8] Vea `http://en.wikipedia.org/wiki/Tsiolkovsky_rocket_equation` para una discusión de esta ecuación.

[9] Recuerde, esta ecuación es "analítica" porque no requiere obtenerla "dando un paso" desde un valor anterior.

ver cuáles de ellos proporcionan los mejores resultados y varíe el valor de `dt` para comprobar la convergencia. (Asegúrese de incluir algunos *datos* que apoyen sus conclusiones respecto de los algoritmos de ecuaciones diferenciales y la convergencia.)

Observe que – usando la Ec. (9) como punto de partida – la altitud del cohete puede calcularse también analíticamente. Esto requiere que calcule usted analíticamente la integral

$$y_{an}(t) = \int_0^t v_{an}\, d\tau, \tag{10}$$

donde la variable de integración, τ, representa el tiempo en cada instante en el rango $0 < \tau < t$. Para llevar a cabo la integración, debe primero escribir m como función del tiempo. Quizá deba consultar una tabla de integrales o hacer uso de un sistema de álgebra simbólica por computadora.

4. Gravedad

4.1. Teoría

Introduciremos – y le pediremos a usted que implemente – los dos modelos habituales[10] para la gravedad. En primer lugar, mientras mantengamos al cohete relativamente cerca de la superficie de la Tierra, la fuerza de gravedad ejercida sobre el cohete será

$$F_g = mg_s, \tag{11}$$

donde m es la masa del cohete y g_s es la fuerza gravitatoria por unidad de masa en la superficie de la Tierra, $g_s \approx 9{,}81$ Newtons/metro.[11] Discutimos la implementación de la Ec. (11) en la próxima sección.

Como sabe, cuando un cohete viaja a grandes altitudes, o incluso abandona completamente la Tierra, la fuerza de gravedad se hace más débil. Cuando esto ocurre, la Ec. (11) ya no servirá. Más concretamente, el valor de la fuerza gravitatoria por unidad de masa se hace menor, así que en la Ec. (11) reemplazaremos g_s por g, donde $g = g_s$ cerca de la superficie de la Tierra, pero $g < g_s$ a grandes altitudes. La forma más general de la Ec. (11) será entonces

$$F_g = mg. \tag{12}$$

Así pues, ¿cómo calculamos el valor de g para un cohete en vuelo? La respuesta es que debemos usar la “Ley de Gravitación Universal” de Newton,

$$F_g = \frac{GMm}{d^2}, \tag{13}$$

[10]Hay también otros, menos habituales, modelos para la gravedad, tales como la relatividad general. Pero, en tanto que mantengamos a nuestro cohete lejos de agujeros negros, los modelos presentados aquí serán suficientes.

[11]El valor de g_s varía de hecho dependiendo de nuestra situación en la Tierra. Usando un valor diferente de g_s, la Ec. (11) puede también aplicarse cerca de la superficie de otros cuerpos grandes (p.e. la Luna o Marte). Vea `http://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_of_Earth` para más detalle.

donde G es "la constante gravitatoria", M y m son las masas de los dos objetos que se atraen (es decir, la Tierra y el cohete) y d es la distancia entre los centros de ambos objetos.

Comparando las Ec. (12) y (13), podemos identificar claramente que

$$g = \frac{GM}{d^2}, \tag{14}$$

y observamos – para el caso especial de encontrarse sobre la superficie de la Tierra – , es decir $d = R_e$, que la Ec. (14) se convierte en

$$g_s = \frac{GM}{R_e^2}, \tag{15}$$

donde R_e es el radio de la Tierra ($R_e \approx 6{,}37 \times 10^6$ m).[12]

Podríamos terminar en este punto, usando la Ec. (12) y (14) para calcular la fuerza de la gravedad. Sin embargo, las constantes G y M tienen valores poco convenientes ($G \approx 6{,}674 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2 y $M \approx 5{,}9722 \times 10^{24}$ kg), de modo que aplicaremos un poco más de matemáticas para reescribir la Ec. (14) evitando usar estas constantes.

