Universidad de Murcia
Grado en Matemáticas

TRABAJO FIN DE GRADO

Caos, linealidad y dimensión

Realizado por
Virginia Abellán Zapata

Junio de 2015

Caos, linealidad y dimensión

Virginia Abellán Zapata

dirigido por

Victor Jiménez López

Resumen

Se suele pensar que los sistemas lineales tienen un comportamiento predecible y que, por lo tanto, el caos está íntimamente relacionado con la no linealidad. Por ejemplo L. A. Smith, en la introducción de su libro *Chaos: A very short introduction*, escribe: "Chaotic systems not only exhibit sensitive dependence, but two other properties as well: they are *deterministic*, and they are *nonlinear*."

El objetivo de este trabajo será explorar hasta qué punto esta afirmación es verdad. Nos centraremos en las dos nociones de caos (Devaney y Li-Yorke) más populares en la literatura, para constatar después que la afirmación es cierta en dimensión finita pero no lo es en dimensión infinita, apareciendo así un interesante dialéctica entre caos, linealidad y dimensión.

Ya en 1929, G. D. Birkhoff encontró un ejemplo de operador lineal que poseía un ingrediente importante de lo que más adelante se definiría como caos: la existencia de una órbita densa. Más tarde, G. R. MacLane (1952) encontró el mismo fenómeno en el operador diferencial y S. Rolewicz en 1969 descubrió un nuevo operador lineal con dicha propiedad. Pero no fue hasta principios de los noventa, tras la aparición de un influyente artículo de G. Godefroy y J. H. Shapiro [8], cuando la dinámica lineal en dimensión infinita empezó a estudiarse seriamente; para entonces la teoría de los sistemas dinámicos caóticos llevaba ya dos décadas en pleno desarrollo y gozaba de una gran popularidad, popularidad que trascendía incluso los límites del puro ámbito científico.

En relación a la aparición del concepto matemático de caos hay dos nombres (o tres, para ser precisos) que brillan con luz propia: Lorenz y el binomio Li-Yorke. En 1963, el matemático y meteorólogo Edward Lorenz (1917–2008) trabajaba en un sistema autónomo de tres ecuaciones diferenciales aparentemente muy sencillo, proveniente de un modelo de convección de fluidos con el que pretendía estudiar los comportamientos y variaciones del clima. Por pura casualidad (en una ocasión, por error, introdujo en su ordenador las condiciones iniciales con tres en lugar de seis cifras decimales) descubrió que la evolución de las soluciones del sistema a partir de condiciones iniciales casi idénticas era radicalmente diferente. Más aún, lejos de diverger hacia infinito, las soluciones eran atraídas por un misterioso conjunto, hoy conocido como *atractor de Lorenz* y que se ha convertido en el icono por antonomasia de la llamada "ciencia del caos".

Aunque al principio el trabajo de Lorenz no despertó demasiado interés, en los primeros setenta ya era relativamente conocido entre la comunidad científica, sobre todo a raíz de una memorable conferencia que Lorenz impartió en diciembre de 1972 en la 139ª reunión de la American Association for the Advancement of Science, y al no menos memorable título que Philip Merilees, el organizador de la sesión en la que este había de intervenir, improvisó para la charla, ya que Lorenz había olvidado proporcionarle uno: "Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?". Nacía así el mundialmente famoso "efecto mariposa" (hasta una película hay con ese nombre), que establece que una mínima variación de las condiciones iniciales puede ocasionar una descomunal transformación en los resultados finales; esta es la esencia intuitiva de la noción de caos.

Estrictamente hablando Lorenz nunca dio una definición rigurosa de caos. Tal mérito corresponde a Tien-Yien Li y James A. Yorke en 1975 en el artículo "Period three implies chaos", donde además de formalizar este concepto probaban un sorprendente hecho: toda función continua del intervalo con un punto periódico de periodo tres es automáticamente caótica. Aunque este trabajo fue uno de los principales desencadenantes del moderno "boom"de los sistemas dinámicos, no tardó en ser cuestionado por algunos matemáticos: si bien es verdad que la definición de Li y Yorke describe un cierto comportamiento extraño, en la práctica tal caos puede no ser observable, pues el conjunto de puntos afectados por dicho comportamiento puede ser muy pequeño (en términos de teoría de la medida, un conjunto de medida cero). En la práctica, entonces, el sistema evolucionaría de un modo perfectamente regular.

