



UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

## **EL TEOREMA DE LA ESFERA**

Alberto Martos Gómez

Curso 2013-2014

---

Dirigido por:  
Dr. Miguel Ángel Meroño Bayo



# El teorema de la esfera

Alberto Martos Gómez

---

Facultad de matemáticas  
14 de julio de 2014



# Índice general

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>Un poco de historia</b>	<b>15</b>
<b>1. Conceptos básicos y notación</b>	<b>19</b>
1.1. Notación y curvatura . . . . .	19
1.2. Campos de Jacobi . . . . .	21
1.3. Puntos conjugados . . . . .	24
1.4. Fórmulas de variación y teorema de Bonnet-Myers . . . . .	26
1.5. Teorema de comparación de Rauch . . . . .	29
<b>2. El teorema de la esfera</b>	<b>31</b>
2.1. Lugar de corte y radio de inyectividad . . . . .	31
2.2. Estimación del radio de inyectividad . . . . .	39
2.3. El teorema de la esfera . . . . .	43
<b>3. Consecuencias y desarrollos posteriores</b>	<b>53</b>
3.1. Teorema diferencial de la esfera . . . . .	53
3.2. El flujo de Ricci . . . . .	55
3.3. Variaciones del teorema de la esfera . . . . .	58
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>
<b>Índice de símbolos</b>	<b>63</b>
<b>Índice terminológico</b>	<b>65</b>



# Introduction

The Sphere Theorem is one of the most beautiful theorems of global Differential Geometry and is part of a special category of results which pursues decyphering the relationship between Topology and Geometry. To be more specific, it is intended to determine the way in which the geometrical properties of a space can have an influence on the shape (Topology) which it takes. The studies on this topic are previous to the Sphere theorem and go back to the beginning of Differential Geometry by Gauss. Gauss himself, in 1828 set the table to study intrinsic geometry of a surface with his *Theorema Egregium*. Later on, in the mid-19th Century, Riemann enlarged the theory of Gauss and switched from working with surfaces to working with topological spaces (of arbitrary dimension) which are locally homeomorphic to subsets of  $\mathbb{R}^n$ , called Riemannian manifolds. This new theory would enable the proof and formulation of the result we are dealing with.

When it comes to the relationship between Geometry and Topology, the Sphere Theorem shows in which way the sectional curvature of a manifold affects it. Our aim is to see how under certain conditions of curvature, a manifold can be nothing but a sphere. Provided that a sphere has a constant positive curvature, it is to be determined how far the curvature can get from a manifold with such constant, in a way that it keeps on being a sphere from the topological point of view. In 1898, Hadamard proved a result for surfaces similar to that of the Sphere Theorem. To be more specific, he proved that any compact surface of  $\mathbb{R}^3$ , oriented and with positive Gaussian curvature should be diffeomorphic to a sphere (see [13]). This fact set the question of extending the result to more general structures, like the Riemannian manifolds.

Even though the result is applied to Riemannian manifolds, we can consider a particular case with the aim of visualizing what the main result is saying. Therefore, the Theorem assures that a regular surface which is closed and bounded (compact), without any «holes» (simply connected) and whose curvature is contained in the interval  $(1/4, 1]$  is indistinguishable, from a topological point of view, from the unit sphere. In other words, a compact surface that when «bending» does it in a way similar to that of a sphere, is a sphere.

So, the Sphere Theorem is a generalization of this idea for Riemannian manifolds. We generalize the structure we are working with as well as the concept of curvature, thus working with the so-called sectional curvature. In the end, what the Sphere Theorem intends is to establish a homeomorphism between the standard sphere and a compact manifold  $M$  that satisfies certain sectional curvature conditions. More specifically, and as well as we do when it comes to surfaces, the condition we will establish will be working with manifolds whose sectional curvature is contained in an interval of the form  $(h, 1]$ , where we refer to the number  $h$  as the pinching of the manifold.

As it should be in every mathematical text, one of our aims is to prove the main result. In order to achieve our goal, we need to introduce some tools and concepts which are not so common in basic Riemannian Geometry courses. In spite of the fact that the proof of a result is always an important part of its study, we believe its historical contextualization should not be rendered less importantly. Both the context and temporary situation of the result often help to understand how we have come this way, and the motivation behind the mathematicians at the time in order to deepen the study of the result. This could be used as a starting point for the reader who wants to find out more about the result.

Following this path, we devote a preliminary section to the historical introduction of the Sphere Theorem. Then we follow the evolution that the result endured until it got its current shape departing from the result that motivated our theorem, whose creation is attributed to Heinz Hopf. This evolution can be measured in the transformation suffered by the interval where we «enclose» the curvature of the manifold, that is, its pinching. This is how Hopf proved the result for the constant curvature equal to 1 in the first place, and that triggered the attempt to increase the «freedom of movement» that the curvature of the manifold could have until reaching the interval  $(1/4, 1]$ . As we will see, the first proof of the Theorem for the interval  $(1/4, 1]$  is attributed to Berger and Klingenberg and was preceded by several previous approximations. Another interesting point in this historical study will be the path that the result according to the dimension of the manifold followed, finding differences whenever it is even or odd. The chapter will end with a brief discussion about the optimal values, according to the dimension for the pinching  $h$  so that the Theorem is true.

The first chapter will have its focus on introducing some concepts dealing with Riemannian Geometry which are necessary for the proof of the Sphere Theorem. We will introduce the so-called Jacobi fields and the concept of conjugate point in order to link these points to the singularities of the exponential map. In this chapter we will also deal with the notation used along the text, with the focus located on curvature and variation formulas.

Finally, we will introduce some important theorems that will play a relevant role in the proof of our result. Among these theorems, the Bonnet-Myers Theorem and the Rauch Comparison Theorem stand out. The first one will allow us to enclose the diameter of a manifold when it satisfies certain conditions of sectional curvature. On the other hand, the Rauch Comparison Theorem will provide us with a way of comparing length of curves between two manifolds and will help us complete the proof of the Theorem this report is named after.

The second chapter is focused on the proof of the Sphere Theorem. This proof was made by Berger and Klingenberg and follows a high-profile geometrical development. The depth of the techniques used in this proof as well as the wide range of concepts and results, used directly or indirectly, are remarkable. In this chapter we will introduce and work with two fundamental concepts: the cut locus and the injectivity radius of a manifold. The first one is associated to each point of the manifold and must be seen as the set where the geodesics which depart from that point stop being minimizing. On the other hand, the injectivity radius is a real number that, when given two points of the manifold whose distance is less than this radius, the existence of an only minimizing geodesic joining those two points is assured. The aim is to obtain a bound for this radius, known as the estimation of Klingenberg. This estimation assures, under certain conditions, that the injectivity radius of the manifold is greater than or equal to  $\pi$ .

The estimation of the injectivity radius for a manifold  $M$  is one of the main fundamental steps of the proof of the Sphere Theorem. What is more, at this point, the Theorem branched off for a few years from even dimensions to odd dimensions. This is due to the fact that the estimation of Klingenberg, which allowed proof of the Theorem, was obtained only for the even dimension. However, this estimation would expand to arbitrary dimension years later, thanks to the Morse Theory. We must point out that in our development we will only provide proof for the estimation of Klingenberg for the case of the even dimension, since getting into Morse Theory exceeds the scope of this research.

Once Klingenberg's estimation is calculated, we will deal with the last step in order to complete the proof of the Sphere Theorem. This last step consists of covering the manifold  $M$  with two balls, and in order to do that, the estimation of Klingenberg is essential. As we will see, covering a manifold with two balls implies a classic Topology result: this manifold is homeomorphic to the sphere. However, the tools and development followed in order to get the proof will allow us to obtain this homeomorphism in an explicit form, which is also interpretable from a geometrical point of view.

After the historical context and the proof of a result, the subsequent consequences and developments are last but not least. We will then devote the last chapter to what came after the proof of the Sphere theorem. We will start by introducing

the Differentiable Sphere Theorem, which states the same as the Sphere Theorem, but substitutes the term homeomorphism by the term diffeomorphism. We will also discuss the values that the pinching of a manifold can take so that the Differentiable Theorem is true. This discussion will lead us to reduce one of the hypotheses with the aim of obtaining an optimal Differentiable Sphere Theorem, even though the manifold  $M$  will now be diffeomorphic to structures which are more general than the Sphere, also known as spherical space forms.

As far as the differential version of the Sphere Theorem is concerned, we will introduce a current concept such as the Ricci flow, which is part of important results like the Poincaré conjecture, one of the Millennium Prize Problems. Due to its current importance, we will introduce some examples of Ricci flow, as well as results that are related to both this concept and the Sphere Theorem. By doing this we will attempt to highlight the role that the Ricci flow plays in current researching for the Riemannian branch of Geometry.

In the second part of the chapter we will display some different versions of the Sphere Theorem. These versions will essentially consist of replacing one of the bounds for the sectional curvature by conditions of the diameter or volume, or by another condition with different curvature. These results have been chosen so that they have intuitive interpretation or do not need further contextualization than the one this report contains. Through these results, it is intended to provide an idea of the different versions of the Sphere Theorem developed throughout time and of the ones that still spring nowadays. Finally, we will present some references about developments related to the Sphere Theorem that have not been included within the text, because of their extension and complexity.

Alberto Martos Gómez  
Murcia, June 26th, 2014.

# Introducción

El teorema de la esfera constituye uno de los resultados más hermosos dentro de la geometría diferencial global y forma parte de una categoría especial de resultados, los cuales buscan desentrañar la relación entre topología y geometría. Más concretamente, se pretende determinar la manera en que las propiedades geométricas de un espacio pueden condicionar, parcial o totalmente, la forma (topología) que éste adopta. El estudio de este tipo de cuestiones es anterior al teorema de la esfera, y se remonta a los inicios de la geometría diferencial de superficies introducida por Gauss. En 1828, el propio Gauss, con su *Theorema Egregium*, abrió la puerta al estudio de la geometría intrínseca de una superficie. Más tarde, a mitad del siglo XIX, Riemann extendió la teoría de Gauss y pasó de trabajar con superficies a hacerlo con espacios topológicos (de dimensión arbitraria) localmente homeomorfos a subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , llamados variedades riemannianas. Sería con esta nueva teoría con la que se enunciaría y demostraría el resultado que nos incumbe.

Dentro de la relación entre geometría y topología, el teorema de la esfera muestra el modo en el que la curvatura seccional de una variedad afecta a esta última. Nuestro objetivo es ver que, bajo ciertas condiciones sobre la curvatura, una variedad no puede ser otra cosa que una esfera. Partiendo del hecho de que una esfera tiene curvatura constante positiva, lo que se trata de ver es cuánto puede alejarse la curvatura de una variedad de dicha constante, de manera que continúe siendo una esfera desde el punto de vista topológico. Así, en 1898 Hadamard demostró, para superficies, un resultado similar al teorema de la esfera. Más concretamente, probó que cualquier superficie de  $\mathbb{R}^3$  compacta, orientada y con curvatura de Gauss positiva debía ser difeomorfa a una esfera (véase [13]). Naturalmente, este hecho planteaba la incógnita de extender el resultado a estructuras más generales, como las variedades riemannianas.

Aunque el resultado se aplica a variedades riemannianas, podemos considerar un caso particular de éstas con el objetivo de visualizar qué es lo que dice el enunciado: las superficies regulares. Así, el teorema asegura que una superficie regular que sea cerrada y acotada (compacta), que no tenga agujeros (simplemente conexa) y cuya curvatura esté contenida en el intervalo  $(1/4, 1]$  es indistinguible, desde el punto de vista topológico, a la esfera unidad. Es decir, una superficie compacta que al

«doblar» lo haga sin alejarse en demasía de la manera en la que lo hace la esfera, es una esfera.

De este modo, el teorema de la esfera es una generalización de esta idea para variedades riemannianas. Así como generalizamos la estructura con la que trabajamos, también generalizamos el concepto de curvatura, pasando de la curvatura de Gauss a la curvatura seccional. En definitiva, lo que el teorema de la esfera busca es establecer un homeomorfismo entre una variedad  $M$  compacta y simplemente conexa que cumpla determinadas condiciones sobre la curvatura seccional y la esfera estándar. En concreto, y al igual que en superficies, la condición que imponemos será la de trabajar con variedades cuya curvatura seccional esté contenida en un intervalo de la forma  $(h, 1]$ , donde nos referiremos al número  $h$  como el pinzamiento de la variedad.

Como debe ocurrir en todo texto matemático, uno de nuestros objetivos principales es el de demostrar el resultado que nos incumbe. Para ello, antes tendremos que introducir algunas herramientas y conceptos menos usuales en cursos básicos de geometría riemanniana, pero esenciales para lograr nuestra meta. Pese a que la demostración de un resultado siempre es una parte importante, por no decir imprescindible, de su estudio, creemos que también lo es su contextualización histórica. Este contexto y situación temporal del resultado ayudan, muchas veces, a entender cómo se ha llegado hasta él, así como las motivaciones que llevaron a los matemáticos de la época a trabajarlo y pueden servir también como punto de partida para el propio lector a la hora de interesarse por el resultado.

En esta dirección, dedicamos un primer apartado a la introducción histórica del teorema de la esfera. Así, partiendo del resultado que motivó nuestro teorema y que se debe a Heinz Hopf, vamos siguiendo la evolución que este enunciado experimentó hasta su forma definitiva. Dicha evolución se puede medir principalmente en la transformación sufrida por el intervalo donde «encerramos» la curvatura de la variedad, es decir, por su pinzamiento. De este modo, Hopf demostró inicialmente el resultado simplemente para curvatura constante igual a 1 y fue, a raíz de ello, cuando se intentó incrementar la «libertad de movimiento» que podía tener la curvatura de la variedad, hasta alcanzarse el intervalo  $(1/4, 1]$ . Como veremos, la primera prueba del teorema para el intervalo  $(1/4, 1]$  se debe a Berger y Klingenberg principalmente y vino precedida de varias aproximaciones anteriores. Otro punto interesante de este estudio histórico será el camino seguido en la demostración del teorema según la dimensión de la variedad, encontrándose diferencias cuando ésta sea par o impar. Así, el capítulo finalizará con una breve discusión sobre los valores óptimos, según la dimensión, para el pinzamiento  $h$  de manera que el teorema sea cierto.

El primer capítulo lo dedicamos a introducir algunos conceptos de geometría riemanniana que son necesarios para la demostración del teorema de la esfera. Introduciremos lo que se conoce como campos de Jacobi y el concepto de punto con-

jugado, para luego relacionar estos puntos con las singularidades de la aplicación exponencial. Aprovecharemos también el capítulo para fijar la notación seguida a lo largo del texto, haciendo especial hincapié en lo referente a curvatura y fórmulas de variación.

Finalmente, presentaremos algunos resultados importantes que desempeñarán un papel fundamental en la demostración del teorema. Dentro de estos resultados destacan el teorema de Bonnet-Myers y el teorema de comparación de Rauch. El primero de ellos nos permitirá acotar el diámetro de una variedad cuando ésta cumple ciertas condiciones sobre su curvatura seccional. Por otro lado, el teorema de comparación de Rauch nos proporcionará una manera de comparar longitudes de curvas entre dos variedades y su aplicación para curvas convenientes en la variedad  $M$  y la esfera nos ayudará a completar la prueba del teorema que da nombre al trabajo.

El segundo capítulo se centra en la demostración del teorema de la esfera. Esta demostración se debe principalmente a Berger y Klingenberg y sigue un desarrollo de alto carácter geométrico. Cabe destacar también la gran profundidad de las técnicas empleadas en dicha demostración, así como el amplio abanico de conceptos y resultados manejados, ya sea de manera directa o subyacente. En este capítulo, además, introduciremos y trabajaremos con dos conceptos fundamentales: el lugar de corte y el radio de inyectividad de una variedad. El primero de ellos va asociado a cada punto de la variedad y debe interpretarse como el conjunto donde las geodésicas que parten de dicho punto dejan de ser minimizantes. Por otro lado, el radio de inyectividad es un número real tal que, dados dos puntos de la variedad cuya distancia sea menor que este radio, queda asegurada la existencia de una única geodésica minimizante uniendo dichos puntos. El objetivo es obtener una cota para este radio, conocida como la cota de Klingenberg. Esta estimación asegura, en determinadas condiciones, que el radio de inyectividad de una variedad es mayor o igual que  $\pi$ .

La estimación del radio de inyectividad para una variedad  $M$  constituye una de las etapas fundamentales de la demostración del teorema de la esfera. Más aún, es en este punto donde durante algunos años el teorema se bifurcó para dimensiones par e impar. Esto se debe a que inicialmente la cota de Klingenberg, que permitía probar el teorema, fue obtenida únicamente para dimensión par. No obstante, años más tarde esta cota se extendería a dimensión arbitraria gracias a la teoría de Morse. Debemos puntualizar aquí que, en nuestro desarrollo, demostraremos solo la estimación de Klingenberg para el caso par, pues introducirnos en la teoría de Morse supera ampliamente las pretensiones del presente trabajo.

Una vez calculada la estimación de Klingenberg, abordaremos el último paso para completar la demostración del teorema de la esfera. Esta última etapa consiste en recubrir la variedad  $M$  con dos bolas y, para ello, es imprescindible la estimación de Klingenberg. Como veremos, el hecho de recubrir una variedad con dos bolas

implica, por un resultado clásico de topología, que esta variedad es homeomorfa a la esfera. No obstante, las herramientas y el desarrollo seguidos para la prueba nos permitirán obtener de manera explícita este homeomorfismo el cual, además, goza de interpretación geométrica.

Si el contexto histórico y la demostración de un resultado son importantes, no lo son menos las consecuencias y desarrollos posteriores a éste. Así, dedicaremos el último capítulo a lo que vino después de la demostración del teorema de la esfera. Empezaremos presentando el teorema diferencial de la esfera, cuyo enunciado es análogo al teorema de la esfera, pero sustituyendo el término homeomorfismo por el de difeomorfismo. También discutiremos sobre los valores que puede tomar el pinzamiento de una variedad de manera que el teorema diferencial sea cierto. Esta discusión nos llevará a rebajar una de las hipótesis con el objetivo de obtener un teorema diferencial de la esfera óptimo, aunque la variedad  $M$  será ahora difeomorfa a estructuras más generales que la esfera, conocidas como espacios forma esféricos.

En relación a la versión diferencial del teorema, introduciremos un concepto de actualidad como es el flujo de Ricci, que forma parte de resultados tan importantes como la conjetura de Poincaré, uno de los problemas del milenio. Debido a su importancia hoy en día, introduciremos algunos ejemplos del flujo de Ricci, así como resultados que guardan relación tanto con este concepto como con el teorema de la esfera. Así, trataremos de dejar patente el papel fundamental del que goza el flujo de Ricci en la investigación actual para la rama de geometría de Riemann.

