PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección
4 de junio de 2005

Nombre:……………………………………………………..................................
Apellidos:…………………………………………………...................................
Fecha de nacimiento:………………………………….................................
Teléfonos:………………………………………………..................................

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

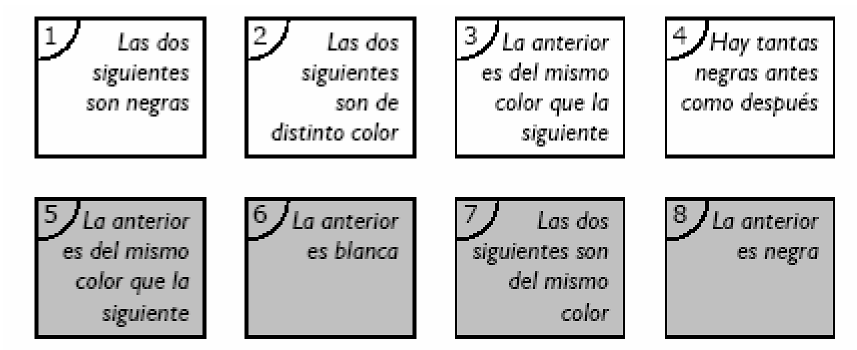
En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.
No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.
Queremos conocer no solamente tus soluciones, sino sobre todo tus propios caminos hacia la solución.
Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.
Al final nos debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.
Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas, deberías tratar de describírnoslas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.
Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

- ❑ A través de tu colegio,
- ❑ A través del Concurso de Primavera,
- ❑ A través de otros medios.

Tienes dos horas en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: máximo tiempo para un ejercicio 30 minutos.

Te deseamos mucho éxito.

Problema nº 1 (Tarjetas)
Las tarjetas 1, 2, 3 y 4 son blancas; las tarjetas 5, 6, 7 y 8 son negras.



El objetivo final es ordenarlas para que todas las frases resulten verdaderas. Pero antes contesta a las siguientes preguntas.

a) ¿Qué tarjetas se pueden colocar en primer lugar?

b) ¿Qué tarjetas se pueden colocar en último lugar?

c) ¿En qué posiciones puede colocarse la tarjeta 4?

d) Finalmente, ordena las tarjetas una detrás de otra para que todas las frases resulten verdaderas.

Problema nº 2 (Tablero)

Tenemos un tablero cuadrado y en cada casilla anotamos un número de acuerdo con este criterio: el número que escribimos es el menor de los números que indican la fila y la columna de la casilla. La figura que ves a continuación te da un ejemplo para el caso de un tablero 3×3

	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

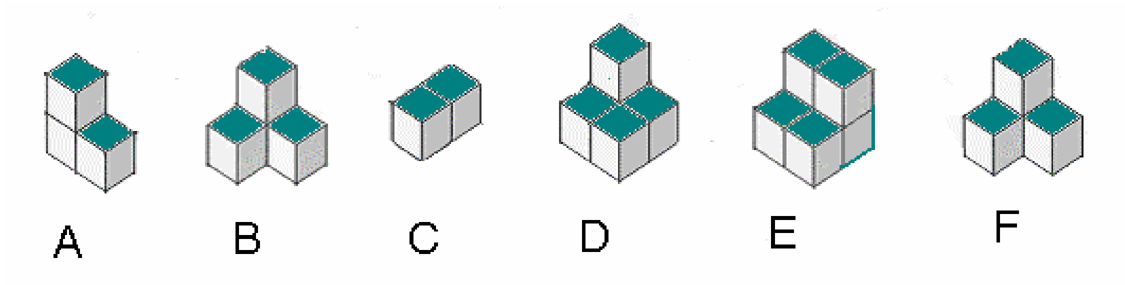
A) Rellenamos un tablero cuadrado de 5 x 5 (25 casillas). ¿Cuál será la suma de todos los números escritos en las casillas? **Explica** una manera de calcular la suma anterior *sin necesidad de sumar uno a uno todos los números*.

B) Ahora tenemos un tablero de 10 x 10 (100 casillas). Si lo rellenamos siguiendo las instrucciones ya comentadas, ¿cuál será la suma de todos los números anotados? Explica cómo lo has calculado.

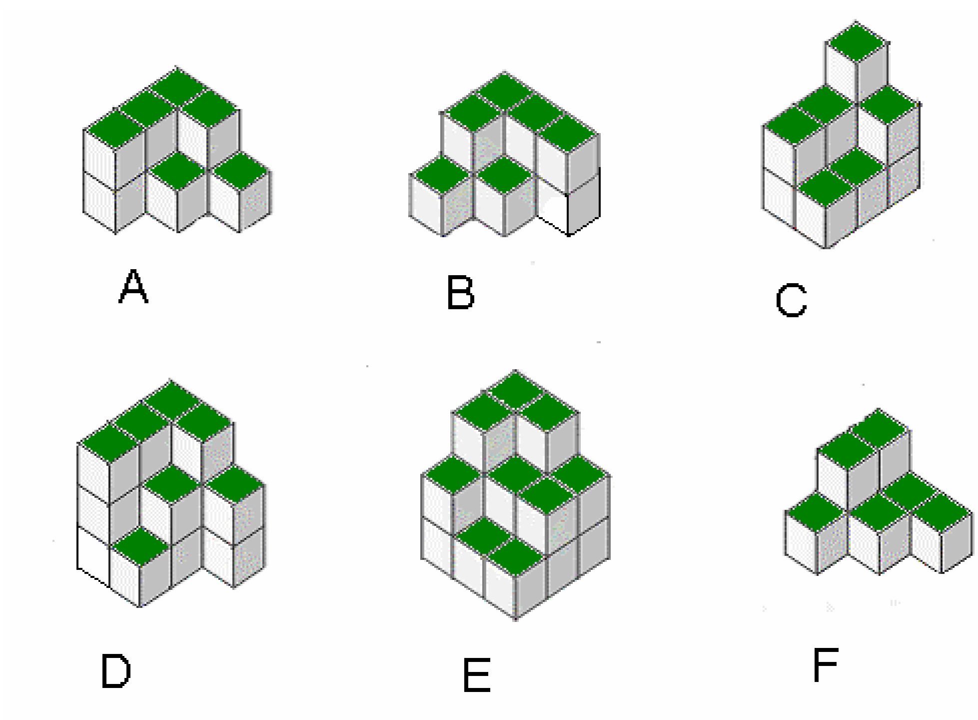
C) En el mismo tablero de 10 x 10, estudia cuál sería la suma si, en lugar de poner el menor de los números que indican la fila y la columna de la casilla, pusiéramos el mayor.

Problema nº 3 (Cubos)

a) Observa las seis piezas siguientes. Empareja los bloques que encajen formando un cubo completo de 2x2x2.

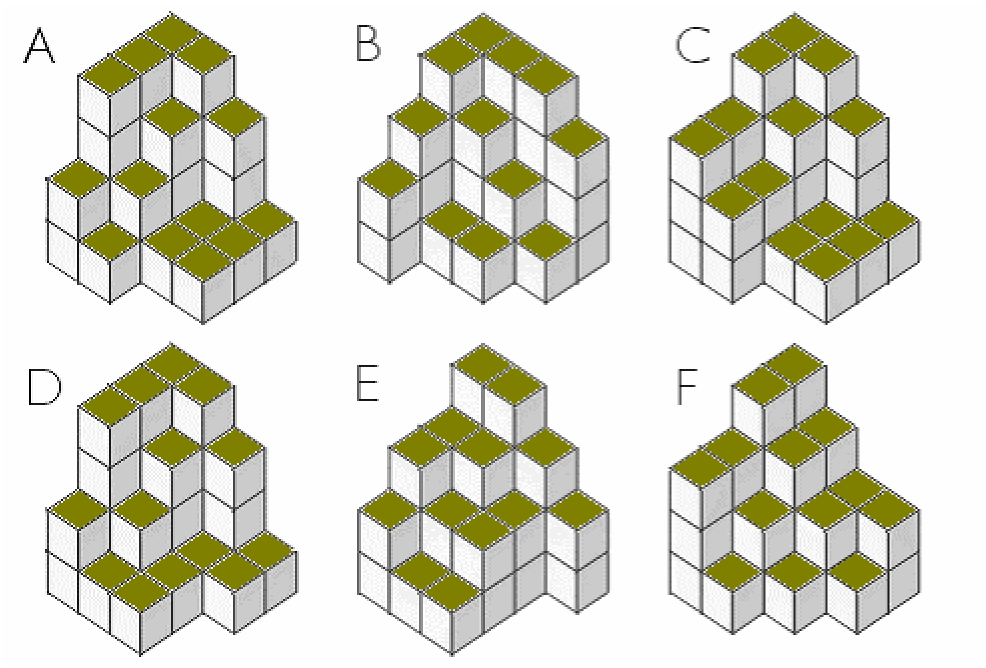


b) Cuenta el número de cubos que hay en cada uno de los siguientes bloques. ¿Cuáles son los dos bloques que hay que unir para formar un cubo completo de 3x3x3? En cada uno de ellos, numera con 1, 2 y 3, tres cuadrados que queden pegados al encajar los bloques. Explica cómo has encontrado la solución.



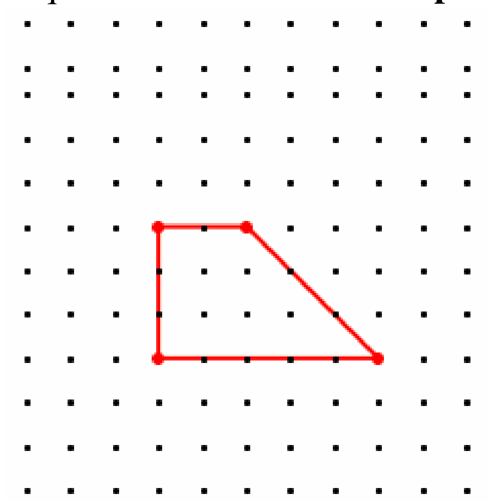
(Sigue a la vuelta)

c) Contesta a las mismas preguntas que en el apartado b) para los bloques siguientes en el caso de un cubo completo de 4x4x4. No te olvides de explicar cómo has encontrado la solución.



Problema nº 4 (Números trapeciales)

En este problema consideraremos unos trapecios muy especiales. Tienen que tener dos ángulos rectos y un **ángulo de 45º** y además sus vértices han de ser puntos de una cuadrícula. Mira el trapecio de la figura: como encierra 18 puntos, contando los que hay sobre los lados, diremos que 18 es un “**número trapecial**”.



a) Haz un dibujo que muestre que 35 es un número trapecial.