Para soslayar este problema Devaney introduce en 1986 una nueva definición de caos: un función es caótica si tiene una órbita densa, un conjunto denso de puntos periódicos y dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales (esta última condición es la formulación explícita del mencionado efecto mariposa, idea que también recogía, aunque no tan claramente, la definición de Li-Yorke). Es este contexto en el que aparece el trabajo de Godefroy y Shapiro de 1991, donde además de aceptar la definición de caos dada por Devaney como la correcta para el caos lineal, demuestran que numerosos operadores lineales, entre los que están incluidos los operadores clásicos de Birkhoff, MacLane y Rolewicz, son caóticos.

Aunque otras nociones de caos han aparecido a lo largo de la historia, en este trabajo solo consideraremos las definiciones dadas por Li-Yorke y Devaney. Comenzamos en el capítulo 1 introduciendo al lector en los conceptos fundamentales de la teoría de los sistemas dinámicos. En primer lugar, desmenuzaremos la definición de caos Devaney en espacios métricos sin puntos aislados, estudiando una a una las tres condiciones mencionadas para dicha definición. Mediante el teorema 1.2.1 (de Birkhoff) demostraremos que la transitividad topológica es equivalente a afirmar que existe algún punto cuya órbita es densa. Además, veremos mediante el teorema 1.2.7 (de Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey) que la definición dada por Devaney se puede simplificar, ya que la dependencia con respecto a las condiciones iniciales es solo una consecuencia de las dos primeras condiciones. Por lo tanto, diremos que un sistema dinámico es caótico en el sentido de Devaney si es topológicamente transitivo y tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

En general, ninguna de las dos condiciones restantes implica directamente la otra (lo veremos mediante dos contraejemplos). Sin embargo, demostraremos en el teorema 1.2.17 que sí hay ciertos espacios en los que se verifica que si un sistema es topológicamente transitivo, entonces tiene un conjunto denso de puntos periódicos (en particular, esto ocurre en el intervalo). Por lo tanto, en estos espacios el caos de Devaney vendrá determinado únicamente por la transitividad topológica.

Continuaremos el capítulo con la noción de caos en el sentido de Li-Yorke. Al igual que lo que ocurre con la definición dada por Devaney, Li y Yorke enunciaron su noción de caos mediante tres condiciones. Sin embargo, veremos en el presente trabajo que la tercera condición es meramente una consecuencia de las dos primeras (aunque la demostración de este hecho es mucho más sencilla que en el caso de Devaney). Pero no podemos estudiar el caos de Li-Yorke sin ver el resultado que tanta repercusión tuvo en su momento: terminaremos la sección demostrando que toda función con un punto periódico de periodo tres es caótica (teorema 1.3.6).

Para finalizar el capítulo y una vez estudiadas las dos nociones fundamentales de caos, veremos cual es la relación entre ellas en el intervalo. Demostraremos entonces que si una función es caótica en el sentido Devaney, entonces también será caótica en el sentido de Li-Yorke (teorema 1.4.7), y probaremos mediante un contraejemplo que el recíproco no es cierto.

Después de haber estudiado los conceptos y resultados fundamentales nos planteamos la siguiente pregunta, que es la más importante del trabajo: ¿El caos puede ser compatible con la linealidad? En el segundo capítulo respondemos a esta pregunta en dimensión finita. Comenzamos introduciendo los espacios vectoriales topológicos, con los que trabajaremos en este y el siguiente capítulo (ya que engloban a los espacios de Fréchet, que nos serán de gran utilidad en el capítulo 3). Demostraremos a partir de la proposición 2.3.1 que cuando en estos espacios añadimos la condición de dimensión finita (en cuyo caso son isomorfos al espacio euclídeo) ninguno de los dos tipos de caos estudiados es compatible con la linealidad.