En la segunda parte del capítulo expondremos algunas variaciones del teorema de la esfera. Estas variaciones consistirán fundamentalmente en sustituir una de las acotaciones para la curvatura seccional por condiciones de diámetro o de volumen, o por otra condición diferente de curvatura. Dichos resultados han sido elegidos de manera que tengan interpretación intuitiva o no necesiten de un marco teórico más profundo que el aquí presentado. Así, se pretende que estos resultados proporcionen una idea de las diferentes versiones del teorema de la esfera desarrolladas a lo largo de los años y que, aún hoy, siguen apareciendo. Finalmente, presentaremos algunas referencias sobre desarrollos relacionados con el teorema de la esfera que no han sido incluidos en el texto, debido a su grado de extensión y complejidad.

Alberto Martos Gómez  
Murcia, 26 de Junio de 2014.

# Un poco de historia

El teorema de la esfera es un famoso resultado de geometría riemanniana que surgió, de manera natural, de la evolución seguida en la geometría diferencial y pertenece a una clase de resultados que buscan relacionar topología y curvatura. El resultado tiene un primer origen claro en el año 1898 cuando Hadamard demostró un resultado similar para superficies regulares. En concreto, demostró que cualquier superficie de  $\mathbb{R}^3$  compacta, orientada y con curvatura de Gauss positiva debía ser difeomorfa a una esfera (véase [13]). De manera natural, este hecho planteó la incógnita de extender el resultado a estructuras más generales, como las variedades riemannianas. Lo que se trató entonces fue de dotar de cierta «libertad de movimiento» a la curvatura de una variedad a la hora de alejarse de la curvatura constante de la esfera. Así, la manera de formular esta «lejanía» a dicha curvatura se realiza mediante la acotación de la curvatura seccional de la variedad. Lo que se busca es dar un margen de variación para esta curvatura sin que la variedad deje de ser homeomorfa a una esfera. Si  $K_{max}$  denota el máximo de todas las curvaturas seccionales de la variedad (véase el capítulo de preliminares para más información), el teorema de la esfera, debido a Klingenberg y Berger principalmente, afirma lo siguiente:

**Teorema 1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta y simplemente conexa, cuya curvatura seccional  $K$  satisfice*

$$0 < hK_{max} < K \leq K_{max}. \quad (1)$$

*Si  $h = 1/4$ , entonces  $M$  es homeomorfa a una esfera.*

Al número  $h$  se le llama el pinzamiento (del inglés «pinching») de  $M$ . Notemos además que, multiplicando la métrica por una constante, se tiene  $K_{max} = 1$  y la condición (1) equivale a:

$$0 < h < K \leq 1. \quad (2)$$

Es decir, la curvatura seccional de la variedad pertenece al intervalo  $(h, 1]$ . De manera más general, tenemos la siguiente definición:

**Definición 1.** Sea  $M$  una variedad riemanniana y  $h \in (0, 1)$  un número real, decimos que  $M$  es (globalmente)  $h$ -pinzada si su curvatura seccional satisface (2). Además, si ambas desigualdades son estrictas, decimos que  $M$  es estrictamente  $h$ -pinzada.

**Nota 1.** En ocasiones, el hecho de ser  $h$ -pinzada puede ir referido a la métrica de la variedad.

Como consecuencia de esta definición, el teorema de la esfera puede reescribirse en los términos que siguen: «Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta y simplemente conexa. Si, además,  $M$  es  $1/4$ -pinzada entonces es homeomorfa a una esfera».

En 1926, el matemático alemán Heinz Hopf demostró que una variedad riemanniana compacta, simplemente conexa y con curvatura constante positiva igual a 1 era isométrica a la esfera. A raíz de este resultado, el propio Hopf dejó abierta la cuestión de si una variedad compacta, simplemente conexa y  $h$ -pinzada era una esfera desde el punto de vista topológico. Dicha pregunta encontraría una primera respuesta años más tarde, en 1949, cuando el americano Harry Rauch demostrara en un artículo (véase [23]) el teorema de la esfera para  $h \approx 3/4$ . El propio Rauch afirmaba en dicho artículo desconocer el valor de  $h$  óptimo para que se cumpliera el teorema. Así pues, durante los años siguientes el propósito de numerosos matemáticos fue el de encontrar este valor óptimo.

La siguiente aportación al teorema la realizó, casi diez años más tarde, Klingenberg (véase [16]), quien introdujo en el problema un conjunto especial de puntos de la variedad, asociado a un punto  $p \in M$  y conocido como «lugar de corte». El propio Klingenberg estimó la distancia de un punto a su lugar de corte y con ello demostró que el teorema era cierto para  $h \approx 0.55$ , siempre y cuando la dimensión de la variedad fuese par. Usando el teorema de Topogonov y la estimación ya mencionada, Berger probó el teorema para  $h = 1/4$  y también en dimensión par (véase [1]). Más tarde, se demostró que el uso del teorema de Topogonov no era necesario, tal y como ilustró Tsukamoto (véase [27]).

Finalmente, en 1961, Klingenberg (véase [17]) extendió a dimensión impar su estimación de la distancia de un punto a su lugar de corte y, junto al trabajo de Berger, quedó demostrado el teorema para  $h = 1/4$  en dimensión arbitraria. Hay que destacar que en dimensión par esta  $h$  es óptima, ya que si sustituimos la condición (2) por

$$0 < 1/4 \leq K \leq 1, \quad (3)$$

tenemos que el teorema deja de ser cierto. En efecto, el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  con  $n > 1$  es simplemente conexo, su curvatura cumple (3) y, sin embargo, no es homeomorfo a una esfera. Manteniendo la condición (3), para el caso par la respuesta viene dada por el conocido teorema de rigidez de Berger (véase [1], teorema 2), el cual afirma que si la variedad no es homeomorfa a la esfera, entonces lo es

a un espacio simétrico. Más aún, en el año 1987, el matemático Durumeric (véase [8]) demostró un resultado análogo, garantizando la existencia de un  $\varepsilon(n)$  sujeto a la dimensión de la variedad y de manera que ésta es homeomorfa a la esfera o a un espacio simétrico para  $h = 1/4 - \varepsilon(n)$ . Actualmente se desconoce el valor óptimo de este  $\varepsilon(n)$ .

En cuanto al caso de dimensión impar, se desconoce si el valor de  $h$  es óptimo. Por último, conviene destacar que cuando trabajamos en dimensiones 2 y 3 el teorema continúa siendo cierto simplemente si  $h \geq 0$ . En el caso  $n = 2$  el resultado es consecuencia directa del teorema de Gauss-Bonnet, mientras que para  $n = 3$  la prueba se debe a Hamilton (véase el apartado de flujo de Ricci para más información).



# Capítulo 1

## Conceptos básicos y notación

El objetivo del capítulo es introducir la notación elegida, así como algunos resultados y teoremas previos que nos serán de utilidad más adelante. Ante la amplia extensión de la teoría de geometría de Riemann, las definiciones, propiedades y teoremas más usuales, o que no requieran de comentarios concretos, se darán por conocidos. No obstante, un desarrollo detallado de esta teoría puede encontrarse en cualquier texto de geometría riemanniana. Dentro de estos textos, se recomiendan [7] y [18].

### 1.1. Notación y curvatura

De manera intuitiva, una variedad riemanniana  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$  equipada con un tensor métrico  $g$ . Dicho tensor métrico asigna a cada punto  $p \in M$  un producto escalar  $g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  definido sobre el tangente de  $M$  en  $p$ , que tiene estructura de espacio vectorial y denotamos como  $T_pM$ . Además, esta asignación se hace de manera diferenciable. Normalmente a  $g$  se le conoce como la métrica de la variedad riemanniana  $M$  (también denotada  $(M, g)$ ). A lo largo del texto, y salvo que se mencione lo contrario, al hablar de una variedad  $M$  haremos referencia a una variedad riemanniana de dimensión  $n$ , con una métrica  $g$  (que usualmente denotaremos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) y  $\nabla$  su conexión de Levi-Civita asociada. Asimismo, con  $\mathfrak{X}(M)$  hacemos referencia al conjunto de los campos de vectores tangentes a la variedad  $M$ , donde, recordemos, para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y cada  $p \in M$  se tiene que el campo  $X$  asigna a  $p$  un vector tangente  $X_p \in T_pM$ .

Por otro lado, sea  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow M$  una curva diferenciable con  $\alpha(0) = p$ , dado  $a > 0$ , a la restricción  $\alpha : [0, a] \rightarrow M$  la llamaremos el segmento de  $\alpha$  uniendo  $p$  y  $\alpha(a)$  y denotaremos su longitud como  $\ell(\alpha) = \ell_0^a$ . En ocasiones, dada una curva  $\alpha$  uniendo dos puntos concretos, se denotará por  $\ell(\alpha)$  la longitud del segmento

de dicha curva que va de un punto a otro. Con  $\mathfrak{X}(\alpha)$  denotaremos los campos de vectores tangentes a la curva  $\alpha$ . Así, sea  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$  un campo a lo largo de  $\alpha$ , para cada  $t \in [0, \infty)$  se tiene que  $Z(t) \in T_{\alpha(t)}M$ . Por último, recordemos que la conexión de Levi-Civita  $\nabla$  determina una aplicación en el conjunto  $\mathfrak{X}(\alpha)$ , llamada derivada covariante (a lo largo de  $\alpha$ ) y que denotaremos por  $\frac{D}{dt}$ .

En cuanto a la curvatura de una variedad riemanniana, ésta viene descrita por lo que se conoce como el tensor curvatura de la variedad (o tensor curvatura de Riemann), el cual se define a partir del operador curvatura. La definición formal de este operador no es única, pues dependiendo de la fuente consultada ésta puede variar en el signo. De este modo es conveniente fijar la definición usada a lo largo del texto.

**Definición 1.1.1.** *Llamamos operador curvatura de Riemann de  $M$  a la aplicación  $R: \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por:*

$$R(X, Y, Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  y donde  $[X, Y]$  representa el corchete de Lie aplicado a los campos  $X$  e  $Y$ .

De esta manera, el tensor curvatura se puede definir como el tensor que, para cada  $p \in M$ , asigna una aplicación multilinear  $R_p: T_p M \times T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  con  $R_p(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y, Z), T \rangle_p$ . Por simplicidad, y cuando no haya lugar a confusión, denotaremos indistintamente el operador y el tensor curvatura como  $R$  y además omitiremos el punto sobre el que actuamos.

Pese a tratarse de la generalización de la curvatura de Gauss, el tensor curvatura de Riemann es un objeto que goza de una complejidad mucho mayor y consecuentemente de una gran dificultad a la hora de concebirle una interpretación a nivel intuitivo. Es por ello que se considera lo que se conoce como curvatura seccional, que tiene la misma interpretación geométrica que la citada curvatura de Gauss para superficies. Para entender esta curvatura, sea  $\pi$  un plano contenido en  $T_p M$  y tangente a la variedad en un punto  $p \in M$ , vamos a considerar todas las geodésicas que parten de  $p$  y son tangentes a  $\pi$ . Notemos que la unión de todas estas geodésicas forma una superficie de dos dimensiones  $\Sigma \subset M$ . Teniendo en cuenta estas observaciones, llamamos curvatura seccional  $K(\pi)$  a la curvatura de Gauss de la superficie 2-dimensional  $\Sigma$  considerada previamente. Formalmente tenemos:

**Definición 1.1.2.** *Sea  $p \in M$  un punto y  $\sigma \subset T_p M$  un subespacio 2-dimensional. Dada una base  $\{X, Y\}$  de  $\sigma$ , llamamos curvatura seccional de  $M$  en el punto  $p$  asociada a  $\sigma$  al número real*

$$K_p(X, Y) = K(\sigma) = \frac{\langle R(X, Y, X), Y \rangle}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

donde  $|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ .

Es sencillo comprobar que la definición anterior no depende de la base elegida para  $\sigma$ . Recordemos también que la curvatura de Riemann  $R$  queda totalmente determinada por las curvaturas seccionales de todos los planos 2-dimensionales  $\sigma$  de la variedad. De esta manera, denotaremos normalmente por  $K_{max}$  y  $K_{min}$  al supremo y al ínfimo de todas estas curvaturas seccionales respectivamente. De nuevo omitiremos el punto  $p$  cuando esto no dé pie a equivocación.

Cuando la curvatura seccional es constante, podemos dar la siguiente caracterización:

**Lema 1.1.1.** *Sean  $M$  una variedad riemanniana y un punto  $p \in M$ . Consideremos la aplicación trilineal  $R' : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  que cumple*

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle.$$

para todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ . En estas condiciones,  $M$  tiene curvatura seccional constante igual a  $K_o$  si, y solo si,  $R = K_o R'$ .

Por último, introducimos dos tipos más de curvatura: la curvatura de Ricci, que posee de una gran importancia en la actualidad, y su contracción, conocida como curvatura escalar. Así, sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión  $n$  y  $p \in M$  un punto de ésta, consideremos  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormal de  $T_p M$ . En estas condiciones, para cada  $X, Y \in T_p M$  la curvatura de Ricci viene dada por

$$\text{Ric}_p(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(X, e_i, Y), e_i \rangle.$$

Por otro lado, la curvatura escalar se define como

$$S_p = \sum_{k=1}^n \text{Ric}(e_k, e_k).$$

## 1.2. Campos de Jacobi

Para el estudio de los campos de Jacobi introduciremos previamente la ecuación de Jacobi, que es en la que se basa su definición. Una vez introducidos se verán algunas propiedades y consecuencias que resultarán útiles más adelante.

**Definición 1.2.1.** *Sea  $M$  una variedad y  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$  una geodésica en  $M$ . Dado  $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$  un campo de vectores a lo largo de  $\gamma$ , se dice que  $J$  cumple la ecuación de Jacobi si:*

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R(\gamma'(t), J(t), \gamma'(t)) = 0 \quad (1.1)$$

Naturalmente, se conoce como ecuación de Jacobi a la ecuación dada en (1.1). A partir de esta ecuación tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.2.2.** *Sea  $M$  una variedad y  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$  una geodésica en  $M$ . Dado  $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$  un campo de vectores a lo largo de  $\gamma$ , se dice que  $J$  es un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  si cumple la ecuación (1.1).*

Consideremos ahora  $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$  una base ortonormal de campos paralelos a lo largo de  $\gamma$ . Dado  $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$  un campo a lo largo de  $\gamma$  se tiene:

$$J(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i(t)$$

Y debido a que los  $e_i$  son paralelos la segunda derivada queda:

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) = \sum_{i=1}^n f_i''(t) e_i(t)$$

Como  $R(\gamma'(t), J(t), \gamma'(t)) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , si denotamos  $a_{ij}(t) = \langle R(\gamma'(t), e_i(t), \gamma'(t)), e_j(t) \rangle$ , tenemos la siguiente expresión:

$$R(\gamma'(t), J(t), \gamma'(t)) = \sum_{i,j=1}^n f_i(t) a_{ij}(t) e_j(t)$$

Por tanto, la ecuación de Jacobi es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones:

$$f_j''(t) + \sum_{i=1}^n a_{ij}(t) f_i(t) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

Que se trata de un sistema lineal de segundo orden. Así, dadas las condiciones iniciales  $J(0)$  y  $\frac{DJ}{dt}(0)$ , existen  $2n$  soluciones linealmente independientes. Damos ahora dos ejemplos de campos de Jacobi.

**Ejemplo 1.2.1.** *Dada  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$  una geodésica, se tiene que  $t\gamma(t)$  es un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$ . En efecto, por ser  $\gamma$  geodésica se verifica*

$$\frac{D^2(t\gamma')}{dt^2} = \frac{D\gamma'}{dt} = 0,$$

así como

$$R(\gamma', t\gamma', \gamma') = tR(\gamma', \gamma', \gamma') = 0$$

luego la ecuación (1.1) se cumple trivialmente.

El ejemplo anterior nos lleva a considerar únicamente campos de Jacobi normales a  $\gamma'$ . El siguiente ejemplo tiene especial importancia, pues caracteriza los campos de Jacobi en variedades de curvatura seccional constante. En ocasiones denotaremos  $\frac{DJ}{dt}$  como  $J'$ .

**Ejemplo 1.2.2. (Campos de Jacobi en una variedad de curvatura seccional constante).** *Sea  $M$  una variedad riemanniana con curvatura seccional constante  $K$ , y sea  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$  una geodésica p.p.a., tomemos  $J \in \mathfrak{X}(M)$  un campo de Jacobi normal a  $\gamma'$ . Puesto que la curvatura seccional de  $M$  es constante, tenemos que  $R = KR'$  donde  $R' : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  es diferenciable y cumple*

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle$$

para todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ . En consecuencia, dado  $T \in \mathfrak{X}(M)$  un campo arbitrario, se tiene

$$\begin{aligned} \langle R(\gamma', J, \gamma'), T \rangle &= \langle KR'(\gamma', J, \gamma'), T \rangle \\ &= K[\langle \gamma, \gamma \rangle \langle J, T \rangle - \langle \gamma', T \rangle \langle J, \gamma' \rangle] \\ &= K \langle J, T \rangle \end{aligned}$$

y como la igualdad es válida para todo  $T \in \mathfrak{X}(M)$ , se sigue:

$$R(\gamma', J, \gamma') = KJ.$$

Este último hecho implica que la ecuación de Jacobi para variedades de curvatura seccional constante adopta la forma:

$$\frac{D^2 J}{dt} + KJ = 0.$$

Se trata pues de una ecuación lineal con coeficientes constantes, cuya solución para las condiciones iniciales  $J(0) = 0$  y  $J'(0) = w(0)$  es:

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(t), & \text{si } K > 0 \\ tw(t), & \text{si } K = 0 \\ \frac{\text{senh}(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} w(t), & \text{si } K < 0. \end{cases}$$

con  $w \in \mathfrak{X}(M)$  paralelo y cumpliendo  $|w(t)| = 1$ .

