



UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

**SISTEMAS DE POSICIONAMIENTO
GLOBAL Y TEORÍA DE LA
RELATIVIDAD**

D. Germán Medina Martínez

Curso 2013 - 2014

Resumen

Que la matemática, sí, esa tan temida ciencia, muchas veces sorprende al mundo siendo aplicada a un ámbito tecnológico con el que nadie hubiera sospechado que tenía relación, es un hecho que pese a que sigue creando una reconfortante sensación entre matemáticos, empieza a ser bastante habitual y comentado entre el gran público. Los mercados financieros, las últimas teorías cuánticas, incluso la propia estructura del ADN, se están convirtiendo en áreas del desarrollo que beben directamente de la matemática más abstracta y pura, como la teoría de grupos o los procesos estocásticos. El caso de la teoría de la relatividad y los sistemas de posicionamiento global que nos ocupa no iba a ser menos y es de tan estrecha relación entre teoría y tecnología, donde nace nuestro estudio.

El objetivo principal de este trabajo de fin de grado es presentar el modelo espacio-temporal concerniente a la *solución de Schwarzschild en el vacío* para las *ecuaciones de campo de Einstein* y aplicar sus propiedades e idiosincrasias para comprender los principios físico-geométricos del funcionamiento del sistema de posicionamiento global conocido como *GPS*, (*Global Positioning System*).

Durante el proceso de aplicación del modelo teórico al problema físico particular irán surgiendo interrogantes no sólo cuantitativos en cuanto al peso de las cifras que vamos a obtener sino más teóricos en cuanto a lo apropiado del modelo espacio-temporal empleado para tratar la situación particular del funcionamiento del GPS. Creemos que la respuesta a estos interrogantes y la aplicación del modelo a un problema físico concreto, más que suponer simplemente una utilidad del mismo puede ayudar a comprenderlo en toda su profundidad, sacando a la luz detalles que quizá con un mero estudio teórico pasarían desapercibidos.

Primeramente ofreceremos un extenso sumario en inglés de todo el documento para seguidamente, ya en la primera sección del documento ofrecer una panorámica de algunos preliminares y conceptos previos sobre relatividad especial, con especial énfasis al concepto de *tiempo propio*, de crucial relevancia en nuestro estudio.

Hecho esto pasaremos de lleno a presentar el *espacio-tiempo de Schwarzschild* y a estudiar en profundidad sus propiedades, siempre encaminadas a la posterior aplicación al *GPS* de la que nos encargamos en el segundo capítulo.

Como colofón al trabajo, contrastaremos los resultados obtenidos y justificaremos muchas de las suposiciones que irán siendo tomadas a lo largo del estudio entre las cuales la más importante es la elección del modelo de Schwarzschild.

Summary

Despite the fact that it is usually difficult to summarize a mathematical document, in this abstract we can review the topics that are discussed in this paper. By showing a brief view of the results that we are going to reach, the reader will have a panoramic idea of the things that we are going to deal with, in an attempt to obtain a better understanding about the questions that will come up. It is also worth remembering that the main topic of this paper, *relativity*, is one of the most recent achievements of theoretical physics during the 20th century. In contrast with other mathematical areas, because of its only recent apparition, relativistic effects may be unknown to the reader even though he or she has good mathematical knowledge. For that reason, the following lines could be helpful in order to avoid coming directly face to face with all these new points of view that relativity shows us.

Normally, we are used to seeing how the physics principles that we learnt at school help us to develop a new technology as an important part of it. But once someone has studied the principles of *Special and General Relativity*, the first thing he or she is quite sure is how far from real life relativity assertions are. Therefore the connection between the *Global Positioning System* and this theory that we are going to talk about is so beautiful. Systems used to estimate position, including one of the most outstanding the *Global Positioning System (GPS)*, are so common in our daily lives that in most of the time, we do not realize how enormously important their use is. From the typical handheld device which allows hikers to calculate their position among the mountains, to the most sophisticated devices that airplanes have in their cockpits in order to make a safe landing possible in a dark night.

As the great mathematical physicist *Clifford Will* said,

*There is no better illustration of the unpredictable payback of fundamental science than the story of Albert Einstein and the Global Positioning System (GPS)... the next time your plane approaches an airport in bad weather, and you just happen to be wondering "what good is basic science," think about Einstein and the GPS tracker in the cockpit, guiding you to a safe landing.*¹

The relationship between relativity and GPS is so important that as far as relativity is concerned, none of the GPS in the world would work properly if we didn't take into account the relativity effects that have to do with the different rates between two clocks. But before we carry out a careful study of relativity effects in the GPS we have to know in detail the model that we are going to use in that study, and this is what the first chapter

¹Cita de C. Will extraída de [1, Proyect A].

of this paper is devoted.

So in the first chapter we are going to exhibit the *Schwarzschild spacetime* which is the simplest relativistic model of a universe containing a single star which is assumed to be static and spherically symmetric. In spite of being a big simplification of what the universe is, *Schwarzschild spacetime* is really useful in studying some of the main astronomical phenomena. A highly accurate model of our solar system even better than the Newtonian model is given by this model for instance. The Schwarzschild model is also said to provide the first and straightforward model of a *black hole*, as we will study, because it can be split into two parts; one of them, the so-called *Schwarzschild black hole* resembles a black hole because of its features. Since relativistic effects are stronger near these black holes, *Schwarzschild spacetime* was the key point in order to show how important these effects were. All these features will be studied more deeply in the first chapter by carrying out some calculations and theoretical experiments but lets see a bit more carefully what we are going to study in that chapter.

Roughly speaking, the Schwarzschild model is based on a warped product, namely $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R} \times_r \mathbb{S}^2$, furnished with the metric $-h(r) dt^2 + h(r)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$, where $h(r) = 1 - 2M/r$ is the Schwarzschild function and spherical coordinates have been taken in \mathbb{S}^2 . Once we had defined the model, we are going to investigate its main physics features, because as we will see, *Schwarzschild spacetime* was obtained under some assumptions, so it is reasonable that the obtained model has all those assumptions satisfied. This will be done in sections 1.2.2 and 1.2.3.

After that, in section 1.2.4 we are going to see that this is a model for a curved spacetime. Due to its curvature, we find that one of the features of Schwarzschild's that stands out most is its non-homogeneity. As we are going to see, basically in a homogeneous spacetime, or generally in a homogeneous *semi-riemannian manifold*, we cannot differentiate some points from other in the sense that there always exists an isometry between them. So from the metric point of view, all the points are the same. In *Schwarzschild spacetime*, we do not have this property, as we have for example in the *Euclidean plane*. This will be proved in the corresponding section.

So, in our model, there are points which are "different" in the sense that distances are not measured in the same way or that the same lapses of time, as measured in one point or another, have different rates.

Once all these mathematical properties have been studied, in the second chapter we are going to explain the main idea of the operation of the *Global Positioning System*. This operation is based on the mathematical method of triangulation which will be explained in detail in section 2.1. Briefly, we could say that this method allows us to calculate the position of a point in a three-dimension space just by knowing the distances to at least three points with well-known coordinates. In the particular case of a *GPS*, let us assume that we are on some point of the Earth's surface and we would like to determine our three dimensional position (longitude, latitude and altitude). Without going in too much detail, what the *GPS* does is an accurate measurement of the distance between the handheld

device positioned on the Earth's surface and four satellites in motion about 26 000 kilometers above us. To do this, the *GPS* measures the lapse of time in which signals sent from each satellite takes to reach the handheld device. Knowing these four times, the *GPS* is able to add up the distance between the device and the satellites just by multiplying the measured lapse of time to the speed of light. However it may be more difficult than it seems as we are going to see in the following paragraphs.

As we have just seen, the *GPS* can figure out the distance to at least four satellites in motion (we will find out why four satellites later on) and with these distances it will be able to use the triangulation method, which will give the user his position. Every time we use our handheld device in a car or during a hike, this calculation must be done in the computing system of the *GPS* and here is the key point about why relativity is so important in the operation of the *GPS*. As we mentioned before, due to the lack of homogeneity, different points in the *Schwarzschild spacetime* have different clock rates, so if the *GPS* is using the satellite and the handheld clock in two different positions, as the model sais, the disagreement between these two clocks has to be taken into account to make the calculation more accurate. So to sum up, if we wish a correct operation of the GPS, we have to use the Schwarzschild spacetime. This will be done in section 2.2 and some of the results that we are going to obtain will be more astonishing than what we could imagine right now.

In an anticipation, we exhibit here one of the formulas that will be proved there concerning to the difference in the rates of the clocks,

$$\left(\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{tierra}} \right)^2 = \frac{1 - \frac{2M}{r_{sat}} - v_{sat}^2}{1 - \frac{2M}{r_{tierra}} - v_{tierra}^2} \quad (1)$$

Where $d\tau_{sat}$ and $d\tau_{tierra}$ are the time lapses of the satellite clock and the Earth clock, and M represents the mass of the Earth.

Once this main goal has been attained in section 2.2.2, we are going to carry out a calculation to evaluate the last formula and it will be proved that a clock attached to a satellite in motion around 26 000 kilometers over our head will “run fast” by something like 38 672 nanoseconds per day compared with a clock on the Earth's surface due to relativistic effects.

But how important is this difference? Is it important enough to be detected by the *GPS* operation? These are some of the queries we will answer in section 3. As we said before, none of the *GPS* of the planet would work without this correction, so the reader can deduce that this difference is indeed important. Why is so important? Well, because in that lapse of time, light will have covered more than 11 kilometers, so if we want to land an airplane on a dark night, an error of 11 kilometers on its position is completely undesirable.

Last but not least, after having seeing all the central part of our study, some of the assumption and results will be discussed in section 3.1. For example, we have said that

the *Schwarzschild spacetime* is a model for a universe with a single static and spherical star. But the Earth rotates and it is not perfectly spherical, so why should we think the use of the *Schwarzschild spacetime* would be suitable for our purposes? Are errors due to this assumption crucial in the final results? Should we take into account any correction?

Other sources of error that will be considered are those concerning the speed of light, as actually it is not constant, although in our study we have acted as if it was. There are also other technical errors that we will mention and see how they affect the final results.

As we can see, this paper has wealth of topics; geometry, relativity, a bit of modelling and if we were supposed to carry out a complete analysis of the *Global Positioning System*, other subjects such as numerical calculus or probability theory must be included in this research. But these last things have to do with engineering rather than mathematics so we will avoid them. In this case, the objective of this paper is not to know the total operation of the *GPS*, because there are several things that we would have to deal with. We'd rather focus on the main questions about how important is relativity in this technology in order to a better comprehension of Einstein theory. So we could say that this work is devoted to relativity in the *GPS*, rather than the *GPS* operation, as our main goal is to learn how to use relativity on it and how knows, maybe to know how relativity can be used in other technological advances that one day may become such important as the *GPS* is.

Germán Medina Martínez
15 de Junio de 2014

Índice general

Resumen	I
Summary	III
1. Sobre Geometría y Relatividad	1
1.1. De la teoría de la relatividad y el tiempo propio	1
1.1.1. Primeras definiciones	2
1.1.2. Tiempo propio	5
1.2. Espacio-tiempo de Schwarzschild	7
1.2.1. Unidades geométricas	8
1.2.2. El modelo de Schwarzschild	9
1.2.3. Imposiciones físicas al modelo	13
1.2.4. Un espacio-tiempo curvo	14
1.2.5. ¡Dos espacio-tiempos!	19
2. GPS y Teoría de la Relatividad	23
2.1. Sistemas de posicionamiento global (GPS)	23
2.1.1. Método de triangulación en el GPS	24
2.1.2. La precisión de los relojes	26
2.2. Teoría de la relatividad y GPS	29
2.2.1. Relojes estacionarios	30
2.2.2. La velocidad de los relojes	33
2.2.3. El ajuste final	34
3. Análisis de los Resultados	37
3.1. Principales fuentes de error	37
3.2. Justificando las aproximaciones. Desplazamiento hacia el azul	39
3.3. ¿Funcionaría el GPS cerca de un agujero negro?	41
Conclusiones	43
Bibliografía	45

Capítulo 1

Sobre Geometría y Relatividad

A lo largo de este capítulo introducimos y estudiamos toda la teoría y terminología relativista que emplearemos en el posterior estudio de la relatividad del GPS. El capítulo se divide principalmente en dos partes, la primera dedicada a la introducción de conceptos previos necesarios para la comprensión del *tiempo propio* y la segunda, que emplea también los conceptos previos de la primera sección para presentar y estudiar en profundidad el modelo del *espacio-tiempo de Schwarzschild*, objetivo principal en nuestro estudio.

1.1. De la teoría de la relatividad y el tiempo propio

La publicación en el año 1905 de los famosos *Relativity Principles (RP)* de Albert Einstein en los que se detallaban los dos postulados básicos de su teoría de la relatividad especial supuso una completa ruptura con la concepción newtoniana del espacio y del tiempo como entes absolutos. Con este trabajo y de forma contundente, Einstein puso fin a la controversia que se había estado generando en torno al *éter luminífero* y los *sistemas de referencia* y apuntaló el camino de lo que sería el principal libro de ruta de la física durante el siglo XX.¹

Desde aquel momento, toda medida de espacio o tiempo dependería del observador que la realizase y de hecho, estos dos términos que desde siempre habían ido de la mano a lo largo de la física, se fundirían para siempre en uno común, que los bautizara como una única cosa, el *espacio-tiempo*. Había nacido la *teoría de la relatividad especial*.

La teoría de la relatividad pretende explicar el universo, descubrir los más pequeños intersticios de la realidad. Mas cuestiones filosóficas aparte, desde nuestro punto de vista esta famosa teoría es en realidad un *modelo matemático*, es decir, una suerte de aparataje matemático proveniente de la abstracción, que pretende crear un puente entre los fenómenos que observamos empíricamente y el mundo infinitamente más potente de las ideas. Para nuestros intereses, lo que el modelo de la teoría de la relatividad (general) y en particular la *solución de Schwarzschild* que nosotros emplearemos predicen es que dos relojes situados a distintas alturas con respecto a un centro de atracción gravitatoria

¹Para una visión histórica más precisa nos remitimos a cualquiera de los incontables libros que hay en la literatura sobre el asunto, véase por ejemplo [3, Chapter 1].

funcionarán de forma distinta. ¿Qué significa distinto? ¿Cómo de distinto? Iremos dando respuesta a estos interrogantes a lo largo del trabajo. Dado que el GPS trabaja con relojes sincronizados a distintas alturas, es posible que estos “efectos relativistas” deban ser incluidos para determinar el correcto funcionamiento del mismo. Cuando finalicemos el estudio veremos cuán de importantes son cuantitativamente estas consideraciones y si son realmente cruciales para el funcionamiento del GPS. De esta forma, todo lo que se vea en estas secciones en un marco abstracto, irá encaminado de forma inmediata al estudio del GPS.

A *grosso modo* y sin afán de adentrarnos en los pantanos de la indecisión, la relatividad especial predice que para un objeto en movimiento respecto a otro, el tiempo se ralentizará. Esta teoría se desarrolla en un espacio 4-dimensional en el que la primera coordenada se suele reservar para el tiempo y las otras tres restantes para indicar la posición en el espacio. Además, la relatividad especial destaca por la ausencia de una distribución de masa y energía en el espacio por lo que en ella, no hay efectos causados por campos gravitatorios. Esta cualidad da al espacio en el que se desarrolla un aspecto de “plano euclídeo” en cuatro dimensiones.²

1.1.1. Primeras definiciones

A lo largo de esta sección vamos a introducir la terminología y conceptos relativistas que usaremos en el resto de este trabajo. Así mismo, tal introducción de los conceptos permitirá una progresiva familiarización con este nuevo mundo, a simple vista tan “contra-intuitivo”, que supone la teoría de la relatividad.

Para comenzar, como siempre definimos nuestro espacio de trabajo natural, que será el ámbito de las *variedades de Lorentz*.

Definición 1.1.1. *Una variedad lorentziana o de Lorentz es un par (M, g) constituido por una variedad diferenciable M y un tensor métrico g sobre M de índice uno.³*

Mantendremos la notación habitual, por lo que denotaremos indistintamente por $g(u, v)$ ó $\langle u, v \rangle$ al producto de dos vectores del tangente $T_p M$ y al módulo de un vector por $|u| = \sqrt{|g(u, u)|} = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$.

Obsérvese también que en una variedad lorentziana M , el espacio tangente en cada punto $T_p M$ será un espacio vectorial lorentziano (aquí la métrica actúa como el producto escalar de índice uno).

Recordemos que cuando nos encontrábamos con un producto escalar de índice distinto de cero una pregunta de interés era determinar los “conos” en los que el producto era positivo, negativo o nulo. En el ámbito de la teoría de la relatividad estos conos gozan de nombre propio.

²La intención dista de ser la de dar un manual autocontenido en relatividad, para lo cual, entre otras muchas opciones, existen buenos libros como [2].

³Recordemos que el hecho de que una métrica tenga índice uno es equivalente a que exista una base ortonormal del tangente $\{e_1, \dots, e_n\}$ de forma que $g(e_i, e_i) = 1$ si $i = 1, \dots, n - 1$ y $g(e_n, e_n) = -1$.