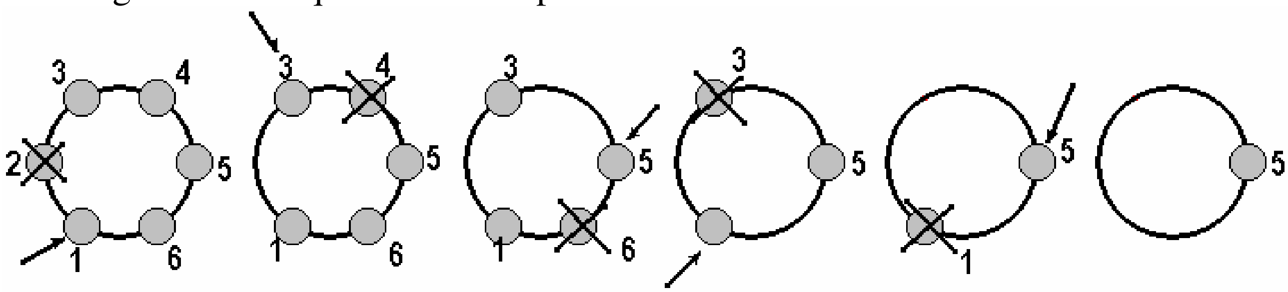
b) Dibuja todos los trapecios que tiene 18 como número trapecial y justifica que no hay más que los que dibujas.

c) Explica por qué cualquier número impar mayor que 3 es un número trapecial.

d) Encuentra razonadamente todos los números entre 4 y 50 que **no** sean números trapeciales.

(aquí y detrás tienes cuadrículas para practicar)

Problema nº 5 (Fichas saltarinas)
Se colocan 6 fichas en círculo y se numeran del 1 al 6 consecutivamente. Ahora, en el sentido de numeración, voy dejando una ficha y quitando la siguiente. Empiezo dejando la ficha 1 y quitando la 2. El proceso continúa hasta que sólo queda una ficha. En la figura vemos que al final del proceso la ficha final es la número 5.



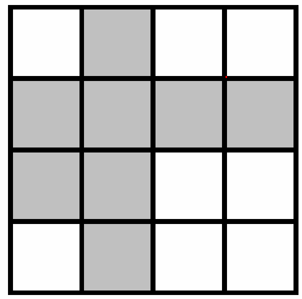
A. Haz tu lo mismo con $8=2^3=2x2x2$ fichas en círculo. ¿Qué ficha queda al final?

B. Si comenzamos con $16=2^4$ fichas, ¿Qué ficha queda al final?

C. Los números 8 y 16 son potencias de 2. También el número $1024 = 2^{10}$ es una potencia de 2. ¿Sabrías decirnos, con un razonamiento convincente, qué ficha quedaría al final si comienzas con un círculo de 1024 fichas?

D. Ahora tienes $1026 = 2^{10}+2$ fichas. ¿Qué ficha quedaría al final? Indícanos las razones de tu contestación.

Problema nº 6 (Perímetro de bloques con recorrido de torre)



En un tablero cuadrado de 16 casillas dibujamos el bloque de **ocho casillas** de la figura cuya área es 200 cm^2 .

A. ¿Cuál es el perímetro del bloque?

B. Dibuja en el tablero otros dos bloques de **ocho casillas** con **recorrido de torre** (una ficha puede desplazarse por su interior desde una casilla a otra cualquiera con los movimientos de una torre de ajedrez -es decir con desplazamientos paralelos a los lados del tablero) y que tengan diferente perímetro del bloque propuesto.

C. Dibuja en el tablero un bloque de **ocho casillas** con **recorrido de torre**, que tenga el perímetro mayor posible. Explica porqué los otros bloques no pueden tener perímetro mayor.

D. Dibuja en el tablero un bloque de casillas con **recorrido de torre** que tenga el mayor perímetro posible. ¿Cuántas casillas debe tener?

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS
Estímulo del talento matemático

Prueba de selección
3 de junio de 2006

Nombre:……………………………………………………………..................................
Apellidos:…………………………………………………………..................................
Fecha de nacimiento:…………………………………………..................................
Teléfonos:…………………………………………………………...............................

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

Queremos conocer no solamente tus soluciones, sino sobre todo tus propios caminos hacia la solución.

Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.

Al final nos debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas, deberías tratar de describírnoslas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

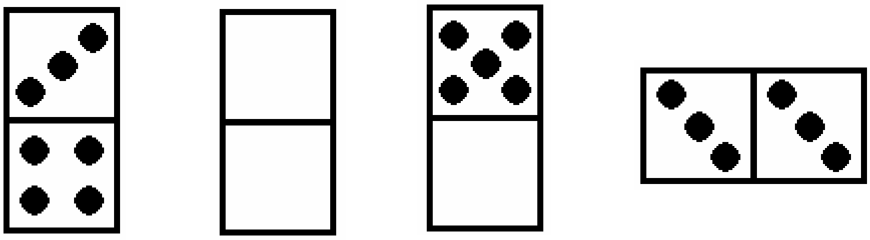
- ❑ A través de tu colegio,
- ❑ A través del Concurso de Primavera,
- ❑ A través de otros medios.

Tienes dos horas en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: máximo tiempo para un ejercicio 30 minutos.

Te deseamos mucho éxito.

Problema nº 1. Dominó/Triminó

Las fichas del juego del dominó son rectángulos formados a partir de la unión de dos cuadrados. En esos cuadrados hay puntos que pueden variar de cero a seis. Así tenemos la ficha 3-4 (o 4-3 que es la misma), la 0-0 (conocida como blanca doble) la 0-5, la 3-3 ...

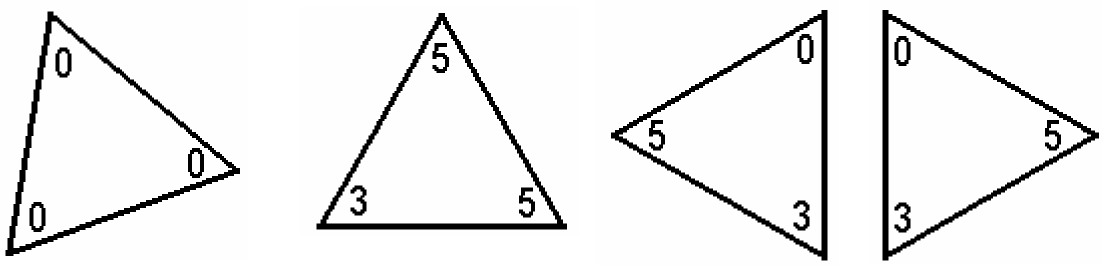


Un juego completo de dominó, donde no hay piezas repetidas, se compone de 28 fichas

a) Si quisiéramos hacer un dominó en el que los puntos de cada cuadrado sólo fueran de 0 a 4, ¿cuántas fichas tendría el juego completo?

b) ¿Y si los puntos fueran de 0 a 10?.

El juego del triminó es parecido al del dominó, las fichas son triángulos equiláteros y cada una lleva tres valores (números en vez de puntos), uno en cada vértice, tal como podéis ver en los ejemplos siguientes:

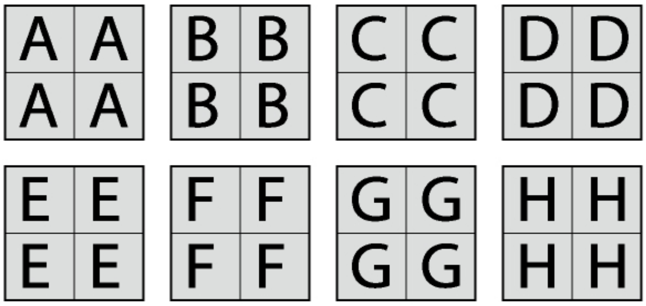


(Dos fichas diferentes)

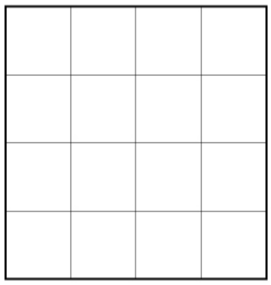
c) Dos fichas son iguales si tienen los mismos tres números y están colocados en el mismo orden circular ¿Cuántas fichas diferentes hay en un triminó que tiene en los vértices números de 0 a 5.

Problema nº 2: El juego de los cartones

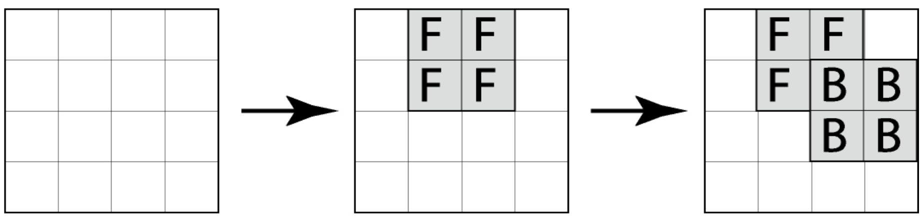
Ocho alumnos de una clase, Aurora, Berta, Clara, David, Ester, Fernando, Gloria y Helia tienen ocho cartones cuadrados, todos de la misma medida, donde han escrito sus iniciales (cuatro iniciales en cada cartón.)



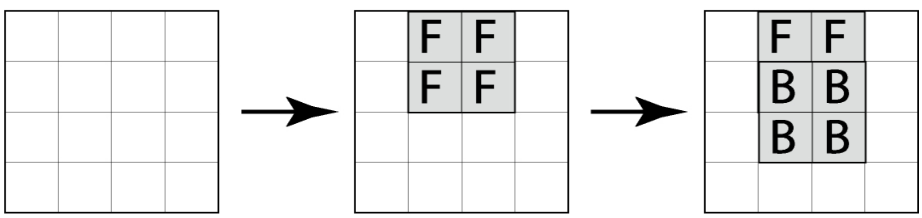
Queremos hacer un juego que consiste en colocar sucesivamente los cartones cuadrados en un tablero, también cuadrado, que tiene la longitud del lado doble de la de los cartones:



Cada cartón se ha de colocar con los lados paralelos a los del tablero y se ha de hacer de manera que cada cartón que se coloca tape parcialmente el anterior (el segundo ha de tapar una parte del primero, el tercero una parte del segundo – y también si se quiere una parte del primero –, el cuarto una parte del tercero y si se quiere de los anteriores, etc...)
Una posible sucesión de jugadas podría ser ésta:



Y otra sucesión posible es ésta:



Después de haber hecho las ocho jugadas el tablero presenta este aspecto:

H	G	D	D
H	B	B	D
A	B	B	C
F	F	E	C

a) De los ocho alumnos, ¿quién fue el último en jugar?

b) Y ¿quién fue el penúltimo?

c) ¿Cuál ha sido el orden en el que se han hecho las jugadas?

d) ¿Crees que sin jugar las 8 personas, pero siguiendo las instrucciones del juego, se podría llegar a cubrir todo el tablero? ¿Con cuántas jugadas? Da un ejemplo, indica el orden en el que juegan y di cómo queda el tablero.

Problema nº 3: Poliamantes

Un poliamante es una figura formada por varios triángulos equiláteros, todos con lados de la misma longitud, unidos por uno de sus lados. Por ejemplo, con dos triángulos equiláteros se puede forma una sola figura, el **diamante**, y con tres triángulos equiláteros se puede formar también una sola figura, el **triamante**. Varias representaciones, todas iguales, de ambas aparecen en las Figuras 1 y 2 respectivamente.