Veamos ahora que, esencialmente, existe un único campo de Jacobi a lo largo de una geodésica con condición inicial 0. De forma más concreta, dada  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$  una geodésica con  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = v$ , tomemos  $J$  un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  con  $J(0) = 0$  y  $\frac{DJ}{dt}(0) = w$ . Como  $J \in \mathfrak{X}(M)$ , podemos considerar  $w$  como un elemento de  $T_v(T_p M)$  y construir una curva  $v(s)$  en  $T_p M$  cumpliendo  $v(0) = v$  y  $v'(0) = w$ . Esto nos lleva a la siguiente proposición:

**Proposición 1.2.1.** *En las condiciones del párrafo anterior, sea  $f(t, s) = \exp_p(\frac{t}{\ell}v(s))$ , definamos el campo de Jacobi  $\tilde{J}$  dado por  $\tilde{J}(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ . Entonces  $\tilde{J} = J$  en  $[0, \ell]$ .*

*Demostración.* Es sencillo probar que  $\tilde{J}$  define un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  y además  $\tilde{J}(0) = 0$ . Notemos también que, por la definición de diferencial, se tiene

$$d(\exp_p)_{tv}(tw) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \exp_p(\beta(s))$$

donde  $\beta$  es una curva en  $T_pM$  cumpliendo  $\beta(0) = tv$ ,  $\beta'(0) = tw$ . Tomando entonces  $\beta(s) = tv(s)$  obtenemos

$$d(\exp_p)_{tv}(tw) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \exp_p(tv(s)) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0).$$

Así, para  $s = 0$  la derivada covariante de  $\frac{\partial f}{\partial s}$  se calcula como

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{D}{\partial t} (d(\exp_p)_{tv}(tw)) = \frac{D}{\partial t} (td(\exp_p)_{tv}(w)) \\ &= d(\exp_p)_{tv}(w) + t \frac{D}{\partial t} ((d \exp_p)_{tv}(w)). \end{aligned}$$

Por otro lado, para  $t = 0$  se tiene

$$\frac{D\tilde{J}}{dt}(0) = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = d(\exp_p)_0(w) = w.$$

Es decir, tenemos  $J$  y  $\tilde{J}$  dos campos a lo largo de  $\gamma$  con  $J(0) = \tilde{J}(0) = 0$  y  $\frac{DJ}{dt}(0) = \frac{D\tilde{J}}{dt}(0) = w$ . Así, de la unicidad de campos de vectores deducimos que  $J = \tilde{J}$ .  $\square$

**Nota 1.2.1.** *En resumen, la proposición anterior dice que, dada la geodésica  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = v$ , el campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  con condiciones iniciales  $J(0) = 0$  y  $J'(0) = w$  es:*

$$J(t) = d(\exp_p)_{tv}(tw), \quad t \in [0, \ell]$$

### 1.3. Puntos conjugados

Dedicamos la sección a introducir lo que se conoce como puntos conjugados, concepto que desempeñará un papel importante en la demostración del teorema de la esfera. El objetivo principal es relacionar estos puntos con singularidades de la aplicación exponencial.

**Definición 1.3.1.** Sea  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$  una geodésica. Dado  $t_o \in [0, \ell]$ , se dice que  $\gamma(t_o)$  es conjugado de  $\gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$  si existe un campo de Jacobi  $J \in \mathfrak{X}(M)$  no idénticamente nulo y tal que  $J(t_o) = J(0) = 0$ . Asimismo, el número de campos linealmente independientes para los que  $\gamma(0)$  y  $\gamma(t_o)$  son conjugados se conoce como multiplicidad del punto conjugado  $\gamma(t_o)$ .

Evidentemente, si  $\gamma(t_o)$  es conjugado de  $\gamma(0)$ , entonces  $\gamma(0)$  también lo es de  $\gamma(t_o)$ . Otro hecho importante es que si  $M$  tiene dimensión  $n$ , existen únicamente  $n$  campos de Jacobi que sean linealmente independientes a lo largo de una geodésica  $\gamma$  y que se anulen en  $\gamma(0)$ . De aquí deducimos que la multiplicidad de un punto conjugado nunca excede el valor  $n - 1$ .

**Definición 1.3.2.** Dado  $p \in M$ , el conjunto formado por todos los puntos conjugados de  $p$  a lo largo de cualquier geodésica partiendo de él se conoce como lugar de los puntos conjugados del punto  $p$ , y se denota por  $C(p)$ . Es decir,

$$C(p) = \{q \in M : \exists \gamma : [0, \ell] \rightarrow M \text{ geodésica de } \gamma(0) = p \text{ conjugado con } \gamma(s_o) = q\}.$$

**Ejemplo 1.3.1.** Vamos a considerar la variedad

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$$

con la métrica usual. Como  $\mathbb{S}^n$  tiene curvatura seccional constante igual a 1, el ejemplo 1.2.2 nos dice que  $J(t) = \text{sen}(t)w(t)$  es un campo de Jacobi en  $\mathbb{S}^n$  para las condiciones iniciales  $J(0) = 0$ ,  $J'(0) = w(0)$  y cualquier geodésica  $\gamma$ . Así, puesto que  $J(0) = J(\pi) = 0$ , se tiene que  $\gamma(0)$  y  $\gamma(\pi)$  son conjugados a lo largo de cualquier geodésica  $\gamma$ . Observemos también que  $C(p) = \{-p\}$  para todo  $p \in \mathbb{S}^n$ .

Estamos ya en disposición de relacionar los puntos conjugados con las singularidades de la aplicación exponencial. El resultado es el siguiente:

**Proposición 1.3.1.** Sean  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$  una geodésica y  $t_o \in [0, \ell]$  con  $p = \gamma(0)$ ,  $q = \gamma(t_o)$  y  $v = \gamma'(0)$ . Se tiene que  $\gamma(t_o) = q$  es conjugado de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  si, y solo si,  $v_o = t_o v$  es un punto crítico de  $\exp_p$ .

*Demostración.* Por definición,  $p$  y  $q$  son conjugados si, y solo si, existe un campo de Jacobi  $J \in \mathfrak{X}(M)$  con  $J(0) = J(t_o) = 0$ . Sea  $w = J'(0)$ , por la proposición 1.2.1 tenemos que

$$J(t) = d(\exp_p)_{t_o v}(tw), \quad t \in [0, \ell]$$

y notemos que este campo es no idénticamente nulo si, y solo si,  $w \neq 0$ . Por tanto,  $p$  y  $q$  son conjugados si, y solo si,  $0 = J(0) = J(t_o) = d(\exp_p)_{t_o v}(t_o w)$  con  $w \neq 0$  y

para algún  $t_o \in [0, \ell]$ . Como  $d(\exp_p)_{t_o v}$  es una aplicación lineal y continua, tenemos además que

$$d(\exp_p)_{t_o v}(t_o w) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_o w = 0 \\ \text{ó} \\ d(\exp_p)_{t_o v} = 0 \end{cases}$$

y como  $t_o w \neq 0$ , se tiene que  $d(\exp_p)_{t_o v}(t_o w) = 0$  si, y solo si,  $d(\exp_p)_{t_o v} = 0$ . En consecuencia,  $p$  y  $q$  son conjugados si, y solo si,  $t_o v$  es un punto crítico de  $\exp_p$ .  $\square$

## 1.4. Fórmulas de variación y teorema de Bonnet-Myers

Dedicamos esta sección a introducir la terminología empleada para las variaciones de curvas, así como las fórmulas de variación de la energía. Lo haremos únicamente para curvas diferenciables, pues son las curvas con las que trabajaremos y de esta manera se simplifica la notación. No obstante, los resultados y definiciones que aquí se presentan pueden ser enunciados en términos de curvas diferenciables a trozos, conservándose su validez. Remitimos al lector interesado a la obra [7], capítulo 9, para dicho estudio. Finalmente, terminamos la sección enunciando el teorema de Bonnet-Myers, que será utilizado con asiduidad.

**Definición 1.4.1.** *Sea  $\alpha : [0, a] \rightarrow M$  una curva diferenciable. Una variación de  $\alpha$  es una aplicación continua  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  que cumple:*

(a)  $f(0, t) = \alpha(t)$  para  $t \in [0, a]$ ,

(b)  $f_s(t) := f(s, t)$  es una curva diferenciable para cada  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Además, decimos que una variación es propia si  $f_s(0) = \alpha(0)$  y  $f_s(a) = \alpha(a)$  para todo  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Cuando la aplicación  $f$  es diferenciable, decimos que la variación es diferenciable. Para cada  $s$ , a la curva  $f_s(t)$  se le llama una curva de la variación. De manera análoga, fijado  $t_o$ , llamamos curva transversal a la variación en  $t_o$  a  $f_{t_o}(s) := f(s, t_o)$ .

**Definición 1.4.2.** *Sea  $\alpha : [0, a] \rightarrow M$  una curva diferenciable y  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  una variación de ésta. Llamamos campo variacional de  $f$  al campo de vectores a lo largo de  $\alpha$*

$$V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{s=0} (s, t).$$

Notemos que el campo variacional de una variación propia cumple  $V(0) = V(a) = 0$ . Del mismo modo que a cada variación le corresponde un campo variacional, dado un campo de vectores  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ , existe una variación  $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  de manera que  $Z(t)$  es campo variacional de dicha variación. Más aún, si  $Z(0) = Z(a) = 0$ , esta variación puede tomarse propia.

Una variación no es más que la manera de trabajar con las curvas «vecinas» de una curva  $\alpha$  dada. Así, podemos considerar cómo varían las longitudes de estas curvas. Para ello, utilizamos lo que se conoce como el operador longitud

$$L(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \right| dt, \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

que, para cada  $s$ , no es otra cosa que la longitud de la curva  $f_s(t)$ . De la misma manera, definimos la función energía  $E(s)$  como:

$$E(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \right|^2 dt, \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Dada una curva  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ , podemos aplicar estos operadores a dicha curva de la manera que sigue:

$$L(\gamma) = \int_0^a \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt, \quad E(\gamma) = \int_0^a \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 dt.$$

Por otro lado, de la desigualdad de Cauchy Schwarz

$$\left( \int_0^a fg \, dt \right)^2 \leq \int_0^a f^2 \, dt \cdot \int_0^a g^2 \, dt.$$

tomando  $f \equiv 1$  y  $g = \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|$  obtenemos que

$$L(\gamma)^2 \leq aE(\gamma),$$

ocurriendo la igualdad si, y solo si,  $g$  es constante. Este hecho implica además que, dados  $p, q \in M$  dos puntos, las curvas que minimizan el operador energía (entre todas las curvas que unen  $p$  y  $q$ ) están parametrizadas de manera proporcional a la longitud de arco.

El comportamiento de los operadores  $L(s)$  y  $E(s)$  está determinado por las fórmulas de variación. La primera de ellas dice lo siguiente:

**Proposición 1.4.1. (Primera fórmula de variación de la energía).** *Sea  $\alpha : [0, a] \rightarrow M$  una curva diferenciable y  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  una variación de ésta con campo variacional  $V(t)$ . Si  $E : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  es la energía de  $f$ , entonces:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E'(0) = & - \int_0^a \left\langle V(t), \frac{D}{dt} \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle dt \\ & - \left\langle V(0), \frac{d\alpha}{dt}(0) \right\rangle + \left\langle V(a), \frac{d\alpha}{dt}(a) \right\rangle, \end{aligned}$$

Así, tenemos que una curva diferenciable  $\alpha$  es geodésica si, y solo si,  $E'(0) = 0$  para cada variación propia de ésta. Este hecho se conoce como la caracterización variacional de las geodésicas. En esta situación, el interés se centra en la segunda derivada de la energía:

**Proposición 1.4.2. (Segunda fórmula de variación de la energía).** Sean  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  una geodésica y  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  una variación propia de ésta. Si  $E(s)$  es la energía de dicha variación, se tiene:

$$\frac{1}{2}E''(0) = - \int_0^a \left\langle V(t), \frac{D^2V}{dt^2} + R\left(\frac{d\gamma}{dt}, V, \frac{d\gamma}{dt}\right) \right\rangle dt$$

donde  $V(t)$  representa el campo variacional de  $f$ .

**Nota 1.4.1.** Es posible dar fórmulas de primera y segunda variación para el operador longitud. Estas fórmulas son totalmente análogas a las deducidas para la energía, y el desarrollo pertinente puede encontrarse, por ejemplo, en la sección 4 del capítulo 5 de [6].

Como aplicación de la segunda fórmula de variación tenemos el teorema de Bonnet-Myers, que dice lo siguiente:

**Teorema 1.4.1. (Bonnet-Myers).** Sea  $M$  una variedad riemanniana completa de dimensión  $n$ . Si la curvatura de Ricci de  $M$  satisface

$$\text{Ric}_p(X, Y) \geq \frac{1}{r^2} > 0,$$

para algún  $r$  y para cada  $p \in M$  y  $X, Y \in T_pM$ , entonces  $M$  es compacta y su diámetro cumple  $\text{diam}(M) \leq \pi r$ .

Cuando trabajamos con la curvatura seccional de una variedad, como corolario de este teorema se tiene:

**Corolario 1.4.1.** Sea  $M$  una variedad riemanniana completa. Si la curvatura seccional  $K$  de  $M$  cumple

$$K \geq \frac{1}{r^2} > 0$$

para algún  $r$ , entonces  $M$  es compacta y, además,  $\text{diam}(M) \leq \pi r$ .

Trabajando con variaciones podemos dar un resultado sobre existencia de puntos conjugados a lo largo de una curva. Presentamos únicamente el enunciado, remitiéndonos al corolario 2.9 del capítulo 11 de [7] para su demostración.

**Proposición 1.4.3.** Sea  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  una geodésica en  $M$  tal que  $\gamma(0)$  y  $\gamma(a)$  son conjugados. Entonces  $\gamma$  no tiene puntos conjugados en  $(0, a)$  si, y solo si, para toda variación propia de  $\gamma$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $E(s) < E(\delta)$  para todo  $0 < |s| < \delta$ . En particular, si  $\gamma$  es minimizante, entonces no tiene puntos conjugados en  $(0, a)$ .

## 1.5. Teorema de comparación de Rauch

Acabamos los preliminares presentando algunas consecuencias del famoso teorema de Rauch, cuyo enunciado y demostración pueden consultarse en [7], página 215. En concreto, exponemos dos resultados que resultarán fundamentales a la hora de demostrar el teorema de la esfera.

El primero de ellos busca acotar la distancia entre puntos conjugados a lo largo de una geodésica. El enunciado es el siguiente:

**Proposición 1.5.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión  $n$ , supongamos que su curvatura seccional  $K$  satisface*

$$0 < L \leq K \leq H,$$

para ciertos  $H$  y  $L$  constantes y positivos. Sea  $\gamma$  una geodésica de  $M$ , entonces la distancia  $d$  entre dos puntos conjugados consecutivos a lo largo de  $\gamma$  cumple

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}}.$$

Nuestro segundo resultado nos permite estimar las longitudes de las curvas de una variedad riemanniana  $M$ , en función de las de otra variedad  $\widetilde{M}$ , siempre y cuando la curvatura de la primera esté acotada por la de la segunda. Formalmente, esta condición es que para todo  $p \in M, \tilde{p} \in \widetilde{M}, \sigma \subset T_p M$  y  $\tilde{\sigma} \subset T_{\tilde{p}} \widetilde{M}$  se tiene  $\widetilde{K}_{\tilde{p}}(\tilde{\sigma}) \geq K_p(\sigma)$ . Consideremos también un  $r > 0$  tal que la exponencial  $\exp_p$  restringida al conjunto  $B_r(0) \subset T_p M$  (la bola de radio  $r$  y centro 0 en  $T_p M$ ) es un difeomorfismo, y de manera que  $\exp_{\tilde{p}}$  es no singular en  $\widetilde{B}_r(0) \subset T_{\tilde{p}} \widetilde{M}$ . Pasamos a enunciar el resultado, al que en ocasiones nos referimos también como teorema de comparación de Rauch.

**Proposición 1.5.2.** *En las condiciones del párrafo anterior, y fijada  $i : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \widetilde{M}$  una isometría lineal, para cada curva diferenciable  $\alpha : [0, a] \rightarrow \exp_p(B_r(0)) \subset M$  se tiene que*

$$\ell(\alpha) \geq \ell(\tilde{\alpha}),$$

donde  $\tilde{\alpha}(s) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(\alpha(s)), s \in [0, a]$ .



# Capítulo 2

## El teorema de la esfera

El contenido principal de este capítulo es el desarrollo de la demostración del teorema de la esfera de Klingenberg. Este desarrollo, de carácter geométrico, ha sido elaborado siguiendo, principalmente, el camino marcado en [7], capítulo 13. Asimismo, es pertinente remarcar que la mayoría de las imágenes expuestas, pese a ser de elaboración propia, también han sido inspiradas en las existentes en dicha fuente.

### 2.1. Lugar de corte y radio de inyectividad

En esta sección introduciremos dos conceptos que son fundamentales a la hora de entender y demostrar el teorema de la esfera. Hablaremos primero de lo que se conoce como lugar de corte de un punto  $p \in M$ , concepto que fue considerado dentro del teorema de la esfera por Klingenberg (véase [16]). Intuitivamente, viene a ser el conjunto, dentro de la variedad  $M$ , de los puntos donde las geodésicas que parten de  $p$  dejan de ser minimizantes. En segundo lugar trataremos el radio de inyectividad de una variedad  $M$ , que no es otra cosa que el mayor número real  $i(M)$  que asegura la existencia de una única geodésica minimizante uniendo dos puntos  $p, q \in M$  cuya distancia sea menor que este radio. Tras el estudio de estos dos conceptos podremos abordar el cálculo de la estimación para el radio de inyectividad, etapa crucial en la demostración del teorema.

En lo sucesivo, consideraremos variedades riemannianas completas, y cuando hablemos de geodésicas, lo haremos suponiendo que están parametrizadas por el arco y definidas en  $[0, +\infty)$ . Así,  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  representará una geodésica parametrizada por el arco que parte de  $p \in M$ . Del mismo modo, dado  $v \in T_p M$  denotaremos por  $\gamma_v : [0, +\infty) \rightarrow M$  a la única geodésica (salvo reparametrizaciones) con  $\gamma_v(0) = p$  y  $\gamma'_v(0) = v$ .