En el capítulo 3 nos haremos la misma pregunta en dimensión infinita y ahora la respuesta será afirmativa. El primer objetivo del capítulo será introducir los operadores lineales de Birkhoff, MacLane y Rolewicz para demostrar que son caóticos en el sentido de Devaney. Para ello, tenemos que comenzar introduciendo los espacios de Fréchet (no estudiados en el Grado), una generalización razonable de los espacios de Banach que permite estudiar algunos espacios muy naturales (por ejemplo el de las funciones enteras, es decir, holomorfas en todo $\mathbb{C}$) cuya métrica no está inducida por ninguna norma. Tanto el operador de Birkhoff como el de MacLane estarán definidos en dicho espacio; por contra, el operador de Rolewicz estará definido en el espacio de Banach l^p.

Trabajaremos en este capítulo con la noción de operador hipercíclico, que es equivalente a afirmar que exista algún punto con órbita densa, o por el teorema 1.2.1 (si el espacio es completo y separable) a decir que el operador es topológicamente transitivo. Notemos que en nuestro caso podremos aplicar este último teorema gracias a la completitud y separabilidad del espacio de las funciones enteras y de l^p. Por lo tanto, para probar que son caóticos Devaney veremos que son hipercíclicos y que tienen un conjunto denso de puntos periódicos.

A diferencia de lo que estudiamos en el capítulo 1, cuando trabajamos con funciones no lineales, la hiperciclicidad por si sola implica la dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales (proposición 3.2.11). Con ayuda del criterio de Kitai (teorema 3.2.14), útil a la hora de identificar operadores hipercíclicos, veremos mediante un contraejemplo que la hiperciclicidad sin embargo no implica la densidad de puntos periódicos (observación 3.2.15).

Una vez estudiados los tres operadores lineales caóticos en el sentido Devaney más conocidos, y por tanto viendo que este tipo de caos en dimensión infinita sí es compatible con la linealidad, pasamos a estudiar qué ocurre con el caos en el sentido de Li-Yorke en dimensión infinita y a comparar ambos tipos de caos. Veremos las nociones de vector irregular y semi-irregular, y obtendremos mediante el teorema 3.3.5 una caracterización para los operadores caóticos Li-Yorke. Gracias a la caracterización mencionada probaremos mediante el teorema 3.3.6 que en dimensión infinita, no solo el caos en el sentido de Devaney implica caos en el sentido de Li-Yorke, sino que únicamente la condición de hiperciclicidad implica el caos de Li-Yorke.

Para finalizar la sección y el capítulo mostramos un curioso resultado que viene a evidenciar que, en realidad, dinámica lineal y no lineal no son cosas tan distintas. De hecho, con el teorema 3.4.3 veremos que la dinámica de todos los sistemas dinámicos compactos no lineales puede ser vista como un subconjunto de la dinámica de un solo operador caótico. En otras palabras, la dinámica lineal es “filosóficamente” tan complicada como la no lineal.

Nos gustaría reseñar que aunque el trabajo no contiene resultados originales sí incluye, puntualmente, pruebas más sencillas de las que proporcionaban las fuentes que hemos manejado. Tal es el caso, por ejemplo, del lema 3.3.3, que se utiliza para demostrar el teorema 3.3.5.

Queremos resaltar igualmente que aunque en el presente trabajo utilizamos herramientas de índole muy variada (análisis funcional, análisis complejo, topología, análisis de variable real y álgebra conmutativa), partimos de nociones bien conocidas por un estudiante del Grado en Matemáticas, por lo que solamente hemos demostrado aquellos resultados que quedarían fuera del currículum habitual de un graduado en nuestra facultad. Asimismo, hemos procurado que estos resultados sean de lectura asequible, sacrificando propuestas más ambiciosas en aras de la claridad en la exposición. Aún así, pensamos que el trabajo también puede ser de interés para lectores más avanzados: al fin y al cabo se trataba de presentar, siquiera someramente, uno de los conceptos más fascinantes que han producido las matemáticas de la segunda mitad del siglo XX.

Abstract

It is often taken for granted that linear systems behave in a predictable way and, therefore, that chaos is intrinsically linked to nonlinearity. For example, L. A. Smith writes in the introduction to his book *Chaos: A very short introduction* (italics are his): "Chaotic systems not only exhibit sensitive dependence, but two other properties as well: they are *deterministic*, and they are *nonlinear*."

The aim of this work is to explore to what extent this fact is true. We focus our attention on the two most popular notions of chaos (Devaney and Li-Yorke) in the literature, to verify later that this assertion is true in finite dimension but needs not hold in infinite dimension, giving rise to an interesting interplay between chaos, linearity and dimension.