Definición 1.1.2. Sea (V, \langle, \rangle) un espacio vectorial lorentziano, el carácter causal de un vector $v \in V$ se define como:

1. espacial, si $\langle v, v \rangle > 0$ ó $v = 0$
2. temporal, si $\langle v, v \rangle < 0$
3. nulo (o tipo luz), si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$

En esta situación, el subconjunto de V formado por los vectores temporales tiene dos componentes conexas \mathcal{T} y $-\mathcal{T}$, denominadas conos temporales. El subconjunto de los vectores nulos también está formado por dos componentes conexas llamadas conos de luz y a la unión de ambos conos, temporales y de luz, se la denomina conos causales $\overline{\mathcal{T}}$ y $-\overline{\mathcal{T}}$.

Esta es la causalidad en espacios vectoriales. Cuando nos encontremos en una variedad de Lorentz M , extrapolaremos la definición anterior al espacio vectorial T_pM , es decir, que cuando hablemos del carácter causal de un vector en una variedad de Lorentz estaremos empleando la definición anterior en el espacio vectorial concreto T_pM .

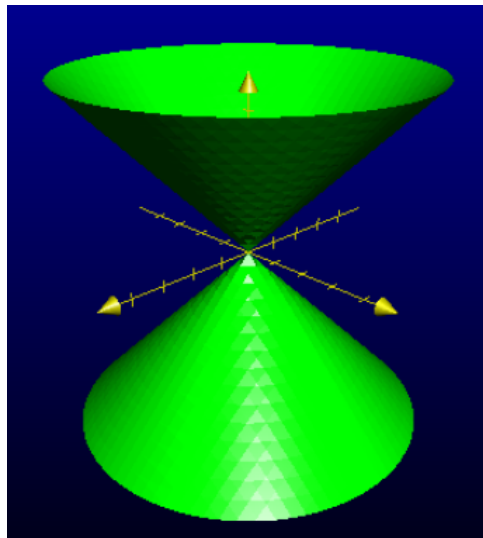


Figura 1.1: Conos causales en un espacio-tiempo 3-dimensional.

Aunque todos los conceptos precedentes están encaminados a una inmediata aplicación a la relatividad, que trabaja en cuatro dimensiones, tienen perfecto sentido en cualquier otro espacio-tiempo de otra dimensión y generalmente, en cualquier variedad lorentziana. Por lo tanto, van a ser introducidos en el marco más general y abstracto de la geometría de Lorentz, pero nunca sin perder de vista el caso que nos ocupa.

Queremos hablar de relojes que se adelantan respecto de otros, luego antes de continuar hemos de formalizar en algún sentido qué entendemos por “el avance del tiempo” en alguna suerte de “dirección”, cuando sea posible dar algún sentido a esto.

Definición 1.1.3. Una variedad lorentziana M es orientable temporalmente si existe una orientación temporal en M , o sea, si existe una aplicación que asigna a cada $p \in M$ un

cono temporal \mathcal{T}_p de forma diferenciable, en el sentido de que para cada $p \in M$ existe un campo de vectores X en un entorno U de p tal que $X_q \in \mathcal{T}_p$ para cada $q \in U$. Cuando esté fijada la orientación temporal, diremos que M está orientada temporalmente y llamaremos cono futuro a \mathcal{T} y cono pasado a $-\mathcal{T}$.

Así, cuando la variedad M esté orientada temporalmente diremos que un vector $v \in T_pM$ apunta hacia el futuro (resp. pasado) cuando $v \in \mathcal{T}$ (resp. $v \in -\mathcal{T}$).

Nota 1.1.1. No confundir el concepto de «orientabilidad temporal» con otro más común de «orientabilidad geométrica» más usual en los cursos de geometría diferencial, pues no tienen nada que ver. Este es un campo extenso, mas en nuestro trabajo siempre supondremos que nuestra variedad de Lorentz es orientable temporalmente, cosa que no es nada absurda pues se puede probar que toda variedad de Lorentz posee una métrica orientable temporalmente, véase [4]. Por ejemplo, si n es impar, la esfera \mathbb{S}^n no posee una orientación temporal (pues no es una variedad de Lorentz) pero como sabemos, sí que es orientable en el sentido usual.

A modo de curiosidad, remarquemos también que el hecho de que una variedad sea lorentziana (i.e orientable temporalmente) es enormemente restrictivo desde el punto de vista topológico, pues se puede probar que salvo homeomorfismos, las únicas superficies compactas que pueden ser lorentzianas son el toro y la botella de Klein.

Lema 1.1.1. Sea M una variedad de Lorentz, dos vectores temporales $u, v \in T_pM$ están en el mismo cono temporal si y sólo si $g(u, v) < 0$.

La clave de la teoría de la relatividad es que todo fenómeno físico que ocurra en el universo conlleva un aquí y ahora (todo junto). Matemáticamente, esta situación se formaliza con el concepto de *evento* y de *partícula material*:

Definición 1.1.4. Sea M una variedad de Lorentz orientada temporalmente, un evento es un punto $p \in M$. Una partícula material en M es una curva $\alpha : I \rightarrow M$ temporal y apuntando hacia el futuro, o sea, $\alpha'(u)$ es un vector temporal situado en el cono futuro para cada $u \in I$.

Antes de continuar introducimos la siguiente notación: cuando trabajemos con variedades de Lorentz producto, indicaremos con un subíndice dónde se encuentra la componente de la métrica con índice negativo. Así, $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}$ quiere decir que la primera componente de la métrica es la que aporta el índice negativo.

Nota 1.1.2. La teoría de la relatividad se escribe en el marco general de las variedades de Lorentz. Pero en particular, siempre que nos encontremos en el ámbito de la relatividad especial, para nosotros el espacio-tiempo será una variedad de Lorentz muy concreta M , que sea isométrica al espacio de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4 = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}^3$ con la métrica $-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Con esta notación, la primera coordenada de un punto (un evento) será su coordenada temporal y las otras tres restantes se emplearán para indicar su posición en el espacio, es decir, serán las coordenadas espaciales. Esta notación es coherente con la idea de que todo evento conlleva una posición junto a un instante como un todo.

Por último, antes de entrar de lleno en el objetivo central de la sección que es la definición y comprensión del tiempo propio, damos nombre propio a las geodésicas de la variedad de Lorentz en la que estemos trabajando, pues tienen gran importancia a lo largo de toda la teoría.

Definición 1.1.5. *Sea M una variedad de Lorentz orientada temporalmente, una partícula material α está en caída libre si es geodésica (en el caso de la relatividad especial $M \cong \mathbb{L}^4$, es fácil calcular que geodésica \equiv línea recta). Las partículas en caída libre que sean nulas apuntando hacia el futuro se denominarán partículas luminosas o de tipo luz, y reservaremos para ellas la expresión $\gamma(s)$.*

1.1.2. Tiempo propio

Oteado el marco en el que se escribe la relatividad y tras este paseo más bien tranquilo, nos sumergimos de lleno en esta teoría para estudiar en profundidad el concepto de *tiempo propio*, crucial para los objetivos que se plantea este trabajo.

Sea M una variedad de Lorentz (que a partir de ahora supondremos orientada temporalmente) y $\alpha : I \rightarrow M$ una partícula material. Como por definición $\alpha'(u)$ es temporal apuntando hacia el futuro para cada $u \in I$ tenemos que ha de ser $|\alpha'(u)| \neq 0$ para cada $u \in I$. Como sabemos, esto implica que la curva α se puede *reparametrizar por la longitud de arco*, es decir, que existe un cambio de parámetro $\tau(u)$ de forma que $|\alpha'(u)| = 1$. En nuestro contexto específico de variedades lorentzianas, este parámetro tiene una denominación distinta.

Definición 1.1.6. *Sea M una variedad de Lorentz y $\alpha : I \rightarrow M$ una partícula material, denominamos reparametrización por tiempo propio a la reparametrización por el arco de la curva α , a saber $\alpha(u(\tau))$. El parámetro arco τ se denomina tiempo propio de la curva α .*

Nos centramos ahora en el ámbito de la relatividad especial. Esto quiere decir que en las siguientes líneas M será una variedad de Lorentz isométrica a \mathbb{L}^4 , es decir, existe una isometría global $\xi : M \rightarrow \mathbb{L}^4$. De este modo, si consideramos en \mathbb{L}^4 la carta identidad $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^4}$, la carta que podemos usar para M es simplemente $x := \mathbf{1}_{\mathbb{R}^4} \circ \xi : M \rightarrow \mathbb{R}^4$. Notar que de esta forma cubrimos M con una única carta.

Dada una partícula material $\alpha : I \rightarrow M$ podemos escribir su expresión en estas coordenadas que denotaremos por $\alpha(u) = (x^0(u), x^1(u), x^2(u), x^3(u))$. De esta forma, tendremos que $\alpha'(u) = \left(\frac{dx^0}{du}, \frac{dx^1}{du}, \frac{dx^2}{du}, \frac{dx^3}{du} \right)$.

Como por definición $\alpha'(u)$ está en el cono futuro y el vector $v = (1, 0, 0, 0)$ también lo está (pues $g(v, v) < 0$), entonces en virtud del lema 1.1.1 se ha de tener que,

$$0 > g(\alpha'(u), v) = -\frac{dx^0}{du} \quad \forall u \in I$$

$$\text{luego } \frac{dx^0}{du} > 0.$$

Esto implica que $x^0(u)$ es estrictamente creciente en u , cosa que se debe interpretar como que nuestra partícula α avanza de forma inexorable a través del tiempo hacia el futuro y que su componente temporal no puede “girarse” para que la partícula vaya hacia el pasado lo cual es coherente en cierto modo con que el tiempo sólo avance en un sentido. Gráficamente esto significa que cualquier partícula material en el espacio-tiempo siempre avanzará dentro del cono temporal, no pudiendo atravesar la línea diagonal del cono de luz y salirse del mismo.

Por otro lado vamos a prestar un poco de atención al parámetro de la curva. Como estamos en geometría semi-riemanniana y $\alpha'(u)$ es temporal, tendremos que $|\alpha'(u)| = \sqrt{-\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle}$, lo que fijado un $u_0 \in I$ nos lleva a definir la función,

$$\tau(u) = \int_{u_0}^u |\alpha'(t)| dt$$

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{d\tau}{du} = |\alpha'(u)| > 0 \quad \forall u \in I$$

De aquí se deduce que la función τ que representa el tiempo propio es creciente en u , vamos a ilustrar con un ejemplo numérico este concepto.

Ejemplo 1.1.1. *Supongamos la partícula material $\alpha : [0,1] \rightarrow M$ dada por $\alpha(u) = (1-u)A + uB$ siendo $A = (0, 0, 0, 0)$ y $B = (10, 0, 0, 0)$, es decir, la línea recta que une A con B .*

$$\tau(u) = \int_0^u |\alpha'(t)| dt = uB \implies u(\tau) = \frac{\tau}{10}, \quad \tau \in [0, 10]$$

Luego la reparametrización por tiempo propio es,

$$\alpha(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{10}\right) A + \frac{\tau}{10} B, \quad \tau \in [0, 10]$$

Este ejemplo es útil para comprender la interpretación física que tiene el parámetro que da el tiempo propio de una curva, la cual es una de las claves para la formulación de la relatividad en general y para la realización de este trabajo en particular. Lo que hemos hecho en este ejemplo ha sido simplemente reparametrizar por el arco, por lo que ahora, el parámetro τ de la curva indica la longitud de la misma. Esto es, $\alpha(\tau) = L_0^\tau(\alpha)$. Esta longitud, físicamente es el tiempo que transcurre para la partícula material. Así, por ejemplo $\alpha(5) = 5$ quiere decir que han transcurrido 5 unidades temporales para la partícula (5 segundos, 5 días, 5 años... según la unidad temporal). En la página siguiente se muestra un gráfico en $\mathbb{L}^2 = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}$ de la situación.

Dado que el tiempo propio es una particularidad de la propia curva y representa el tiempo que transcurre para la misma, en la literatura este concepto suele aparecer como *wristwatch time* (tiempo de reloj de muñeca) en el sentido de que es el tiempo que marca el reloj que la partícula porta consigo misma.

Además, el concepto de tiempo propio, ligado a la propiedad maximizante de las geodésicas en variedades de Lorentz (pues en geometría de Lorentz la geodésica es el camino de mayor longitud entre dos puntos) da lugar a una de las paradojas más famosas de la teoría de la relatividad especial, conocida como paradoja de los gemelos. Para más información véase [2].

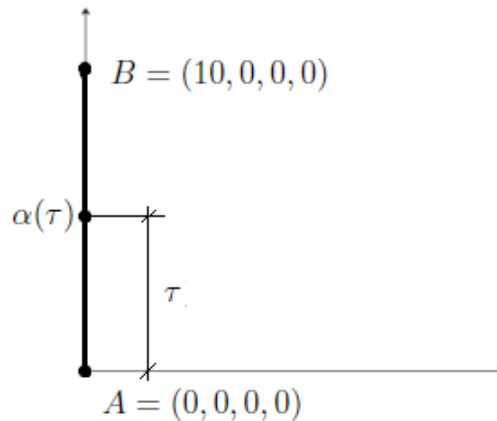


Figura 1.2: Partícula material parametrizada por tiempo propio.

1.2. Espacio-tiempo de Schwarzschild

Una vez formulada la relatividad especial, que recordemos describe el espacio-tiempo sin efectos de campos gravitatorios de por medio, el siguiente objetivo de Einstein fue el de añadir estos campos a su teoría de la relatividad, es decir, encontrar la clave que explicara por qué los cuerpos eran atraídos entre sí. Aquí vino la segunda gran idea genial de Einstein, que fue identificar la gravedad (física), con la curvatura (geometría) del espacio-tiempo. En boca del propio Einstein se explica como sigue:⁴

Y entonces vino a mí... la independencia de la aceleración gravitacional de la naturaleza de la partícula en caída, podría ser expresada como sigue: En un campo gravitacional, las cosas se comportan como lo harían en un espacio libre de gravedad...Esto pasó en 1908. ¿Por qué han sido otros siete años necesarios para la construcción de la teoría general de la relatividad? La principal razón subyace en el hecho de que no es fácil liberarse a uno mismo de la idea de que las coordenadas deben tener un significado métrico inmediato.

Así, tras una ardua labor, en 1915 Einstein forjó para siempre una profunda relación entre aceleración gravitatoria provocada por una distribución de masa-energía y la curvatura del espacio-tiempo. Dicha relación venía descrita en forma tensorial por la *ecuación de campo de Einstein* que relacionaba directamente la relación entre la distribución de

⁴Cita extraída del libro *The Genesis of General Relativity: Sources and Interpretations* de By Michel Janssen, John Norton, Tilmann Sauer, John Stachel.

masa-energía en el espacio (*tensor tensión-energía*) y la curvatura del espacio-tiempo (*tensor curvatura*).

La(s) ecuaciones de campo de Einstein consistían en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, cuya resolución conllevaría directamente la obtención de la métrica que gobierna un espacio-tiempo con una cierta distribución de masa-energía (la dada por el *tensor tensión-energía*). Obviamente las soluciones no eran para nada evidentes. Sin embargo, apenas unos meses después de la publicación del trabajo de Einstein, un joven físico y astrónomo alemán de nombre Karl Schwarzschild, bajo la suposición de que el espacio-tiempo estaba formado por un único cuerpo simétrico y sin rotación, publicaba una solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, es decir, en el exterior del cuerpo que se comportaba como fuente de atracción gravitatoria. Esta solución sorprendió incluso al propio Einstein y en breve, se ganó un nombre propio, que es el que encabeza esta sección y supone el pistoletazo de salida al estudio del modelo principal que aplicaremos al GPS, el *espacio-tiempo de Schwarzschild*.

1.2.1. Unidades geométricas

Antes de introducir los modelos relativistas y ponernos a trabajar con ellos es preciso que establezcamos el sistema de unidades en el que trabaja la relatividad, las unidades geométricas. Esto lo hacemos porque la descripción del espacio-tiempo con una cierta distribución de masa-energía es más simple cuando empleamos este tipo de unidades, como veremos a continuación.

1. En el sistema de las unidades geométricas, tanto distancia como tiempo serán contabilizadas en metros. El factor de cambio para pasar del tiempo en unidades geométricas al tiempo en unidades convencionales será la velocidad convencional de la luz $c_{conv} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Es decir, que para calcular el correspondiente tiempo en unidades geométricas simplemente tenemos que computar la expresión $t_{geo} = t_{conv} \cdot c_{conv}$. Así, que dos instantes que ocurren con un metro de diferencia significa que en unidades convencionales están separados por $1(m)/3 \cdot 10^8(m/s) = 3,33 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. En algunas ocasiones, por conveniencia, sí que mediremos tiempo en unidades convencionales.
2. Dado que en este sistema de medida espacio y tiempo se miden en las mismas unidades, tiene sentido pensar que entonces la velocidad va a ser una magnitud adimensional. Por lo tanto, se fijará la velocidad de la luz como la constante adimensional $c_{geo} = 1$ y toda velocidad se expresará como una fracción de la misma. Así, que un móvil tenga velocidad $v = 0,5$ en unidades geométricas quiere decir que su velocidad es la mitad de la velocidad de la luz, $v_{conv} = 1,5 \cdot 10^8(m/s)$.⁵
3. De igual forma que el tiempo, la masa también se medirá en metros, para lo cual, emplearemos como factor de cambio la *constante de gravitación universal* $G \approx$

⁵Se puede probar partiendo de los postulados de la relatividad que para toda partícula material se tiene que su velocidad es $v < 1$.