Por otro lado, como consecuencia de la propiedad minimizante de las geodésicas, dada  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  sabemos que para  $t \in [0, +\infty)$  suficientemente pequeño,  $\gamma$  es la curva que minimiza la distancia entre  $p$  y  $\gamma(t)$ . Es decir:  $d(p, \gamma(t)) = \ell_0^t(\gamma) = t$ . Notemos también que, dado  $t_o \in [0, \infty)$  de manera que  $\gamma$  no minimiza la distancia entre  $p$  y  $\gamma(t_o)$ , se tiene que tampoco lo hace para todo  $\gamma(t)$  con  $t > t_o$ . Análogamente, si  $d(p, \gamma(t_o)) = t_o$  (es decir,  $\gamma$  minimiza la distancia entre  $p$  y  $\gamma(t_o)$ ), entonces  $\gamma$  también minimiza la distancia entre  $p$  y  $\gamma(t)$  para cada  $t < t_o$ . Como consecuencia, el conjunto  $\{t > 0 : d(p, \gamma(t)) = t\}$  es de la forma  $[0, +\infty)$  o de la forma  $[0, t_o]$  para algún  $t_o > 0$ . Estamos ya en disposición de dar la siguiente definición:

**Definición 2.1.1.** Sean  $p \in M$  un punto y  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  una geodésica en  $M$ . Llamamos punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  al punto  $\gamma(t_o)$ , con  $t_o$  cumpliendo:

$$\{t > 0 : d(p, \gamma(t)) = t\} = [0, t_o].$$

Si este conjunto es igual a  $[0, +\infty)$ , se dice que no existe dicho punto.

Considerando todas las geodésicas que parten de  $p$ , tenemos:

**Definición 2.1.2.** Dado  $p \in M$  llamamos lugar de corte de  $p$  al conjunto  $C_m(p)$ , formado por la unión de todos los puntos de corte de  $p$  a lo largo de todas las geodésicas que parten de dicho punto.

**Nota 2.1.1.** Si  $M$  es una variedad riemanniana compacta entonces su diámetro es finito y, como consecuencia, dados  $p \in M$  y  $\gamma$  geodésica partiendo de  $p$  se tiene que siempre existe el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ . En efecto:

Supongamos que  $\text{diam}(M) = \sup\{d(p, q) : p, q \in M\} = C < +\infty$  y observemos que, si  $t > C$ , entonces  $d(p, \gamma(t)) \leq \text{diam}(M) = C < t = \ell_0^t(\gamma)$ , luego  $\gamma$  no minimiza la distancia entre  $p$  y  $\gamma(t)$  cuando  $t > C$ . En consecuencia

$$\{t > 0 : d(p, \gamma(t)) = t\} \subseteq [0, C]$$

y el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  siempre existe.

**Ejemplo 2.1.1.** Sea  $\mathbb{S}^2$  la esfera 2-dimensional y  $p \in \mathbb{S}^2$  un punto de ésta, recordemos que las geodésicas son los arcos de circunferencias maximales y que éstas dejan de ser minimizantes en el punto antípoda del que parten. Como consecuencia, el lugar de corte de  $p$  es su punto antípoda. Lo mismo ocurre en el caso de  $\mathbb{S}^n$  con  $n > 2$ .

La siguiente proposición es una propiedad fundamental del lugar de corte que lo relaciona con los puntos conjugados.

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  una geodésica y  $\gamma(t_o)$  el punto de corte de  $p = \gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$ . Se tiene, al menos, una de las siguientes afirmaciones:*

- (a)  $\gamma(t_o)$  es el primer punto conjugado de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ .
- (b) Existe  $\sigma \neq \gamma$  una geodésica uniendo  $p$  y  $\gamma(t_o)$  tal que  $\ell(\sigma) = \ell(\gamma)$

*Recíprocamente, si (a) o (b) se cumplen, entonces existe  $\tilde{t} \in (0, t_o]$  tal que  $\gamma(\tilde{t})$  es el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ .*

*Demostración.* Consideremos  $\{t_o + \varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión con  $\lim_n \varepsilon_n = 0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomemos el punto  $\gamma(t_o + \varepsilon_n)$  y la geodésica minimizante  $\sigma_n$  uniendo  $p$  y  $\gamma(t_o + \varepsilon_n)$ . Para estas geodésicas tenemos asociada la sucesión  $\{\sigma'_n(0)\}_{n=1}^{\infty} \subset T_p M$  de vectores tangentes a  $M$  en  $p$ , los cuales cumplen  $|\sigma'_n(0)| = 1$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , luego están contenidos en la bola unidad (cerrada) de  $T_p M$ , que es compacta. Como consecuencia, existe una subsucesión convergente de  $\{\sigma'_n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ , la cual vamos a denotar de igual manera.

Por lo tanto, existe una geodésica  $\sigma$  tal que  $\lim_n \sigma'_n(0) = \sigma'(0) \in T_p M$  y, por continuidad, se tiene que  $\sigma$  es geodésica minimizante uniendo  $p$  y  $\gamma(t_o)$ . Como  $\sigma$  es minimizante entonces  $\ell(\sigma) = \ell(\gamma)$ , ya que  $\gamma(t_o)$  es punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ . Tenemos entonces que si  $\sigma \neq \gamma$ , se cumple (b). Por tanto, supongamos que  $\sigma = \gamma$  y veamos que en este caso se tiene (a), lo que acabará la demostración de la primera parte. En el resto de la demostración tomamos  $v = \gamma'(0)$ . Notemos también que  $\sigma'(0) = \gamma'(0) = v$ .

Por la caracterización de puntos conjugados vista en la proposición 1.3.1, nos basta con probar que  $v_o = t_o v$  es un punto crítico de  $\exp_p$ , es decir, que  $d(\exp_p)$  es singular en  $v_o$ . Supongamos que  $d(\exp_p)$  no es singular en  $v_o$ , luego existe  $U \subset T_p M$  un entorno de  $v_o$  tal que:

$$\exp_p : U \rightarrow \exp_p(U)$$

es un difeomorfismo. Por definición  $\gamma(t_o + \varepsilon_n) = \sigma_n(t_o + \varepsilon'_n)$  y además, por ser  $\sigma_n$  minimizante para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$t_o + \varepsilon'_n = \ell_0^{t_o + \varepsilon'_n}(\sigma_n) \leq \ell_0^{t_o + \varepsilon_n}(\gamma) = t_o + \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

luego  $0 < \varepsilon'_n \leq \varepsilon_n$  y, puesto que  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$  tiene límite 0, lo mismo ocurre con  $\{\varepsilon'_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_n (t_o + \varepsilon'_n) \sigma'_n(0) &= t_o \gamma'(0) = t_o v = v_o \\ &= \lim_n (t_o + \varepsilon_n) \gamma'(0) = v_o \\ &= \lim_n (t_o + \varepsilon_n) \gamma'(0) \end{aligned}$$

y, en consecuencia, existe  $n_o \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_o$  se tiene que  $(t_o + \varepsilon'_n)\sigma'_n(0)$  y  $(t_o + \varepsilon_n)\gamma'(0)$  están, ambos, en  $U$  (véase figura 2.1). Para estos  $n$  tenemos también que:

$$\begin{aligned} \exp_p((t_o + \varepsilon_n)\gamma'(0)) &= \exp_p((t_o + \varepsilon_n)v) = \gamma(t_o + \varepsilon_n) \\ &= \sigma_n(t_o + \varepsilon'_n) = \exp_p((t_o + \varepsilon'_n)\sigma'_n(0)) \end{aligned}$$

Además, por ser  $\exp_p$  un difeomorfismo en  $U$  se cumple que  $(t_o + \varepsilon_n)\gamma'(0) = (t_o + \varepsilon'_n)\sigma'_n(0)$  y de esta forma  $\gamma'(0) = \sigma'_n(0) \forall n \geq n_o$ . Por la homogeneidad de las geodésicas se tiene que  $\gamma$  y  $\sigma_n$  son la misma geodésica, lo que es una contradicción ya que  $\sigma_n$  es minimizante en  $\gamma(t_o + \varepsilon'_n)$  y  $\gamma$  no, pues  $\gamma(t_o)$  es punto de corte a lo largo de  $\gamma$ .

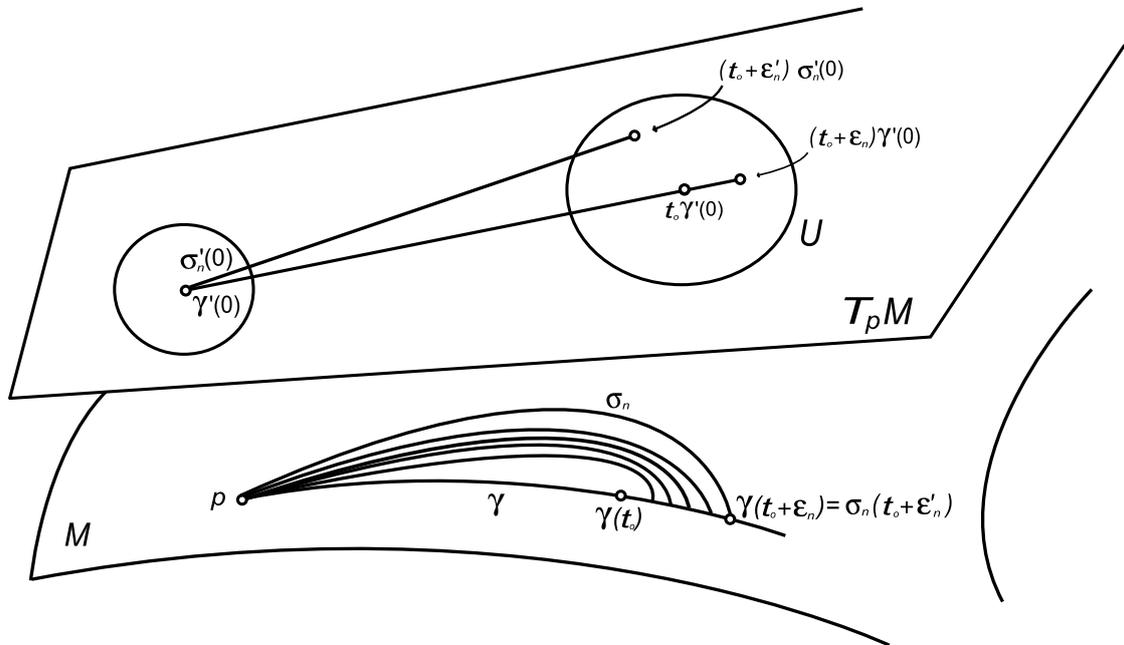


Figura 2.1

Para el recíproco, empecemos suponiendo que ocurre (a). Si  $\gamma(t_o)$  es el primer punto conjugado de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ , por la proposición 1.4.3 se tiene que  $\gamma$  es minimizante, a lo sumo, en  $[0, t_o]$ . Por tanto, el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  ocurre en  $\gamma(\tilde{t})$  con  $\tilde{t} \leq t_o$ .

Si ocurre (b), tomemos  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño de manera que  $\sigma(t_o - \varepsilon)$  y  $\gamma(t_o + \varepsilon)$  se encuentran contenidos en un entorno totalmente normal de  $\gamma(t_o)$  y consideremos  $\tau$  el único segmento de geodésica minimizante uniendo  $\sigma(t_o - \varepsilon)$  y  $\gamma(t_o + \varepsilon)$  (véase figura 2.2). Observemos que la curva  $\sigma_{|[0, t_o - \varepsilon]} \cup \tau$  tiene longitud

estrictamente menor que  $t_o + \varepsilon$ . En efecto:

$$\ell(\sigma_{|[0, t_o - \varepsilon]} \cup \tau) = \ell_0^{t_o - \varepsilon}(\sigma) + \ell(\tau) < \ell_0^{t_o}(\sigma) + \ell_{t_o}^{t_o + \varepsilon}(\gamma) = \ell(\gamma_0^{t_o + \varepsilon}) = t_o + \varepsilon$$

Por consiguiente, el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  ocurre en  $\gamma(\tilde{t})$  con  $\tilde{t} \leq t_o$ . □

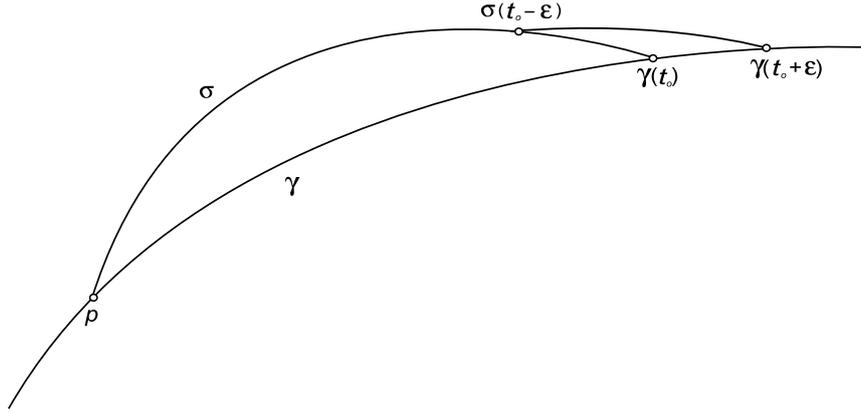


Figura 2.2

Como consecuencia de la proposición que acabamos de demostrar se tienen dos corolarios a los que recurriremos en varias ocasiones más adelante.

**Corolario 2.1.1.** *Sea  $p \in M$  y  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  una geodésica. Si  $q$  es el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ , entonces  $p$  es el punto de corte de  $q$  a lo largo de  $-\gamma$ . En particular, tenemos que  $q \in C_m(p)$  si, y solo si,  $p \in C_m(q)$ .*

*Demostración.* Si  $q$  es el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ , por la proposición anterior tenemos que  $q$  es punto conjugado de  $p$  o que existe  $\sigma \neq \gamma$  un segmento de geodésica uniendo  $p$  y  $q$  con  $\ell(\sigma) = \ell(\gamma)$ . En ambos casos, del recíproco de dicha proposición deducimos que el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $-\gamma$  no ocurre antes de  $p$ . Puesto que  $\ell(-\gamma) = d(p, q)$ , se tiene que  $p$  es el punto de corte de  $q$  a lo largo de  $-\gamma$ . □

**Corolario 2.1.2.** *Sea  $p \in M$ . Si  $q \in M \setminus C_m(p)$ , entonces existe una única geodésica minimizante uniendo  $p$  y  $q$ .*

*Demostración.* Consideremos  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  una geodésica minimizante uniendo  $p$  y  $q$ , con  $\gamma(t_o) = q$ , y supongamos la existencia otra geodésica minimizante  $\sigma \neq \gamma$  que una dichos puntos. Por la proposición 2.1.1 tenemos entonces que existe  $\tilde{t} \in (0, t_o]$  tal que  $\gamma(\tilde{t})$  es punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ . Puesto que  $d(p, q) = d(p, \gamma(t_o)) = \ell(\gamma)$ , se tiene que  $q$  es el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ , lo que contradice el hecho de que  $q \notin C_m(p)$ . □

En definitiva, este último corolario garantiza la inyectividad de  $\exp_p$  cuando trabajamos en una bola geodésica abierta  $B_r(p)$  centrada en  $p$  y de radio menor o igual a la distancia de  $p$  al conjunto  $C_m(p)$ . Este hecho motiva la siguiente definición:

**Definición 2.1.3.** *Dada  $M$  una variedad riemanniana. Llamamos radio de inyectividad de  $M$  al número siguiente:*

$$i(M) = \inf_{p \in M} d(p, C_m(p))$$

Una consecuencia inmediata de esta definición es la existencia de una única geodésica minimizante uniendo dos puntos  $p, q \in M$  cuya distancia sea menor que  $i(M)$ . Del corolario 2.1.2 se deduce también que  $M \setminus C_m(p)$  es homeomorfo, a través de la exponencial, a una bola abierta del espacio euclídeo. En cierto sentido como veremos más adelante, esto indica que la topología de  $M$  está contenida en su lugar de corte.

Recordemos que definíamos el fibrado tangente unitario de  $M$  como el conjunto (también variedad):

$$T_1M = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM, |v| = 1\}$$

Y puesto que, para cada par  $(p, v)$ , existe una única geodésica maximal  $\gamma_{p,v}$  con  $\gamma_{p,v}(0) = p$  y  $\gamma'_{p,v}(0) = v$ , la aplicación  $f : T_1M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  dada por

$$f(p, v) = \begin{cases} t_o, & \text{si } \gamma_{p,v}(t_o) \text{ es el punto de corte de } p \text{ a lo largo de } \gamma_{p,v}, \\ \infty, & \text{si el punto de corte de } p \text{ a lo largo de } \gamma_{p,v} \text{ no existe.} \end{cases} \quad (2.1)$$

está bien definida.

Vamos a considerar  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  con la topología dada por la base de abiertos formada por los intervalos  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  junto con los conjuntos de la forma  $(a, \infty] = (a, \infty) \cup \{\infty\}$ , es decir, la compactificación por un punto de los reales con su topología usual. Hay que destacar que con esta topología los conjuntos de la forma  $[a, \infty]$  son compactos. Se tiene además que la aplicación  $f$  es continua y como consecuencia de ello, podemos probar que el lugar de corte de un punto es cerrado.

**Proposición 2.1.2.** *Dado  $p \in M$ , el conjunto  $C_m(p)$  es cerrado. En particular, si  $M$  es compacto entonces  $C_m(p)$  también lo es.*

*Demostración.* Comencemos observando que podemos reescribir  $C_m(p)$  en términos de la función  $f$  dada en (2.1), de la siguiente manera:

$$C_m(p) = \{\gamma(t) : t = f(p, \gamma'(0))\}.$$

Donde  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  es una geodésica normalizada partiendo de  $p$ . Para demostrar que  $C_m(p)$  es cerrado, consideremos una sucesión convergente  $\{\gamma_j(t_j)\}_{j=1}^{\infty} \subset C_m(p)$ ,

con  $t_j = f(p, \gamma'_j(0))$ , y veamos que su límite está en  $C_m(p)$ . Observemos que, al estar las  $\gamma_j$  normalizadas y tomando una subsucesión si fuese necesario, existe  $\lim_j \gamma'_j(0) = v$ , con  $v$  unitario. Sea  $\gamma$  la (única) geodésica con  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = v$ , de la continuidad de  $\exp_p$  y  $f$  tenemos que

$$\begin{aligned} \lim \gamma_j(t_j) &= \lim \exp_p(t_j \gamma'_j(0)) \\ &= \lim \exp_p(f(p, \gamma'_j(0)) \gamma'_j(0)) \\ &= \exp_p(f(p, \gamma'(0)) \gamma'(0)) \\ &= \gamma(f(p, \gamma'(0))) \in C_m(p). \end{aligned}$$

Lo que demuestra que  $C_m(p)$  es cerrado.  $\square$

Al principio del capítulo vimos que, cuando  $M$  es compacta, para todo  $p \in M$  existe el punto de corte a lo largo de cualquier geodésica que parte de él. Vamos a ver ahora que, en sentido opuesto, el resultado sigue siendo cierto.