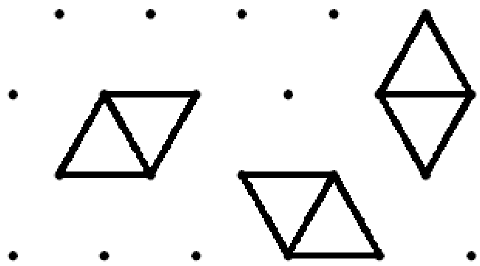


Figura 1: Diamante

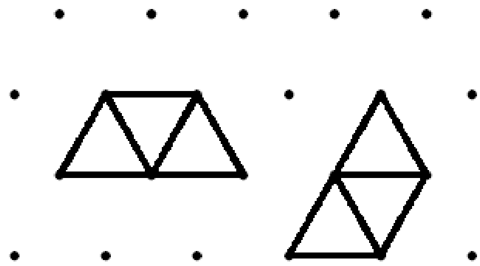
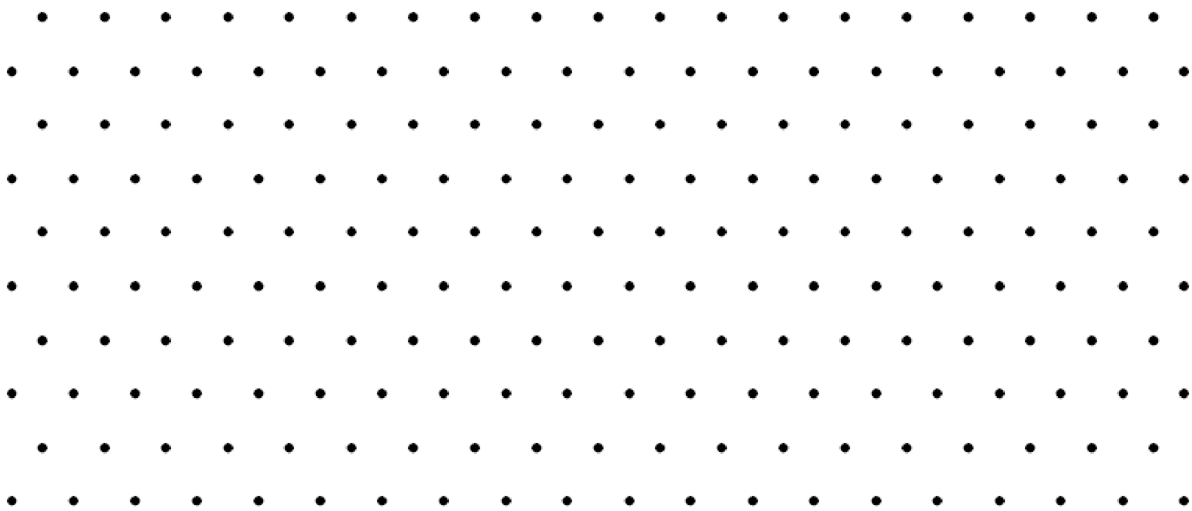


Figura 2: Triamante

Contesta a las siguientes preguntas y justifica las respuestas:

a) ¿Cuántas figuras diferentes podemos formar con cuatro triángulos equiláteros? Las llamaremos los **tetramantes**. Dibuja cada uno de ellos en la trama de puntos que te hemos proporcionado. ¿Tienen todos la misma superficie?



b) Si el lado del triángulo equilátero mide 1, calcula el perímetro de cada uno de los tetramantes. ¿Cuál o cuáles de ellos son el desarrollo de una pirámide de base triangular?

c) Varios tetramantes se han combinado para formar la Figura 3. Halla una descomposición de los tetramantes con la que se obtiene esa figura.

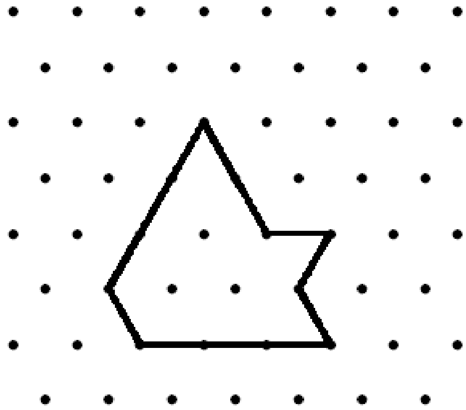
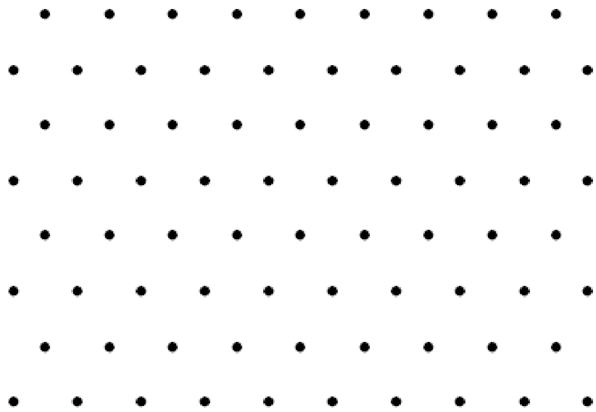


Figura 3



d) ¿Cuántas figuras diferentes podemos formar con cinco triángulos equiláteros? Las llamaremos los **pentamantes**. Dibuja cada uno de ellos en la trama de puntos que te hemos proporcionado. Si el lado del triángulo equilátero mide 1, calcula el perímetro de cada uno de los pentamantes.

e) Varios pentamantes se han combinado para formar la Figura 4, Halla una disposición de los pentamantes con la que se obtiene esa figura.

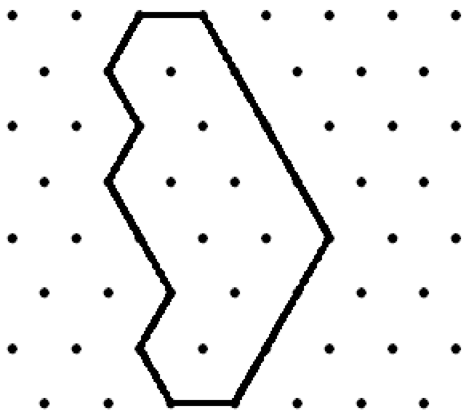
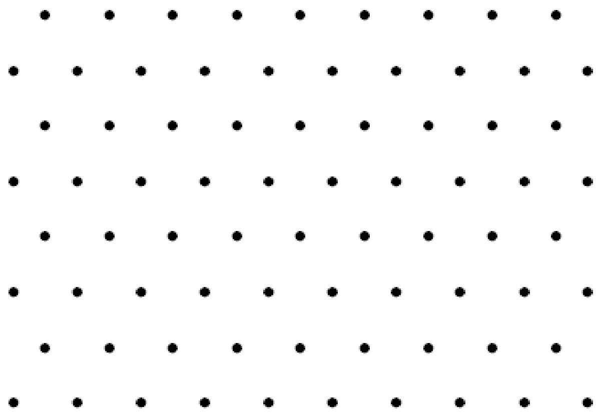
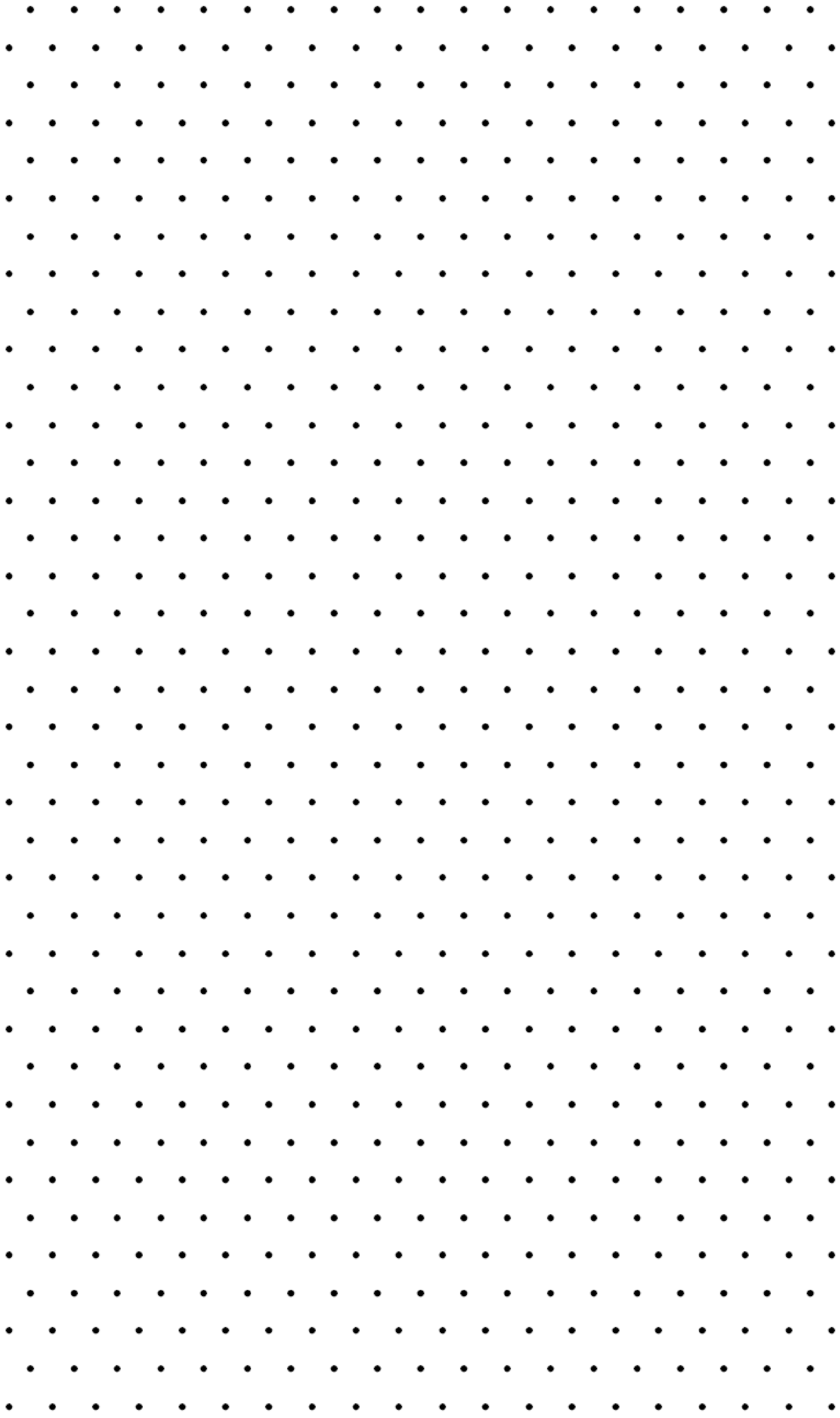
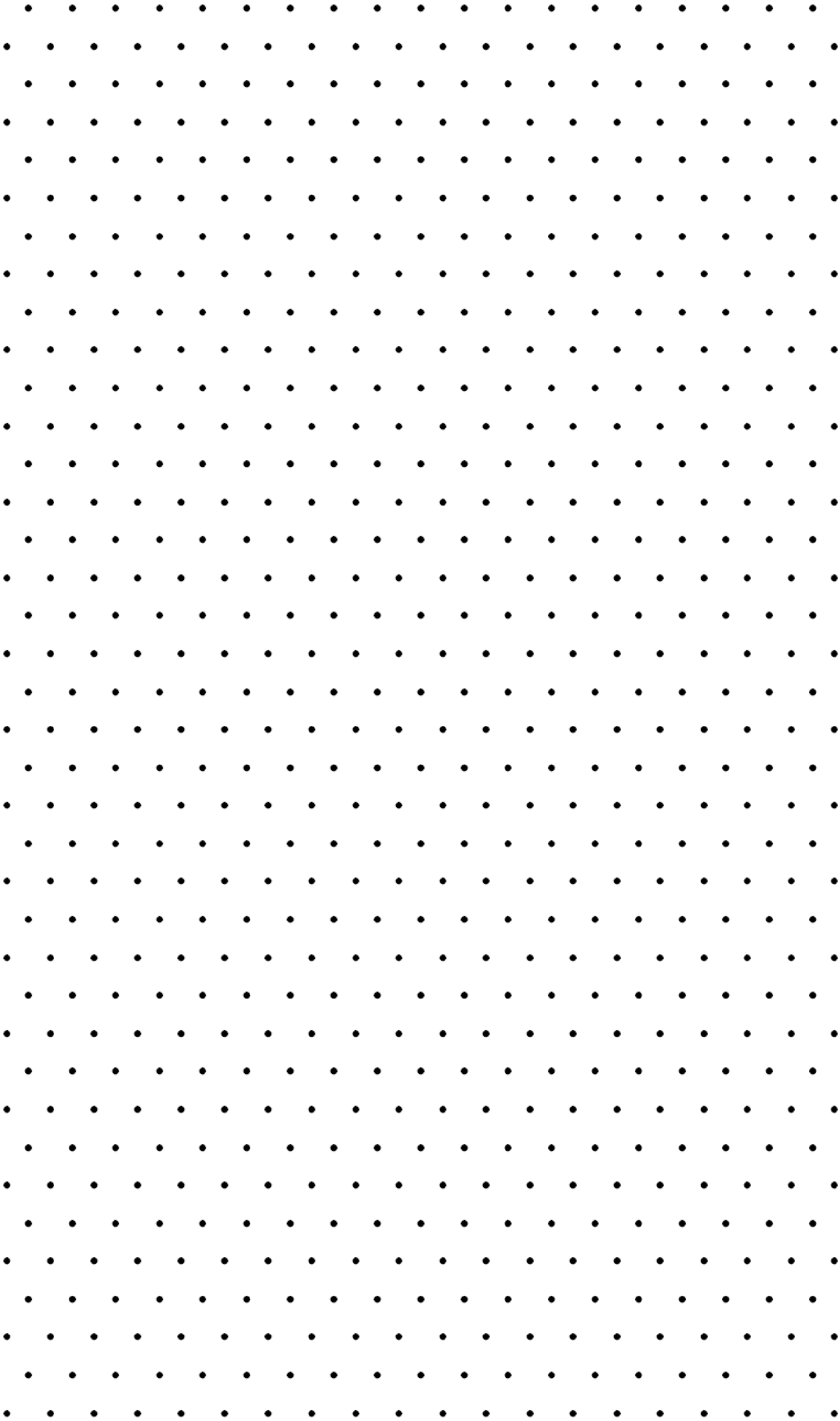