$6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2$ partido de la velocidad convencional de la luz al cuadrado:

$$\frac{G}{c_{conv}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\text{cm}^3}{\text{gs}^2} \right)}{9 \cdot 10^{20} \left(\frac{\text{cm}^2}{\text{s}^2} \right)} = 7,42 \cdot 10^{-29} \frac{\text{cm}}{\text{g}}$$

Esta forma de expresar la masa tiene dos ventajas principales. Por un lado, al ser cuantificada como el tiempo en metros, queda equiparada con esta magnitud y aparecerá fundamentalmente ligada al concepto de geometría del espacio-tiempo en el que trabajemos, pues hasta el momento sólo tiempo y longitud estaban unidos a la geometría. Por otro lado, la introducción de los factores G y c^2 simplificará las ecuaciones con las que vamos a trabajar posteriormente, pues en ellas simplemente aparecerá el valor M de la masa en unidades geométricas en vez del más engorroso $M c^2/G$.

Con este nuevo sistema de medida estamos capacitados a comparar por ejemplo masa con tiempo (¡aunque obviamente no son lo mismo!). Cosas del tipo "la masa del Sol es mayor que el tiempo que se tarda en ir a no sé dónde" tienen ahora perfecto sentido. Aunque esto a priori pueda sonar como una suerte de artificio un tanto rebuscado, la justificación del uso de este tipo de unidades que hemos dado en el párrafo anterior quedará patente cuando introduzcamos la métrica de Schwarzschild, pues en sus factores aparecerán masa, tiempo y espacio sumándose y restándose entre sí, lo que en unidades convencionales, carecería completamente de sentido.

Para terminar esta sección, he aquí una tabla con las unidades geométricas de los principales cuerpos celestes que manejaremos a lo largo de este trabajo:

Objeto	M_{conv}	$M_{geométrica}$	Radio
Tierra	$5,9742 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$	$4,44 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$
Sol	$1,989 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$	$1,477 \cdot 10^3 \text{ m}$	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$
Agujero negro Vía Lactea	$5,2 \cdot 10^{36} \text{ Kg}$	$3,8 \cdot 10^9 \text{ m}$	

Cuadro 1.1: Expresión en unidades geométricas de las masas de algunos objetos

1.2.2. El modelo de Schwarzschild

Como hemos adelantado, la solución que Schwarzschild propuso para las ecuaciones de campo de Einstein describe el espacio-tiempo en el exterior de un objeto con masa, simétricamente esférico y sin rotación. Este modelo contempla por tanto que la distribución de masa-energía es debida a un único cuerpo gravitatorio (un universo con una única estrella, planeta, agujero negro...). A lo largo del trabajo nos referiremos indistintamente a este objeto como "la estrella" aunque obviamente, no tiene por qué serlo. Este modelo podría utilizarse entonces en regiones próximas a objetos astronómicos cuyas características se asemejen a las antes mencionadas. Por ejemplo, proporciona un modelo del sistema solar

extremadamente preciso, en el que el Sol es la estrella y los planetas son partículas sin masa o para las órbitas de los satélites en torno a un planeta, por lo que como vemos, aunque en la práctica no se den situaciones que coincidan perfectamente con las hipótesis del modelo de Schwarzschild, sí que se puede aplicar a diversos escenarios como una excelente aproximación. De hecho, esta idea de emplear el modelo de Schwarzschild como aproximación es lo que llevaremos acabo en el estudio del GPS.

Es por fin el momento de empezar a formalizar matemáticamente al situación, para lo cual, comenzamos recordando la definición de producto torcido, que es la base del modelo de Schwarzschild que pretendemos estudiar.

Definición 1.2.1. Sean B y F dos variedades semi-riemannianas con métricas g_B y g_F respectivamente. Dada una función diferenciable $f > 0$, definimos el producto torcido $M = B \times_f F$ como la variedad semi-riemanniana $B \times F$ equipada con la métrica,

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F)$$

donde π y σ son las proyecciones canónicas de $B \times F$ a B y a F respectivamente y π^* y σ^* son los pull-backs de las métricas.

Cuando hablemos de productos torcidos, seguiremos la notación de [2] por lo que la variedad B será denominada *base* y la variedad F *fibra*. De igual forma, llamaremos *fibrados* a los $\{p\} \times F = \pi^{-1}(\{p\})$ y *hojas* a las $B \times \{q\} = \sigma^{-1}(\{q\})$.

Dado que la métrica inducida en las hojas $\pi^*(g_B)$ es el pull-back de g_B , por definición, se tiene que toda hoja $B \times \{q\}$ es isométrica a B . Por otro lado, la métrica inducida en las fibras es $(f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F)$ que no es exactamente el pull-back de g_F sino una homotecia de éste. Por tanto, toda fibra $\{p\} \times F$ es homotética a F con un factor de homotecia $1/f(p)$, o a la inversa, F es homotética a cada fibra $\{p\} \times F$ con factor de homotecia $f(p)$.

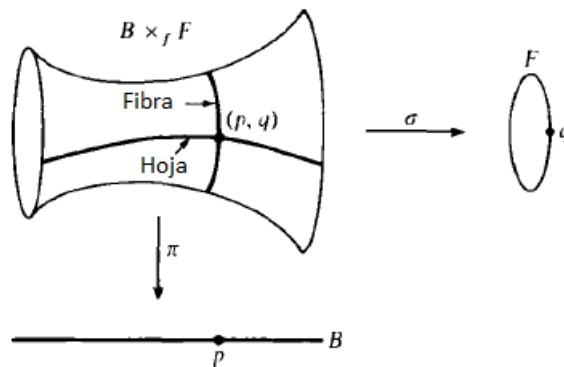


Figura 1.3: Hojas y fibrados en un producto torcido.

Como vemos, en realidad un producto torcido no es otra cosa que una variedad producto, en la que la segunda componente ha sido “torcida” de acuerdo a un factor de

torcimiento cuadrático f . Este lenguaje es de gran utilidad a la hora de formular modelos relativistas y de hecho, formalmente hablando, todos los modelos cosmológicos del universo que se dedujeron a partir de la relatividad de Einstein consisten en productos torcidos. Para el lector interesado en profundizar en este tipo de variedades, así como estudiar sus geodésicas y curvatura de enorme utilidad en la determinación de las órbitas relativistas o la curvatura de la luz, nos remitimos a [2, Chapter 7].

Podemos presentar ya el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Definición 1.2.2. Consideremos el espacio de Minkowski $\mathbb{L}^1 = \mathbb{R}_1$ y el semieje $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. Llamamos plano de Schwarzschild de masa M (siendo $M > 0$ una constante) a la variedad semi-riemanniana $P = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}^+$ con la métrica,

$$g = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2$$

Definición 1.2.3. Con la notación anterior, si \mathbb{S}^2 es la esfera unidad 2-dimensional, definimos el espacio-tiempo de Schwarzschild de masa M como el producto torcido $P \times_r \mathbb{S}^2$. Es decir, el espacio-tiempo de Schwarzschild de masa M es la variedad 4-dimensional $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^2$ cuya métrica es explícitamente,

$$g = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

donde $d\phi$ es la métrica de \mathbb{S}^2 .

Llamaremos a la proyección $t : \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1$ tiempo de Schwarzschild, a $r : \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ radio de Schwarzschild o coordenada radial y al factor $h(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ lo denominaremos función de Schwarzschild.

Una representación esquemática (obviando dimensiones) del producto torcido de la definición anterior sería:

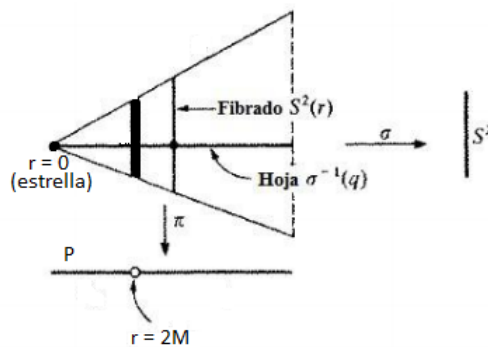


Figura 1.4: Espacio-tiempo de Schwarzschild.

De esta forma, por lo visto en las definiciones previas sobre productos torcidos, para cada $(t, r) \in P$, el fibrado $\pi^{-1}(t, r)$ es homotético a la esfera \mathbb{S}^2 con factor $1/r$, o sea, que cada fibrado $\pi^{-1}(t, r)$ es (isométrico) a la esfera de radio r , $\mathbb{S}^2(r)$. Hablando geoméricamente esto quiere decir que fijado un instante t , un punto del espacio-tiempo de Schwarzschild se sitúa a una distancia radial (no confundir con distancia euclídea usual) r de la estrella y para ese r , en cualquiera de los puntos de la $\mathbb{S}^2(r)$. Por otro lado, cada hoja del espacio-tiempo de Schwarzschild $\sigma^{-1}(q)$ con $q \in \mathbb{S}^2$ es isométrica al semiplano P como comentábamos en la definición de producto torcido.

Nota 1.2.1. *Recordemos que al igual que hacíamos en la variedad $M \cong \mathbb{L}^4$ para la relatividad especial, la primera coordenada será temporal y las tres restantes espaciales. Aunque pueda parecer un poco extraño que la parte espacial de este modelo sea $\mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^2$, si tenemos en cuenta el párrafo anterior, como para cada r los fibrados son isométricos a $\mathbb{S}^2(r)$ lo que en realidad tenemos es una familia de productos $\{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2(r) : r > 0\}$ que se pueden interpretar como el espacio $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Por lo que visto de este modo, en realidad el espacio-tiempo de Schwarzschild no es más que el producto $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}^3$. Cuando en breve fijemos las coordenadas con las que vamos a trabajar en todo el desarrollo quedará claro entonces por qué vemos el modelo como $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^2$ y no como $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}^3 - \{0\}$.*

De especial importancia y transcendencia son en nuestro estudio el tiempo y el radio de Schwarzschild. Normalmente, estamos acostumbrados a modelar los problemas físicos en espacios euclídeos, en los que la distancia entre dos puntos es directamente la distancia medida en línea recta entre los mismos. Todo es tan sencillo como decir que la distancia entre $(0, 0, 0)$ y $(10, 0, 0)$ es 10. Mas a partir de ahora, esta situación va a cambiar rotundamente. La siguiente idea es de vital importancia para comprender el espacio-tiempo de Schwarzschild:

En el espacio-tiempo de Schwarzschild las distancias entre dos puntos del espacio no son las que obtendríamos midiendo directamente como haríamos en un espacio euclídeo, son las medidas mediante el radio de Schwarzschild r . Otro tanto ocurre con el tiempo entre dos eventos.

Para que nos hagamos una idea, físicamente las funciones (t, r) se podrían interpretar como el tiempo y la distancia entre dos eventos medidos desde el infinito. Es decir, supongamos que nosotros “estamos situados” a una distancia infinita y observamos una partícula material α que emite ticks luminosos cada cierto intervalo de tiempo. Cuando la partícula emite un tick, la señal luminosa viaja a través del espacio y nos alcanza, ocurrido lo cual nosotros iniciamos un cronómetro. Transcurrido cierto periodo, α volverá a emitir otro tick, de forma que cuando la señal luminosa nos alcance nosotros paremos nuestro cronómetro. La medición de tiempo que hemos realizado se corresponde al tiempo de Schwarzschild t . Recordemos que por otro lado, como α es por definición temporal y apuntando hacia el futuro puede ser considerada como parametrizada por tiempo propio τ , por lo que con su “propio reloj” la partícula α también habrá medido el intervalo de tiempo que transcurre entre los dos ticks.

La clave de todo es la siguiente pregunta, ¿coincide el intervalo de tiempo medido por nosotros mediante el tiempo de Schwarzschild t con el intervalo medido por la partícula con su tiempo propio τ ? Pues como es de esperar, pues de lo contrario no habría cuento que contar, la respuesta es que no, no coincide. Esto es, no es lo mismo el tiempo medido por la partícula que el tiempo medido desde el infinito. Más adelante cuando profundicemos en la métrica veremos ejemplos de este tipo de fenómenos pero ya adelantamos que esta diferencia va a ser una de las claves en el posterior estudio que hagamos sobre el GPS.

Antes de continuar vamos a fijar las coordenadas en las que trabajaremos en el resto del desarrollo. En principio, las dos primeras coordenadas, el tiempo y el radio de Schwarzschild no las tocaremos, sin embargo, a la hora de trabajar con la esfera unidad \mathbb{S}^2 , por cuestiones de simetría esférica, nos será mucho más útil emplear las coordenadas esféricas (θ, φ) . Un sencillo cálculo permite expresar la métrica en estas coordenadas como,

$$-h(r) dt^2 + h(r)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)$$

Ésta será la expresión de la métrica definitiva con la que trabajaremos a lo largo del documento. Además, nótese que en la notación habitual de la geometría semi-riemanniana, si consideramos la base de las derivadas parciales $\{\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi\}$ tenemos que este es un sistema de coordenadas ortogonal.

1.2.3. Imposiciones físicas al modelo

La forma con que hemos presentado el espacio-tiempo de Schwarzschild puede parecer un poco cruenta, en tanto que parece salida de la nada. Sin embargo, recordemos que esta elegante solución fue obtenida a partir de las ecuaciones de campo de Einstein, desarrollo que omitimos aquí por cuestiones de contenido. No obstante, lo que sí que podemos comprobar es cómo este nuevo espacio-tiempo se ajusta a las condiciones físicas que le fueron impuestas, lo que nos será de utilidad para familiarizarnos un poco más con el mismo.

En primer lugar, recordemos que deseábamos un modelo estático, en el que la estrella, agujero negro...etc no se moviera y por tanto, las mediciones no dependiesen del instante en el que eran realizadas. Ésto es coherente con la ausencia de la coordenada t en los factores de la expresión de la métrica $-h(r) dt^2 + h(r)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)$. Así entre otras cosas, la distancia entre dos puntos fijos del modelo será siempre la misma, lo que es toda una suerte pues de lo contrario, las cosas se complicarían enormemente.

Si observamos la métrica con un poco más de detalle, nos percatamos también de la ausencia de algún tipo de ángulo en las coordenadas temporales y radiales de la métrica. Ésto tiene completo sentido con el hecho de que queríamos un modelo esféricamente simétrico, esto es, que fijados un instante y una distancia radial al centro de atracción gravitatoria, o sea, un punto (t, r) , la forma de medir (la métrica) es la misma independientemente del punto de la \mathbb{S}^2 en el que nos encontremos.

Vamos a fijarnos ahora más detalladamente en la función de Schwarzschild $h(r) = 1 - 2M/r$. Si nos alejamos radialmente del punto de atracción gravitatoria, es decir, si $r \rightarrow +\infty$, la función $h(r) \rightarrow 1$, es decir, que cuanto más nos alejamos de la fuente de

gravedad, la métrica de Schwarzschild comienza a parecerse más y más a la de Minkowski que en coordenadas esféricas es $-dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$. Ésto concuerda perfectamente con nuestra intuición, pues si estamos modelando un universo con una única estrella, a distancias tan grandes como se quiera de la misma, el espacio debe ser llano, debe quedar libre de toda gravedad, es decir, debe ser Minkowskiano. Así, cuando ésta situación ocurra, debemos pensar el tiempo de Schwarzschild t simplemente como el tiempo de la relatividad especial, y otro tanto con la coordenada radial r . Recordando el comentario que hacíamos en el apartado anterior sobre el tiempo y el radio de Schwarzschild, remarquemos que en el infinito, el tiempo de Schwarzschild t entre ticks sí que coincidiría con el tiempo propio de la partícula τ (siempre y cuando no haya efectos de la relatividad especial de por medio, es decir, cuando la partícula sea estática).

En esta línea, también cabe considerar el comportamiento de la constante M que modela la masa de la estrella en la función de Schwarzschild $h(r) = 1 - 2M/r$. En principio puede parecer que si el cuerpo es muy poco masivo, o sea, si $M \approx 0$, entonces $h(r) \approx 1$, por lo que la métrica vuelve a aproximarse a una métrica Minkowskiana y por tanto, el espacio-tiempo vuelve a ser el de la relatividad especial. Incluso objetos aparentemente grandes como la Tierra poseen una masa (en unidades geométricas) muy pequeña $M_{tierra} = 4,44 \cdot 10^{-3} m$, por lo que en torno a la Tierra los efectos de la métrica de Schwarzschild serán muy pequeños. Pero el análisis de este párrafo no es del todo correcto, pues hemos obviado la relación que debe haber entre la masa de la estrella y su radio, porque puede haber objetos con masas muy pequeñas, pero si su radio es todavía más pequeño en relación, el factor h no se aproximará a uno y los efectos de la métrica se harán más notables. Por lo tanto, de lo que tenemos que hablar realmente para discernir cuándo la métrica de Schwarzschild es más notable o menos es de densidad de masa. La Tierra es relativamente poco densa, pues su masa geométrica es pequeña y su radio r^* grande. Pero pueden existir objetos con la misma masa y radio mucho menor, es decir, objetos mucho más densos, que sí harán más patentes los efectos de la métrica de Schwarzschild. Retomaremos la cuestión de la relación entre la masa de la estrella y su radio en la sección 1.2.5 pues da lugar a la que es probablemente la característica más importante del espacio-tiempo de Schwarzschild.