**Proposición 2.1.3.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa. Si existe  $p \in M$  tal que para toda geodésica partiendo de él existe el punto de corte, entonces  $M$  es compacta.*

*Demostración.* Puesto que cualquier par de puntos pueden unirse con una geodésica minimizante, es fácil ver que  $M$  puede expresarse como

$$M = \bigcup \{ \gamma(t) : t \leq f(p, \gamma'(0)) \},$$

donde tomamos la unión en el conjunto de todas las geodésicas  $\gamma$  de  $M$  con  $\gamma(0) = p$ . Por hipótesis, existe el punto de corte de  $p$  a lo largo de cada una de estas geodésicas, luego  $f(p, \gamma'(0)) \neq \infty$  para todas ellas, es decir,  $f$  es acotada. Como consecuencia,  $M$  también es acotada y el teorema de Hopf-Rinow nos dice que  $M$  es compacta.  $\square$

Ya hemos visto que, cuando trabajamos en  $M \setminus C_m(p)$ , existe una única geodésica minimizante uniendo  $p$  y cualquier punto de dicho conjunto. Las fórmulas de variación permiten ver qué ocurre cuando existe un punto  $q \in C_m(p)$  en el cual se alcanza la distancia de  $p$  a  $C_m(p)$  (esto es,  $d(p, C_m(p)) = d(p, q)$ ). Este hecho queda recogido en el siguiente resultado:

**Proposición 2.1.4.** *Dado  $p \in M$ , supongamos que existe  $q \in C_m(p)$  tal que  $d(p, C_m(p)) = d(p, q) = \ell$ . En estas condiciones se cumple, al menos, una de las siguientes afirmaciones:*

- (a) *existe  $\gamma$  una geodésica minimizante uniendo  $p$  y  $q$ , a lo largo de la cual  $q$  es conjugado con  $p$ .*

(b) existen exactamente dos geodésicas minimizantes uniendo  $p$  y  $q$ . Además, si  $\gamma$  y  $\sigma$  son dichas geodésicas, se tiene  $\gamma'(\ell) = -\sigma'(\ell)$ .

*Demostración.* Consideremos  $\gamma$  una geodésica minimizante uniendo  $p$  y  $q$ , con  $\gamma(\ell) = q$ . Por la proposición 2.1.1 tenemos que  $q$  es conjugado con  $p$  a lo largo de  $\gamma$ , o bien que existe otra geodésica minimizante  $\sigma \neq \gamma$  uniendo  $p$  y  $q$ , y cumpliendo  $\ell(\gamma) = \ell(\sigma)$ . Si sucede lo primero, la afirmación (a) se satisfaría, luego vamos a suponer que  $p$  y  $q$  no son conjugados ni a lo largo de  $\gamma$  ni de  $\sigma$ , y que  $\gamma'(\ell) \neq -\sigma'(\ell)$ , lo que nos llevará a una contradicción. En particular, habremos probado que solo pueden existir dos geodésicas minimizantes uniendo  $p$  y  $q$ .

Como  $\gamma'(\ell) \neq -\sigma'(\ell)$ , entonces existe un  $V \in T_q M$  tal que:

$$\langle V, \gamma'(\ell) \rangle < 0, \quad \langle V, \sigma'(\ell) \rangle < 0.$$

Además, puesto que  $q$  no es conjugado de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ , la caracterización de los puntos conjugados nos dice que  $\ell\gamma'(0)$  no es un punto crítico de  $\exp_p$ . Por consiguiente, existe  $U \subset T_p M$  un entorno de  $\ell\gamma'(0)$  tal que  $\exp_p|_U$  es un difeomorfismo, con  $W = \exp_p(U)$ . Notemos también que  $\exp_p(\ell\gamma'(0)) = \gamma(\ell) = q$ , luego  $q \in W$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , vamos a considerar  $\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W$  una curva cumpliendo  $\tau(0) = q$ ,  $\tau'(0) = V$  y  $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  una curva en  $T_p M$  tal que  $\exp_p(v(s)) = \tau(s)$  para todo  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Por último, consideremos la aplicación  $\gamma(s, t) = \gamma_s(t) = \exp_p(\frac{t}{\ell}v(s))$ , con  $t \in [0, \ell]$ . Notemos que esta aplicación define una variación de  $\gamma$  (véase figura 2.3), ya que  $\exp_p(v(0)) = \tau(0) = q = \exp_p(\ell\gamma'(0))$ , y por ser  $\exp_p$  difeomorfismo en  $U$ , se tiene que  $v(0) = \ell\gamma'(0)$ . En consecuencia:

$$\gamma_s(t) = \exp_p\left(\frac{t}{\ell}v(0)\right) = \exp_p(t\gamma'(0)) = \gamma(t).$$

Tenemos además que su campo variacional  $Z$  cumple:

- $Z(0) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}\Big|_{s=0}(s, 0) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \exp_p(0) = 0$
- $Z(\ell) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}\Big|_{s=0}(s, \ell) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \exp_p(v(s)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \tau(s) = V$

Por tanto, la primera fórmula de variación de la longitud aplicada a  $\gamma$  y  $\gamma_s(t)$  nos dice que:

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \ell(\gamma_s) = \langle V, \gamma'(\ell) \rangle < 0$$

De manera totalmente análoga, como  $q$  no es conjugado de  $p$  a lo largo de  $\sigma$ , podemos construir una variación  $\sigma_s(t)$  de  $\sigma$  que cumpla:

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \ell(\sigma_s) = \langle V, \sigma'(\ell) \rangle < 0, \quad \sigma_s(\ell) = \tau(s).$$

Al ser las derivadas de las longitudes de estas variaciones estrictamente negativas en el cero tenemos que, para un  $s > 0$  suficientemente pequeño, se cumplen  $\ell(\gamma_s) < \ell(\gamma)$  y  $\ell(\sigma_s) < \ell(\sigma)$ . Si ahora, para este  $s$ , comparamos  $\ell(\gamma_s)$  y  $\ell(\sigma_s)$  tenemos tres posibilidades, las cuales vamos a ver que, todas ellas, nos llevan a una contradicción que acabará con la demostración.

Si  $\ell(\gamma_s) = \ell(\sigma_s)$ , de la proposición 2.1.1 deducimos que  $\tau(s) = \gamma_s(\ell) = \sigma_s(\ell)$  es un punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma_s$ , esto es,  $\gamma_s(\ell) \in C_m(p)$ . Además, se tiene que

$$d(p, \gamma_s(\ell)) = \ell(\gamma_s) < \ell(\gamma) = d(p, q),$$

lo que contradice el hecho de que la distancia de  $p$  a  $C_m(p)$  se alcanza en  $q$ .

Si  $\ell(\gamma_s) < \ell(\sigma_s)$  entonces  $\sigma_s$  no es minimizante, luego existe  $\tilde{t} < \ell$  tal que  $\sigma_s(\tilde{t})$  es punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\sigma_s$ . Este hecho contradice, nuevamente, la hipótesis de que la distancia de  $p$  a  $C_m(p)$  se alcanza en el punto  $q$ . El caso  $\ell(\gamma_s) > \ell(\sigma_s)$  es totalmente análogo.

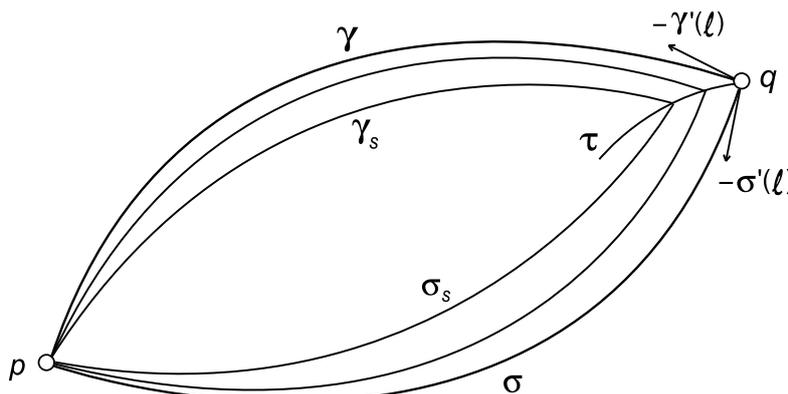


Figura 2.3

□

## 2.2. Estimación del radio de inyectividad

Una de las etapas cruciales a la hora de demostrar el teorema de la esfera reside en estimar el radio de inyectividad de una variedad  $M$ . Como ya vimos, la primera estimación para este radio fue llevada a cabo por Klingenberg (véase [16]) cuando la dimensión de  $M$  era par, aunque más adelante él mismo extendió esta estimación para el caso impar. En el presente trabajo, seguiremos el desarrollo y la demostración cuando nos encontramos en dimensión par. Omitiremos la demostración en dimensión impar pues, para su estudio, habríamos de sumergirnos de lleno en lo

que se conoce como teoría de Morse, lo que escapa de nuestras pretensiones, mucho más humildes. No obstante, el lector interesado podrá encontrar los elementos y el desarrollo necesarios en la obra de Manfredo Do Carmo (véase [7], capítulos 11 y 13).

Empezamos la sección con un resultado previo que nos ayudará a obtener la cota inferior para el radio de inyectividad cuando la curvatura seccional de la variedad es estrictamente positiva. Vamos a ver que dicha cota depende de la curvatura seccional de dicha variedad y que, de hecho, el radio de inyectividad puede obtenerse en función de sus geodésicas cerradas. En el enunciado siguiente queremos remarcar la hipótesis de completitud de  $M$ , presente en todo el capítulo, pero que cobra especial relevancia en este punto.

**Proposición 2.2.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa cuya curvatura seccional  $K$  cumple*

$$0 < K_{\min} \leq K \leq K_{\max}$$

*entonces se tiene una de las siguientes afirmaciones:*

(a)  $i(M) \geq \pi/\sqrt{K_{\max}}$

(b) *existe una geodésica cerrada  $\gamma$  en  $M$ , cuya longitud es menor que la de cualquier otra geodésica cerrada de  $M$ , cumpliendo:*

$$i(M) = \frac{1}{2}\ell(\gamma).$$

*Demostración.* Como la curvatura seccional de  $M$  es estrictamente positiva, el teorema de Bonnet-Myers nos asegura que  $M$  es compacta, luego también lo es el fibrado tangente unitario  $T_1M$ . Se tiene entonces que la función  $f$  que habíamos definido en (2.1) tiene por dominio un conjunto compacto. Como además demostramos que dicha función es continua, se tiene que alcanza un mínimo, y por consiguiente, existe un punto  $p \in M$  tal que  $d(p, C_m(p)) = \inf_{p' \in M} d(p', C_m(p')) =: i(M)$ . Puesto que  $C_m(p)$  es compacto y la función  $d(p, r)$  con  $p$  fijo es continua, existe  $q \in M$  tal que la distancia de  $p$  a  $C_m(p)$  se alcanza en dicho punto. Es decir,

$$d(p, C_m(p)) = d(p, q).$$

Si  $q$  fuese conjugado de  $p$ , como consecuencia del teorema de Rauch (proposición 1.5.1) se tiene que  $d(p, q) \geq \pi/\sqrt{K_{\max}}$ , luego se cumpliría (a). Por otro lado, si  $q$  no es conjugado con  $p$ , por la proposición 2.1.4 de la sección anterior sabemos que existen dos geodésicas minimizantes  $\mu$  y  $\sigma$  uniendo  $p$  y  $q$  tales que  $\mu'(\ell) = -\sigma'(\ell)$  con  $\ell = d(p, q)$ . Además, como  $q \in C_m(p)$ , se tiene que  $p \in C_m(q)$  y  $d(p, C_m(p)) = d(p, q) = d(q, C_m(q))$ . Es decir, la distancia de  $q$  a  $C_m(q)$  se alcanza en  $p$ . Invirtiendo los papeles de  $p$  y  $q$  y aplicando nuevamente la proposición 2.1.4 se tiene que  $\sigma'(0) =$

$-\mu'(0)$ . En consecuencia, la yuxtaposición de  $\sigma$  y  $\mu$  (véase figura 2.4) forma una geodésica cerrada  $\gamma : [0, 2\ell] \rightarrow M$  que cumple  $i(M) = \ell(\sigma) = \frac{1}{2}\ell(\gamma)$  y que, por construcción, es de mínima longitud.

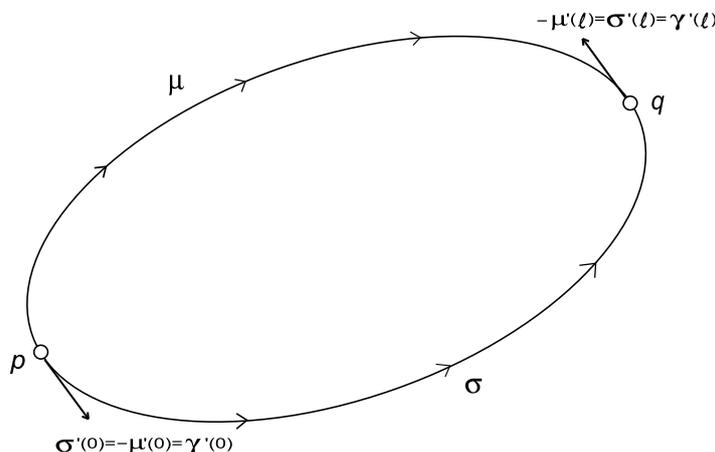


Figura 2.4

□

**Observación 2.2.1.** Es importante notar que, en la primera parte de la demostración de la proposición anterior, se ha probado que dada una variedad riemanniana  $M$  compacta es posible encontrar dos puntos  $p, q \in M$  tales que  $i(M) = d(p, C_m(p)) = d(p, q)$ . Como consecuencia del teorema de Bonnet-Myers, lo mismo ocurre cuando  $M$  es completa y su curvatura seccional cumple  $0 < K_{\min} \leq K \leq K_{\max}$ .

La siguiente proposición proporciona la estimación necesaria para demostrar el teorema de la esfera, lo hace en dimensión arbitraria y presentamos únicamente su enunciado.

**Proposición 2.2.2.** Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta y simplemente conexa de dimensión  $n \geq 3$ . Si  $1/4 < K \leq 1$ , entonces  $i(M) \geq \pi$ .

A la estimación  $i(M) \geq \pi$  se le conoce también como estimación o cota de Klingenberg. Restringiéndonos ahora a dimensión par, podemos probar una versión más fuerte de esta proposición, sin necesidad de la teoría de Morse.

**Proposición 2.2.3.** Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta, orientable y de dimensión par, si su curvatura seccional cumple  $0 < K \leq 1$ , entonces  $i(M) \geq \pi$ .

*Demostración.* Por la compacidad de  $M$ , existen  $p, q \in M$  tales que:

$$q \in C_m(p) \text{ y } d(p, q) = i(M).$$

Si  $p$  fuese conjugado con  $q$ , de la proposición 1.5.1 deducimos que  $d(p, q) \geq \pi$  y el enunciado estaría probado. Analicemos lo que ocurre cuando  $p$  y  $q$  no son conjugados. En este caso, vamos a suponer que  $d(p, q) < \pi$ , lo que nos llevará a una contradicción y demostrará el resultado. Puesto que  $p$  y  $q$  no son conjugados, de la demostración de la proposición 2.2.1 sabemos que existe  $\gamma$  una geodésica cerrada uniendo  $p = \gamma(0)$  y  $q$  tal que  $i(M) = \frac{1}{2}\ell(\gamma)$ ,  $\ell(\gamma) = 2d(p, q) < 2\pi$  y  $\gamma'(0) = \gamma'(\ell)$ .

Recordemos que el transporte paralelo a lo largo de la curva cerrada  $\gamma$  deja invariante un vector ortogonal a ésta (esto se debe a la orientabilidad de  $M$  y al hecho de trabajar en dimensión par). Por tanto, existe  $V(t)$  un campo de vectores paralelo a lo largo de  $\gamma$ . Calculando la segunda derivada de la energía  $E_v''(0)$  vemos que es estrictamente negativa y, en consecuencia, para  $s \in [0, \varepsilon]$  existe  $\gamma_s(t)$  una variación de  $\gamma$  formada por curvas regulares, cerradas y tales que  $\ell(\gamma_s) < \ell(\gamma)$  para todo  $s \neq 0$ .

Para cada  $s \in (0, \varepsilon]$ , consideremos  $q_s$  el punto que se encuentra a máxima distancia de  $\gamma_s(0)$  (véase figura 2.5) y notemos que, como  $d(\gamma_s(0), q_s) < d(p, q) = i(M)$ , existe una única geodésica minimizante  $\sigma_s : [0, a] \rightarrow M$  uniendo  $q_s = \sigma_s(0)$  y  $\gamma_s(0) = \sigma_s(a)$ . Notemos también que el hecho de que  $q$  sea el único punto a máxima distancia de  $p$  implica, necesariamente,  $\lim_{s \rightarrow 0} \sigma_s(0) = q$ . Además, por la compacidad del fibrado tangente, existirá un punto de acumulación  $w \in T_q M$  de los vectores  $\sigma_s'(0)$ . De esta manera, por continuidad se tiene que la geodésica definida como  $\sigma(t) = \exp_q(tw)$  es una geodésica minimizante que une  $p$  y  $q$ .

Consideremos ahora, para cada  $s$ , las geodésicas minimizantes  $\sigma_{s,t}$  que unen  $\gamma_s(t)$  (un punto cercano a  $q_s$ ) y  $\gamma_s(0)$ . Se tiene que  $\sigma_{s,t}$  define una variación de  $\sigma_s$  y, además, notemos que la curva transversal a la variación en el extremo inicial no es otra que un trozo de  $\gamma_s(t)$  cercano a  $q_s$ . Como el extremo final de esta variación es fijo, la primera fórmula de variación nos dice entonces que  $\sigma_s'(0)$  es ortogonal a  $\gamma_s'$  en el punto  $q_s$ , para cada  $s \in [0, \varepsilon]$ . En consecuencia,  $\sigma'(0)$  es ortogonal a  $\gamma$  en  $q$ . Se tiene entonces que  $\sigma \neq \gamma$ , luego existen tres geodésicas minimizantes uniendo  $p$  y  $q$ . Esto contradice el hecho de que solo pueden existir dos geodésicas minimizantes uniendo  $p$  y  $q$ , ya que estos puntos eran no conjugados (proposición 2.1.4).