As early as 1929, G. D. Birkhoff obtained an example of a linear operator exhibiting an important feature of what would be later defined as chaos: the existence of a dense orbit. Some years later, G. R. MacLane (1952) proved that the same is true for the differentiation operator, and new examples were provided by S. Rolewicz in 1969. But only in the early nineties, following an influential paper written by G. Godefroy and J. H. Shapiro [8], infinite dimensional linear dynamics started to be considered as an interesting research subject on its own. By then, and after two decades of intensive work, the theory of chaotic dynamical systems was not only popular among specialists, but among the non-scientifically trained public as well.

Concerning the appearance of the mathematical concept of chaos, there are two names (or three, to be more precise) which shine with their own light: Lorenz and (in collaboration) Li and Yorke. In 1963, the mathematician and meteorologist Edward Lorenz (1917–2008) was working in a seemingly simple autonomous system of three differential equations; he had derived it from a fluid convection model whose primary goal was to study the behaviour and variations of climate. By chance (one day, by mistake, he used three instead of six decimals to feed the initial conditions into his computer), he discovered that the system evolved in dramatically different ways from almost identical initial conditions. Moreover, far from diverging to infinity, these solutions were attracted by a strange set, known today as the *Lorenz attractor*, which has become the icon of the so-called "science of chaos".

Although the work of Lorenz did not attracted too much attention in the short term, in the early seventies it was well known already among the scientific community, partly due to the memorable lecture he gave in December 1972 at the 139th meeting of the American Association for the Advancement of Science, and the no less memorable title that Philip Merilees, the organizer of the session he was going to participate in, concocted on the fly, since Lorenz forgot to provide one: "Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?". Thus the famously called "butterfly effect" (there is even a movie with that name), establishing that a very small modification of the initial conditions can convey a huge change in the final results; this is the essential, intuitive idea behind the notion of chaos.

Strictly speaking, Lorenz never defined chaos rigourously. The credit for this goes to Tien-Yien Li and James A. Yorke who, in a 1975 article called "Period three implies chaos", not only formalized this concept, but also proved a surprising fact: every continuous interval function having

a periodic point of period three is chaotic. Although this article is one of the main reasons behind the modern boom of dynamical systems, some mathematicians cast several doubts about Li-Yorke notion almost immediately: while it may involve strange behaviour up to some degree, in practice this chaos need not observable because the set of points behaving that way may be very small (in terms of measure theory, a measure zero set). Then, in practice, the system evolves in a predictable way.

To circumvent this problem Devaney proposed in 1986 a new definition of chaos: a function is chaotic if it has a dense orbit, it has a dense set of periodics points and it has sensitive dependence on initial conditions (this condition is the explicit formulation of the butterfly effect, an idea that also underlies, although not that clearly, in Li and Yorke's definition). It is in this context where the paper by G. Godefroy and J. H. Shapiro (1991) appears. There, besides suggesting that Devaney's definition of chaos is the right tool to deal with linear dynamics, they proved the chaoticity of a number of operators, including the three classical operators of Birkhoff, MacLane and Rolewicz.

Although there are some other definitions of chaos available in the literature, we will focus our attention on those given by Li-Yorke and Devaney. On chapter 1, we start by introducing the reader to the basic concepts of the theory of dynamical systems. Firstly, Devaney's definition of chaos is analyzed in deep in the setting of metric spaces without isolated points, studying the three conditions it consists of. Using theorem 1.2.1 (Birkhoff's theorem) we will show that topological transitivity amounts to the existence of a point whose orbit is dense. In addition, in theorem 1.2.7 (Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey's theorem) we will prove that Devaney's definition can be essentially simplified: as it turns out, the sensitive dependence on initial conditions is just a consequence of the other two conditions. Therefore, we can just say that a dynamical system is (Devaney) chaotic if it is topologically transitive and it has a dense set of periodic points.

In general, neither condition implies the other (as shown by two examples we provide). However, in theorem 1.2.17 we will prove that there are some spaces where the following happens: if a system is topologically transitive, then it has a dense set of periodic points (the interval is the paradigmatic case). Therefore, in these spaces, Devaney's chaos is equivalent to topological transitivity.