Observe que, reordenando la Ec. (15), uno encuentra que $GM = g_s R_e^2$, lo que puede introducirse en la Ec. (15) para dar

$$g = \frac{g_s R_e^2}{d^2}. \tag{16}$$

Finalmente, al simular nuestro cohete, estamos interesados en la *altitud* del cohere, y, – que se mide desde la *superficie* de la Tierra, no desde su centro. Así que sustituiremos $d = R_e + y$ en la Ec. (16). Tras unas pocas líneas adicionales de álgebra,[13] obtenemos el conveniente resultado

$$g = \frac{g_s}{\left(1 + \frac{y}{R_e}\right)^2}. \tag{17}$$

¡Ahora sí que hemos terminado con la gravedad! Antes de proceder a la implementación de las Ec. (12) y (17), compruebe expresamente que la Ec. (17) parece razonable. ¿Son las unidades correctas? ¿Qué valor proporciona para g en $y = 0$? ¿Y para $y = R_e$? ¿Y para $y = 6$ metros? (Esto correspondería a una millonésima parte del radio de la Tierra, la altura a la que se encuentra, más o menos, el tejado de una casa de dos pisos.)

4.2. Implementación

Para implementar la gravedad, necesitará calcular otra fuerza, exactamente igual que calculó ya la fuerza de propulsión. La fuerza de la gravedad es bastante

[12] El radio de la Tierra varía alrededor de 0.5 % entre diferentes lugares. Vea `http://en.wikipedia.org/wiki/Earth_radius` para más detalles.

[13] Dejamos al lector que verifique que la Ec. (16) lleva, en efecto, a la Ec. (17).

fácil de calcular, pero tenga en cuenta que – incluso usando la Ec. (11) – esta fuerza no es constante. El cohete está perdiendo masa en cada paso, así que asegúrese de usar la masa *actual* del cohete. Añada una curva para F_g a su gráfico de fuerzas frente al tiempo. ¿Cómo depende F_g con el tiempo? ¿Tiene esto sentido? ¿Como se compara el valor de F_g con F_t? Tras implementar la gravedad usando la Ec. (11), compare, antes de continuar, sus resultados (de velocidad frente al tiempo) con la ecuación analítica dada en la sección siguiente.

Para modelizar con precisión el movimiento del cohete a grandes altitudes, deben usarse las Ec. (12) y (17). Como siempre, ¡asegúrese de que sus resultados parezcan razonables! ¿Cómo depende la fuerza gravitatoria del tiempo? ¿Puede apreciar diferencias entre los resultados actuales y los resultados que obtuvo usando la Ec. (11)? Explique sus respuestas.

4.3. Resultado analítico

Asumiendo una fuerza gravitatoria por unidad de masa constante, la fuerza de la gravedad añade una simple corrección a la Ec. (9). En concreto, la fuerza gravitatoria causa una aceleración adicional (*constante*) igual a $-g_s$, así que la velocidad analítica viene dada ahora por

$$v_{an} = v_{ex} \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - g_s t. \tag{18}$$

Haga esta corrección en su cálculo analítico de la velocidad y verifique que los resultados analíticos concuerdan con los resultados numéricos, asumiendo que $F_g = mg_s$. ¿Convergen los resultados numéricos con los resultados analíticos cuando reduce usted el paso de tiempo usado? Si no es así, hay un problema... ¡asegúrese de arreglarlo!

Usando la Ec. (18), la altitud puede también calcularse analíticamente, como se describe en el final de la Sec. 3.3. Sin embargo, *no* seremos capaces de calcular analíticamente la velocidad y la altitud para el modelo más general de gravedad (donde g decrece con la altitud de acuerdo con la Ec. (17)). Ésta es la razón: un cálculo analítico de la velocidad incluye la integral $\Delta v = \int a(t)\,dt$. Sin embargo, la aceleración, $a = F/m$, depende ahora de la altitud, y, de una manera complicada; y para poder calcular la altitud, necesitamos conocer la velocidad: $\Delta y = \int v(t)\,dt$. ¡Las cosas se han hecho de pronto muy complicadas! Además, pronto implementará usted un sofisticado modelo para la resistencia del aire, haciendo que la aceleración se haga todavía más complicada.