Figura 4







Problema nº 4: El cubo rodante

Se tiene un cubo, con números del 1 al 6, en cada una de sus caras, cuyo desarrollo es el dado en la Figura 1.

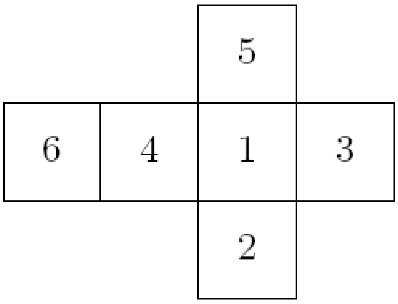


Figura 1

a) La Figura 2 representa también el desarrollo de un cubo. ¿Es este cubo igual al cubo inicial de la Figura 1? Justifica la respuesta.

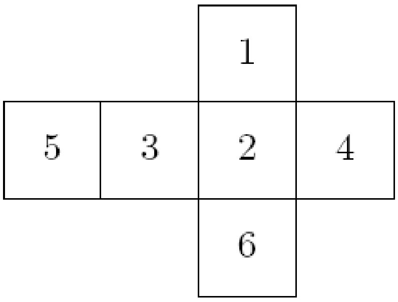


Figura 2

b) Se dispone de un tablero con doce casillas del mismo tamaño que las caras del cubo. Se coloca el cubo de la Figura 1 en la casilla A-1 del tablero, siendo la cara superior la ocupada por el número 1. Cada movimiento del cubo consiste en voltearlo sobre una de sus aristas hasta situarlo en una de las casillas vecinas.

Explica por qué la configuración de la Figura 3 no se puede obtener mediante el proceso antes descrito de movimientos del cubo a partir de la posición A-1.

	1	2	3	4
A	1	4	2	1
B	3	3	6	5
C	2	3	2	6

Figura 3

(Sigue al dorso)

c) Se han realizado, desde la posición inicial, una serie de movimientos como los descritos en el apartado b) de forma que el cubo de la Figura 1 ha pasado una sola vez por cada una de las casillas del tablero y en cada una hemos anotado el número que figura en la cara de arriba. El resultado obtenido es el que aparece en la Figura 4.

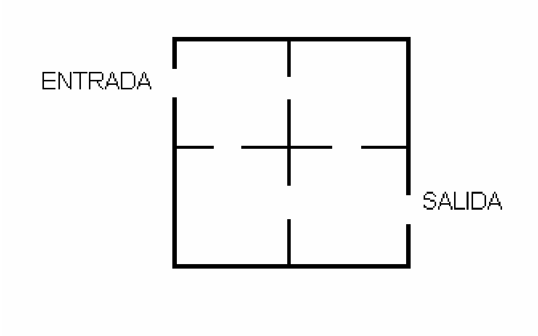
Di cuál ha sido el camino que, sobre el tablero, ha seguido el cubo en el ejemplo de la Figura 4, explicando tu razonamiento.

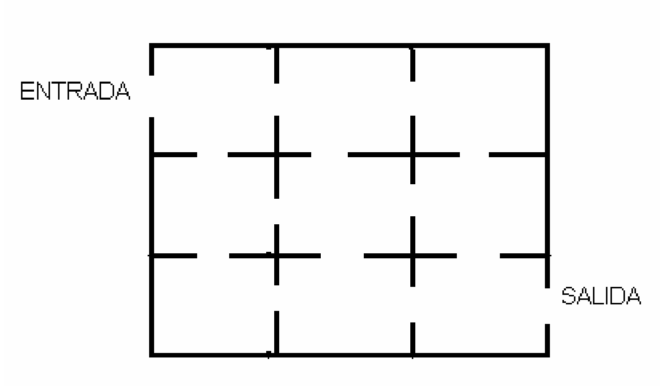
	1	2	3	4
A	1	4	6	3
B	3	3	5	5
C	2	6	6	4

Figura 4

Problema nº 5: El museo

Las salas de un Museo son habitaciones cuadradas de 10 metros de lado. Cada habitación está conectada por una puerta con cada una de las habitaciones con las que comparte un lado. La entrada y la salida del Museo están situadas en habitaciones diametralmente opuestas. En los dibujos aparecen dos diseños diferentes de Museo. El de la izquierda está formado por cuatro habitaciones dispuestas como un cuadrado, diremos que es un Museo 2x2. El de la derecha es un Museo 3x3:





Un visitante del Museo que entra por la ENTRADA desea visitar cada habitación exactamente una vez y salir por la SALIDA. A estos recorridos los llamaremos **caminos aceptables**.

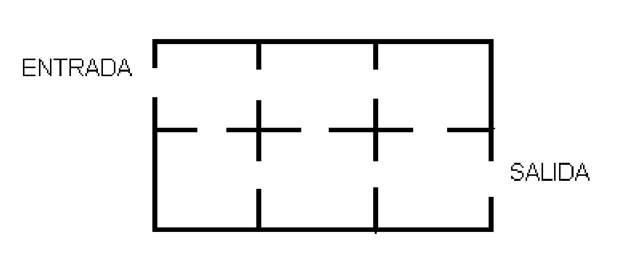
(a) ¿Puedes encontrar un camino aceptable en el Museo 2x2? ¿Y en el Museo 3x3?

(b) Inténtalo en los Museos 4x4 y 5x5 (dibújalos e intenta encontrar caminos aceptables en ellos).

(c) Seguro que en algunos de los anteriores casos no has conseguido encontrar ningún camino aceptable. Intenta explicar por qué no lo has conseguido. Quizás te ayude pintar de blanco y negro, alternativamente, las habitaciones del Museo (como si fuera un tablero de ajedrez).

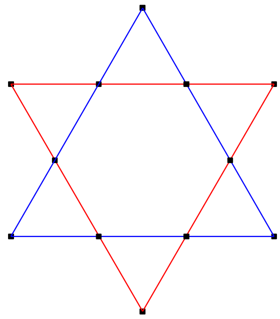
(d) No vas a dibujar un museo 1000x1000, pero te lo puedes imaginar y tratar de ver si hay un camino aceptable o no. Lo mismo podrías hacer con otro museo que sea 725x725. Y lo mismo podrías hacer con un museo que sea de la forma NxN, donde N representa un número cualquiera.
¿Podrías dar una regla general que nos permita decidir si en un Museo cuadrado NxN vamos a poder encontrar un camino de esos o no?

(e) Planteamos ahora la misma pregunta, pero para Museos rectangulares. Entrénate, por ejemplo, con Museos 5x6, 4x6, 5x7, etc.



Imagínate un museo de dimensión 400x600, o bien 5000x7000, ¿podrías encontrar un camino aceptable?. Lo mismo podrías hacer con un museo que sea de la forma NxM, donde N es un número cualquiera y M es otro número cualquiera distinto de N. Intenta contestar a la siguiente pregunta: ¿qué condiciones han de cumplir N y M para que en un Museo NxM haya con seguridad un camino de éstos?