□

**Observación 2.2.2.** *Debido al teorema de Synge (véase [7], página 206), las variedades que satisfacen las hipótesis de la proposición anterior son simplemente conexas. Recordemos también que una variedad simplemente conexa siempre es orientable. Como consecuencia, tenemos que la hipótesis de orientabilidad puede sustituirse por la de ser simplemente conexa, conservándose la validez del resultado.*

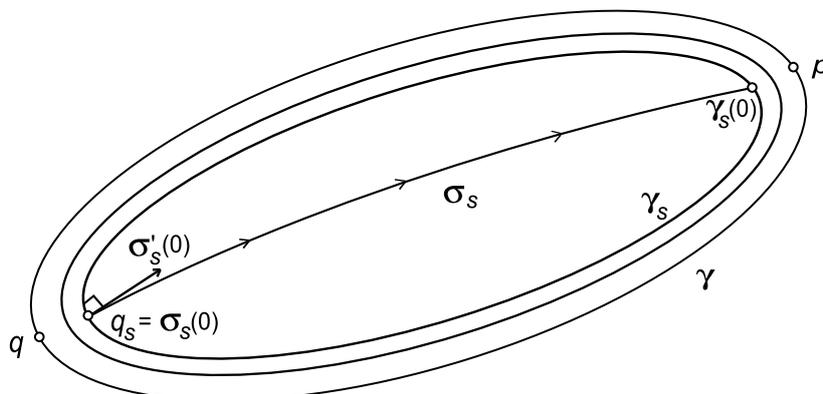


Figura 2.5

### 2.3. El teorema de la esfera

Una vez hemos obtenido la estimación del radio de inyectividad, estamos un paso más cerca de demostrar el teorema de la Esfera. En esta última sección del capítulo introduciremos algunos resultados previos cuya ayuda nos permitirá, finalmente, demostrar el ansiado teorema. Además, a partir de este punto, dejamos de trabajar únicamente dimensión par para hacerlo en dimensión arbitraria. Notemos, pues, que el hecho de que la dimensión sea par o impar solo influye, en nuestro desarrollo, en la etapa crucial del cálculo de la estimación de Klingenberg. Esto mismo fue lo que ocurrió cuando el propio Klingenberg demostró, inicialmente, el teorema de la esfera sólo en dimensión par.

El primer lema, de carácter técnico, cuya demostración se debe a Berger (véase [1]) afirma lo siguiente:

**Lema 2.3.1.** Sean  $M$  una variedad riemanniana compacta y  $p, q \in M$  dos puntos tales que  $d(p, q) = \text{diam}(M)$ . Para cada  $W \in T_p M$  existe  $\gamma$  una geodésica minimizante uniendo  $\gamma(0) = p$  y  $q$  y verificando  $\langle \gamma'(0), W \rangle \geq 0$ .

*Demostración.* Definamos la curva  $\lambda(t) = \exp_p(tW)$  y consideremos, para cada  $t$ , la geodésica minimizante  $\gamma_t : [0, \ell_t] \rightarrow M$  que une  $\gamma_t(0) = \lambda(t)$  y  $\gamma_t(\ell_t) = q$ . Supongamos, además, que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un  $t_n$  con  $0 \leq t_n \leq 1/n$  y tal que  $\langle \gamma'_{t_n}(0), \lambda'(t_n) \rangle \geq 0$ . Tenemos entonces una sucesión  $\{\gamma_{t_n}\}_{n=1}^{\infty}$  de geodésicas minimizantes con  $t_n \rightarrow 0$ . Por la continuidad de las geodésicas, y tomando una subsucesión si fuese necesario, esta sucesión converge a una geodésica minimizante  $\gamma$  uniendo  $\gamma(0) = \lambda(0) = p$  y  $q$ . Además, por la continuidad de la métrica, se tiene:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \gamma'_{t_n}(0), \lambda'(t_n) \rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma'_{t_n}(0), \lambda'(0) \right\rangle = \langle \gamma'(0), W \rangle,$$

lo que acabaría la prueba. Veamos ahora qué ocurre si para algún  $n$  no se tuviese un  $t_n$  cumpliendo las condiciones antes mencionadas. Supongamos, pues, que existe un  $n_o \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $t$  cumpliendo  $0 \leq t \leq 1/n_o$  se tiene  $\langle \gamma'_t(0), \lambda'(t) \rangle < 0$ . Vamos a ver que, en este caso, se llega a una contradicción.

Sea  $t_o$  cumpliendo  $0 \leq t_o \leq 1/n_o$ , consideremos  $U$  un entorno totalmente normal de  $\lambda(t_o)$  y  $q_o \in U$  un punto de  $\gamma_{t_o}$ . Tomemos  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño de manera que  $\lambda(s) \in U$  para todo  $s \in (t_o - \varepsilon, t_o + \varepsilon)$  y consideremos las geodésicas minimizantes  $\sigma_s$  que unen  $q_o$  y  $\lambda(s)$  (véase figura 2.6). Notemos que  $\sigma_s$  define una variación del trozo de  $\gamma_{t_o}$  que va de  $\lambda(t_o)$  hasta  $q_o$ , y que  $\sigma_{t_o} = \gamma_{t_o}$  en dicho segmento. Además, el campo variacional  $Z$  de esta variación cumple

$$Z(0) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t_o} \sigma_s(0) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t_o} \lambda(s) = \lambda'(t_o),$$

mientras que el otro extremo es fijo, luego dicho campo es nulo en él. Aplicando la primera fórmula de variación de la energía a  $\sigma_s$  obtenemos entonces:

$$\left. \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \right|_{s=t_o} E(\sigma_s) = - \langle \lambda'(t_o), \gamma'_{t_o}(0) \rangle > 0.$$

Es decir, el funcional energía es estrictamente creciente en un entorno de  $t_o$ . Por consiguiente, para valores de  $s$  menores (y cercanos) a  $t_o$  se tiene que  $d(q_o, \lambda(s)) < d(q_o, \lambda(t_o))$ , de donde se siguen las siguientes desigualdades:

$$d(q, \lambda(s)) < d(q, q_o) + d(q_o, \lambda(s)) < d(q, q_o) + d(q_o, \lambda(t)) = d(q, \lambda(t)).$$

Este mismo razonamiento lo podemos aplicar a cada  $t$  que cumpla  $0 \leq t \leq 1/n_o$  y, en consecuencia, podemos elegir  $t_o$  tan cerca del 0 como queramos, de manera que  $d(q, \lambda(s)) < d(q, \lambda(t_o))$  con  $s \geq 0$ . Por otro lado,  $p$  y  $q$  están a distancia máxima ya que, por hipótesis,  $d(p, q) = \text{diam}(M)$ . Se tiene entonces que  $d(q, \lambda(s)) < d(q, \lambda(t_o)) \leq d(q, p) = d(q, \lambda(0))$  con  $s \geq 0$ , lo que es una contradicción.  $\square$

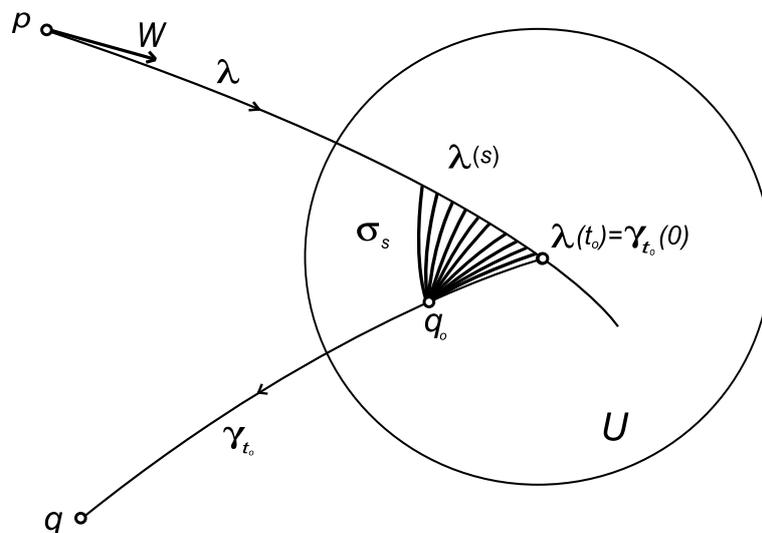


Figura 2.6

El lema siguiente fue probado originalmente por Berger (véase [1]) usando el teorema de Topogonov. La prueba que aquí presentamos se debe a Tsukamoto, y en ella se hace uso del teorema de comparación de Rauch. Recordemos también que, dados  $p \in M$  y  $r > 0$ , con  $B_r(p) \subset M$  denotábamos la bola geodésica abierta de radio  $r$  y centro  $p$ .

**Lema 2.3.2.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta, simplemente conexa y cuya curvatura seccional satisfice:*

$$\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1.$$

Dados  $p, q \in M$  tales que  $d(p, q) = \text{diam}(M)$ , se tiene

$$M = B_\rho(p) \cup B_\rho(q),$$

con  $\rho$  cumpliendo  $\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \rho < \pi$ .

*Demostración.* En las condiciones del enunciado, se cumple la estimación para el radio de inyectividad:  $i(M) \geq \pi$ . Por tanto, si  $\pi/2\sqrt{\delta} < \rho < \pi$ , se tiene que  $B_\rho(p) \cap C_m(p) = \emptyset$ , es decir,  $B_\rho(p)$  no contiene puntos del lugar de corte de  $p$ . Por tanto, tenemos que  $B_\rho(p)$  es difeomorfa, a través de la exponencial, a una bola euclídea. Notemos que esto mismo ocurre con  $B_\rho(q)$ .

Probaremos el resultado por reducción al absurdo. Así, supongamos que existe un  $r \in M$  tal que  $d(p, r) \geq \rho$  y  $d(q, r) \geq \rho$ . Asumamos también, sin pérdida de generalidad, que  $d(p, r) \geq d(q, r)$ .

Observemos que una geodésica minimizante uniendo  $q$  y  $r$  interseca a  $\partial B_\rho(q)$ , la frontera de la bola centrada en  $q$ , en un punto  $q' \notin B_\rho(p)$ ; ya que, si esto no fuese así y  $q' \in B_\rho(p)$ , se tendría

$$d(r, q') > d(r, B_\rho(p)) \geq d(r, B_\rho(q)) = d(r, q'),$$

lo cual es absurdo. Por otro lado, como  $0 < \delta \leq K$ , por el teorema de Bonnet-Myers tenemos que  $\text{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{\delta} < 2\rho$ . Por tanto, sea  $q''$  el punto intersección entre  $\partial B_\rho(q)$  y la geodésica minimizante que une  $p$  y  $q$ , tenemos que

$$d(p, q'') = d(p, q) - d(q, q'') < 2\rho - \rho = \rho,$$

luego  $q'' \in B_\rho(p)$ . Además, al ser  $B_\rho(q)$  homeomorfa a una bola euclídea, se tiene que  $\partial B_\rho(q)$  es arco conexa lo que implica necesariamente que  $\partial B_\rho(p) \cap \partial B_\rho(q) \neq \emptyset$ . Existe pues un  $r_o \in M$  tal que  $d(r_o, p) = d(r_o, q) = \rho$  y cuya existencia, como veremos, es la causante de la contradicción buscada.

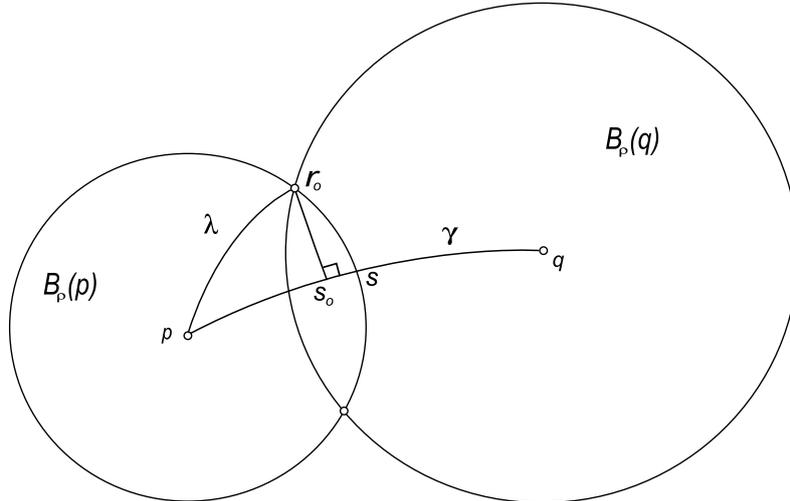


Figura 2.7

Consideremos  $\lambda$  una geodésica minimizante uniendo  $p$  y  $r_o$ . Por el lema 2.3.1, tenemos garantizada la existencia de  $\gamma$  una geodésica minimizante uniendo  $p$  y  $q$  tal que  $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle \geq 0$ , lo que implica que el ángulo formado por dichos vectores es menor o igual a  $\pi/2$  (véase figura 2.7). Consideremos  $s$  un punto de esta geodésica con  $d(p, s) = \rho$  y apliquemos el teorema de comparación de Rauch a esta situación (proposición 1.5.2), comparando  $M$  con una esfera  $\mathbb{S}^n$  de curvatura constante  $\delta$ . Como el radio de una esfera con esta curvatura es  $1/\sqrt{\delta}$  y  $d(r_o, s)$  es menor o igual a la longitud de cualquier curva en  $M$  uniendo  $r_o$  y  $s$ , aplicando el teorema de comparación de Rauch para la curva que describe un arco de ángulo igual al formado por  $\gamma'(0)$  y  $\lambda'(0)$  en  $\mathbb{S}^n$  tenemos que

$$d(r_o, s) \leq \pi/2\sqrt{\delta} < \rho.$$

En consecuencia, existe algún punto en  $\gamma$  tal que su distancia a  $r_o$  es menor que  $\rho$ . Puesto que  $d(r_o, p) = d(r_o, q) = \rho$  se tiene necesariamente que la distancia de  $r_o$  a  $\gamma$  se alcanza en algún punto del interior de la curva. Sea  $s_o$  dicho punto, sabemos que la geodésica minimizante que une  $r_o$  y  $s_o$  es ortogonal a  $\gamma$  (ya que recorriéndola se alcanza  $d(r_o, \gamma)$ ) y se tiene

$$d(r_o, \gamma) = d(r_o, s_o) \leq d(r_o, s) \leq \pi/2\sqrt{\delta}.$$

Observemos que como  $d(p, q) = \text{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{\delta}$  se tiene  $\ell(\gamma) \leq \pi/\sqrt{\delta}$  y, por consiguiente,  $d(p, s_o) \leq \pi/2\sqrt{\delta}$  ó  $d(q, s_o) \leq \pi/2\sqrt{\delta}$ . En cualquiera de los dos casos obtendremos una contradicción.

Supongamos que  $d(p, s_o) \leq \pi/2\sqrt{\delta}$ , ya que para el otro caso se procede de igual manera. Notemos que, como la geodésica minimizante que va de  $r_o$  a  $s_o$  es ortogonal a  $\gamma$ , el ángulo que forman estas dos geodésicas es igual a  $\pi/2$ . Además  $d(r_o, s_o) \leq \pi/2\sqrt{\delta}$ , luego aplicando nuevamente el teorema de comparación de Rauch obtenemos

$$d(p, r_o) \leq \pi/2\sqrt{\delta} < \rho,$$

lo que contradice el hecho de que  $d(p, r_o) = \rho$ , y acaba la prueba. □

En definitiva, lo que el lema anterior afirma es que bajo sus hipótesis es posible recubrir la variedad  $M$  con dos bolas. Este hecho es un gran paso a la hora de demostrar el teorema de la esfera y es posible gracias a la estimación del radio de inyectividad vista en la sección anterior, la cual desempeña en este punto su papel fundamental.

Más aún, es posible probar que una variedad topológica que pueda ser recubierta con dos bolas es homeomorfa a una esfera, lo que es, en sí, una demostración del teorema de la esfera. Esto se debe a un resultado clásico de topología, conocido como el teorema de Reeb. No obstante, con la teoría que hemos desarrollado, es posible dar de manera explícita el homeomorfismo que buscamos. Para ello, necesitamos un último lema previo que afirma lo siguiente:

**Lema 2.3.3.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta, simplemente conexa y cuya curvatura seccional satisfice:*

$$\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1.$$

*Dados  $p, q \in M$  tales que  $d(p, q) = \text{diam}(M)$  y  $\rho$  cumpliendo  $\pi/2\sqrt{\delta} < \rho < \pi$ , para cada geodésica partiendo de  $p$  con longitud  $\rho$  existe un único punto  $m$  de esta geodésica tal que:*

$$d(p, m) = d(q, m) < \rho.$$

*Análogamente, en cada geodésica partiendo de  $q$  con longitud  $\rho$  existe un único punto  $n$  que equidista de  $p$  y  $q$ , a distancia menor que  $\rho$ .*

*Demostración.* Probaremos únicamente el resultado para el punto  $p$ , ya que la prueba para  $q$  es totalmente análoga. Sea pues  $\gamma$  una geodésica con  $\gamma(0) = p$ , vamos a considerar la siguiente función:

$$h(s) = d(q, \gamma(s)) - d(p, \gamma(s)),$$

que es claramente continua y cumple  $h(0) = d(p, q) > 0$ . Tomemos  $s_o$  de manera que  $\gamma(s_o)$  es punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ , es decir,  $\gamma(s_o) \in C_m(p)$ . Por la estimación de Klingenberg del radio de inyectividad se tiene que  $d(p, \gamma(s_o)) \geq \pi > \rho$ . Además, como por el lema anterior  $M = B_\rho(p) \cup B_\rho(q)$ , entonces  $\gamma(s_o) \in B_\rho(q)$  y, por consiguiente,  $d(q, \gamma(s_o)) < \rho$ . Evaluando  $h$  en  $s_o$  obtenemos que

$$h(s_o) = d(q, \gamma(s_o)) - d(p, \gamma(s_o)) < \rho - \rho = 0.$$

Por la continuidad de  $h$  se tiene entonces que existe un  $s_1 \in (0, s_o)$  tal que la función se anula. Es decir,

$$0 = h(s_1) = d(q, \gamma(s_1)) - d(p, \gamma(s_1))$$

luego para  $m = \gamma(s_1)$  se tiene que  $d(q, m) = d(p, m)$ .