¡He aquí una importante lección a aprender acerca de los resultados analíticos! Los resultados analíticos relativamente simples juegan un papel importante: nos permiten verificar que una solución numérica es correcta (¡que no hemos "metido la pata" en algo!) y para comprobar la precisión numérica de las aproximaciones. Sin embargo, llegados a un cierto punto, simplemente los resultados analíticos "se nos acaban". En este punto, la esperanza es que nuestra solución numérica ha sido probada con suficiente rigor, de modo que podemos confiar relativamente en nuestros próximos resultados – incluso aunque no seamos capaces de compararlos con una solución analítica.

5. Resistencia del aire

5.1. Teoría

En este punto, ¡ya ha desarrollado un modelo para el lanzamiento de un cohete bastante sofisticado! Sin embargo, cuando un objeto se mueve rápidamente, la resistencia del aire es importante – así que introduciremos ahora la resistencia del aire. ¡Tenga en cuenta, no obstante, que la resistencia del aire es complicada! Será necesario hacer algunas suposiciones que simplifiquen el problema, pero, al final, tendremos un modelo que es suficientemente sencillo de implementar, y a la vez suficientemente "rico" como para proporcionar resultados interesantes.

En realidad, no hay un único modelo de resistencia del aire que sea "correcto". Sin embargo, la ecuación de fricción por arrastre,[14]

$$\vec{F_d} = -\frac{1}{2}\rho A C_d v^2 \hat{\mathrm{v}}, \tag{19}$$

debe proporcionarnos un modelo preciso para describir la fuerza de resistencia que ejerce el aire sobre un cohete que se mueve rápidamente. El término $-\hat{\mathrm{v}}$ en la Ec. (19) indica que la dirección de esta fuerza se opone al movimiento del cohete, y el término restante $\frac{1}{2}\rho A C_d v^2$ es el módulo de esta fuerza. Aquí A es el área de referencia y C_d es el coeficiente de fricción por arrastre, que son ambas propiedades (*constantes*) dependientes de la forma del cohete, v es el módulo de la velocidad del cohete y ρ es la densidad del fluido a través del cuál se mueve el cohete – es decir, el aire.

La parte complicada de la Ec. (19) es la densidad: conforme aumenta la altitud, el aire se hace menos denso. Este fenómeno es muy relevante para montañeros ¡y es también la razón por la que muy pocos aviones comerciales son descapotables![15] Así pues, ¿cómo calculamos ρ para nuestro cohete en vuelo? A escala microscópica, la densidad depende de la interacción detallada entre las moléculas del aire; pero estas interacciones son prohibitivamente complejas. Una aproximación alternativa que sea suficientemente sencilla de implementar – y todavía suficientemente rica como para proporcionar resultados interesantes – será modelar el aire como si fuera un *gas ideal*.[16] La Ley de los Gases Ideales establece que

$$PV = nRT, \text{ o} \tag{20a}$$

$$\frac{n}{V} = \frac{P}{RT}, \tag{20b}$$

donde P es la presión del gas, V es el volumen de una cierta cantidad del gas, n es el número de moles contenidos en dicho volumen, R es la "constante de los

[14] Vea en `http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_(physics)` una discusión de distintos tipos de fricción por arrastre, incluida la Ec. (19).

[15] Bueno, no estamos muy seguros de que ésta sea la única razón. . .