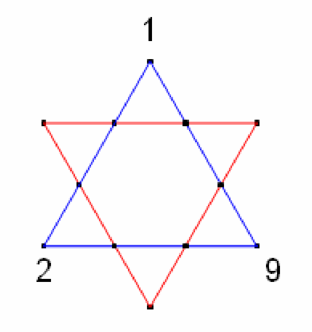
Problema nº 6. Jugando con las estrellas



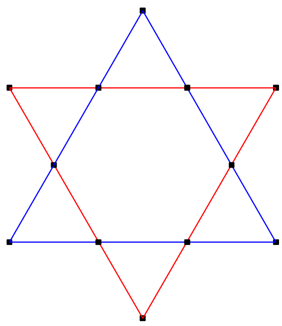
Se considera la **estrella de David**, formada con dos triángulos equiláteros que se cortan como los de la figura, determinando 12 puntos de corte (seis vértices y seis puntos de intersección de lados).

Un juego consiste en construir una *estrella mágica* colocando en dichos puntos los números del 1 al 12 sin repetir ninguno, con la condición de que los cuatro que están sobre cada lado sumen siempre lo mismo.

1) Encuentra una solución en la que sobre los tres vértices de uno de los triángulos estén los números 1, 2 y 9, con la condición de que los cuatro que están sobre cada lado sumen 26.



2) Encuentra otra solución sabiendo que la suma de los números colocados en los seis vértices sea también 26 y que, además, los números colocados en los vértices de uno de los triángulos son impares y suman lo mismo que los colocados en los vértices del otro triángulo.

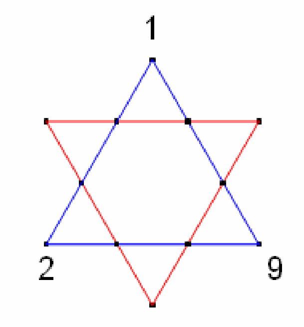


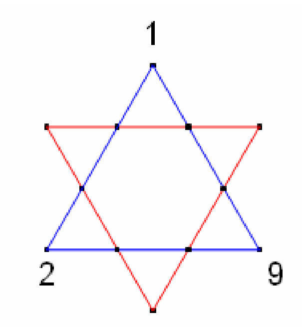
3) En cualquier solución de la *estrella mágica* la suma de los cuatro números colocados sobre un lado es siempre 26. Explica por qué.

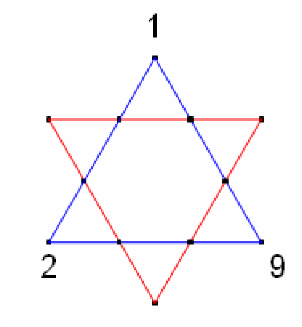
(**Sigue al dorso …..**)

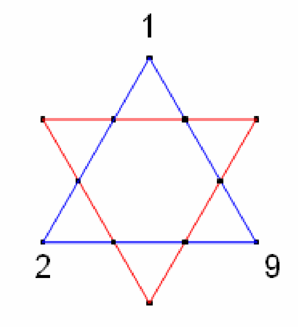
4) En cualquier solución de la *estrella mágica* la suma de los números colocados sobre los vértices de uno de los triángulos es igual a la suma de los números colocados sobre los vértices del otro triángulo. Explica por qué.

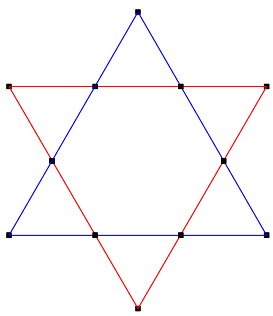
(Más estrellas para practicar).

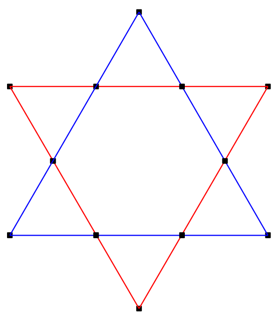


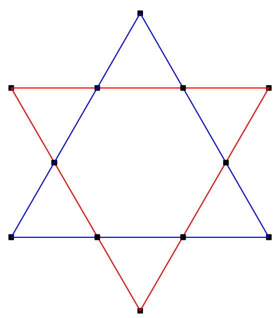


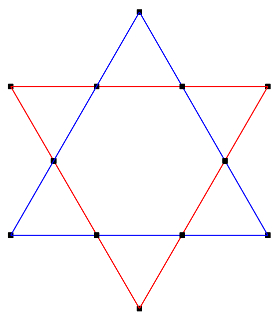


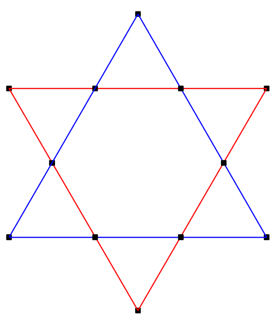


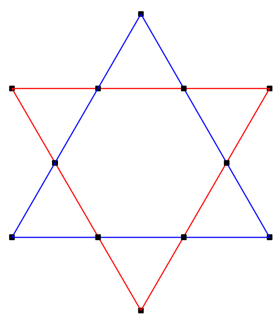


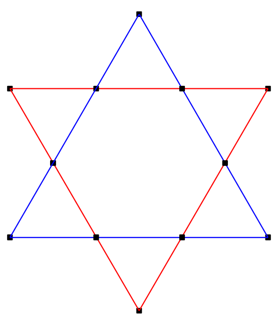


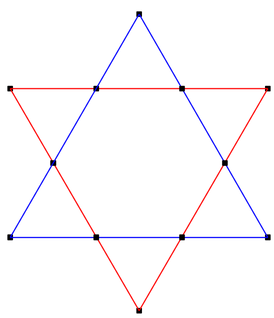












PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección

4 de junio de 2016

Nombre:……………………………………………………………..................................

Apellidos:…………………………………………………………...................................

Fecha de nacimiento:…………………………………………….................................

Teléfonos:…………………………………………………………..................................

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos. No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

- ☐ A través de tu colegio.
- ☐ A través del *Concurso de Primavera*.
- ☐ A través de otros medios.

Tienes dos horas y media en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

Te deseamos mucho éxito.

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

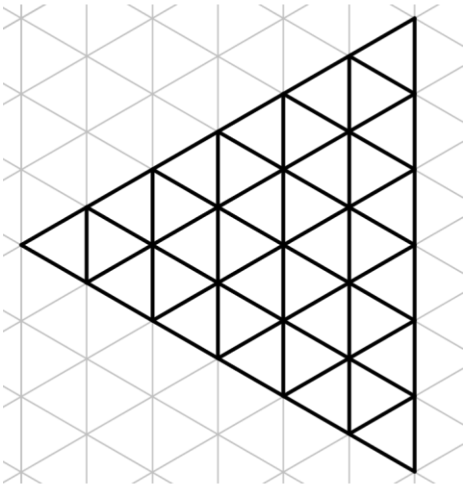
GOBIERNO DE ESPAÑA — MINISTERIO DE ECONOMÍA Y COMPETITIVIDAD

FECYT — FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

1. TRIÁNGULOS CON TRIÁNGULOS

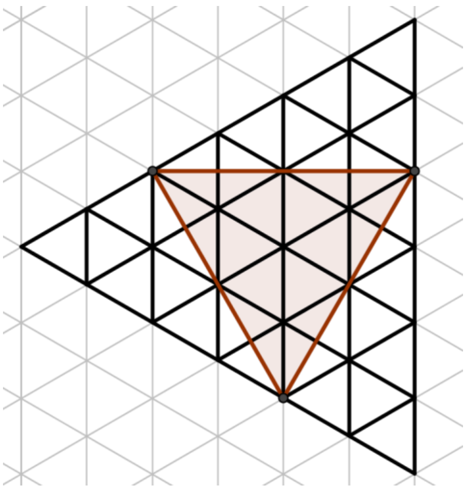
Un triángulo equilátero de área 36 cm^2, está dividido en 36 triangulitos de 1 cm^2, como en las figuras siguientes.

a) Dibuja sobre esta figura un triángulo de área 8 cm^2



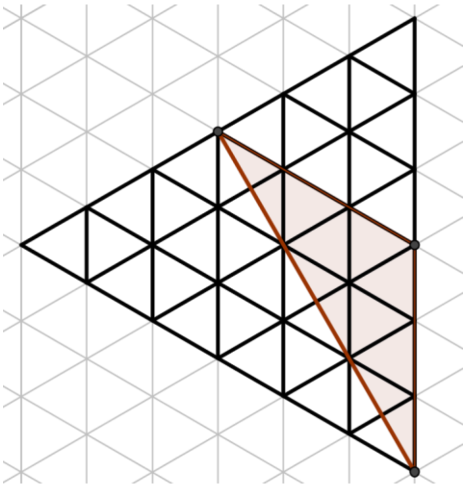
Calcula **razonadamente,** en cada caso, el área de los triángulos sombreados, **explicando cómo lo has hecho:**

b)

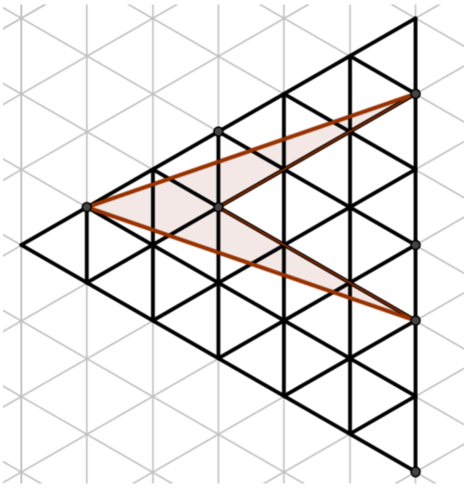


(Continúa detrás)

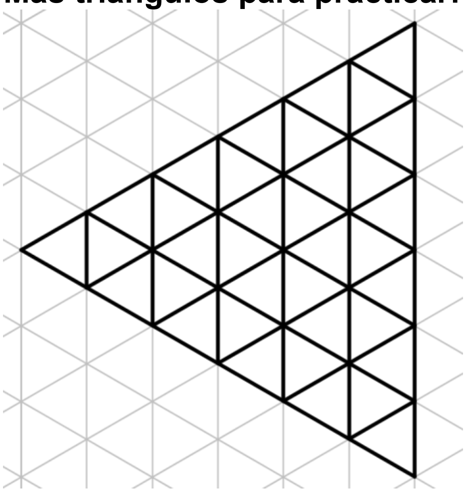
c)

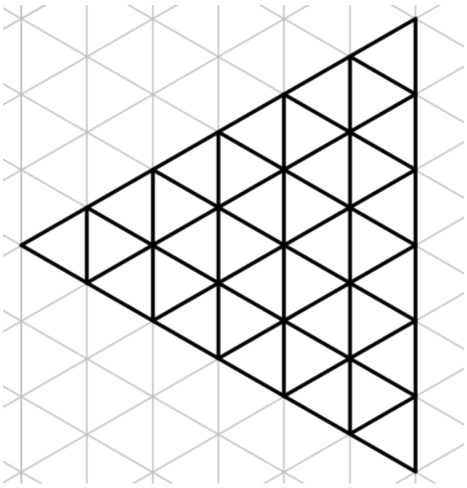


d)