Para probar la unicidad supongamos que, dada  $\gamma$  una geodésica partiendo de  $p$  con longitud  $\rho$ , existen  $m_1$  y  $m_2$  puntos de esta geodésica con  $m_1 \neq m_2$  y equidistantes, ambos, con  $p$  y  $q$  a distancia menor que  $\rho$ . Podemos suponer también, sin pérdida de generalidad, que  $m_1$  se encuentra entre  $p$  y  $m_2$  en dicha geodésica. Tenemos entonces que

$$d(q, m_2) = d(p, m_2) = d(p, m_1) + d(m_1, m_2) = d(q, m_1) + d(m_1, m_2).$$

Como  $d(p, m_1) < \rho < \pi \leq i(M)$ , consideremos  $\sigma$  la única geodésica minimizante uniendo  $q$  y  $m_1$ . De la igualdad probada arriba, la distancia de  $q$  a  $m_2$  se realiza a través de  $\sigma$  y el segmento de  $\gamma$  que va de  $m_1$  a  $m_2$ . Por unicidad se tiene necesariamente que  $\sigma$  y  $\gamma$  son la misma geodésica, luego  $q$  pertenece a  $\gamma$ . Notemos además que

$q$  necesariamente se sitúa entre  $p$  y  $m_1$ . De  $d(p, m_1) = d(q, m_1)$  y  $d(p, m_2) = d(q, m_2)$  se deduce entonces:

$$d(p, m_2) = d(p, q) + d(q, m_2) = d(p, q) + d(p, m_2).$$

Por tanto,  $d(p, q) = y$  se tiene que  $p = q$  lo que es una contradicción y prueba la unicidad.  $\square$

**Observación 2.3.1.** *Notemos que, debido a su unicidad, los puntos  $m$  y  $n$  del lema anterior dependen de manera continua de la geodésica a la que pertenecen y, consecuentemente, de la dirección inicial de dicha geodésica.*

**Observación 2.3.2.** *Las geodésicas minimizantes que parten de  $p$  y el punto  $m$  de la proposición anterior tienen una correspondencia biyectiva en el sentido que sigue. Dada  $\gamma$  geodésica (con  $\ell(\gamma) < \rho$ ) partiendo de  $p$  y  $m$  el único punto de  $\gamma$  con  $d(p, m) = d(q, m)$ . Dado un punto  $r \in \gamma$  se tiene que  $d(p, r) \leq \ell(\gamma) < \rho$ , y como  $i(M) \geq \pi > \rho$ , entonces  $r \notin C_m(p)$ . En consecuencia, existe una única geodésica minimizante que pasa por  $p$  y  $m$ .*

Estamos ya en disposición de dar el homeomorfismo de manera explícita y con ello demostrar el teorema que enunciamos al principio del texto. Tenemos:

**Teorema 2.3.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta y simplemente conexa, cuya curvatura seccional  $K$  satisfice:*

$$0 < h < K \leq 1$$

*Si  $h = 1/4$ , entonces  $M$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .*

*Demostración.* Sean  $p, q \in M$  puntos tales que  $\text{diam}(M) = d(p, q)$ , consideremos  $D_1$  el subconjunto de  $M$  formado por todos los segmentos de geodésica uniendo  $p$  y  $m$  (que denotamos por  $\overline{pm}$ ), con  $m$  el punto dado por el lema anterior. Análogamente, definimos  $D_2$  el subconjunto de todos los segmentos de geodésica que unen  $q$  y  $n$ , denotados  $\overline{qn}$ . Notemos que, debido a la observación 2.3.1, los conjuntos  $D_1$  y  $D_2$  son cerrados. Vamos a probar que también se cumplen  $D_1 \cup D_2 = M$  y  $\partial D_1 = \partial D_2 = D_1 \cap D_2$ .

Para verlo, tomemos  $r \in M$  un punto arbitrario de la variedad. Por el lema 2.3.2 se tiene  $M = B_\rho(p) \cup B_\rho(q)$  para un cierto  $\rho$  y, por consiguiente,  $d(p, r) < \rho$  ó  $d(q, r) < \rho$ . Vamos a considerar únicamente el primer caso, pues el razonamiento que sigue se puede aplicar de manera totalmente análoga al segundo caso. Si  $d(p, r) < \rho$  como, por la estimación de Klingenberg, se tiene que  $d(p, C_m(p)) \geq i(M) \geq \pi > \rho$  de aquí se sigue que  $r \notin C_m(p)$ . En esta situación sabemos que existe  $\gamma$  una única geodésica minimizante uniendo  $p$  y  $r$ . Además, por el lema anterior, existe un único  $m$  en  $\gamma$  tal que  $d(p, m) = d(q, m) < \rho$ . Comparando  $d(p, r)$  y  $d(q, r)$  tenemos tres casos:

- Si  $d(p, r) < d(q, r)$ , entonces  $r \in \overline{pm}$ , esto es,  $r \in D_1$ .
- Si  $d(p, r) = d(q, r)$ , por la unicidad de  $m$  se tiene que  $r = m$  el extremo de  $\overline{pm}$ , luego  $r \in \partial D_1$
- Si  $d(p, r) > d(q, r)$ , entonces  $d(q, r) < \rho$  y usando el argumento del primer caso con  $q$  en lugar de  $p$ , se tiene que  $r \in \overline{qn}$ , esto es,  $r \in D_2$

Por tanto,  $r \in D_1 \cup D_2$  y se tiene  $M = D_1 \cup D_2$ . Si  $r \in D_1 \cap D_2$ , entonces  $r \in \overline{pm}$  y  $r \in \overline{qn}$  para ciertos  $m$  y  $n$ . Por los tres casos antes discutidos, se tiene que  $d(p, r) = d(q, r)$  y, por la unicidad de  $m$  y  $n$ , obtenemos  $m = r = n$ . Esto que prueba  $D_1 \cap D_2 \subseteq \partial D_1$  y  $D_1 \cap D_2 \subseteq \partial D_2$  y, como los contenidos opuestos son inmediatos, se tiene la igualdad.

Pasamos a definir la aplicación  $\varphi : \mathbb{S}^n \rightarrow M$  que nos dará el homeomorfismo. Empezamos fijando un punto  $N \in \mathbb{S}^n$  cuya imagen va a ser  $p$  y a cuyo punto antípoda  $S \in \mathbb{S}^n$  asociamos  $q$ . Los puntos  $N$  y  $S$  harán el papel de polo norte y polo sur, respectivamente, de la esfera. Elegimos una isometría lineal entre los tangentes a  $N$  (en  $\mathbb{S}^n$ ) y a  $p$  (en  $M$ ), la cual vamos a denotar por  $j : T_N \mathbb{S}^n \rightarrow T_p M$ . Sea  $E$  el ecuador de  $\mathbb{S}^n$  (respecto del polo norte fijado), para cada  $e \in E$  consideramos el segmento de geodésica  $\gamma_e : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^n$  con  $\gamma_e(0) = N$  y  $\gamma_e(\pi/2) = e$ . Sea  $\sigma_e$  la geodésica en  $M$  que pasa a través de  $p$  con velocidad  $j(\gamma_e'(0))$ , tomamos el punto  $m$  dado por el lema 2.3.3, es decir, cumpliendo  $d(p, m) = d(q, m)$ .

Llegados a este punto, notemos que para cada  $e$  existe una única geodésica (luego una única dirección) que parte de  $N$  pasando por dicho  $e$  y, por consiguiente, existe una biyección entre  $e$  y el punto  $m$ , debido a la unicidad de este último y al hecho de que  $j$  es una isometría. Finalmente, vamos a denotar por  $\mu_e$  a la única (véase la observación 2.3.2) geodésica minimizantes que va de  $q$  a  $m$ , y con  $V$  a su vector tangente unitario en el punto  $q$ . Con estos ingredientes, definimos  $\varphi$  de la manera siguiente:

$$\varphi(\gamma_e(s)) = \begin{cases} \exp_p((2s/\pi)d(p, m)(j \circ \gamma_e'(0))), & 0 < s \leq \pi/2, \\ \exp_q((2 - 2s/\pi)d(q, m)V), & \pi/2 \leq s < \pi. \end{cases}$$

Una vez definida la función queda ver que efectivamente es homeomorfismo. Para ello es conveniente reescribir  $\varphi$  términos de  $\sigma_e$  y  $\mu_e$  como sigue:

$$\varphi(\gamma_e(s)) = \begin{cases} \sigma_e((2s/\pi)d(p, m)), & 0 < s \leq \pi/2, \\ \mu_e((2 - 2s/\pi)d(q, m)), & \pi/2 \leq s < \pi. \end{cases}$$

Así, puesto que el argumento  $(2s/\pi)d(p, m)$  es estrictamente creciente en  $(0, \pi/2)$  y se cumple que  $\varphi(\gamma_e(0)) = p$  y  $\varphi(\gamma_e(\pi/2)) = m$ , es sencillo ver que  $\varphi(\gamma_e((0, \pi/2]))$  es el segmento de  $\sigma_e$  que va desde  $p$  (sin incluirlo) hasta  $m$  (véase figura 2.8). Se

tiene entonces, por la biyectividad antes mencionada entre  $e$  y  $m$ , que  $\varphi$  define una biyección entre el hemisferio norte cerrado de  $\mathbb{S}^n$  y  $D_1$ . Análogamente se ve que  $\varphi$  lleva el hemisferio sur cerrado al conjunto  $D_2$  de manera biyectiva, así como el ecuador  $E$  a  $\partial D_1 = \partial D_2 = D_1 \cap D_2$ . Para la continuidad de  $\varphi$  basta tener en cuenta el hecho de que la unicidad de los puntos  $m$  y  $n$  dependía de manera continua de la geodésica (dirección) de la que partían (observación 2.3.1). Finalmente notemos que como  $M = D_1 \cup D_2$ , entonces  $\varphi$  es suprayectiva y la inyectividad se deduce de  $\varphi(E) = \partial D_1 = \partial D_2 = D_1 \cap D_2$ ; puesto que  $\mathbb{S}^n$  es compacta,  $\varphi$  define un homeomorfismo.

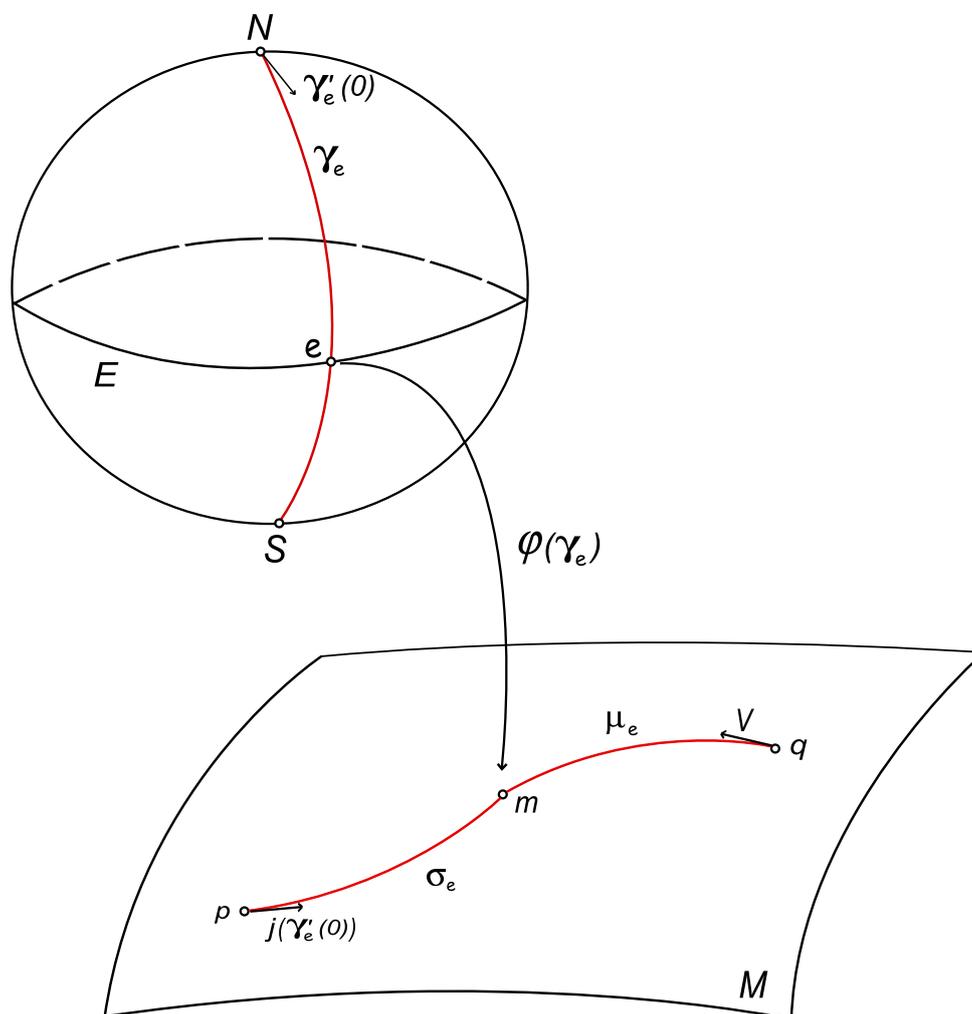


Figura 2.8

□

Como hemos visto, el homeomorfismo obtenido en la demostración anterior consiste fundamentalmente en ir llevando arcos maximales de la esfera (una vez fijados los polos Norte y Sur) a ciertas geodésicas de la variedad considerada. Estas geodésicas unen dos puntos de la variedad cuya distancia coincide con el diámetro de ésta y están en correspondencia biyectiva con los arcos maximales y el punto del ecuador por el que pasan. Así, el homeomorfismo «llena» nuestra variedad con las imágenes de todos estos arcos.

Para finalizar el capítulo, queremos señalar la existencia de otra prueba completamente diferente del teorema de la esfera. Esta prueba, más actual (1986), se debe a Gromov y puede encontrarse en [9].

# Capítulo 3

## Consecuencias y desarrollos posteriores

El teorema de la esfera es uno de los primeros, y más importantes, resultados sobre la relación existente entre la topología de una variedad y su curvatura. Es por ello que su demostración dio lugar a un gran número de incógnitas y fue un punto de inflexión para la investigación de este tipo de cuestiones. Desde que se probara el resultado, la actividad investigadora en torno a extenderlo y aplicarlo a otros ámbitos ha sido intensa, de manera que hoy en día se siguen presentando múltiples resultados y aplicaciones que parten de él, constituyendo una línea de investigación muy importante de la geometría diferencial.

En este capítulo nos limitaremos a presentar y comentar algunos de los desarrollos más relevantes que guardan relación con el teorema de la esfera, abarcando desde los años inmediatamente posteriores a su demostración, hasta resultados recientes que forman parte de la investigación actual de muchos matemáticos. De esta manera, pretendemos dar también una visión global de la evolución seguida hasta la actualidad, mencionando algunas de las técnicas e ideas que han ido surgiendo tras la demostración de Klingenberg. Dentro de este último grupo, nos centramos en lo que se conoce como flujo de Ricci, y cuyo enfoque hacia el teorema de la esfera en los años 80 se debe a R. Hamilton (véase [14]).

### 3.1. Teorema diferencial de la esfera

Naturalmente, la primera pregunta que se nos viene a la cabeza es si resulta posible reemplazar el término «homeomorfo» por el de «difeomorfo» en el enunciado del teorema. Es decir, buscamos probar lo que se conoce usualmente como «el teorema diferencial de la esfera». Notemos que el homeomorfismo obtenido en la prueba del

capítulo anterior consistía fundamentalmente en unir dos discos a lo largo de sus fronteras. Una construcción de este tipo puede dar lugar a una estructura diferenciable en  $M$  distinta a la usual de la esfera y por ello la prueba del teorema de la esfera estudiada no es suficiente para establecer un difeomorfismo. A las variedades riemannianas homeomorfas a la esfera, pero no difeomorfas, se las conoce usualmente como esferas exóticas. Los primeros ejemplos de esferas exóticas se deben a J. Milnor (véase [20]). En estos términos, es sencillo observar que demostrar el teorema equivale a probar que una esfera exótica no admite una métrica de manera que la curvatura seccional sea  $1/4$ -pinzada.

La primera aproximación al teorema diferencial de la esfera data de 1966, cuando D. Gromoll (véase [10]) y E. Calabi (no publicado) dieron la prueba para un  $h_n$  suficientemente pequeño. Este  $h_n$  dependía únicamente de la dimensión  $n$  de  $M$  y tendía que 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ . Trabajando en esta dirección, los matemáticos Im-Hoff y Ruh Ernst (véase [15]) garantizaron la existencia de  $\delta_n$ , una sucesión decreciente con límite 0.68 cuando  $n \rightarrow \infty$ , de manera que el teorema era cierto en dimensión  $n$  para  $h = \delta_n$ . Un poco antes, en 1971, M. Sugimoto, K. Shiohama y H. Karcher (véase [25]) probaron el resultado para un  $h$  constante e independiente de la dimensión ( $h = 0.87$ ). Esta constante fue mejorada al poco tiempo por E. Ruh en [24] ( $h = 0.80$ ) y, posteriormente, por K. Grove, H. Karcher y el propio E. Ruh en [11] ( $h = 0.76$ ). Actualmente, se desconoce la constante óptima para la cual el teorema diferencial de la esfera es cierto, ignorándose también si el valor  $1/4$  es válido o no. Así el mejor valor para el que se ha probado la veracidad del resultado en la actualidad se sitúa en  $h = 0.654$ , cuya prueba se debe a Yoshihiko Suyama (véase [26]).

Aunque por el momento no ha sido posible obtener el mejor valor posible de  $h$  para variedades simplemente conexas, eliminando esta hipótesis del problema sí se han obtenido resultados con  $h$  óptima. Para presentar este tipo de resultados es conveniente introducir el concepto de espacio forma esférico, pues nuestra variedad  $M$  ahora será difeomorfa a uno de estos objetos. Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana compacta de dimensión  $n$ , sabemos que si ésta tiene curvatura seccional constante igual a 1, entonces es isométrica a un cociente de la forma  $\mathbb{S}^n/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un grupo finito de isometrías actuando libremente. Estas variedades cociente se encuentran totalmente clasificadas (véase [28]) y son lo que se conoce como espacios forma esféricos.

Pasamos ahora a presentar una versión reciente del teorema diferencial de la esfera, sin la hipótesis de ser simplemente conexo. Para ello, antes debemos introducir el concepto de ser  $h$ -pinzado puntualmente. Esto significa que solo comparamos entre sí los planos bidimensionales tangentes al mismo punto.

**Definición 3.1.1.** *Dado un número real  $h \in (0, 1)$ , una variedad riemanniana  $M$  se dice puntualmente  $h$ -pinzada si  $0 \leq hK(\pi_1) \leq K(\pi_2)$  para todo punto  $p \in M$  y para cada par de planos bidimensionales  $\pi_1, \pi_2 \subset T_p M$ . Cuando las desigualdades son estrictas, decimos que  $M$  es puntualmente  $h$ -pinzada en sentido estricto.*

Conviene observar el hecho de que una variedad que sea estrictamente  $h$ -pinzada lo es también puntualmente (en sentido estricto) de manera inmediata. Es decir, la condición de ser puntualmente  $h$ -pinzada es más débil que serlo de manera global. En el año 2007, S. Brendle y R. Schoen (véase [4]) demostraron el teorema diferencial de la esfera, y lo hicieron para el valor  $h = 1/4$ .