1.2.4. Un espacio-tiempo curvo

A estas alturas debe quedar bastante claro que el espacio-tiempo de Schwarzschild es bastante diferente a los espacio-tiempos que se emplean en relatividad especial. Pero, ¿cuál es el desencadenante de todas estas diferencias? ¿cuál es la diferencia geométrica primordial que hace a los dos modelos completamente distintos?

En realidad la mayor diferencia entre la métrica de Schwarzschild empleada en relatividad general y la métrica de Minkowski empleada para la relatividad especial es un término muy matemático al que no hemos prestado atención hasta el momento, la curvatura. El hecho de que el espacio-tiempo de Schwarzschild tenga curvatura (no nula) es la clave y a la vez desencadenante de todos los efectos e idiosincrasias del modelo, pues por contra, el espacio-tiempo de Minkowski posee curvatura nula (es un plano 4-dimensional). Nosotros

en principio no nos detendremos en calcular el tensor curvatura ni las distintas curvaturas del modelo pues para nuestros objetivos, carecen de interés. Nos remitimos nuevamente a [2, Chapter 13]. Sí que nos detendremos por supuesto en las consecuencias que esta curvatura puede acarrear para nuestro modelo.

Para empezar, retomemos el comentario sobre el tiempo y el radio de Schwarzschild que hicimos tras presentar el modelo espacio-temporal. El primer hecho chocante con nuestra intuición clásica que allí veíamos es que las coordenadas (t, r) medidas son diferentes que el tiempo propio τ y la distancia medida directamente como estamos acostumbrados en los espacios euclídeos. Allí sólo mencionamos el fenómeno mas no entrábamos en su casuística ni en la demostración de por qué ocurre. Ahora podemos afirmar que dicha particularidad es debida a la curvatura.

La curvatura del modelo depende de los factores de la métrica. Si nos fijamos, la parte temporal de la métrica dt^2 viene afectada por el factor $1 - 2M/r$ (sin preocuparnos del signo). Si $r > 2M$ entonces este factor es menor que uno por lo que el tiempo de Schwarzschild t siempre será mayor que el tiempo propio τ .

En efecto, una forma de ver esto puede ser pensando en una partícula material en el espacio-tiempo, que no varíe en ninguna de las tres coordenadas espaciales (r, θ, φ) , o sea, $\alpha(\tau) = (\tau, r_0, \theta_0, \varphi_0)$. Entonces para esta partícula, es claro que $\alpha'(\tau) = (1, 0, 0, 0)$ y por lo tanto el tiempo de transcurrido entre dos instantes t_1 y t_2 medido por la partícula, esto es, el tiempo propio entre dos eventos sería,

$$\tau_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\alpha', \alpha')} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt$$

Como tanto la función tiempo de Schwarzschild t como el parámetro tiempo propio τ son continuos, aplicando el *teorema fundamental del cálculo* obtenemos directamente que,

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt$$

Como veíamos, el factor que multiplica a dt es más pequeño que uno si $r > 2M$, así que deducimos directamente de la expresión anterior que siempre que $r > 2M$, el tiempo propio en la partícula transcurrido entre dos eventos es menor que el tiempo de Schwarzschild transcurrido entre esos dos mismos eventos.

De hecho, nótese que si $r \rightarrow 2M^+$ este lapso de tiempo tiende a hacerse infinito (pues el ratio $d\tau/dt$ tiende a 0) por lo que mientras para la partícula pueden haber transcurrido apenas unos segundos, para el tiempo de Schwarzschild pueden haber pasado miles de años. Esta patología tan curiosa entre los lapsos de tiempo cerca del punto $r = 2M$ tiene una naturaleza y unas implicaciones mucho más profundas de lo que pueda parecer que trataremos en 1.2.5 y está relacionada con la proporción que hay entre la masa y el radio de la estrella, de la que hablamos en la sección 1.2.3.

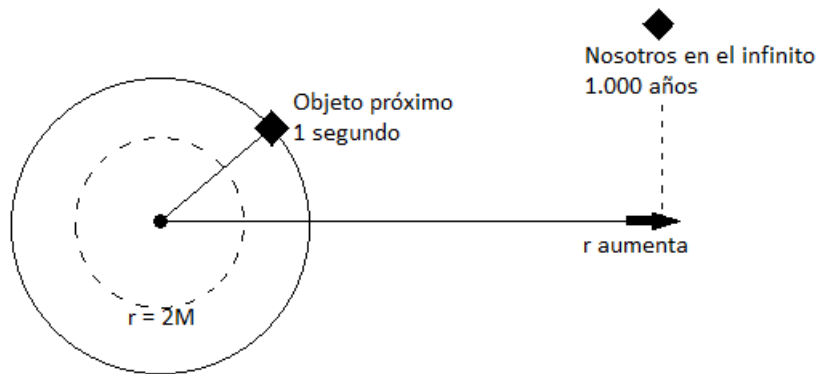


Figura 1.5: Incremento entre el tiempo propio y el tiempo de Schwarzschild $\frac{d\tau}{dt}$.

Podemos realizar un estudio similar sobre la coordenada del radio de Schwarzschild. Si $r > 2M$ entonces el factor radial de la métrica es mayor que uno, pues es el inverso del temporal. Cualquier distancia entre dos puntos radiales r_1 y r_2 será mayor que la distancia “euclídea” $|r_1 - r_2|$. Buscando el respaldo de las cifras, en vez de realizar un cálculo teórico como el anterior, llevemos a cabo un sencillo experimento para ver esto.

Supongamos una esfera concéntrica imaginaria sobre la superficie del Sol perfectamente ajustada a él (cierto que el Sol no es perfectamente esférico, pero en nuestro modelo, que para nosotros es lo único que hay, sí que lo es). Si quisiéramos medir el radio de la esfera, o lo que es lo mismo, la coordenada radial en la superficie del Sol, por razones obvias, no podríamos hacerlo lanzando directamente una cuerda desde la superficie de la esfera hasta el centro del Sol, pues entre otras cosas, no soportaría la temperatura y presión. Hemos de ingeniárnoslas de otra manera.

Tras darle unas cuantas vueltas al asunto, nos percatamos de que una forma de proceder sería, si recordamos nuestras clases de quinto de primaria, emplear al fórmula para la longitud de la circunferencia $L = 2\pi r$ y despejar $r = L/2\pi$. Aquí recordemos que r significa en todo momento el radio de Schwarzschild. Así, si medimos la longitud L de nuestra esfera, mediante este sencillo proceso obtenemos que $r_1 = 695\,980$ Km. Mediante el mismo proceso, creamos una nueva esfera imaginaria conteniendo a la anterior pero que resulte poseer radio un kilómetro mayor, esto es $r_2 = 695\,981$ Km. Mas nosotros, como científicos toscos e inseguros del método, deseamos cerciorarnos de que las esferas han sido correctamente construidas y nos disponemos a comprobar con la forma de medir de la que disponemos, la métrica, que efectivamente ambas esferas distan un kilómetro entre sí. Se puede imaginar el lector la sorpresa que nos vamos a llevar. Vamos a ver el cálculo con detalle.

Consideremos pues en el modelo la “línea recta” que une $r_1 = 695\,980$ hasta $r_2 = 695\,981$ en dirección radial, o sea, que la curva $\alpha : [r_1, r_2] \rightarrow P \times_r \mathbb{S}^2$ dada por $\alpha(u) = (t_0, u, \theta_0, \varphi_0)$. Es claro que $\alpha'(u) = (0, 1, 0, 0)$. De esta forma, como α es tem-

poral apuntando hacia el futuro, la distancia espacial entre r_1 y r_2 será simplemente,

$$L_{r_1}^{r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{g(\alpha', \alpha')} du = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r - 2M}} dr$$

Si hacemos el cambio de variable $r = z^2$ para el que $dr = 2z dz$ y los límites de integración $z_1 = \sqrt{r_1}$ y $z_2 = \sqrt{r_2}$ entonces a integral anterior quedaría como sigue,

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{2z^2}{\sqrt{z^2 - 2M}} dz = \left[z\sqrt{z^2 - 2M} + 2M \ln |z + \sqrt{z^2 - 2M}| \right]_{z_1}^{z_2}$$

Si reemplazamos los términos por sus correspondientes valores, $M = M_{sol} = 1\,477$ Km, $z_1 = \sqrt{695\,980} \approx 834,2542$ y $z_2 = \sqrt{695\,981} \approx 834,2548$, computamos que,

$$L_{r_1}^{r_2} = \left[z\sqrt{z^2 - 2\,954} + 2\,954 \ln |z + \sqrt{z^2 - 2\,954}| \right]_{834,2542}^{834,2548} = 1,001152$$

Por lo tanto ambas esferas no están separadas por un kilómetro como nosotros pretendíamos conseguir, ¡sino por 1,001152 kilómetros, unos metros más de lo previsto! Ciertamente que no es una distancia enorme, mas recordemos los comentarios de secciones anteriores respecto a la densidad de los cuerpos gravitatorios, realmente el Sol no es un cuerpo muy denso pues pese a su enorme masa, también posee un volumen inmenso por lo que como este ejemplo pone de manifiesto, no es capaz de causar una deformación realmente estridente.

Nuevamente, esta curiosa peculiaridad del espacio-tiempo se debe a la curvatura (en este caso a la del espacio). Concluimos que de manera similar a lo que ocurría con el tiempo, en las cercanías del punto de atracción las distancias se “estiran”. Si nosotros fuéramos seres privilegiados que pudieran “salirse” del universo y contemplarlo en cuatro dimensiones desde fuera, lo que veríamos es que en las proximidades de la estrella el espacio-tiempo se curva como se aprecia en la figura siguiente.

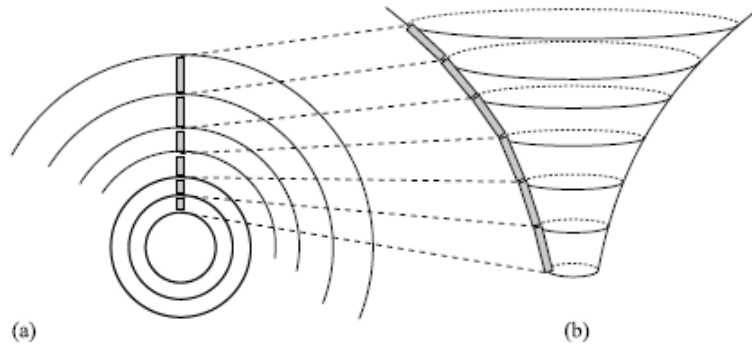


Figura 1.6: Curvatura de la parte espacial del espacio-tiempo de Schwarzschild. Nosotros vivimos en (a), pero si pudiésemos salir fuera y mirar en perspectiva veríamos (b).

Ahora que ya nos vamos familiarizando con el nuevo modelo y percatándonos de sus idiosincrasias, somos ya bastante conscientes de que a la parte espacial del espacio-tiempo de Schwarzschild le ocurre una cosa que lo diferencia completamente del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 en el que ocurren los eventos en la mecánica clásica y es que los fenómenos, las mediciones de espacio y tiempo que realizamos dependen del punto en el que nos encontremos. Retomando simplemente el ejemplo anterior nos percatamos que la diferencia entre los radios de las esferas en torno al Sol dependía de la proximidad al Sol que tuvieran las mismas, pues el resultado que hemos obtenido habría sido menor en tanto que hubieran estado más alejadas del Sol. Ésto en el espacio euclídeo no ocurre, una barra de un metro de longitud medirá un metro en el origen o en cualquier otro punto.

Por tanto, en el espacio-tiempo de Schwarzschild existen diversos mecanismos, ya sea medir longitudes, contabilizar tiempos...etc, que “desde dentro del espacio” permiten diferenciar entre un punto u otro. Esta propiedad en el espacio euclídeo no se da y tiene que ver con el hecho de que en este espacio la curvatura es constante y nula. Matemáticamente, esta situación se expresa mediante la siguiente definición que podemos realizar sin desviar la atención del marco en el que nos encontramos, en el ámbito de la geometría *semi-riemanniana* (en particular de la geometría de Lorentz).

Definición 1.2.4. *Decimos que una variedad semi-riemanniana (M, g) es homogénea si para cada dos puntos $p, q \in M$ existe una isometría global $F : M \rightarrow M$ de forma que $F(p) = q$.*

O sea, que en una variedad homogénea es imposible, desde dentro de la propia variedad distinguir dos puntos desde el punto de vista métrico. El espacio \mathbb{R}^n con la métrica euclídea $dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ (espacio euclídeo) es un ejemplo de variedad homogénea pues para cada dos puntos, basta tomar la translación que lleva uno a otro para obtener una isometría global en las condiciones de la definición 1.2.4.

Sin embargo, cuando consideramos la variedad de Lorentz que hemos estado estudiando a lo largo de esta sección, el espacio-tiempo de Schwarzschild, en algunas ocasiones no es posible encontrar tal isometría entre dos puntos. Por ejemplo, si consideramos dos puntos con distinta coordenada radial (distinto radio de Schwarzschild), es imposible que exista una isometría global entre ellos pues como hemos visto, la curvatura del modelo depende de la distancia radial a la estrella a la que se encuentren los puntos. Por lo tanto, puntos con coordenada radial distinta tendrán curvatura distinta. Dado que las isometrías conservan la curvatura, no podría existir una isometría entre estos dos puntos. Con este razonamiento heurístico nos hacemos a la idea de que el espacio-tiempo de Schwarzschild no es homogéneo.

Esta carencia de homogeneidad causada por la curvatura será la clave cuando estudiemos la relatividad que hay en el GPS, pues como explicaremos con detalle en la próxima sección, el funcionamiento de esta tecnología se basa en el tiempo de relojes situados a distintas alturas, uno en un dispositivo en la superficie de la Tierra y otro en un satélite. Como el modelo que emplearemos para modelar el espacio-tiempo en torno a la Tierra será el de Schwarzschild, que no es homogéneo, los puntos donde están el dispositivo y el satélite son métricamente diferentes en el sentido de que las longitudes o

los tiempos se medirán de forma diferente a causa de la no-homogeneidad. Necesitaremos tener en cuenta esta importante condición en toda nuestra labor.

Por último, mencionemos que aunque nuestro modelo no es homogéneo sí que es tremendamente rico en isometrías por el amplio número de simetrías que contiene. Ciertamente, lo que estropea la homogeneidad de este espacio-tiempo es la coordenada radial r , pues para el resto siempre existen isometrías. Esto tiene que ver con las imposiciones físicas al modelo. Recordemos que era estático, por lo tanto, cualquier traslación sobre el eje temporal no afectará al resto del espacio y por lo tanto siempre se puede encontrar una isometría entre dos instantes de tiempo. Análogamente, dado que el modelo era simétricamente esférico, cualquier rotación en torno al origen, se comportará también como una isometría (la métrica no varía en distintos ángulos) y por lo tanto podemos encontrar homogeneidad en las hipersuperficies r constante.

1.2.5. ¡Dos espacio-tiempos!

Hasta el momento todo perfecto, pues hemos visto que la métrica se corresponde de forma muy directa a lo que debería ser nuestra primera intuición de un universo con una única estrella y nos hemos entretenido un poco jugando a medir distancias y tiempos en el modelo. Ahora bien, no hemos estudiado en toda la profundidad que merece la función de Schwarzschild,

$$h(r) = 1 - \frac{2M}{r}$$

Aunque como dijimos, la solución de Schwarzschild sólo modela el espacio-tiempo en el exterior de la estrella, se pueden dar situaciones en las que el radio de la misma sea muy pequeño y la coordenada radial pueda ser próxima al origen, o al menos desde el punto de vista teórico puede ser una situación de interés. Qué ocurre pues cuando $r \rightarrow 0$. Pues la situación es que obviamente que $h(r) \rightarrow -\infty$. Es decir, la parte temporal de la métrica se hace infinita y la espacial se anula, nos encontramos por tanto con una singularidad esencial. Básicamente, la interpretación física de este fenómeno matemático es que la diferencia temporal entre un reloj situado cerca del punto de atracción $r = 0$ y otro en el exterior, tiende a hacerse tan grande como se desee, mientras para el reloj exterior han pasado apenas unos segundos, por ejemplo, para el reloj próximo al punto de atracción pueden haber transcurrido cientos de miles de años como veíamos en la sección 1.2.4. Mas por el momento, remarquemos que esta situación sólo tendría sentido si la estrella quedara reducida a un mero punto, o sea, su densidad se hiciera infinita, cosa que de momento no hemos contemplado.