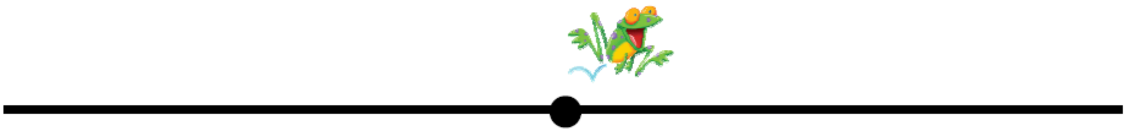


Más triángulos para practicar:





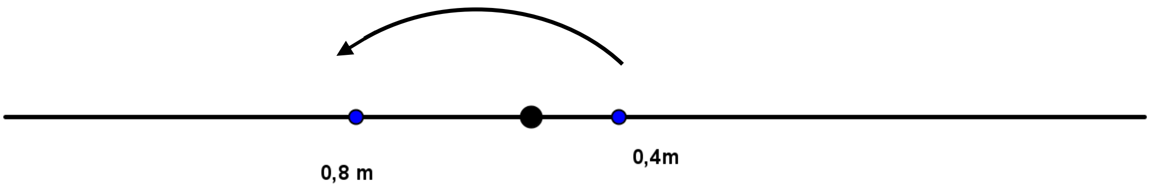
2. LA RANA SALTARINA



En esta línea recta hay una rana que salta, alternadamente hacia la derecha y hacia la izquierda del punto negro, sin caer nunca en él. Lo hace de la siguiente forma:

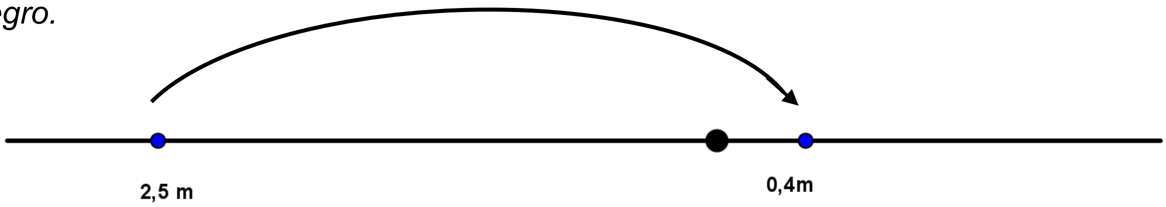
- Si la rana se encuentra a una distancia ***d*** inferior o igual a un metro del punto negro, tras dar su siguiente salto estará sobre la recta al doble de esa distancia del punto negro, o sea a ***2d*** metros, pero en el lado opuesto.

Por ejemplo, si la rana está a la derecha del punto negro a una distancia $d = \frac{2}{5} = 0{,}4$ *m, dará el salto a la izquierda para caer a una distancia* $2d = \frac{4}{5} = 0{,}8$ *m del punto negro.*



- Si la rana se encuentra a una distancia d superior a un metro del punto negro, tras dar su siguiente salto estará sobre la recta a una distancia igual a 1/d del punto negro, pero en el lado opuesto.

Por ejemplo, si la rana está a la izquierda del punto negro a una distancia $d = \frac{5}{2} = 2{,}5$ *m, dará el salto a la derecha para caer a una distancia* $\frac{1}{d} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ *m del punto negro.*



Pues bien, responde a las siguientes preguntas y en todas tus respuestas indica a qué distancia y en qué lado del punto negro se encontrará la rana:

a) Si inicialmente estaba a la izquierda del punto negro y a una distancia de 0,05 metros, ¿dónde se encontrará exactamente tras dar dos saltos?

(Continúa detrás)

b) ¿Y dónde se encontrará exactamente tras dar cinco saltos?

c) ¿Y tras dar diez saltos?

d) No te asustes, piensa un poco: ¿Y tras 2016 saltos? Explica tu respuesta.

e) Ahora queremos que nos digas en qué lado del punto negro y a qué distancia de él empezó la rana su periplo saltarín si después de **tres** saltos la rana se encuentra a la derecha y a 0,8 m del punto negro. **Indica razonadamente todas las soluciones posibles.**

3. EN LA PAPELERÍA

En una papelería venden estuches de tres tamaños, pequeños, medianos y grandes. Los precios son números enteros positivos, es decir no tienen decimales y están ordenados de acuerdo con el tamaño de los estuches.

Por ejemplo, unos precios válidos serían que un estuche pequeño costara 5 euros, uno mediano 8 euros y uno grande 9 euros. Y ejemplos de precios que **no** valen son: que un estuche cualquiera cueste 8,75 euros o que uno pequeño cueste 6 euros si el mediano cuesta 4 euros.

María, Ana y Elena fueron ayer a la papelería y compraron 9 estuches pequeños, 6 medianos y 8 grandes para regalar a toda su clase.

a) ¿Cuánto les costarían los estuches si los precios son 2, 4 y 5 euros? Intenta dar una expresión general para cualquier precio de los estuches.

Cuando recibieron la cuenta se produjo la siguiente conversación:

María dijo: mira, el total es un número par.

Ana dijo: y también es un múltiplo de tres.

Elena dijo: entre las tres tenemos que pagar menos de 90 euros.

b) ¿Puede haber un estuche pequeño que cueste 3 euros?

c) ¿Puede haber un estuche grande que cueste 5 euros?

(**Continúa detrás**)

d) ¿Puede haber un estuche mediano que cueste 10 euros?

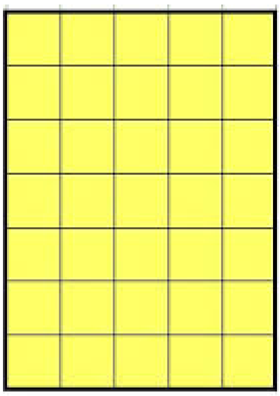
e) El precio de un estuche pequeño no puede ser cualquier número. ¿Qué condición tiene que cumplir el precio de un estuche pequeño?

f) El precio de un estuche grande tampoco puede ser cualquier número. ¿Qué condición tiene que cumplir el precio de un estuche grande?

g) ¿Puede haber un estuche grande que cueste 9 euros?

h) Podrías decirnos exactamente ¿cuánto cuesta cada estuche?

4. RECTÁNGULOS Y BLOQUES



Carlos, Diana y Elena ponen fichas cuadradas sobre una mesa formando rectángulos, cuyos lados quedan orientados a los cuatro puntos cardinales. Tienes un ejemplo en la figura de la derecha.

a) Carlos, Diana y Elena han construido un rectángulo, distinto y mayor que el de la figura. Una vez hecho, Carlos se lleva a su bolsillo las 7 fichas del rectángulo que estaban en el lado sur. Después, del nuevo rectángulo que ha quedado con las fichas restantes, Diana suprime las fichas del lado este, que son 10. Si a continuación Elena quiere recoger las fichas del lado Norte ¿cuántas serán? Y después de que Elena las recoja, ¿cuántas fichas quedarán sobre la mesa?

b) ¿Crees que si se empieza con otros rectángulos, de manera que se cambien los números 7 y 10 por otros números, siempre se podrá saber cuántas fichas recoge Elena y cuántas quedan al final sobre la mesa?

c) Ahora Carlos, Diana y Elena construyen bloques con un montón de pequeños cubos, como en la figura de la derecha.

Carlos, Diana y Elena construyen ahora un bloque, distinto y mayor que el de la figura.

Carlos separa todos los cubos de la cara frontal y se da cuenta que son 77.

Después Diana quita todos los cubos que quedan en la cara de la derecha y son 55.

(**Continúa detrás**)

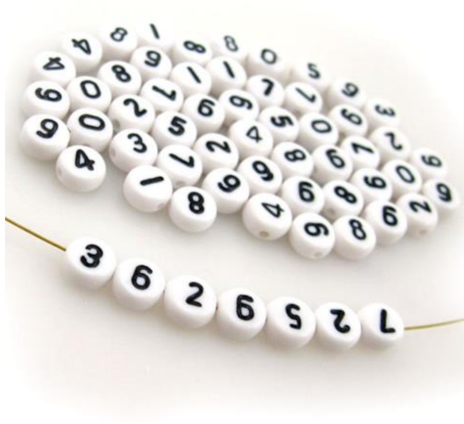
Si a continuación Elena quiere eliminar todos los cubos que quedan en la cara superior, ¿puedes deducir cuántos serán?

¿Cuántos cubos quedarán en el bloque formado por los cubos restantes después de que Carlos, Diana y Elena supriman los cubos indicados?

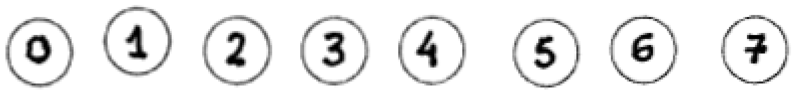
d) Para otro bloque Carlos dice que ha sacado un cierto número de cubos de la cara frontal y después Diana dice otro número para la cara de la derecha. Enseguida Elena dice "estos números de cubos que decís no son posibles". Da un ejemplo de números que erróneamente, puedan haber dicho Carlos y Diana pero que no puedan ser ciertos y explica las razones que te llevan a tu respuesta.

e) En otros casos, para ciertas dimensiones del bloque inicial, no es posible deducir con seguridad cuántos cubos quedan en la cara superior sabiendo los que ha quitado Carlos de la cara frontal y los que ha quitado después Diana de la cara de la derecha, ya que se presentan diversas posibilidades. Busca unos números (para sustituir el 77 y el 55 del apartado c) para los cuáles no sea posible, sólo con estos datos, deducir exactamente el número de cubos que quitará Elena después de que lo hagan Carlos y Diana.

5. PULSERAS



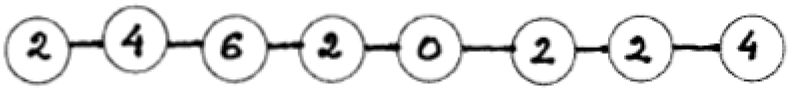
Tienes muchas cuentas, tantas como necesites, numeradas del 0 al 7:

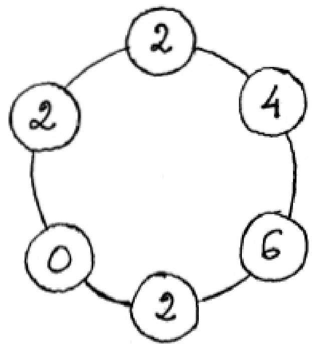


Con ellas vamos a hacer pulseras. Estas son las reglas:

1) Elige dos de ellas para comenzar. Pueden tener el mismo número.
2) Para elegir la tercera, suma los números de la primera y la segunda. Si te sale menos de 8 elige la cuenta con el número que te ha salido. Si te sale 8 o más, réstale 8 y elige la cuenta que te haya salido de la resta.
3) Para elegir la cuarta se hace lo mismo que antes, con la segunda y la tercera cuentas.
4) Continua hasta que se vuelvan a repetir las dos primeras cuentas en el mismo orden que se pusieron al principio.
5) Estas dos cuentas repetidas no se utilizarán para hacer la pulsera y se devuelven al montón.
6) Con las cuentas que quedan unidas, sin cambiar el orden, se confecciona una pulsera.