Next in the chapter we focus our attention on the notion of chaos in the sense of Li-Yorke. Similarly as in the case of Devaney's definition, Li and Yorke used three conditions to formulate their definition of chaos. Nevertheless, we can easily show that one of them is redundant as well. And of course, when speaking about Li-Yorke's chaos it is almost compulsory to show one of the most famous results in the history of dynamical systems: we finish the section by proving that if an interval function has a periodic point of period three, then it is Li-Yorke chaotic (theorem 1.3.6).

Once we have studied the two fundamental notions of chaos, we round up the chapter by explaining how they relate each other in the interval setting. Namely, as claimed by theorem 1.4.7, if a function is chaotic in the sense of Devaney, then it is also chaotic in the sense of Li-Yorke. By means of an example, we will show that the converse statement needs not be true.

After getting acquainted with some essential concepts in the previous chapter, the most important question of this work is raised: can chaos be compatible with linearity? In the second chapter we answer this question in the negative in finite-dimensional spaces. We begin by introducing the notion of topological vector space (Frechet spaces, a particular case of this, will be of paramount importance in chapter 3). As proposition 2.3.1 shows, in the finite dimension case (when there spaces are just isomorphic to euclidean spaces), a linear operator cannot be either Devaney or Li-Yorke chaotic.

In chapter 3, the same question is posed in the infinite-dimensional case, and now the answer will be affirmative. Our first aim on this chapter will be to introduce the Birkhoff, MacLane and Rolewicz linear operators and show that they are chaotic in the sense of Devaney. For this purpose, we will introduce Fréchet spaces (this topic is not usually covered in a degree in Mathematics), a natural generalization of Banach spaces which allows us to study some important spaces (for instance, the space of entire functions, i.e., holomorphic functions in $\mathbb{C}$) whose metric is not induced by a norm. The Birkhoff operator and the MacLane operator are defined in the space of entire functions. On the other hand, the Rolewicz operator is defined in the Banach space l^p.

In this chapter we mainly deal with the notion of hypercyclic operator, that having a point with dense orbit, or equivalently, due to theorem 1.2.1 (if the space is complete and separable) that being topologically transitive. It is worth noticing that this theorem can be applied in our setting because the space of entire functions and the l^p-space are both complete and separable. Therefore, to show that an operator is chaotic in the sense of Devaney, we will just prove that it is hypercyclic and it has a dense set of periodic points.

In contrast to what we studied on the first chapter, when working with operators hypercyclicity itself implies sensitive dependence on initial conditions (proposition 3.2.11). Using Kitai's criterion (theorem 3.2.14), a useful tool to identify hypercyclic operators, we will provide an example showing that hypercyclicity needs not imply the density of periodic points (remark 3.2.15).

Once we have studied the three most important Devaney chaotic linear operators, thus verifying that this sort of chaos is compatible with linearity in infinite dimension, we turn our attention to the analogous problem for Li-Yorke chaos and compare both notions. To this aim we will introduce the notions of irregular and semi-irregular vectors and give and interesting characterization of Li-Yorke's chaos (theorem 3.3.5). As a consequence, we will prove (theorem 3.3.6) that in infinite-dimensional spaces not only chaos in the sense of Devaney implies chaos in the sense of Li-Yorke, but hypercyclicity alone implies Li-Yorke's chaos as well.

To conclude the section and the chapter we show a remarkable result essentially stating that linear and nonlinear dynamics are not that different after all. In fact, theorem 3.4.3 shows that the dynamics of all compact nonlinear dynamical systems can be seen as generated by just a single chaotic operator. In other words, linear dynamics is "philosophically" as complicated as nonlinear dynamics.

We would like to stress that although this work does not contains any original result, our proofs are sometimes simpler than those appearing in the sources we have handled. Such is the case, for instance, of lemma 3.3.3, which we use to prove theorem 3.3.5.

Finally we want to emphasize that, although a wide variety of tools have been used in this work (functional analysis, complex analysis, topology, analysis of real variable and commutative algebra), only the standard knowledge of a graduate in Mathematics is expected in the reader. These basic-level results are used without proof; otherwise our work is self-contained. Besides, we expect that these results are accessible to a wide audience, and we have avoided more ambitious proposals in favour of a clearer presentation. Still, we believe that this work may be of interest to more advanced readers: after all, you are going to get acquainted with one of the most fascinating mathematical ideas of the second half of the XXth century.