Sin embargo hay otra patología quizá más peculiar e interesante, que es lo que le ocurre a la métrica de Schwarzschild cuando la coordenada radial se aproxima al punto $2M$.⁶

Una primera cosa que es clara es que $h(2M) = 0$, por lo tanto, en la métrica $-h(r)dt^2 + h(r)^{-1}dr^2 + r^2d\varphi^2$, cuando $r = 2M$ la parte temporal se anula mientras que la radial

⁶¡Cómo que algo que mide distancia como r se puede aproximar a algo que mide masa como $2M$! Recuérdese que estamos trabajando en unidades geométricas, en las que tanto r como M se miden en segundos, por lo tanto tiene perfecto sentido afirmar que un radio se aproxima a una masa.

se hace infinita. Aquí es donde la métrica de Schwarzschild se olvida por completo de la mecánica clásica y ofrece una perspectiva completamente nueva. Recordemos que en la sección 1.2.4 habíamos visto que,

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} \approx \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \xrightarrow{r \rightarrow 2M} 0$$

O sea, que cuando r es próximo a $2M$ para que el cociente anterior se aproxime a cero el tiempo de Schwarzschild debe hacerse infinito. Esto significa que por ejemplo, para una partícula cayendo hacia el punto de atracción, el tiempo de Schwarzschild se hace infinito, es decir, desde el punto de vista de este modelo, nunca llegaría a atravesar el punto $r = 2M$ ¡incluso aunque la distancia que tiene que recorrer es claramente finita! Nosotros que estamos mirando el suceso desde el infinito y cuantificando t , pensaríamos que la partícula se ha quedado prácticamente parada muy cerca de $r = 2M$. Sin embargo, para la partícula, cuyo reloj es el tiempo propio, nada de esto habría ocurrido, pues su reloj le indica que alcanzará el punto en un tiempo finito y continuará su avance hacia la estrella.⁷

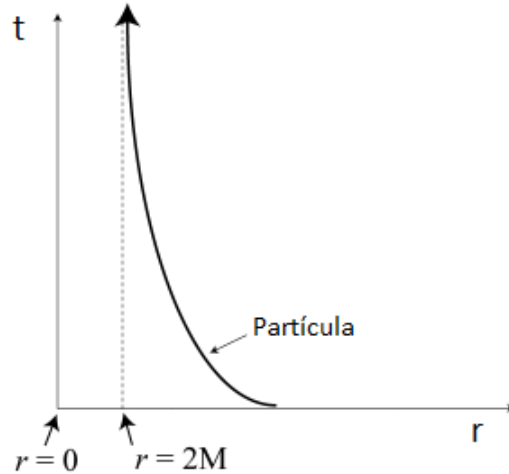


Figura 1.7: Partícula en caída libre en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Como vemos, hemos tropezado con la primera laguna que el modelo de Schwarzschild aparentemente no puede explicar. Lo que ocurre es que dado que la métrica presenta una singularidad en $r = 2M$ y el signo de la función de Schwarzschild $h(r)$ cambia según sea $r > 2M$ ó $r < 2M$, la métrica queda dividida en dos métricas distintas según la zona, por lo que en realidad surgen dos espacio-tiempos.

De esta forma, el espacio-tiempo de Schwarzschild queda “partido” en dos regiones. Tendremos pues una zona exterior que llamaremos $P_I = \{(t, r) \in P : r > 2M\}$ y otra interior $P_{II} = \{(t, r) \in P : 0 < r < 2M\}$, ambas equipadas con la métrica $-h(r) dt^2 + h(r)^{-1} dr^2$. El producto torcido de estos dos semiplanos con la \mathbb{S}^2 da lugar a dos espacio-tiempos con nombre propio:

⁷Un cálculo del tiempo propio aquí requeriría del estudio de las geodésicas y órbitas de Schwarzschild que por cuestiones de contenido omitimos. Véase [2, chapter 13].

Definición 1.2.5. *Dada una estrella de masa M , tenemos:*

- *El producto torcido $N = P_I \times_r \mathbb{S}^2$ es denominado exterior de Schwarzschild de masa M .*
- *El producto torcido $B = P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ es denominado agujero negro de Schwarzschild de masa M .*

Con estas dos definiciones arreglamos más o menos el asunto correspondiente a las métricas. De hecho, el agujero negro de Schwarzschild B como bien indica su nombre, fue el primer y más sencillo modelo para un agujero negro que se dio a principios del siglo XX. Como por 1916 este tipo de objetos eran desconocidos y el agujero negro de Schwarzschild tenía unas propiedades tan peculiares, la aceptación de este modelo fue ampliamente criticada aunque supuso un hito en el posterior desarrollo de teorías físicas para los agujeros negros.

Pero, pese a que hemos dado una respuesta al problema del punto $r = 2M$, todavía queda un interrogante por resolver, ¿qué ocurre con el tiempo de Schwarzschild? Ya hemos visto que se hace infinito por lo que desde el punto de vista de Schwarzschild es imposible explicar cómo cae un objeto hacia el agujero negro. Este es un asunto un tanto peliagudo que como poco debería haber sido tomado en consideración en 1916. Entonces, ¿por qué en su momento no se le prestó la atención que merecía y se analizó con todo detalle?

La respuesta es muy simple. Como hemos dicho, cuando Schwarzschild publicó su modelo en 1916 todos los cuerpos gravitatorios conocidos por aquel entonces, poseían un radio r^* muy superior al punto de interés $r = 2M$, es decir, sólo se conocían objetos poco densos para los que $2M \ll r^*$. Por tanto, nunca se pensó que algo podría acercarse al punto de la singularidad pues para Schwarzschild sólo tenía sentido lo que ocurría en el exterior de la estrella. Pensemos por ejemplo en el Sol, para el que $r^* = 696\,000\text{ Km}$ y $r = 2M = 2,95\text{ Km}$, nada alcanzará nunca ese punto.

Sin embargo, en la década de los 40, el avance en las técnicas de observación astronómica permitió ir descubriendo objetos tales como estrellas de neutrones o agujeros negros, mucho más densos que los que se conocían en 1916, es decir, objetos con una masa mucho mayor y un volumen menor. Por ejemplo en el caso de las estrellas de neutrones $r^* \approx 8M$. A partir de aquel momento, era preciso tener en cuenta situaciones próximas a $r = 2M$, e incluso escenarios en los que $r < 2M$. Se hacía patente que el agujero negro de Schwarzschild, deducido pura y matemáticamente de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, más que una simple curiosidad matemática era algo real y tangible con lo que los modelos habrían de empezar a lidiar.

Además, muchas son las particularidades de este agujero negro B que se pueden probar coinciden con la idea a nivel intuitivo que se puede tener de un agujero negro. Por ejemplo, se puede demostrar que una vez que una partícula se encuentra en B , es decir, ha atravesado $r = 2M$, precisaría una velocidad estrictamente mayor que la de la luz para escapar de B y volver al exterior N . Como en nuestro modelo nada puede viajar más rápido que la luz, es entonces imposible que nada escape del agujero negro. Esto motiva el nombre con el que denominamos la frontera entre B y N .

Definición 1.2.6. *En el modelo de Schwarzschild, el hiperplano $r = 2M$ que separa N y B se denomina horizonte de sucesos o punto de no retorno.*

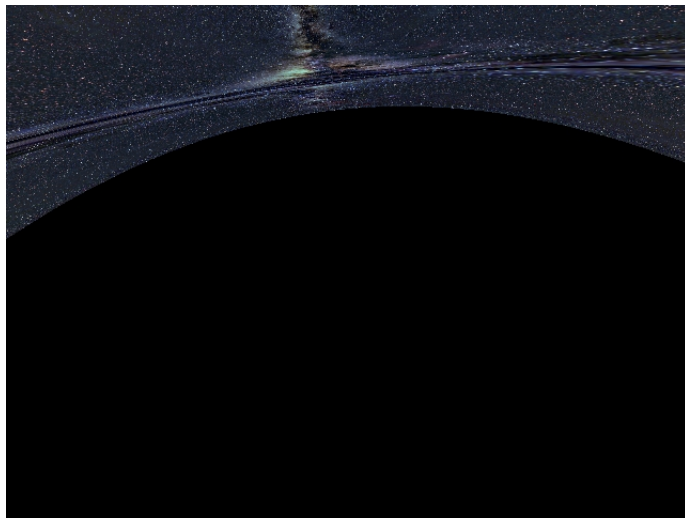


Figura 1.8: Simulación del horizonte de sucesos en las proximidades de B .

8

No obstante, para un correcto estudio de este tipo de objetos es preciso buscar un cambio de coordenadas que solucione el mencionado problema del tiempo de Schwarzschild. Este cambio de coordenadas fue propuesto por Kruskal aunque nosotros no entraremos en su descripción.

Los agujeros negros, por su enorme densidad magnifican los efectos relativistas en sus proximidades. Cuando analicemos la relatividad del GPS veremos cómo influyen las distintas posiciones radiales respecto al agujero negro en su funcionamiento.

⁸Imagen obtenida de “Journey into a Schwarzschild Black Hole”.

Capítulo 2

GPS y Teoría de la Relatividad

Hasta el momento hemos estudiado en profundidad el modelo de Schwarzschild y nos hemos familiarizado con algunas de sus particularidades haciendo énfasis en que quizá habrían de ser consideradas en el estudio sobre el GPS que posteriormente íbamos a realizar, dado que en su funcionamiento, lo más importante es la medición del tiempo que tarda una onda en llegar desde el satélite hasta nuestro dispositivo. Llegó el momento de ver por qué ésto es tan importante y estudiar en detalle cómo influye la teoría de la relatividad en la operatividad del GPS.

Para ello, en este capítulo comenzaremos introduciendo el proceso geométrico con el que el GPS halla la posición para seguidamente, con toda la motivación pertinente, estudiar en detalle cómo afecta la métrica de Schwarzschild a su funcionamiento.

2.1. Sistemas de posicionamiento global (GPS)

Antes de continuar y por fijar la terminología, remarquemos que nos referiremos al “GPS” como el conjunto de satélites, dispositivos, puntos de control... etc que conforman todo el sistema, en contra de lo que estamos acostumbrados a hacer en la vida cotidiana en la que “un GPS” es el aparato en sí que empleamos para ubicar nuestra posición. Aquí, repetimos, el GPS es un todo. Ésto se hace así porque en realidad existen varios Sistemas de Posicionamiento Global aparte del GPS, como el “GLONASS” ruso o el “Galileo” europeo, aunque por lo que a nosotros concierne, sus principios de funcionamiento son los mismos.

El GPS (*Global Positioning System*), es un sistema de radionavegación consistente en una constelación de 24 satélites orbitando alrededor de la tierra, colocados en seis planos orbitales, con cuatro satélites por plano, de forma que desde cualquier punto del planeta haya al menos cuatro satélites visibles.¹ Cada satélite cuenta con dos relojes atómicos de extrema precisión (desfase de 1 segundo cada 30 000 años) y sus órbitas tienen un período de medio día sideral (11h, 58min) lo cual permite estimar su posición exacta en cada instante del día, hecho crucial para el correcto funcionamiento del GPS. El sistema fue instaurado completamente en 1995 por el Departamento de Defensa de los Estados

¹Esto no suele incurrir en ningún problema pues el número de satélites visibles suele ser ocho.

Unidos y en principio, tenía fines militares. Desde sus inicios se permitió su uso público, eso sí, con una versión no tan precisa que incluía ruido para que el error cometido fuera mayor. Desde el año 2000, se permite el acceso abierto a la versión con mayor número de prestaciones, aunque el gobierno de EE.UU se reserva el derecho de limitar la versión sin errores a los ciudadanos en caso de guerra o similar.

Además del segmento espacial constituido por los satélites, el GPS goza de un conjunto de cinco estaciones de control ubicadas en la Tierra encargadas de hacer un seguimiento y predicción de las órbitas de los satélites, controlar los relojes y diversas tareas de mantenimiento. El último componente del GPS es el segmento del usuario, formado por los dispositivos receptores que cualquier persona que haya comprado un dispositivo GPS posee. Con todos estos elementos, el GPS determina la posición, altura, y velocidad en tiempo real y con una gran precisión.

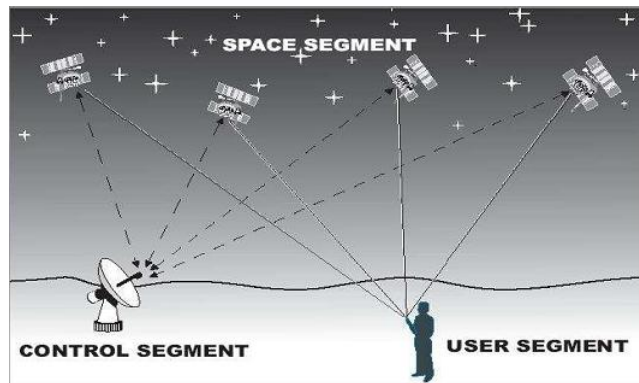


Figura 2.1: Segmentos principales del GPS.

2

En el sobre-informado mundo en el que vivimos, los avances científicos y tecnológicos se están desarrollando a tal velocidad, que en la mayoría de los casos, difícilmente pueden ser asimilados y más aún comprendidos por la sociedad en general. Quizá el GPS es un ejemplo de esto, pues por historia y necesidad, constituye uno de los mayores hitos de la comunicación y el transporte, ya que a lo largo de la Historia se ha buscado siempre el mejor método de orientarse y en algunos casos, esta forma podía marcar la diferencia entre el éxito de la civilización o su desaparición. El hecho de que hoy en día poseamos una tecnología tan sencilla de emplear y a su vez tan útil supone una gran ventaja.

2.1.1. Método de triangulación en el GPS

Esta primera sección está dedicada a exponer de un modo casi podríamos decir que divulgativo, el proceso que sigue el GPS para determinar la posición de un objeto, con el fin de motivar el posterior uso de la teoría de la relatividad en su funcionamiento, objetivo central de este capítulo.

²Imagen obtenida de Geog 258: Maps and GIS February 15, 2006 (Wed) Global Positioning System (GPS) Reading: Chapter 14.

Como sabemos, un dispositivo GPS colocado en la tierra (un *smartphone* por ejemplo), permite calcular la posición en tiempo real con una precisión de unos pocos metros. ¿En qué consiste este funcionamiento? La idea se basa en el método geométrico de triangulación.

El método de triangulación permite determinar la posición de un punto en el espacio, conociendo las distancias de dicho punto a otros tres puntos, cuyas coordenadas sí que conocemos. Lo que hace el dispositivo de mano es determinar con una gran precisión la distancia que le separa de al menos tres satélites y empleando el método mencionado, calcula la posición. La forma de proceder en abstracto es la siguiente.

Supóngase un punto $B = (x, y, z)$ en el espacio de coordenadas desconocidas. Así mismo sean S_1, S_2, S_3 tres puntos fijos del espacio cuyas coordenadas sí que conocemos y sean $d_i = d(B, S_i)$, $i = 1, 2, 3$ las distancias del punto desconocido a los tres puntos fijos que por hipótesis, sí que son conocidas. Se quiere determinar (x, y, z) .

Si trazamos las tres esferas de centro S_i y radio d_i , es claro que intersecarán en al menos un punto y evidentemente, ese punto común a las tres circunferencias, será B . En otras palabras, si las coordenadas de los puntos conocidos son $S_i = (x_i, y_i, z_i)$, lo que tenemos son tres ecuaciones de circunferencias $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = d_i^2$ para $i = 1, 2, 3$, o bien en términos de la norma, $\|B - S_i\|_2^2 = d_i^2$. La solución al sistema no-lineal que forman, nos dará al menos de manera formal, las coordenadas del punto B buscado³ como ilustra la imagen siguiente.⁴

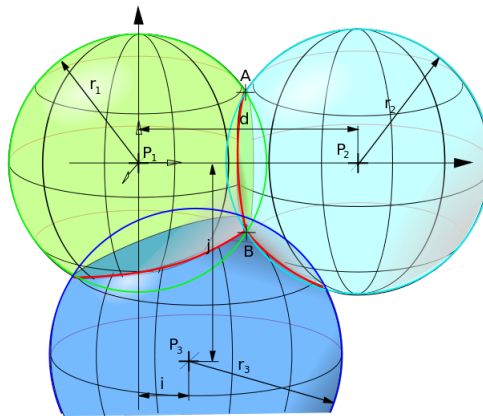


Figura 2.2: Método de triangulación en el espacio.

La extrapolación ahora de este método geométrico a la realidad para calcular la posición de un punto es ya evidente, pues en teoría, bastaría calcular de algún modo las distancias entre el dispositivo y tres de los satélites y que mediante algún cálculo, el

³El lector intrépido sabrá que al ser de segundo grado, el sistema anterior puede proporcionar dos soluciones, por lo que en realidad tendríamos dos posibles ubicaciones para B . ¿Cómo evitar esta ambigüedad en la práctica con el GPS? Paciencia, siga leyendo este trabajo.

⁴Imagen obtenida de *Wikipedia*.

dispositivo resolviera el sistema no lineal anterior y devolviese la posición. Parece todo muy fácil, mas no obstante es en el paso a la realidad, donde las mediciones no son perfectas, cuando comienzan los problemas.