Aquí tienes un ejemplo comenzando con 2 y 4:





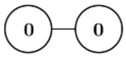
Al repetirse de nuevo el 2 y el 4, este 2 y este 4 se devuelven al montón, y con las cuentas que ya teníamos 2, 4, 6, 2, 0 y 2 se forma una pulsera. Como hay seis cuerdecitas que unen las cuentas, decimos que esta pulsera tiene longitud 6.

Ten en cuenta que como la pulsera es cerrada se puede comenzar por cualquier lugar. Por ejemplo, la pulsera anterior es la misma que la que comienza por 6 y 2, y la misma que si empezamos por 2 y 2.

a) Dibuja la pulsera comenzando con 0 y 1. ¿Qué longitud tiene? Si comienzas por 5 y 5 ¿se obtiene una pulsera diferente?

(**Continúa detrás**)

b) ¿De cuántas formas distintas se puede empezar la pulsera del apartado a)?

c) Quitando la pulsera 

¿Qué longitud tiene la pulsera más pequeña? ¿Por qué?

d) ¿De cuántas formas diferentes se puede comenzar una pulsera?

e) ¿Cuántas pulseras diferentes se pueden hacer? Dibújalas todas y justifica tu respuesta. No dibujes dos pulseras que aunque las hayas comenzado con dos cuentas diferentes sean iguales.

6. LOS CUENTOS DE MI ESTANTERÍA

En mi habitación tengo una estantería, y en una balda, solo en una balda, coloco mi colección de cuentos.

Tengo 4 cuentos, 2 tienen las tapas de color ROJO, uno tiene las tapas de color AZUL y el otro tiene las tapas de color VERDE. Para facilitar nuestra organización y distinguirlos bien en lugar de fijarnos en el título los vamos a llamar así: **R1, R2, A1 y V1**. La letra hace referencia al color y el número sirve para clasificar los cuentos de ese color.

Los cuentos los vamos a colocar en una balda de la estantería de manera que no puede haber **dos cuentos seguidos del mismo color**.

Por ejemplo, una ordenación posible es: **R1, A1, R2, V1.**

Y esta ordenación es distinta de esta otra: **R2, A1, R1, V1** ya que los cuentos de tapas rojas están cambiados entre sí y como tienen títulos distintos es una ordenación distinta.

a) Escribe otra ordenación posible para estos cuatro cuentos sin que haya dos seguidos del mismo color

b) Escribe todas las posibles ordenaciones de estos cuatro cuentos sin que haya dos seguidos del mismo color

c) Mi colección aumenta y ahora tengo 3 cuentos de tapas rojas, uno de tapas azules y uno de tapas verdes: **R1, R2, R3, A1 y V1**. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una balda de manera que no haya dos cuentos juntos del mismo color?

No te pedimos que escribas todas las formas posibles; queremos que digas cuántas maneras de colocar los libros y que expliques como lo has deducido.

(**Continúa detrás**)

Otra vez la colección aumenta y tenemos 3 cuentos de tapas rojas, dos cuentos de tapas azules y uno de tapas verdes: **R1, R2, R3, A1, A2 y V1.**

d) ¿Cuántas formas diferentes tenemos para colocarlos sin que haya dos cuentos seguidos del mismo color si el primer cuento que coloco en la balda es el cuento **R1**?

e) ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar los tres cuentos de tapas rojas, los dos de tapas azules y el de tapas verdes en una balda de manera que no haya dos cuentos seguidos del mismo color?

Tampoco te pedimos que escribas todas las formas posibles, sólo queremos que digas cuántas maneras de colocarlos hay.

f) Si tuviéramos 5 cuentos de tapas rojas, 3 de tapas azules y 2 de tapas verdes ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar sin que haya dos cuentos juntos del mismo color?

NOTA IMPORTANTE, en este apartado no es necesario que hagas todos los productos, basta con que lo dejes indicado.

Real Academia de Ciencias
Exactas, Físicas y Naturales

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección

3 de junio de 2017

Nombre:……………………………………………………………...............................

Apellidos:……………………………………………………………............................

Fecha de nacimiento:………………………………………………….........................

Teléfonos:………………………………………………………….................................

Centro en el que estudias:……………………………………………………………

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos. No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

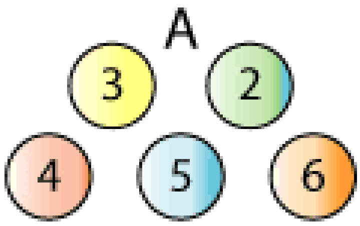
- ☐ A través de tu colegio.
- ☐ A través del *Concurso de Primavera*.
- ☐ A través de otros medios.

Tienes dos horas y media en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

Te deseamos mucho éxito.

1. JUEGO CON BOLAS

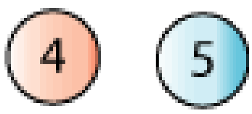
Tenemos una bolsa **A** de bolas numeradas que empleamos para un juego:



Para jugar, las bolas se mezclan y sin mirar se sacan dos al azar.

Si la suma es par, ganas. Si es impar, pierdes.

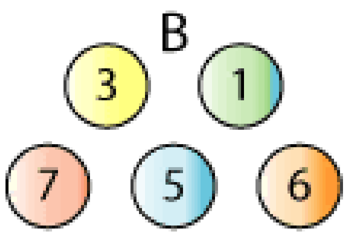
Por ejemplo, si se saca

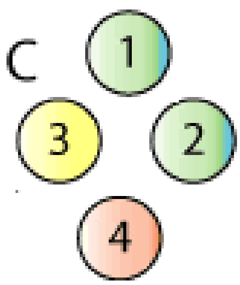


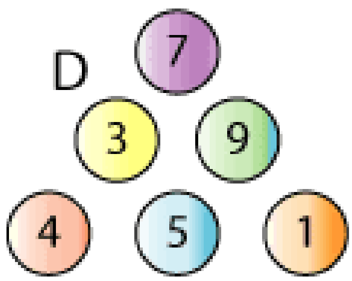
La suma es 4+5=9 y en este caso pierdes.

a) Un juego se dice que es **justo** si el número de parejas que te hacen ganar es el mismo que el número de parejas que te hacen perder. ¿Puedes justificar si el juego con la bolsa A es justo o no?

Tenemos ahora tres nuevas bolsas de bolas: B, C y D:







Continúa detrás

b) Ahora te dejan escoger entre las bolsas B, C y D**.** En cada caso haz el recuento de cuántas parejas de números puedes extraer y cuántas de ellas te hacen ganar. A la vista de tus cálculos, explica cuál de las tres bolsas escogerías para que tu posibilidad de ganar sea la mayor posible.

.

c) ¿Crees que podrías construir una bolsa con bolas numeradas que diese lugar a un juego justo? Explica tu respuesta.

d) ¿Sería posible construir una bolsa con 10 bolas numeradas que diera lugar a un juego justo? Explica tu respuesta.

2. EL PALACIO DE LAS HADAS

Las hadas viven en un palacio que tiene muchos pisos numerados así: 1, 2, 3, 4, 5…………

Para ir de un piso a otro piso hay que utilizar una varita mágica y en cada piso hay dos varitas mágicas, una es roja y la otra es azul.

Si tocas la varita mágica roja puedes ir 10 pisos más arriba o 10 pisos más abajo. Por ejemplo si estás en el piso 37 y tocas la varita roja puedes ir al piso 47 o al piso 27.

También puedes tocar la varita azul. Si la tocas puedes subir a otro piso que es el triple del piso que estás más uno; por ejemplo si estás en el piso 5 puedes ir al piso 16 = 3·5+1. También puedes moverte en sentido contrario, bajar a un piso obtenido restando 1 al que estás y dividiendo por 3; por ejemplo si estás en el piso 13 podrías ir al 4 porque $\frac{13-1}{3} = 4$.

a) El hada del Bosque vive en el piso 1. ¿Crees que podría llegar al piso 13? ¿Podría ir al piso 40? ¿Y al piso 93? ¿Y al piso 57? Si puede llegar a uno de estos pisos explica qué varitas ha tocado y en qué orden. Si crees que no puede llegar explica por qué.

Continúa detrás

b) ¿Podrías decir alguna propiedad que cumplan los números de todos los pisos a los que puede llegar el hada del Bosque?

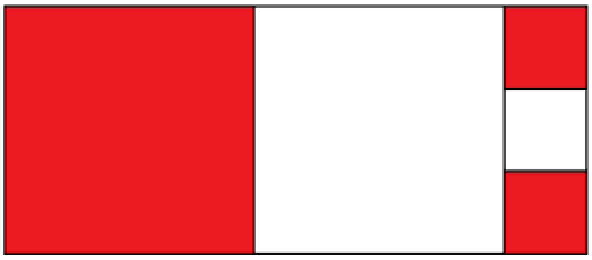
c) El hada de la Luna vive en la planta 2. Describe cómo puede llegar el hada de la Luna a la planta 57.

.

d) El hada del Agua vive en el piso 18. Utilizando la varita roja y la varita azul, ¿podría llegar el hada del Agua al piso 5?

e) ¿Coinciden dos de estas tres hadas en algún piso? Si piensas que **SÍ** dinos el piso, cuáles son las hadas que coinciden en él y como llegarían. Si piensas que **NO** escribe una justificación.

3. EMBALDOSANDO UNA PARED



3m

7 m

Queremos embaldosar una pared rectangular de 7 m por 3 m, utilizando exclusivamente baldosas cuadradas que tengan longitudes enteras, no necesariamente iguales y con el mínimo número total de ellas.

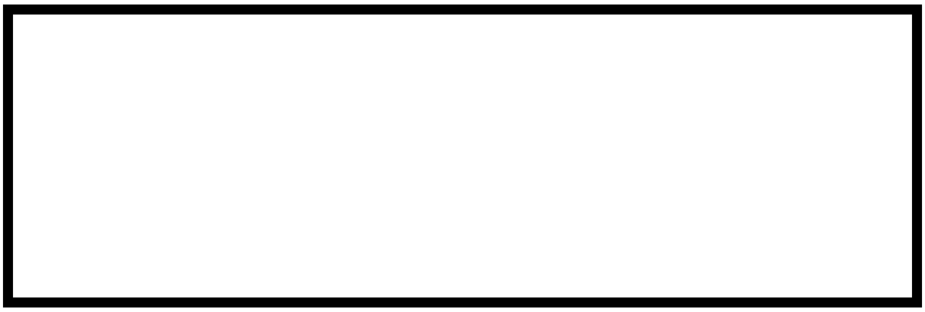
En este caso, el número mínimo total es de 5 baldosas cuadradas, ya que necesitaríamos 2 baldosas de lado 3 m y 3 baldosas de lado 1 m. Un posible diseño es el que se muestra en la figura de arriba, aunque hay otros.

a) Ahora queremos embaldosar una pared rectangular de 8 m por 5 m, con el mismo criterio anterior, ¿cuántas baldosas cuadradas necesitarías en total y de qué tamaño? **Dibuja algún diseño con ellas como ejemplo**.