[16] La Ley de los Gases Ideales se basa en la suposición de que los átomos o moléculas individuales del gas no interactúan entre sí, lo que debería proporcionar resultados razonablemente precisos siempre que la densidad del gas no sea muy alta. (Si las moléculas están demasiado "apretujadas" unas con otras, las interacciones intermoleculares no pueden ignorarse.)

gases ideales" ($R = 8{,}314\ \frac{\text{Julios}}{\text{Kelvin}\times\text{mol}}$) y T es la temperatura. De la Ec. (20b), podemos obtener la densidad, multiplicando ambos lados por la masa molar del aire,[17] $M = 0{,}02896$ kg/mol. La cantidad $\frac{Mn}{V}$ *es* la densidad, así que

$$\rho = \frac{PM}{RT}. \tag{21}$$

Observe que la Ec. (21) contiene ahora *dos* variables que cambian con la altitud: la temperatura y la presión. Esto parece que suponga un "paso atrás" desde la Ec. (19), pero la ventaja es que tanto T como P pueden ser evaluados directamente en función de la altitud, y. Para ello, asumiremos que la temperatura decrece linealmente[18] conforme aumenta la altitud, es decir,

$$T = T_0 - Ly, \tag{22}$$

donde T_0 es la temperatura al nivel del mar (que tiene un valor medio de $T_0 = 288$ K) y L es el "gradiente adiabático de la temperatura" ($L = 0{,}0065$ Kelvin por metro). Observe que, conforme a la Ec. (22), $T = 0$ se alcanza a una determinada (fácil de calcular) altitud. Esto no es físicamente preciso; en la práctica, el "cero absoluto" no puede ser alcanzada nunca, pero esto proporciona un modo conveniente para que identifiquemos en nuestro modelo el final de la atmósfera de la Tierra. Simplemente asumiremos que el cohete ha dejado la atmósfera de la Tierra si la Ec. (22) proporciona un valor de $T \leq 0$.

Asumiendo que la temperatura varía linealmente con la altitud, la presión a cualquier altitud viene dada en términos de T por[19]

$$P = P_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{gM}{RL}}, \tag{23}$$

donde P_0 es la presión a nivel del mar (que tiene un valor medio de $P_0 = 1{,}01 \times 10^5\ \text{N/m}^2$).

Con la Ec. (23), ¡ya tenemos todas las piezas necesarias para implementar la resistencia del aire! Claramente, la resistencia del aire es considerablemente más complicada que la propulsión o la gravedad; y para un modelo realmente preciso de un lanzamiento *concreto*, deberían usarse las condiciones locales actuales como parámetros de entrada. Sin embargo, nosotros tenemos ya un modelo que es capaz de proporcionar una simulación rica – pero todavía tratable – de las tres principales fuerzas que actúan sobre un cohete.

[17] Asumiendo que la composición química el aire es constante, la masa molar también es constante. Sin embargo, la masa molar varía algo, de hecho, con la humedad.

[18] La suposición de una disminución lineal de la temperatura es, de hecho, precisa solamente dentro de la troposfera (la capa más baja de la atmósfera de la Tierra), como se describe en `http://en.wikipedia.org/wiki/Density_of_air#Altitude`. Sin embargo, para evitar usar un modelo más complejo, aplicaremos este modelo también a la estratosfera (la siguiente capa de la atmósfera). Si quiere desarrollar un modelo más sofisticado, puede encontrar más información sobre la estratosfera en `http://en.wikipedia.org/wiki/Stratosphere`.

[19] No derivaremos la Ec. (23), sino que sugeriremos brevemente su origen. El *gradiente* de presión, $\frac{dP}{dy}$, puede integrarse para obtener el cambio de presión: $\Delta P = \int \frac{dP}{dy}\,dy$. El cambio infinitesimal de presión, dP, dependerá del peso del aire en una columna inmediatamente encima de la altitud actual, que depende a su vez de la presión y la temperatura, lo que lleva a la Ec. (23). (Vea `http://en.wikipedia.org/wiki/Troposphere#Pressure`.)

5.2. Implementación

Tras la discusión de la sección precedente, la resistencia del aire es más compleja que la propulsión y la gravedad... pero no resulta realmente *difícil.* Usando la Ec. (19), el módulo de la fuerza de fricción por arrastre depende de dos constantes (determinadas por la forma del cohete) y dos variables dinámicas – las cuáles podemos calcular.