2.1.2. La precisión de los relojes

El vínculo entre GPS y Teoría de la Relatividad, surge precisamente de la importancia que tienen las mediciones de tiempo en el proceso en el que el sistema calcula la posición. Como hemos comentado, en esencia para poder determinar la posición mediante un dispositivo de este tipo, lo que se necesita conocer es la distancia a los satélites. Vamos a ver con detalle cómo se calcula.

Olvidémonos por el momento del espacio-tiempo de Schwarzschild, por lo que aquí t no representará el tiempo de Schwarzschild sino el tiempo clásico al que estamos acostumbrados. En la práctica, una forma usual de proceder para aplicar el método de triangulación sería calcular el tiempo Δt que tarda una onda de radio emitida por el satélite en llegar al receptor. Así, suponiendo que la velocidad de propagación de las ondas es constante igual a la de la luz, tendremos evidentemente que la distancia entre el dispositivo y el satélite es $d = c \cdot \Delta t$. Todo el problema se reduce a determinar Δt . Vamos a ver de forma un tanto heurística cómo se hace.

Sea un dispositivo colocado en algún punto de la superficie de la Tierra, que desea calcular su posición mediante el método de triangulación. Dicho dispositivo lo que hace es enviar una señal al satélite del que quiere conocer su distancia. Seguidamente, cuando el satélite detecta que el dispositivo ha establecido contacto con él, devuelve una señal tan compleja que es casi aleatoria, por lo que recibe el nombre de código pseudo-aleatorio. En dicha secuencia, el satélite codifica la información que permite predecir su posición orbital esperada en los próximos instantes, y gracias al reloj atómico que incorpora, el tiempo extremadamente exacto de emisión de la señal, digamos T_S . Cuando el dispositivo terrestre recibe esta secuencia, la señal tendrá un cierto desfase ζ , por lo que cuantificará el intervalo necesario para que las señales se alineen y obtendrá así el tiempo de llegada de la señal $T_U = \zeta + T_S$, y por tanto es capaz de determinar $\Delta t = T_U - T_S = \zeta$ y con esto la distancia $d = c \cdot \Delta t$.

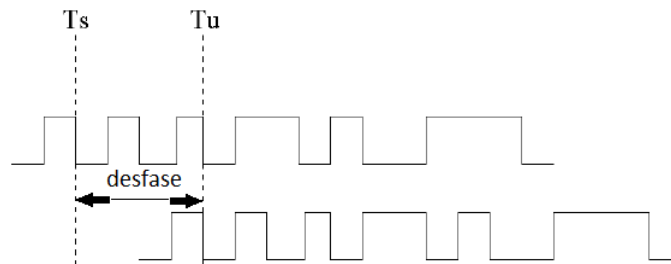


Figura 2.3: Desfase entre señal emitida y señal recibida.

Ahora bien, hemos mencionado que el satélite porta un reloj atómico de gran precisión por lo que no hay incertidumbre en el valor T_S de emisión de la señal, pero obviamente, el dispositivo terrestre no puede llevar consigo un reloj atómico perfectamente sincronizado con el satélite, entre otras cosas porque costaría 100 000 euros y sería un poquito menos manejable que un pequeño dispositivo GPS habitual. Así que obviamente el tiempo T_U que mide el dispositivo sólo puede ser tan preciso como pudiera permitir un reloj usual. Si por ejemplo tuviera un error de precisión de apenas medio segundo entre el reloj del receptor y el del satélite, dado que la señal se propaga aproximadamente a una velocidad de $3 \cdot 10^8$ m/s, el error en la distancia medida sería de 150 000 kilómetros, por lo que las esferas no intersectarían en un punto y tendríamos una enorme zona gris de posibles posiciones para el dispositivo, lo cual por razones obvias es una cualidad del todo indeseable para el GPS.

Queda patente pues que no podemos depender de la precisión del reloj del dispositivo de mano para realizar nuestros cálculos. De aquí surge la gran diferencia entre el método de triangulación antes explicado y lo que ocurre en la realidad. Cuando todas las mediciones son perfectas, las tres circunferencias intersectan a la perfección y no hay ningún problema, pero cuando hay desfases y ruidos, ésto no ocurre, sino que tenemos una zona de posibles posiciones finales para el dispositivo de mano como se aprecia en la imagen en la que la zona comprendida entre las tres circunferencias es la zona gris de posibles ubicaciones para el dispositivo. Obviamente si esta zona se hace muy grande, el grado de incertidumbre en el resultado final aumenta y el GPS se hace impreciso.

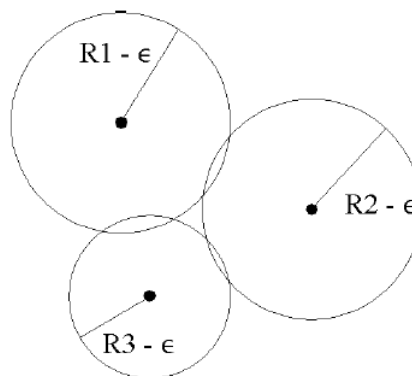


Figura 2.4: Ilustración 2D del método de triangulación con imprecisiones.

Afortunadamente este farallón es sorteable en tanto que realicemos una cuarta medición a otro satélite. Es decir, si bien tres mediciones exactas determinan la posición mediante triangulación, cuatro mediciones imperfectas también lo pueden hacer. Además, esta forma de proceder posee una ventaja añadida, y es que vamos a obtener el tiempo exacto en el que se recibe la señal, por lo que en cierto sentido, un dispositivo GPS que se puede adquirir por unos 100 euros, es un reloj atómico en sí mismo.

La clave es que antes, en el método de triangulación puramente geométrico, teníamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Ahora, al realizar una cuarta medición vamos a añadir una ecuación más, con una nueva incógnita t_U que será el desajuste del

reloj del receptor con respecto a lo que sería su tiempo exacto medido por un reloj atómico que llevase encima. Resulta así un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Como vemos, determinando esta incógnita podemos conocer el desajuste del reloj del aparato receptor y por tanto el instante exacto en el que recibió la señal.

De esta forma, el tiempo impreciso que el dispositivo terrestre mide es $T'_U = T_U + t_U$, el tiempo exacto de llegada T_U (que no conocemos) más la imprecisión o desfase t_U (que tampoco conocemos). Por otro lado, lo que sí se conoce sin incertidumbre es el tiempo de emisión de la onda desde el satélite, T_S , pues esta información es portada por la onda y fue determinada por un reloj atómico extremadamente preciso. Por lo tanto, aunque la distancia real entre el dispositivo terrestre y el satélite sea $d = c \cdot (T_U - T_S)$, la cual no podemos aspirar a calcular, para el dispositivo GPS, que no goza de poder conocer T_U la distancia aparentemente será,

$$\hat{d} = c \cdot (T'_U - T_S) = c \cdot (T_U + t_U - T_S) = c \cdot (T_U - T_S) + c \cdot t_U$$

Es decir, $\hat{d} = d + c \cdot t_U$ donde $\hat{d} = c \cdot (T'_U - T_S)$ sí que es conocida pues recordemos que es medida por el dispositivo de mano. La siguiente imagen es un esquema del proceso.

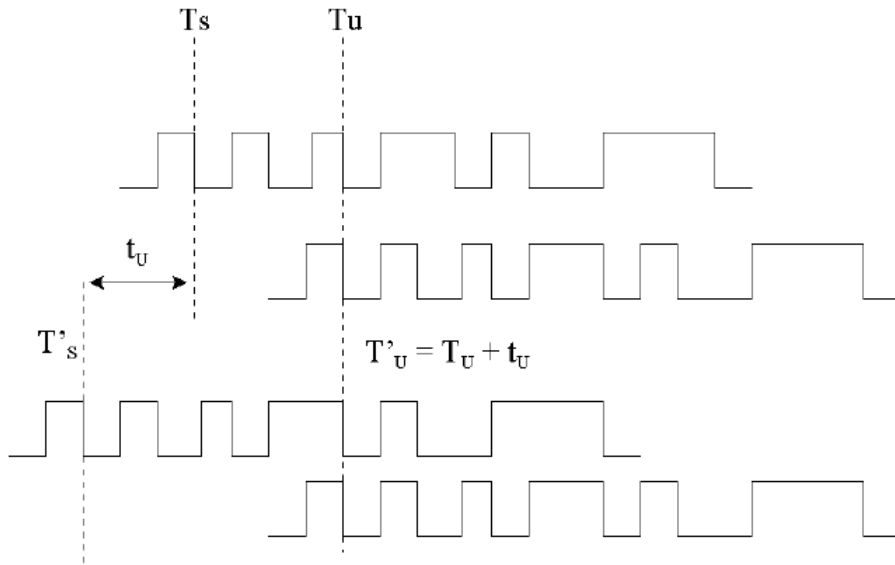


Figura 2.5: Señales teóricas y reales recibidas por el receptor.

De esta forma, si como en el método de triangulación llamamos B al punto de coordenadas conocidas y S_i a la posición de los satélites en el momento de la recepción de la onda, la cual se conoce pues es información que porta consigo la propia onda, teniendo en cuenta que $\|B - S_i\|_2 = d_i$, $i = 1, 2, 3$ obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:⁵

$$\hat{d}_i = \|B - S_i\|_2 + c t_U \quad i = 1, 2, 3, 4$$

⁵La resolución de este sistema no-lineal se realizaría mediante métodos de cálculo numérico que este documento no recoge pues se alejan del contenido principal del mismo que es la teoría de la relatividad. Remitimos al lector interesado a [6]

O en forma desarrollada,

$$\hat{d}_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} + c t_U \quad i = 1, 2, 3, 4$$

donde las incógnitas son x, y, z, t_U, c la velocidad de la luz en unidades convencionales y \hat{d}_i la distancia hipotética entre el dispositivo terrestre y cada satélite. Resolviendo este sistema obtendríamos inmediatamente las coordenadas del dispositivo de mano.

Una crítica razonable a esta forma de proceder podría ser que en principio, la incógnita t_U introducida, no tendría por qué ser la misma para las cuatro mediciones, es decir, que la imprecisión del reloj del dispositivo de mano podría variar para cada medición y lo que entonces tendríamos sería una colección $\{t_U^i\}_{i=1}^4$ de imprecisiones. Sin embargo, como en el funcionamiento práctico del GPS, las mediciones a los satélites se realizan de forma simultánea, tiene sentido suponer que el error del reloj será el mismo para los cuatro satélites.

Observación 2.1.1. *Aunque para fijar ideas nosotros hemos trabajado en coordenadas cartesianas, en realidad el GPS trabaja en esféricas dado que devuelve latitud, longitud y altitud. Para obtener el resultado en estas coordenadas simplemente habría que llevar a cabo el correspondiente cambio. Nosotros omitimos aquí la cuenta pues se desvía de los intereses de este estudio.*

Retomando los comentarios sobre la resolución del sistema, también es interesente remarcar que como en la mayoría de las ocasiones suelen haber más de cuatro satélites visibles, el GPS realiza más de cuatro mediciones, por lo que normalmente el sistema de ecuaciones no-lineales que hemos obtenido está sobredeterminado y para su resolución se emplean métodos de mejor aproximación del análisis funcional.

2.2. Teoría de la relatividad y GPS

Con la idea general del funcionamiento del GPS, ha quedado patente que la precisión que necesitan los relojes que intervienen en su funcionamiento ha de ser extrema. Pero el GPS no sólo necesita precisión en el reloj del dispositivo de mano ubicado en la Tierra, si no que de algún modo, también necesita que los relojes que emplea simultáneamente estén muy bien sincronizados. Esto es así por muchos motivos, uno de los más importantes es que para poder aplicar el método de triangulación con éxito, además de la distancia a ellos es preciso también conocer la posición de los satélites en el instante en que se recibe la señal. Esta posición está monitorizada pues en principio las órbitas de los satélites han sido predichas, pero para que esta monitorización tenga éxito, se debe tener muy claro en qué instante de tiempo se encuentra el satélite cuando la señal es recibida aquí en la Tierra. Ahora bien, los relojes del dispositivo y del satélite se encuentran a distintas alturas, por lo que según el modelo de Schwarzschild, sus tiempos propios serán distintos con respecto al tiempo de Schwarzschild t . Así que si el GPS precisa que los relojes estén sincronizados, habrá que tener en cuenta estas predicciones teóricas en los cálculos, al menos para conocer si influyen de una forma importante o no. Como el GPS se basa en sincronizaciones muy precisas, aunque los resultados sean pequeños, es probable que debamos tenerlos en cuenta. Así mismo, tanto el movimiento del satélite como el de rotación

de la Tierra, sacan a colación los diminutos efectos de la relatividad especial, que de nuevo, en aras de obtener la máxima precisión entre los relojes, hemos de tomar en consideración.

El objetivo de esta sección es el de aplicar el modelo de Schwarzschild con el que hemos estado trabajando para obtener una perfecta sincronización entre los relojes que emplean los satélites del GPS y el que emplea el dispositivo de mano situado en la Tierra. ¿Cuán grande es esta desincronización? ¿Realmente unos pocos nanosegundos estropean el funcionamiento del GPS? Llegó el momento de dar respuesta a estos interrogantes.

2.2.1. Relojes estacionarios

Ciertamente, la Tierra es un cuerpo que rota y no perfectamente esférico, por lo que estrictamente hablando, el modelo de Schwarzschild no describirá el espacio-tiempo en un entorno próximo a nuestro planeta, eso sin tener en cuenta que no es un objeto aislado, pues está sujeto a la acción gravitatoria del Sol y de la Luna. Sin embargo, la Tierra rota lentamente y su superficie es bastante esférica, por lo que el modelo de Schwarzschild se comporta como una buena aproximación para nuestros propósitos y es por ello que lo elegimos.⁶

Así, consideremos el espacio-tiempo exterior de Schwarzschild $N = P_I \times_r \mathbb{S}^2$ como el modelo del universo de masa $M = M_{tierra}$ (únicamente la Tierra) con la métrica de Schwarzschild,

$$g = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

donde $M = M_{tierra} = 4,44 \cdot 10^{-3}$ metros es la masa de la Tierra en unidades geométricas aquí y a lo largo de todo el estudio.

Como hemos explicado, tenemos que determinar la discrepancia entre el tiempo propio del satélite y el tiempo propio del dispositivo terrestre, pues en principio, por lo que hemos estudiado a nivel teórico, sabemos que son diferentes. Para este cálculo, añadimos otra suposición más que posteriormente será debidamente justificada y es que ambos objetos se mueven a una altura fija del centro de la Tierra (la coordenada radial r será constante). Esto en nuestra métrica, se traducirá en que $dr = 0$ (no habrá variación de la coordenada radial). Así, si consideramos la expresión de la métrica con esta nueva suposición tendremos que,

$$g = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - r^2 d\phi^2 \quad (2.1)$$

En el lenguaje que hemos estado manejando, si queremos tratar al dispositivo terrestre y al satélite como elementos del modelo relativista, sabemos que hemos de hacerlo

⁶Todas estas pequeñas discrepancias entre la realidad y el modelo teórico son las que hacen que la precisión del GPS no sea exacta, mas para aquél que no se fíe de las bondades del GPS adelantamos que es capaz de determinar la posición con un margen menor de 10 metros. En la sección 3 próxima analizaremos en detalle la precisión del GPS y todas las suposiciones iniciales quedarán justificadas por los resultados.

considerándolos como partículas materiales, es decir, curvas temporales apuntando hacia el futuro. Denotaremos a la partícula que modela el dispositivo terrestre mediante α y por β a la que modela el satélite. En realidad poco importa lo que estas curvas representen, ya sea un dispositivo, un satélite o una persona, lo único trascendental es que son puntos del espacio, que describen una trayectoria en el espacio-tiempo y que portan consigo un reloj, su tiempo propio.

Por lo tanto, consideramos directamente ambas curvas parametrizadas por tiempo propio τ_{tierra} para la primera y τ_{sat} para la segunda. Notar como obviamente los parámetros “tiempo propio” son distintos para cada una de las curvas, puesto que al reparametrizarlas por el arco no tienen por qué dar el mismo parámetro.

Para comenzar, querríamos saber cómo varían los tiempos propios τ_{tierra} y τ_{sat} con respecto al tiempo de Schwarzschild t . Como ahora sí que hay movimiento en la \mathbb{S}^2 causado por la rotación terrestre y del satélite, la fórmula del incremento entre $d\tau$ y dt que obtuvimos en la sección 1.2.4 no nos es válida.

Lo que hacemos entonces es dividir la última expresión de la métrica (2.1) que hemos obtenido de la métrica por el cuadrado del tiempo instantáneo dt^2 , lo que arrojará la siguiente fórmula,

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - v^2 \quad (2.2)$$

Aquí, $v = r d\phi/dt$ es la variación de la posición en la $\mathbb{S}^2(r)$ con respecto al tiempo de Schwarzschild por lo que tiene sentido definirla como la velocidad tangencial de la trayectoria de la partícula.