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta y puntualmente  $1/4$ -pinzada en sentido estricto. Se tiene que  $M$  es difeomorfa a un espacio forma esférico. En particular, ninguna esfera exótica admite una métrica con curvatura seccional estrictamente  $1/4$ -pinzada.*

La estrategia utilizada en la prueba del teorema consiste en deformar la métrica dada, que es  $1/4$ -pinzada, a una métrica con curvatura constante igual a 1. Para ello, se usa el flujo de Ricci, el cual presentamos en la sección siguiente y que puede verse como una ecuación geométrica y evolutiva de tipo parabólico. Así, lo que se busca para la prueba son condiciones adecuadas de curvatura, que sean consecuencia de las hipótesis y que se conserven mediante el flujo de Ricci.

En relación al valor de  $h$ , cuando trabajamos en dimensión arbitraria se tiene que el valor óptimo para que el enunciado sea cierto es  $h = 1/4$ . De hecho, cuando trabajamos únicamente en dimensión par, este valor sigue siendo el mejor posible (el espacio proyectivo complejo sirve de contraejemplo para  $h < 1/4$ ). Sin embargo, en dimensión impar este valor deja de ser óptimo, tal y como probaron los matemáticos Peter Petersen and Terence Tao en un artículo (véase [22]). En dicho artículo se garantiza la existencia de valores  $\varepsilon(n) > 0$  dependiendo únicamente de la dimensión  $n$  de manera que el teorema continúa siendo cierto para  $h = 1/4 - \varepsilon(n)$ , aunque se desconoce cual es el valor óptimo para este  $h$ , tal y como ocurría con el teorema de la esfera original.

## 3.2. El flujo de Ricci

Como hemos comentado, el flujo de Ricci desempeña un papel fundamental a la hora de probar el teorema diferencial de la esfera. Debido a ello y a la importancia actual de esta técnica vamos a presentar su definición formal, así como algunos ejemplos.

Pese a ser una técnica que goza de múltiples aplicaciones, el uso más importante y conocido del flujo de Ricci se encuentra en la demostración de la conjetura de

Poincaré, uno de los siete problemas del milenio<sup>1</sup>. Este resultado, propuesto en el año 1904 por Henri Poincaré, afirma que la esfera tridimensional es la única variedad compacta tridimensional en la que todo lazo se puede deformar en un punto. Esto equivale a decir que solo hay una variedad cerrada y simplemente conexa de dimensión 3: la esfera tridimensional. La conjetura de Poincaré fue demostrada por el matemático ruso Grigori Perelmán en el año 2003. Así, el flujo de Ricci constituye uno de los elementos fundamentales de dicha prueba, la cual llevó a Perelmán a ganar en 2006 la medalla Fields y a recibir, en el año 2010, el premio de un millón de dólares por resolver uno de los problemas del milenio. No obstante, el matemático ruso rechazaría ambos galardones argumentando que su trabajo no necesitaba reconocimiento alguno además de su validez. Otros detalles sobre la vida y obra de Perelmán pueden leerse en:

- Grigori Perelmán en Wikipedia
- Grigori Perelmán en MacTutor History of Mathematics

Formalmente, el flujo de Ricci se define de la siguiente manera:

**Definición 3.2.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana. Dada  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$  con  $T > 0$ , una familia de métricas riemannianas de  $M$ , decimos que  $g(t)$  es una solución del flujo de Ricci si:*

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)}.$$

Así, el flujo de Ricci debe verse como una ecuación no lineal del calor para métricas riemannianas. El propio Hamilton demostró (véase [14]) que para cualquier elección de la métrica inicial  $g_o$  el flujo de Ricci posee una solución en algún intervalo maximal  $[0, T)$  con  $T > 0$ . A continuación describimos un par de soluciones del flujo de Ricci.

**Ejemplo 3.2.1. (Variedades de Einstein).** *Sea  $(M, g_o)$  una variedad riemanniana. Se dice que  $g_o$  es una métrica de Einstein si  $\text{Ric}_{g_o} = \rho g_o$  para alguna constante  $\rho$ . En estas condiciones, la familia de métricas*

$$g(t) = (1 - 2\rho t)g_o$$

*constituyen una solución del flujo de Ricci.*

---

<sup>1</sup>Los problemas del milenio son siete problemas matemáticos cuya resolución supondrá, para quien la realice, un premio de un millón de dólares por cada uno de ellos, tal y como anunció el Clay Mathematics Institute (CMI) en el año 2000. En la actualidad, únicamente uno de estos problemas ha sido resuelto: la conjetura de Poincaré.

**Ejemplo 3.2.2.** Consideremos  $M = \mathbb{R}^2$  y, para cada  $t \in (-\infty, \infty)$ , definamos la métrica  $g(t)$  de  $\mathbb{R}^2$  dada por las componentes

$$g_{ij}(t) = \frac{4}{e^t + |x|^2} \delta_{ij}$$

para cada  $x \in \mathbb{R}^2$ . La curvatura escalar para  $g(t)$  viene dada por:

$$S_{g(t)} = \frac{e^t}{e^t + |x|^2}.$$

En consecuencia, un cálculo directo muestra que

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -S_{g(t)} g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)}$$

y tenemos que las métricas  $g(t)$  con  $t \in (-\infty, \infty)$  son solución del flujo de Ricci.

Como hemos comentado, la prueba del teorema diferencial de la esfera (teorema 3.1.1) consiste en deformar la métrica de la variedad hasta una métrica con curvatura seccional igual a 1. En concreto, la manera de hacerlo viene dada por el siguiente resultado, que fue probado por Simon Brendle y Richard Schoen (véase [5], página 21).

**Proposición 3.2.1.** Sea  $(M, g_o)$  una variedad riemanniana compacta de dimensión  $n \geq 4$  y puntualmente  $1/4$ -pinzada en sentido estricto. Si  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , es la única solución maximal del flujo de Ricci para la condición inicial  $g_o$ , entonces las métricas reescaladas  $\frac{1}{2(n-1)(T-t)} g(t)$  convergen a una métrica de curvatura seccional igual a 1 cuando  $t \rightarrow T$ .

Por último, acabamos la sección dando un resultado para variedades riemannianas de dimensión 3. Este resultado fue probado por R. Hamilton (véase [14]) y muestra cómo el flujo de Ricci deforma cualquier métrica inicial con curvatura de Ricci positiva hacia una métrica de curvatura constante.

**Teorema 3.2.1.** Sea  $(M, g_o)$  una variedad riemanniana compacta de dimensión 3 con curvatura de Ricci positiva y sea  $g(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , la única solución maximal del flujo de Ricci para la métrica inicial  $g_o$ . Se tiene entonces que las métricas reescaladas  $\frac{1}{4(T-t)} g(t)$  convergen a una métrica de curvatura seccional 1 cuando  $t \rightarrow T$ .

Observemos que este teorema tiene importantes implicaciones topológicas, pues como consecuencia directa se obtiene que cualquier variedad riemanniana de dimensión 3, con curvatura seccional positiva, es difeomorfa a un espacio forma esférico. En particular, si añadimos la hipótesis de ser simplemente conexa, se tiene que cualquier variedad riemanniana de dimensión 3 en estas condiciones es difeomorfa a la esfera.

### 3.3. Variaciones del teorema de la esfera

En esta sección vamos a presentar tres resultados sobre variedades riemannianas de curvatura positiva. Estos resultados fueron inspirados por el teorema de la esfera original y sirven de ejemplo para lograr una visión general de las diferentes condiciones que, junto a la curvatura positiva, se pueden imponer a una variedad riemanniana, de manera que esta siga siendo una esfera (desde el punto de vista topológico).

El primer resultado se debe a los matemáticos K. Grove y K. Shiohama (véase [12]) y data de 1977. Su idea fue la de sustituir la acotación superior de la curvatura seccional por una condición de acotación inferior para el diámetro de la variedad. El resultado es el siguiente:

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta con curvatura seccional  $K \geq 1$ . Si  $\text{diam}(M) > \pi/2$ , entonces  $M$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .*

Así, el resultado lo que dice es que una variedad con curvatura seccional mayor o igual a 1 y que además tenga un diámetro suficientemente grande es una esfera.

Pasamos ahora a describir el teorema de la esfera de Micallef y Moore (véase [19]). Este resultado generaliza el teorema de la esfera de Klingenberg, en el sentido de que la condición de curvatura de la que se parte es más débil que la original. Esta novedosa condición fue introducida por Micallef y Moore, a la que ellos mismos dieron el nombre de curvatura isotrópica positiva.

**Definición 3.3.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión  $n \geq 4$ . Se dice que  $M$  tiene curvatura isotrópica no negativa si*

$$\begin{aligned} &R(e_1, e_3, e_1, e_3) + R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\ &+ R(e_2, e_3, e_2, e_3) + R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\ &- 2R(e_1, e_2, e_3, e_4) \geq 0 \end{aligned}$$

para cada punto  $p \in M$  y para cada 4-tupla ortonormal de vectores  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset T_p M$ . Además, si ocurre la desigualdad estricta decimos que  $M$  tiene curvatura isotrópica positiva.

Es sencillo ver que una variedad puntualmente 1/4-pinzada en sentido estricto tiene también curvatura isotrópica positiva. Con esta definición, podemos enunciar el siguiente teorema:

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta y simplemente conexa de dimensión  $n \geq 4$ . Si además  $M$  tiene curvatura isotrópica positiva, entonces es homeomorfa a la esfera  $\mathbb{S}^n$ .*

El tercer y último resultado que presentamos trata sobre el volumen de la variedad. Así, la acotación superior para la curvatura seccional va a ser sustituida por una condición que relaciona el volumen de la esfera  $n$ -dimensional  $\mathbb{S}^n$ , denotado por  $V_n$ , con el volumen de la variedad  $M$ , que escribimos como  $\text{vol}(M)$ . Este resultado se debe a los matemáticos Yukio Otsu, Katsuhiko Shiohama y Takao Yamaguchi (véase [21]) y dice lo siguiente:

**Teorema 3.3.3.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana simplemente conexa y de dimensión  $n$  cuya curvatura seccional satisface  $K \geq 1$ . Existe un número  $\varepsilon(n) > 0$ , que depende de la dimensión de  $M$ , tal que si*

$$\text{vol}(M) \geq V_n - \varepsilon(n)$$

*entonces  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .*

De manera intuitiva, lo que el teorema anterior quiere decir es que cuando  $M$  tiene curvatura seccional mayor o igual a 1, si el volumen de la variedad es lo suficientemente cercano al de la esfera, entonces son difeomorfas. Notemos también que el teorema establece un difeomorfismo y no solo un homeomorfismo, luego la estructura diferencial de la esfera estándar también se conserva en dichas condiciones. Por último, es importante resaltar el hecho de que en este último teorema se ha eliminado la hipótesis de compacidad, la cual estaba presente en todos los resultados anteriores.

Como comentamos al principio del capítulo, los resultados aquí presentados son solo una mínima parte de todo el desarrollo existente en torno al teorema de la esfera. Así pues, el objetivo ha sido más bien el de presentar unos pocos resultados cuyo enunciado e interpretación estén en consonancia con el nivel de profundidad del presente trabajo. Esto se debe a que la teoría empleada en muchos de los enunciados y demostraciones que se pueden encontrar en la literatura excede con creces el nivel proporcionado por un primer programa de estudios universitarios de matemáticas. No obstante, y como viene siendo habitual, remitimos al lector interesado a las obras de M. Berger (véase [2]) y S. Brendle (véase [3]) donde podrá encontrar desarrollos y referencias más profundos y variados, que van desde los casos en que la curvatura seccional es negativa hasta distintos teoremas de estructura, pasando por relajaciones de hipótesis como la eliminación de la compacidad.



# Bibliografía

- [1] M. BERGER, *Les variétés Riemanniennes (1/4)-pinçées*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 14 (1960), pp. 161–170.
- [2] —, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer, 2007.
- [3] S. BRENDLE, *Ricci Flow and the Sphere Theorem (Graduate Studies in Mathematics)*, American Mathematical Society, 2010.
- [4] S. BRENDLE Y R. SCHOEN, *Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms*, Journal of the American Mathematical Society, 22 (2009), pp. 287–307.
- [5] —, *Curvature, sphere theorems, and the Ricci flow*, Bulletin of the American Mathematical Society, 48 (2011), pp. 1–32.
- [6] M. P. DO CARMO, *Differential geometry of curves and surfaces*, 1976.
- [7] —, *Riemannian Geometry (Mathematics: Theory & Applications)*, 1992.
- [8] O. DURUMERIC, *A generalization of Berger's theorem on almost  $\frac{1}{4}$ -pinched manifolds. II*, Journal of Differential Geometry, 26 (1987), pp. 101–139.
- [9] J. ESCHENBURG, *Local convexity and nonnegative curvature - gromov's proof of the sphere theorem*, Inventiones mathematicae, 84 (1986), pp. 507–522.
- [10] D. GROMOLL, *Differenzierbare strukturen und metriken positiver krümmung auf sphären*, Mathematische Annalen, 164 (1966), pp. 353–371.
- [11] K. GROVE, H. KARCHER, Y E. A. RUH, *Jacobi fields and Finsler metrics on compact Lie groups with an application to differentiable pinching problems*, Mathematische Annalen, 211 (1974), pp. 7–21.
- [12] K. GROVE Y K. SHIOHAMA, *A generalized sphere theorem*, Annals of Mathematics, 106 (1977), pp. 201–211.
- [13] J. HADAMARD, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésique*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 4 (1898), pp. 27–73.

- 
- [14] R. S. HAMILTON, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, Journal of Differential Geometry, 17 (1982), pp. 255–306.
- [15] H. IM HOF Y E. RUH, *An equivariant pinching theorem*, Commentarii Mathematici Helvetici, 50 (1975), pp. 389–401.
- [16] W. KLINGENBERG, *Contributions to Riemannian Geometry in the large*, Annals of Mathematics, 69 (1959), pp. 654–666.
- [17] ———, *Über Riemannsche Mannfaltigkeiten mit positiver Krümmung*, Commentarii Mathematici Helvetici, 35 (1961), pp. 47–54.
- [18] J. M. LEE, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, (2012).
- [19] M. J. MICALLEF Y J. D. MOORE, *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Annals of Mathematics, 127 (1988), pp. 199–227.
- [20] J. MILNOR, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Annals of Mathematics, 64 (1956), pp. 399–405.
- [21] Y. OTSU, K. SHIOHAMA, Y T. YAMAGUCHI, *A new version of differentiable sphere theorem*, Inventiones mathematicae, 98 (1989), pp. 219–228.
- [22] P. PETERSEN Y T. TAO, *Classification of almost quarter-pinched manifolds*, Proceedings of the American Mathematical Society, 137 (2009), pp. 2437–2440.
- [23] H. E. RAUCH, *A contribution to differential geometry in the large*, Annals of Mathematics, 54 (1951), pp. 38–55.
- [24] E. A. RUH, *Krümmung und differenzierbare struktur auf sphären, II*, Mathematische Annalen, 205 (1973), pp. 113–129.
- [25] K. SHIOHAMA, M. SUGIMOTO, Y H. KARCHER, *On the differentiable pinching problem*, Mathematische Annalen, 195 (1971), pp. 1–16.
- [26] Y. SUYAMA, *A differentiable sphere theorem by curvature pinching, II*, Tohoku Mathematical Journal, 47 (1995), pp. 15–29.
- [27] Y. TSUKAMOTO, *On Riemannian manifolds with positive curvature*, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University. Series A, Mathematics, 15 (1962), pp. 90–96.
- [28] J. A. WOLF, *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish Inc., 5<sup>a</sup> ed., 1984.

# Índice de símbolos

$\mathbb{N}$	—	Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{R}$	—	Cuerpo de los números reales.
$\mathbb{C}$	—	Cuerpo de los números complejos.
$\mathbb{S}^n$	—	Esfera unidad n-dimensional.
$\mathbb{P}(\mathbb{C})^n$	—	Espacio proyectivo complejo.
$T_p M$	—	Espacio tangente a $M$ en el punto $p$ .
$\mathfrak{X}(M)$	—	Conjunto de los campos de vectores tangentes a la variedad.
$\mathfrak{X}(\gamma)$	—	Conjunto de los campos de vectores tangentes a lo largo de $\gamma$ .
$\nabla$	—	Conexión de Levi-Civita.
$\exp_p$	—	Aplicación exponencial en el punto $p$ .
$d(p, q)$	—	Distancia entre $p$ y $q$ .
$B_r(p)$	—	Bola geodésica de radio $r$ y centro $p$ .
$\ell(\gamma)$	—	Longitud de la curva $\gamma$ .
$\text{diam}(M)$	—	Diámetro de $M$ .
$\text{vol}(M)$	—	Volumen de $M$ .
$T_1 M$	—	Fibrado tangente unitario de $M$ .
$R$	—	Operador/tensor curvatura.
$K(\sigma)$	—	Curvatura seccional asociada a $\sigma$ .
$\text{Ric}$	—	Curvatura de Ricci.
$S$	—	Curvatura escalar.
$C(p)$	—	Lugar de los puntos conjugados de $p$ .
$C_m(p)$	—	Lugar de corte de $p$ .
$i(M)$	—	Radio de inyectividad de $M$ .
$L(s)$	—	Operador longitud.
$E(s)$	—	Función energía.



# Índice terminológico

## Curvatura

- de Ricci, 21
- escalar, 21
- isotrópica, 58
- operador, 20
- seccional, 20
- tensor, 20

Esfera exótica, 54

Espacio forma esférico, 54

Estimación de Klingenberg, 41

Fibrado tangente, 36

Flujo de Ricci, 56

## Fórmula

- de primera variación de la energía, 27
- de segunda variación de la energía, 28

Función energía, 27

## Jacobi

- campo, 22
- ecuación, 22

## Lugar

- de corte, 32
- de los puntos conjugados, 25

Operador longitud, 27

Pinzamiento, 15

## Punto

- conjugado, 25
- multiplicidad, 25
- de corte, 32

Radio de inyectividad, 36

## Teorema

- Bonnet-Myers, 28
- de comparación de Rauch, 29
- de la esfera, 15
- diferencial de la esfera, 55

## Variación, 26

- campo variacional, 26
- curva de la variación, 26
- curva transversal, 26
- diferenciable, 26
- propia, 26

## Variedad

- de Einstein, 56
- $h$ -pinzada, 16
- puntualmente  $h$ -pinzada, 55