En este punto, proceda e implemente la fuerza de fricción por arrastre, llevando cuidado tanto en su *dirección* como en su módulo. Como siempre, asegúrese de que los resultados *tienen sentido.* Para completar toda esta tarea, refiérase a la información y preguntas que se indicaron en la Sec.1.

6. Reflexión

Antes de abandonar el cohete, será útil reflexionar brevemente acerca de un par de lecciones/estrategias importantes que nos ha enseñado. En primer lugar, nuestra simulación – y la implementación de la resistencia del aire, en particular – proporciona un ejemplo llamativo de lo que es realmente un *modelo.* Una cita famosa de Einstein dice que "*Todo debería hacerse tan sencillo como sea posible, pero no más sencillo que esto*", y eso es exactamente lo que hemos hecho nosotros. Las interacciones detalladas de las moléculas del aire – tanto entre ellas como con el cohete – son las responsables de la resistencia del aire, pero estas interacciones son demasiado complejas como para que las podamos simular nosotros. Podríamos elegir ignorar por completo la resistencia del aire, pero eso sería *demasiado* sencillo. En su lugar, hemos construido un modelo de resistencia del aire que se comporta correctamente (aumentando con la velocidad, pero decreciendo con la altitud) y que resulta todavía suficientemente sencillo de implementar. De esto trata el proceso de *modelización*, que resulta extremadamente importante en la investigación científica moderna.

Nuestra simulación del cohete ha mostrado también un ejemplo de la utilidad – y limitaciones – de los resultados *analíticos.* Nuestro principal enfoque a lo largo de todo este módulo es el de resolver los problemas *numéricamente* (no analíticamente): tomamos muchos pasos pequeños,[20] donde, en cada paso, obtenemos el siguiente valor por 'iteración" desde el valor anterior. La ventaja de este enfoque numérico es que puede aplicarse a problemas *arbitrariamente complejos* (incluso a la resistencia del aire dependiente de la altitud introducida en la Sec. 5.1). Sin embargo, los resultados numéricos implican ciertas inevitables aproximaciones, así que es importante mantener siempre una sensación del nivel de precisión que los resultados numéricos pueden – y no pueden – proporcionar. Aquí es donde los resultados *analíticos* resultan útiles. Los resultados analíticos pueden evaluarse directamente (simplemente metiendo números en el lado derecho de una ecuación), así que no precisan aproximación. Una comparación directa entre resultados analíticos y numéricos nos permite, por tanto, "comprobar" un enfoque numérico. El inconveniente de los enfoques analíticos

[20] Más precisamente, pedimos a la *computadora* que tome muchos pasos pequeños.

es que sólo pueden ser aplicados en situaciones relativamente simples. Por tanto, una estrategia que se usa habitualmente es la de comenzar con un modelo sencillo (tratable analíticamente), comprobar la implementación numérica, y luego aplicar la implementación numérica a una versión del modelo "con algo más de chicha" (más complicada).

7. Extensiones

Tras completar el modelo del cohete descrito en este documento, si desea usted extender el proyecto un poco más, considere las siguientes posibilidades:

- Proporcione un ángulo de lanzamiento como entrada del modelo, implemente la simulación en dos dimensiones y explore cómo depende el alcance (horizontal) del cohete de diversos parámetros. La influencia de la resistencia del aire será también importante en este modelo de dos dimensiones.

- Implemente un cohete con varias etapas. Cada vez que una determinada etapa se queda sin combustible, dicha etapa se desprende del cohete, de modo que la masa total del cohete debe disminuir.[21] Explore cómo se compara la máxima altitud de un cohete multietapa con la altitud máxima de un cohete similar de una única etapa.

- Desarrolle un modelo más sofisticado para la resistencia del aire, teniendo en cuenta con precisión la variación del aire con la altitud por encima de la troposfera.

[21] Vea `http://en.wikipedia.org/wiki/Multistage_rocket` para una discusión adicional de cohetes multietapas.