Así, la ecuación (2.2) aplicada al reloj del satélite considerando $d\tau_{sat}$ daría,

$$\left(\frac{d\tau_{sat}}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r_{sat}}\right) - v_{sat}^2$$

y seguidamente para el reloj situado en la Tierra considerando $d\tau_{tierra}$,

$$\left(\frac{d\tau_{tierra}}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r_{tierra}}\right) - v_{tierra}^2$$

donde v_{sat} y v_{tierra} son las velocidades tangenciales del satélite y del dispositivo terrestre respectivamente.

Ya tenemos los ratios entre incrementos en el tiempo propio e incrementos en el tiempo de Schwarzschild mas nosotros, lo que deseamos es la diferencia entre los tiempos propios de ambas partículas. ¿Cómo obtenemos esto? Pues la idea es, una vez hemos establecido la comparativa entre los tiempos propios y los tiempos de Schwarzschild para cada una de las partículas, comparar sus tiempos de Schwarzschild conjuntamente.

Dado que los tiempos de Schwarzschild son tomados simultáneamente desde la misma posición (el infinito) ambos incrementos de tiempo deben ser iguales, por lo que los incrementos en los tiempos propios han de mantenerse en la misma proporción, esto es, se debe verificar la igualdad,

$$\left(\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{tierra}}\right)^2 = \frac{1 - \frac{2M}{r_{sat}} - v_{sat}^2}{1 - \frac{2M}{r_{tierra}} - v_{tierra}^2} \quad (2.3)$$

En otras palabras, si $d\tau_{sat}$ y $d\tau_{tierra}$ siguen una cierta proporción con respecto a la misma magnitud dt , entonces $d\tau_{sat}$ y $d\tau_{tierra}$ deben mantener una relación proporcional a esa misma proporción cuando se relacionan entre sí.

La ecuación (2.3) muestra por tanto el factor de corrección que hemos de aplicar a los relojes para evitar la desincronización entre los mismos de la que hablábamos al comienzo de esta sección.

En principio (2.3) corrobora lo que podríamos suponer a priori empleando nuestros conocimientos de la métrica de Schwarzschild. Por un lado el reloj del satélite se atrasaría por el hecho de ser $r_{sat} > r_{tierra}$ y por otro, dado que $v_{sat} > v_{tierra}$ este atraso quedaría amortiguado en parte por el efecto de la relatividad especial, como reflejan los cuadrados de las velocidades que aparecen restando en la fórmula.

Para intentar determinar qué efecto relativista tiene más peso en la discrepancia final de tiempos lo que vamos a hacer es cuantificarlos por separado. Así vamos a empezar midiendo el efecto de la relatividad general, ignorando por completo el movimiento de la Tierra y del satélite. De esta manera si obviamos los términos de las velocidades, la ecuación (2.3) despejada quedará:

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{tierra}} = \left(1 - \frac{2M}{r_{sat}}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r_{tierra}}\right)^{-1/2}$$

Para continuar, podemos emplear la aproximación que se deduce de la famosa *desigualdad de Bernoulli*:

$$(1 + d)^n \approx 1 + nd, \quad \text{si } |d| \ll 1, \text{ y } |nd| \ll 1$$

Como veremos luego, el radio orbital de un satélite que orbita con medio día sideral de periodo es $r_{sat} \approx 26,6 \cdot 10^6$ por lo que $2M/r_{sat}$ es del orden de $3 \cdot 10^{-10}$. Análogamente $2M/r_{tierra}$ vuelve a ser del orden de 10^{-10} , por lo que estamos en condiciones de aplicar la aproximación antes mencionada en nuestra fórmula particular en cada uno de los factores que se están multiplicando, lo cual nos dará que:

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{tierra}} \approx \left(1 - \frac{M}{r_{sat}}\right) \left(1 + \frac{M}{r_{tierra}}\right)$$

Simplemente multiplicando llegamos a que:

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{tierra}} \approx 1 - \frac{M}{r_{sat}} + \frac{M}{r_{tierra}} - \frac{M}{r_{sat}} \frac{M}{r_{tierra}} = 1 + b$$

La constante b representa por tanto la discrepancia instantánea existente entre los tiempos propios de ambos relojes. Si dicha constante fuese nula, significaría que ambos relojes correrían de la misma forma y ningún efecto habría de ser considerado por parte de la teoría de la relatividad en el GPS. Sin embargo, cómputo directo empleando los datos dados en la tabla de la sección 1.2.1 nos da que $b \approx 5,3 \cdot 10^{-10}$ s. Este valor significa que por cada unidad de tiempo transcurrida en el dispositivo GPS terrestre, habrán transcurrido $5,3 \cdot 10^{-10}$ unidades de tiempo más en el satélite. En otras palabras, por cada incremento temporal $d\tau_{tierra}$, en el satélite ocurre un incremento temporal $d\tau_{sat} = (1 + 5,3 \cdot 10^{-10}) d\tau_{tierra}$. Por lo tanto, a lo largo de un día, es decir, cada 86 400 segundos el reloj del satélite se habrá atrasado respecto al terrestre unos 45 800 nanosegundos. En este tiempo, la luz recorrería casi catorce kilómetros, es decir, de no tener en cuenta los efectos de la relatividad general, en un sólo día de funcionamiento, el GPS indicaría la posición con un error de catorce kilómetros. Se hace evidente que la relatividad general es necesaria para corregir los defectos operativos del GPS.

2.2.2. La velocidad de los relojes

Como sabemos, los efectos de la relatividad general alrededor de la Tierra son pequeños. En el cálculo anterior los hemos cuantificado y hemos visto que pese a pequeños han de ser tenidos en cuenta. Llegó la hora de añadir al cálculo los efectos de la relatividad especial causados por las distintas velocidades del dispositivo y el satélite. La herramienta para cuantificarlos es la fórmula (2.3) y el primer paso para medir esta diferencia es determinar v_{tierra} y v_{sat} .

Para llevar a cabo el cálculo de v_{tierra} y de v_{sat} emplearemos los procedimientos habituales de la geometría euclídea y mecánica clásica. Ciertamente no obtendremos el resultado más preciso pero al tratarse de velocidades pequeñas con respecto a la de la luz, las diferencias van a ser realmente despreciables y por contra, el cálculo será mucho más simple. Además, recordemos que aunque se ha podido dar la falsa impresión de que el modelo de Newton queda totalmente invalidado una vez descubierta la relatividad, con este modelo se pueden calcular las órbitas de los planetas con una precisión enorme por lo que realmente las diferencias relativistas son mínimas. En cualquier caso, más adelante chequearemos los resultados obtenidos mediante un cuidadoso análisis y quedará justificada esta forma de proceder.

En primer lugar vamos a determinar la velocidad tangencial (en unidades convencionales) de un reloj situado en el ecuador de la Tierra.

Sabemos que el periodo de rotación de la Tierra T es de 1 día, o sea, 86 400 segundos. Teniendo en cuenta que la distancia al eje de rotación de la Tierra en el ecuador coincide con su radio $r_{tierra} = 6,371 \cdot 10^6$ metros, la velocidad tangencial de la Tierra en el ecuador es simplemente el radio por la velocidad angular, es decir,

$$v_{tierra} = \omega \cdot r_{tierra} = \frac{2\pi}{T} \cdot r_{tierra} = 463,31 \text{ m/s}$$

Este valor expresado en unidades geométricas nos da que $v_{tierra} = 1,544 \cdot 10^{-6}$.

¿Cuál es el valor ahora para v_{sat} ? Pues para determinarlo basta realizar un cálculo análogo al anterior, sabiendo que en este caso $r_{sat} = 26,6 \cdot 10^6$ y que el periodo es de medio día sideral, o sea, $T = 11h 58' = 43080$ s. Por tanto tenemos,

$$v_{sat} = \frac{2\pi}{T} \cdot r_{sat} = 3879,59 \text{ m/s}$$

Si expresamos el resultado en unidades geométricas obtenemos que $v_{sat} = 1,293 \cdot 10^{-5}$. Como vemos, los resultados son tan pequeños con respecto a la velocidad de la luz, que a efectos prácticos las diferencias entre los cálculos proporcionados por la mecánica clásica y los relativistas son despreciables.

2.2.3. El ajuste final

Conseguidas las velocidades es el momento de realizar el cálculo final que proporcione la discrepancia instantánea definitiva entre los dos relojes que estamos manejando.

Recordemos que teníamos la relación (2.3),

$$\left(\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{tierra}} \right)^2 = \frac{1 - \frac{2M}{r_{sat}} - v_{sat}^2}{1 - \frac{2M}{r_{tierra}} - v_{tierra}^2}$$

Si tomamos raíces cuadradas a ambos lados, la cosa quedaría,

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{tierra}} = \left(1 - \frac{2M}{r_{sat}} - v_{sat}^2 \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r_{tierra}} - v_{tierra}^2 \right)^{-1/2}$$

Podemos volver a aplicar la aproximación $(1+d)^n \approx 1+nd$ tomando en este caso $d_1 = -2M/r_{sat} - v_{sat}^2$ en el numerador y $d_2 = -2M/r_{tierra} - v_{tierra}^2$ en el denominador, lo cual nos dará que,

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{tierra}} \approx \left(1 - \frac{M}{r_{sat}} - \frac{v_{sat}^2}{2} \right) \left(1 + \frac{M}{r_{tierra}} + \frac{v_{tierra}^2}{2} \right)$$

Computo directo arroja definitivamente que,

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{tierra}} \approx & 1 + \frac{M}{r_{tierra}} + \frac{v_{tierra}^2}{2} - \frac{M}{r_{sat}} \\ & - \frac{v_{sat}^2}{2} - \frac{M}{r_{sat}} \frac{M}{r_{tierra}} - \frac{M}{r_{sat}} \frac{v_{tierra}^2}{2} - \frac{v_{sat}^2}{2} \frac{M}{r_{tierra}} - \frac{v_{sat}^2}{2} \frac{v_{tierra}^2}{2} \end{aligned}$$

Esta expresión puede parecer un poco farragosa en primera instancia, mas si nos fijamos un poco, hay términos que pueden ser eliminados pues ni siquiera el más preciso de los relojes atómicos podría cuantificarlos.

Para empezar, el término $(M/r_{tierra})(M/r_{sat})$ tiene un orden de magnitud de 10^{-18} segundos, por lo que claramente podemos prescindir de él. Análogamente, todos los términos situados a la derecha de este tienen órdenes de magnitudes similares o incluso menores

y puesto que ningún reloj atómico podrá cuantificarlos, no tiene sentido que los consideremos en nuestro cálculo.

Por lo tanto, con esta última consideración obtenemos la buena aproximación de que,

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{tierra}} \approx 1 + \frac{M}{r_{tierra}} + \frac{v_{tierra}^2}{2} - \frac{M}{r_{sat}} - \frac{v_{sat}^2}{2} = 1 + q \quad (2.4)$$

Al igual que ocurrió cuando estudiamos los efectos en los relojes únicamente por parte de la relatividad general, volvemos a tener un factor q que da la discrepancia entre ambos relojes. Si fuera $q = 0$ los dos relojes correrían de igual forma y no habría que tener en cuenta ningún efecto relativista sobre ellos. Sin embargo, si cuantificamos la expresión (2.4) con los datos que hemos estado manejando a lo largo del trabajo obtenemos una discrepancia instantánea de $q = 4,4759 \cdot 10^{-10}$. Al cabo de un día, el reloj del satélite se atrasará respecto al reloj de la tierra aproximadamente 38 672 nanosegundos, pues por cada unidad de tiempo transcurrida en el dispositivo terrestre, en el satélite transcurren $4,4759 \cdot 10^{-10}$ unidades más.

Pues sí, 0,000038672 s. Este diminuto número era el objetivo de todo este trabajo, pues muestra la crucial diferencia entre que el GPS indique correctamente nuestra posición o no. Estas nimias cifras expresan lo que el reloj del satélite se atrasa diariamente respecto al reloj del dispositivo terrestre. Puede parecer pequeño mas una vez más, remarquemos que en esa fracción de segundo la luz recorrería unos 12 kilómetros, lo cual desbarataría todo el método de triangulación y por tanto el funcionamiento del GPS. Como cifra que culmina todo este estudio, le damos la importancia que merece enunciándola en un teorema.

Teorema 2.2.1. *Sean dos partículas materiales α y β , correspondientes a un cuerpo en la Tierra y a un satélite orbitando con un periodo de 12 horas. Entonces, para un observador de Schwarzschild el tiempo propio de β se atrasará 38 672 nanosegundos por día con respecto al tiempo propio del cuerpo en la Tierra α .*

Capítulo 3

Análisis de los Resultados

En este capítulo analizamos y dotamos de sentido los resultados que hemos obtenido, para redondear la comprensión del estudio realizado. Además de analizar estas cifras, creemos que también es importante comentar las suposiciones que se han ido tomando a lo largo de los cálculos y que de algún modo queden justificadas, por lo que también dedicamos las próximas secciones a ello.

3.1. Principales fuentes de error

Un aspecto importante de este trabajo que hemos mencionado pero que hasta el momento hemos ido postergando intencionadamente es el de las suposiciones tomadas en los cálculos y el del grado de lealtad de los resultados obtenidos. Es importante, con afán de comprender mejor la procedencia de los resultados, que nos detengamos a examinarlos con detalle.

Para empezar vamos a analizar la precisión con la que un GPS halla la posición y ahora que conocemos el proceso de cómo la determina, intentar ver cuáles son las causas de los errores. Como en cualquier sistema informático de precisión, en el GPS hay toda una plétora de errores de tipo electrónico, ruidos en los receptores, minúsculos fallos en los satélites... que afectan al resultado final. Nosotros no entraremos en ese campo pues haría falta otro trabajo de fin de grado de ingeniería electrónica para abarcarlos, aquí nos limitaremos a los fallos que afectan al desarrollo teórico que hemos considerado. Veamos cada una de estas fuentes de error por separado.

Para comenzar, todo el cálculo se ha realizado en el modelo pensando que la coordenada radial del satélite r_{sat} es constante, o sea, que la órbita que describe el satélite es perfectamente circular. Ésto en la realidad no es así, pues la trayectoria del satélite sufre pequeñas alteraciones a causa de la atracción gravitatoria de la Luna o el Sol principalmente. Por tanto, en ocasiones la posición real del satélite difiere de la esperada por los segmentos de control terrestres, lo cual provoca una pequeña incertidumbre en la distancia medida al satélite desde el receptor, que no siempre es la real. Como vemos esto se traduce en un pequeño error en la posición final. El GPS diferencial es capaz de corregir este error recibiendo información adicional desde una estación terrestre, aparte de la de

los satélites, lo cual subsana completamente la imprecisión.

Otra aproximación a la realidad que hicimos en el modelo, fue la de considerar que la velocidad a la que se propagan las ondas, la de la luz, es constante $c = 1$ (en unidades geométricas). Nuevamente, esto es un engaño a la realidad pues las ondas enviadas por el satélite han de atravesar la ionosfera y la troposfera antes de alcanzar el receptor. Esto provoca una distorsión en la onda que la ralentiza, por lo que al final, la distancia al satélite se calcula con una velocidad constante, lo cual no es cierto y provoca de nuevo una suerte de pequeño error. El problema con este tipo de error es que la distorsión de la onda depende de las condiciones atmosféricas o del estado de la ionosfera, lo que hace difícil su corrección.

La última fuente de error importante que tratamos es la conocida como “error por geometría” y tiene que ver con el método de triangulación matemática que explicábamos en el apartado 2.1.1. Cuando por casualidad, dos de los satélites con los que establece contacto el receptor están muy próximos entre sí, la zona gris de “posibles ubicaciones” que predice el método de triangulación es demasiado grande, lo cual provoca discrepancias en el resultado final. En un gráfico 2-D la situación sería:

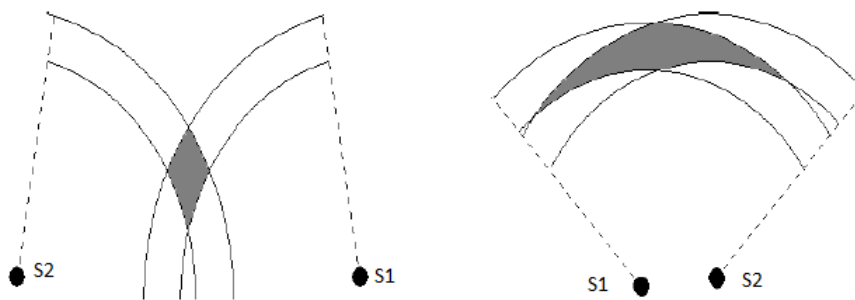


Figura 3.1: Error geométrico por la proximidad de los satélites

Este error es difícil de cuantificar pues depende de la posición en cada instante de los satélites con los que establece contacto el dispositivo terrestre. No obstante, como normalmente el número de satélites visibles por el dispositivo suele ser mayor que cuatro el error por geometría queda minimizado en parte por el amplio número de mediciones de distancias a los satélites que se realizan.