5 m

8 m

b) Utilizando sólo baldosas cuadradas de lados 2 m, 4 m *y* 6 m, ¿cuál es el mínimo número de baldosas cuadradas necesarias para embaldosar una pared de 22 m por 6 m? Escribe cuántas baldosas hay de cada tamaño. **Dibuja algún diseño con el número de baldosas encontrado.**

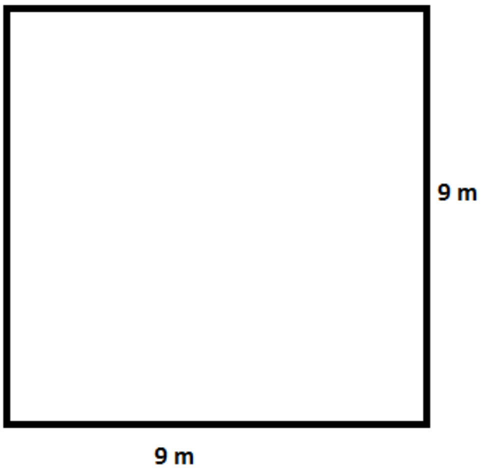


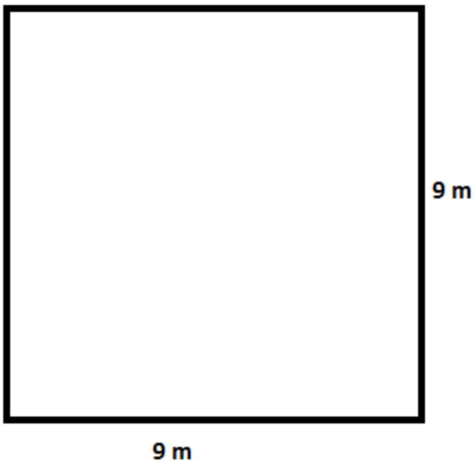
6 m

22 m

Continúa detrás

c) Si ahora la pared es cuadrada de lado 9 m, y sólo disponemos de baldosas cuadradas de lado 1, 2, 4, 5 y 7 m, podemos encontrar ese número mínimo de dos formas distintas. **Encuéntralas y realiza un diseño con cada una de estas dos posibilidades.**

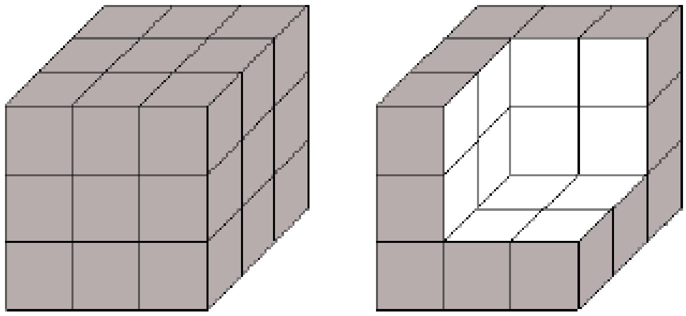




d) Ahora podemos usar baldosas cuadradas de lados enteros (por ejemplo de lado 4) y también baldosas cuadradas de lados decimales con el 5 como único decimal; por ejemplo podemos utilizar baldosas de lado 0,5 m, de 1 m, de 1,5 m, ……, de 16 m y de 16,5 m.

Si tenemos una pared de 371,25 m^2, y para enlosarla usamos una sola baldosa cuadrada de 16,5 m de lado, y las restantes son baldosas más pequeñas, **¿cómo será la distribución del resto de baldosas, buscando siempre el menor número de éstas?**

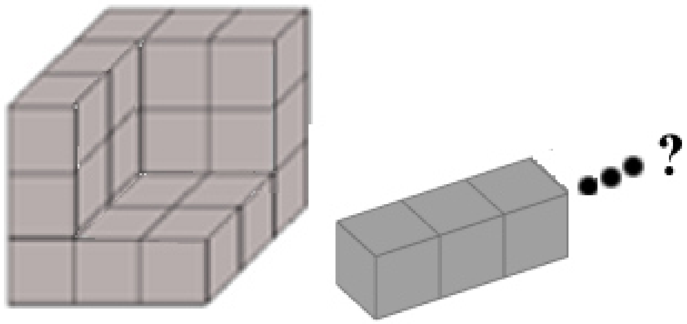
4. PINTANDO CUBOS Y CUBITOS



Hemos necesitado exactamente 9 botes de pintura para pintar exteriormente (por todas sus caras, también las que no se ven, como la lateral izquierda, la trasera y la inferior) el cubo de la izquierda que, como se ve, está construido adosando cubitos todos iguales.

Después hemos quitado unos cuantos cubitos para dejar la figura como se ve a la derecha.

a) ¿Cuántos botes de pintura necesitaremos para pintar completamente la parte de la figura que no lo está?



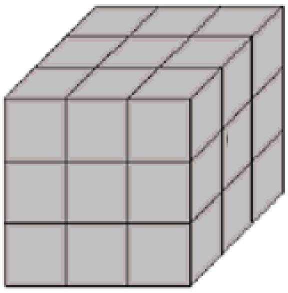
Ahora ya tenemos esta figura pintada exteriormente (recordad que también por la izquierda, por detrás y por debajo). Vamos a desmontarla y adosando algunos cubitos en la posición que nos vaya mejor, queremos construir una fila de cubitos, en la que queremos pintar todas las caras que no lo estén.

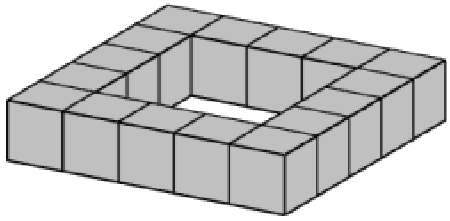
Tenemos un solo bote de pintura como los del apartado a).

b) ¿Cuál es el máximo número de cubitos que podremos poner en la fila para que la podamos pintar completamente? Explica cómo los tienes que colocar.

Continúa detrás

Tenemos otro cubo como el inicial, completo y pintado exteriormente por todas sus caras, lo desmontamos y ahora queremos adosar adecuadamente algunos cubitos (algunos de los cuales tienen caras pintadas) para construir un nuevo objeto: un "cuadrado de cubitos" y pintarlo, como se ve en la figura de la derecha.

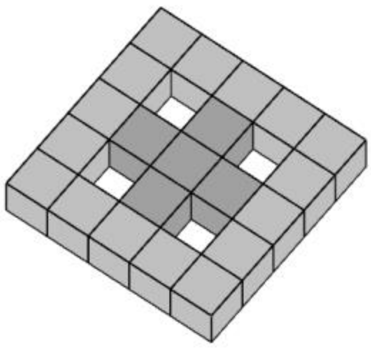




Queremos pintar todas las caras exteriores del nuevo objeto, pero lo podemos montar de manera que aprovechemos piezas con algunas caras pintadas, tantas como sea posible (que ya no volveremos a pintar, naturalmente).

c) Razona cuál es el menor número de caras que deberemos pintar.

Con las piezas que nos han sobrado queremos añadir una cruz al cuadrado y que quede pintada en todo su exterior, como muestra la figura de la derecha.



También la montaremos intentando aprovechar, de los cubitos que nos han quedado sin utilizar, aquellos que tengan caras ya pintadas y que podemos añadir ahora a la construcción.

d) ¿Cuál es el menor número de caras que deberemos pintar en la cruz que añadimos?

5. INTERCAMBIO DE CIFRAS

a) Escribe en orden todos los números que se pueden obtener con todas las cifras del número 123. Fíjate en cada uno de ellos y señala los que con un simple intercambio de dos cifras permiten obtener el número 123.

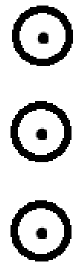
b) Escribe ordenadamente todos los números que se pueden obtener con todas las cifras del número 1234. ¿Cuántos son? Fíjate en cada uno de ellos y señala los que con un simple intercambio de dos cifras permiten obtener el número 1234. ¿Cuántos son?

Continúa detrás

c) ¿Realmente necesitas escribirlos todos los números para poder responder a las cuestiones del apartado anterior? Sin escribirlos todos ¿Cuántos números se podrán obtener con todas las cifras del número 12345? ¿Cuántos de ellos permiten con un simple cambio de dos cifras obtener el número 12345? Explica tu respuesta.

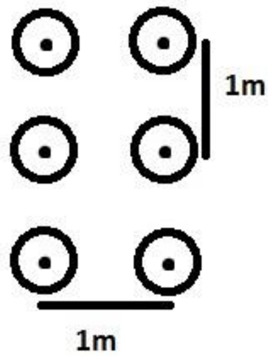
d) ¿Cuáles de los números del apartado b) son los que requieren exactamente dos intercambios de dos cifras para obtener el número 1234? ¿Y tres de dichos intercambios? ¿Alguno de ellos requiere más de tres intercambios?

6. SEMBRANDO SEMILLAS



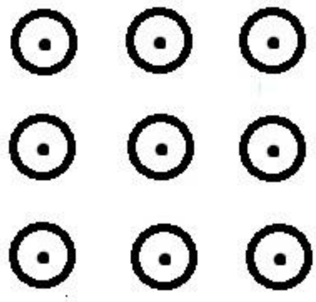
Un agricultor se dispone a sembrar semillas de patata en su terreno.

1. El primer día, el agricultor siembra tres semillas en línea recta separadas 1 metro entre cada dos consecutivas (como se indica en la figura de la derecha).



El segundo día, vuelve a sembrar otras tres semillas en una línea paralela a la anterior a distancia 1 metro y también a distancia 1 metro entre cada nueva semilla.

Tras la siembra del tercer día, el campo queda de la siguiente forma:



a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

b) ¿Qué área tiene cada uno de esos cuadrados?

c) Llamamos orden de una semilla como al número de cuadrados que tienen alguno de sus vértices en dicha semilla. ¿Cuál es el orden de cada una de las semillas?

Continúa detrás

d) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

2. El agricultor sigue cultivando tres semillas cada día con la misma distribución anterior. Tras la siembra del cuarto día,

a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

b) ¿Qué área tiene cada uno de esos cuadrados?

c) ¿Cuál es el orden de cada una de las semillas?

d) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

3. Si han pasado 100 días, responde justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas

a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

b) ¿Qué área tiene cada uno de esos cuadrados?

c) ¿Cuál es el orden de cada una de estas semillas?

d) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

4. Si han pasado "n" días (n representa cualquier valor de los días de siembra), responde justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

b) ¿Qué área tiene cada uno de esos cuadrados?

c) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

Continúa detrás