En la siguiente tabla resumimos y cuantificamos las fuentes de error en metros que hemos tratado aquí tanto en el GPS actual como en el GPS diferencial que añade una central terrestre para minimizar imprecisiones y es empleado en aeropuertos, tecnología militar... etc.¹

¹Datos obtenidos de [5]

Fuentes de error	GPS	GPS diferencial
Errores orbitales	2,5	0
Ionosfera	5,0	0,4
Troposfera	0,5	0,2
Error por geometría	-	-
Exactitud promedio de la posición		
Horizontal	15	1,3
Vertical	24	2,0
3-D	28	2,8

Cuadro 3.1: Principales errores de precisión en metros, por cada satélite del GPS

3.2. Justificando las aproximaciones. Desplazamiento hacia el azul

El lector atento puede recordar que tiene que haber una fuente de error aún más importante pues habíamos supuesto la Tierra esférica y estática y además aislada en el universo sin que ningún otro objeto afectara a “su” espacio-tiempo. La sección anterior habría de estar por tanto inconclusa. ¿Dónde están los errores a causa de estas suposiciones iniciales para poder aplicar el modelo de Schwarzschild? Además, en todo el cálculo hemos supuesto que v_{tierra} era la velocidad del reloj como situado en el ecuador, ¿y si el dispositivo GPS se encuentra en el polo norte? en este caso v_{tierra} sería prácticamente nula, ¿dónde está el error producido por esas situaciones?

Pues eso, la respuesta ya se dio implícitamente en el apartado anterior, el error no está. Todas las aproximaciones que hemos realizado, pese a que teóricamente son erróneas, en la práctica producen un error tan nimio, que ni los relojes atómicos pueden cuantificarlo. Por lo tanto y a posteriori, quedan perfectamente justificadas.

En realidad, estas consideraciones tienen éxito casi por casualidad. En primera instancia, el error producido por escoger el espacio-tiempo de Schwarzschild para modelar algo que no cumple sus condiciones es despreciable pues los cambios que pueden producir en la distribución de masa-energía las irregularidades de la superficie terrestre son ínfimos. Por otro lado, como sabemos, la Tierra en la zona del ecuador tiende a ser más oblonga en tanto que más achatada en los polos. Este achatamiento en los polos se debe principalmente a la rotación terrestre. Así, conforme el reloj se va aproximando a los polos, cierto es que v_{tierra} disminuye, pero por otro lado, como también r_{tierra} disminuye, el factor M/r_{tierra} aumenta compensando la disminución de la velocidad. Por lo que a efectos prácticos, hay una suerte de equilibrio en la fórmula entre estos dos términos, lo que anula cualquier hipotético error producido por la posición del reloj respecto al ecuador. Ciertamente la justificación que proporcionamos puede parecer un tanto heurística, pero como ocurre en muchos casos, la mejor justificación posible es la experiencia práctica y es que está visto que el GPS funciona pese a estar programado sin tener en cuenta la posición respecto al ecuador del dispositivo terrestre.

Quedando justificadas estas consideraciones, hay otro efecto mucho más fino que se deduce de la relatividad general que no se ha mencionado en ningún momento y que en principio, podríamos pensar que es tan importante que habría de haber sido tomado en cuenta, el conocido como *desplazamiento hacia el azul*, que explicamos de forma intuitiva a continuación.

Como sabemos, toda onda posee un periodo o tiempo entre oscilaciones. Este periodo puede actuar como tiempo propio de la onda en tanto que se comporta como un “reloj” que porta la propia onda, viendo cada periodo como un tick del reloj. Ahora bien, pensemos en la onda emitida por el satélite hacia el dispositivo terrestre que toma en consideración el GPS. Dicha onda es emitida con un periodo T_0 , pero conforme se va acercando a la Tierra, es decir, conforme su coordenada radial va disminuyendo, sabemos que el tiempo de Schwarzschild transcurrido entre los ticks va disminuyendo, es decir, que al cabo de unos instantes, apreciaremos que el periodo de la onda $T_r < T_0$. Dado que son magnitudes inversas, sabemos que una disminución del periodo implica un aumento de la frecuencia pues son magnitudes inversas y por lo tanto, para nosotros, la onda que recibimos posee una frecuencia mayor que la onda originalmente emitida. Como en el espectro visible de la luz la zona de mayor frecuencia está formada por los tonos azul y violeta, este efecto se conoce como desplazamiento hacia el azul.

La cuestión que surge entonces es, ¿por qué no hemos tomado en cuenta este cambio en la frecuencia de la onda a la hora de realizar el estudio sobre los relojes del dispositivo y el satélite? ¿está todo el cálculo mal realizado?

Pues la respuesta es que no, el cálculo es correcto. Hemos hecho bien en no aplicar dos veces la ecuación (??), primero para los diferentes valores de relojes situados a distintas alturas y luego para tener en cuenta el desplazamiento hacia el azul que se produce. Sólo hay que aplicarla una vez y el motivo es que ambas situaciones son físicamente equivalentes. Es decir, lo mismo da pensar que los relojes se adelantan por estar situados a distintas alturas que pensar que se adelantan por el desplazamiento hacia el azul de la onda, no hay forma de distinguir el motivo.

Desde otro punto de vista, supongamos que intentásemos comprobar si el reloj del dispositivo y el del satélite coinciden en sus valores llevando el reloj del satélite al lado del reloj terrestre. Veríamos que coinciden, corren a la misma vez pues estarían situados a la misma altura. Similarmente, si cogiéramos el reloj terrestre y lo pusiéramos junto al del satélite también comprobaríamos que funcionan del mismo modo. Por otro lado, para medir el desplazamiento gravitacional hacia el azul deberíamos conectarlos de algún modo mediante una suerte de señal que atravesara la distancia entre ellos, y así ver si sus ticks coinciden. Pero entonces esto haría imposible distinguir sin ambigüedades si el desplazamiento se debe a la distinta coordenada radial de los relojes o al cambio de frecuencia de la señal empleada para comprobar si los ticks coinciden. Ambos principios de lo ocurrido, distinta coordenada radial o desplazamiento hacia el azul conducen al mismo resultado. Lo importante es que ya sea por una causa o por otra, sólo es preciso aplicar la corrección de la ecuación (??) a los relojes una sola vez.

3.3. ¿Funcionaría el GPS cerca de un agujero negro?

Para concluir con este capítulo dedicado al análisis de los resultados vamos a intentar dilucidar cómo se comportaría el GPS en lo que a la relatividad concierne, en las proximidades de un agujero negro.

Como comentamos en el apartado 1.2.5 dedicado al agujero negro de Schwarzschild, para los modelos relativistas la aparición de los agujeros negros supuso una revolución en el sentido de que magnifican enormemente los efectos de la relatividad general en sus proximidades.

Recordemos que el agujero negro de Schwarzschild de masa M era la región espacio-temporal,

$$B = P_{II} \times_r \mathbb{S}^2 = \{(t, r) : 0 < r < 2M\} \times_r \mathbb{S}^2$$

es decir, la parte interior del hiperplano $r = 2M$ que denominábamos horizonte de sucesos con la métrica de Schwarzschild $g = -h(r) dt^2 + h(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2$ y que el exterior simplemente era $N = P_I \times_r \mathbb{S}^2$.

El motivo por el que los agujeros negros realzan los efectos de la relatividad general es que al ser tan densos, permiten que la coordenada radial se haga muy pequeña, y que por lo tanto “deforme” la métrica de Schwarzschild. Pensemos por ejemplo en el planeta Tierra, en este caso $M_{tierra} = 4,44 \cdot 10^{-3}$ por lo que $r = 2M_{tierra} = 8$ centímetros mientras que $r_{tierra} \approx 6\,371\,000$ metros. Cualquier evento que ocurra en la superficie del planeta está enormemente lejos del horizonte de sucesos. Sin embargo, en un agujero negro un objeto se puede acercar (y de hecho atravesar) al horizonte de sucesos tanto como se desee por lo que los efectos que ocurren en las proximidades de $r = 2M$ sí que quedan patentes.

El estudio que vamos a realizar lejos de meticuloso sólo pretende ilustrar los efectos de los agujeros negros, por lo que en realidad realizaremos muchas suposiciones y simplificaciones distantes de la realidad ya que estos son temas de actualidad en el ámbito de la investigación y por tanto se requeriría de un estudio profundo y difícil para un tratamiento del problema de forma “más realista”.

Así, sea B un agujero negro de masa igual a la de la Tierra, y sea α una partícula material situada en las proximidades del horizonte de sucesos (un dispositivo GPS) y β un satélite orbitando en torno a B . La ecuación (2.3) en este caso quedaría,

$$\left(\frac{d\tau_\beta}{d\tau_\alpha}\right)^2 = \frac{1 - \frac{2M}{r_\beta} - v_\beta^2}{1 - \frac{2M}{r_\alpha} - v_\alpha^2}$$

Dado que sólo queremos dar unas pinceladas de cómo se comportaría el GPS en las proximidades de B para ilustrar mejor los resultados, en aras de no desviar la atención del foco principal supondremos que tanto el dispositivo GPS como el satélite no están en movimiento. Por lo tanto $v_\beta = v_\alpha = 0$. Con esto, la aproximación que obteníamos

directamente de (2.3) sería,

$$\frac{d\tau_\beta}{d\tau_\alpha} \approx 1 - \frac{M}{r_\beta} + \frac{M}{r_\alpha} - \frac{M M}{r_\beta r_\alpha} = 1 + b$$

Viendo esta última expresión podemos entender por qué los agujeros negros “magnifican” los efectos de la relatividad general. Ahora las coordenadas radiales que aparecen en los denominadores r_α y r_β son mucho más pequeñas, por lo que disparan las cifras de los resultados.

Supongamos que por ejemplo el dispositivo GPS se encuentra muy cerca del horizonte de sucesos de B , digamos a $r_\alpha = 2,5M = 11,1 \cdot 10^{-3}$ metros y que el satélite orbita por ejemplo a una altura $r_\beta = 8M = 35,52 \cdot 10^{-3}$ metros. En este caso tendríamos que la constante b sería aproximadamente,

$$b = -\frac{M}{8M} + \frac{M}{2,5M} - \frac{M M}{8M \cdot 2,5M} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2,5} - \frac{1}{20} = \frac{9}{40}$$

Por cada unidad de tiempo transcurrida en el dispositivo GPS α , para el tiempo propio del satélite β transcurren 1,225 unidades de tiempo. ¡Por cada hora en el dispositivo GPS, el reloj del satélite se atrasa aproximadamente un cuarto de hora! Al cabo de un día, se habría atrasado seis horas. Notar que el resultado no depende de la masa del agujero negro, lo cual es totalmente falso y es causa de las enormes simplificaciones que hemos hecho en este cálculo. Sin embargo creemos que al menos queda patente el efecto que tienen los agujeros sobre el GPS.

Vemos por tanto como los efectos relativistas a tener en cuenta en el GPS cerca de un agujero negro son mucho más grandes que en la Tierra.

A modo de pincelada, comentamos que no tendría sentido plantearse el funcionamiento del GPS en el interior de B , pues en esta región las horientaciones temporales se invierten y cualquier onda emitida es atráada inexorablemente al origen $r = 0$. Para la comprensión de estos fenómenos sería preciso un profundo estudio de las propiedades del agujero negro B .

Conclusiones

Recordemos que en las primeras secciones de este documento, nos familiarizamos con las idiosincrasias de los modelos relativistas y lejos de dar un curso completo de lo que la teoría de la relatividad nos ofrece, simplemente dimos una vista de pájaro a sus efectos para seguidamente centrarnos en los aspectos teóricos que iban a tener transcendencia en el comportamiento de los Sistemas de Posicionamiento Global. Una de las primeras ideas generales que obtuvimos en estas secciones fue la de que los resultados arrojados por la teoría de la relatividad realmente pequeños para los fenómenos físicos que acostumbran a ocurrir en el día a día. Sólo densidades realmente grandes como las de los agujeros negros y velocidades del mismo orden de magnitud que la luz muestran las consecuencias relativistas a simple vista. Notábamos como por ejemplo en el caso de la Tierra o del Sol, los efectos, eran minúsculos.

Sin embargo, en el caso del GPS encontrábamos un magnífico ejemplo de cómo los minúsculos pero existentes al fin y al cabo efectos relativistas en torno a la Tierra tenían y siguen teniendo una crucial transcendencia en el funcionamiento de esta sofisticada tecnología.

Por estos derroteros encontramos y demostramos que la desincronización entre un reloj situado en la superficie terrestre y otro colocado en un satélite orbitando con un periodo de medio día, es que este último se adelanta respecto a aquél unos 38 672 nanosegundos por día. Nuevamente, esta cifra es despreciable para el ojo humano o en la mayoría de los procesos físicos y químicos “cotidianos”. Sin embargo, en un sistema como el GPS ya adelantábamos por qué esta fracción de segundo es tan importante, ya que en esta fracción de tiempo, la luz recorrería en el vacío unos 12 000 metros, lo que por razones obvias, es inasumible en una tecnología como la del GPS, que aspira a aterrizar aviones sin la más mínima visión, para lo cual sólo se pueden admitir fallos de a lo sumo dos metros de precisión.

Llegamos al final de esta historia con una visión global de nuestro trabajo. Por enésima vez, y el número de ejemplos comienza ya a ser *no-numerable*, la matemática demuestra cómo una teoría desarrollada hace más de un siglo, se puede aplicar en el siglo XXI como parte crucial de una nueva tecnología. Difícilmente Einstein, Schwarzschild y compañía habrían sospechado que sus modelos tendrían aplicación en el desarrollo de los sistemas de posicionamiento global.

A lo largo del documento se han tocado diversas áreas como la geometría semi-riemanniana, teoría de la relatividad, modelización y algo de física. Con la intersección

de estos cuatro elementos se ha conseguido un buen estudio teórico de la situación y se han alcanzado los objetivos previstos tales como el ajuste entre los relojes y el análisis de lo acertado de la elección del espacio-tiempo de Schwarzschild como modelo para el estudio. Mas el aporte de la matemática al GPS no se detiene aquí. El método geométrico de triangulación que emplea el GPS se apoya fuertemente en el cálculo numérico a la hora de resolver los sistemas de ecuaciones a los que llegábamos en el estudio analítico del problema. Además, dado que en la práctica suele haber más de cuatro satélites visibles, el dispositivo terrestre realiza más de cuatro mediciones de distancia, lo que implica que en la mayoría de las ocasiones el sistema de ecuaciones resultante de aplicar el método de triangulación está sobredimensionado. Como sabemos, son precisos entonces resultados de mejor aproximación del análisis funcional para dar una correcta solución de dicho sistema. Por otro lado, la corrección de algunos errores tales como el error por geometría requiere cálculo estocástico y estudios estadísticos. Así que ya vemos que hay suficientes matemáticas en el GPS como para realizar otros dos trabajos más como este.

En realidad y en la medida de que la componente de modelización en este estudio del GPS es bastante notable, este trabajo ya no es sólo una muestra de cómo la teoría de la relatividad toma parte en nuestra vida cotidiana, sino de cómo distintas ramas de las matemáticas confluyen de forma cuanto menos curiosa para resolver un problema. Desde la opinión de este estudiante de grado, es ahí donde reside el verdadero poder de las matemáticas, en el momento en que sus ramas se tocan y se apoyan unas a otras para impulsarse entre sí exponencialmente. Cuando vemos a la constante π en un estudio sobre el crecimiento de poblaciones o a la topología en una demostración de la infinitud de los números primos (véase [7]) estamos siendo testigos de este poder y a cómo a veces las matemáticas dejan de ser ciencia, para pasar a ser arte. Decía el gran D. *Manfredo do Carmo* en su discurso de Investidura Doctor Honoris Causa por la Universidad de Murcia que precisamente es en esta dualidad de las matemáticas donde reside su fuerza y debilidad y que las matemáticas son útiles, misteriosamente útiles.

Como última pincelada, quizá le faltó añadir al gran geómetra en su discurso que es cuando no buscamos esa utilidad y nos centramos en la matemática pura con sus teoremas, ejemplos y contraejemplos tan intensamente que nos olvidamos de que su aplicación vaya a ser útil o no para la sociedad cuando de verdad nos gustan las matemáticas. La utilidad, como muestra este trabajo, ya vendrá casi extrañamente de algún lugar cuya naturaleza desconocemos y cuyos misterios no podemos aspirar a comprender. Quizá por eso sea tan difícil explicar a una persona por qué son bonitas las matemáticas.

Bibliografía

- [1] F. Taylor, Edwin & Wheeler, John Archibald, *Exploring black holes: Introduction to general relativity*, ISBN 0-201-38423-X.
- [2] O'Neill, Barret, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, ISBN 0-12-526740-1.
- [3] Rindler, Wolfgang, *Relativity, special, general, and cosmological*, Oxford University Press, Second Edition, ISBN 0-19-856731-6.
- [4] Meroño Bayo, Miguel Angel, *Variedades diferenciables*, Apuntes de clase de Geometría y Relatividad, 4º de grado en matemáticas, Universidad de Murcia.
- [5] Web, http://gutovnik.com/como_func_sist_gps.htm
- [6] Molina Cantero, Francisco Javier, *GPS, Global Positioning System*, Dto Tecnología y Estadística, Facultad de Informática y Estadística.
- [7] Furstenberg, *Topological proof of the infinitude of primes*.
- [8] Web, http://www.asifunciona.com/electronica/af_gps/af_gps_11.htm