Índice general

1. Caos Devaney vs. caos Li-Yorke **14**

1.1. Primeras nociones. 14

1.2. Caos en el sentido de Devaney. 15

1.2.1. Transitividad topológica 15

1.2.2. Definición de caos. 18

1.3. Caos en el sentido de Li-Yorke. 24

1.4. Relación entre caos Devaney y caos Li-Yorke. 29

2. ¿Caos lineal? **35**

2.1. Matriz de Jordan. 35

2.2. Espacios vectoriales topológicos. 36

2.3. Caos y linealidad en dimensión finita. 38

3. ¡Caos lineal! **42**

3.1. Espacios de Fréchet. 42

3.2. Caos Devaney en dimensión infinita. 45

3.2.1. Operadores hipercíclicos. 45

3.2.2. Operadores caóticos. 48

3.3. Caos Li-Yorke en dimensión infinita. 54

3.4. Dinámica en sistemas no lineales. 58

Bibliografía **61**

Capítulo 1

Caos Devaney vs. caos Li-Yorke

A lo largo de la historia, han surgido numerosas definiciones de lo que se conoce como caos. La primera definición de caos fue introducida por Tien-Yien Li y James A. Yorke en 1975 (véase [14]). Más adelante aparecerían otras definiciones como fue la de Devaney en 1986 ([6]). Podríamos dividir este capítulo en tres partes: en la primera parte comenzaremos estudiando la definición de caos dada por Devaney, así como su posterior modificación. Así, desmenuzaremos una a una las condiciones que constituyen dicha definición. Después estudiaremos la definición dada por Li y Yorke, viendo algunos de los resultados más importantes que establecieron. Finalizaremos estudiando la relación entre las dos definiciones de caos. Aunque daremos las definiciones el el contexto de los espacios métricos, empezamos estudiando estos conceptos en el ámbito más sencillo posible, el de las aplicaciones del intervalo.

1.1. Primeras nociones.

Comenzaremos viendo algunos conceptos básicos en la teoría que vamos a desarrollar. Utilizaremos [10, pp. 3–14] en esta primera parte del capítulo.

Definición 1.1.1. *Llamaremos* ***sistema dinámico discreto*** *al par (x,T), donde X es un espacio métrico y $T : X \longrightarrow X$ una aplicación continua.*

Para abreviar, emplearemos la notación T o $T : X \longrightarrow X$ cuando hablemos de sistemas dinámicos discretos.

Antes de dar una definición de caos, necesitamos saber qué se entiende por la dinámica de un sistema. Así, dado un $x \in X$, calcularemos iterativamente su imagen mediante la aplicación $T : X \longrightarrow X$,

$$x, \quad Tx, \quad T(Tx) = T^2x, \quad T(T^2x) = T^3x...$$

construyendo así la sucesión $(T^n x)_{n=0}^{\infty}$. Es decir, obtendremos T^n componiendo consigo misma n veces,

$$T^n = T \circ \overbrace{\ldots}^{n} \circ T,$$

donde $T^0 = I$. Aparece entonces de manera natural el siguiente concepto:

Definición 1.1.2. *Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico, $x \in X$. Llamamos **órbita de x sobre T** a:*

$$\mathrm{orb}(x,T) = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}.$$

Así, la órbita de x sobre T describirá las distintas posiciones que visita el punto x bajo la acción de T con el paso del tiempo. Entender la dinámica de un sistema es tanto como describir el comportamiento asintótico a largo plazo de sus órbitas.

Para entender el comportamiento de un sistema dinámico las nociones de punto fijo y punto periódico serán muy importantes.

Definición 1.1.3. *Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico.*

- *$x \in X$ es un **punto fijo** de T si $Tx = x$.*
- *$x \in X$ es un **punto periódico** de T si existe $n \geq 1$ tal que $T^n x = x$. Al menor número n que cumple esta propiedad se le denomina **periodo de x**.*

Por último, veamos el concepto de aplicaciones topológicamente conjugadas:

Definición 1.1.4. *Sean X e Y espacios métricos, consideremos las aplicaciones $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y$. Si existe un homeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$ de manera que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

*conmuta, (es decir, $g \circ \varphi = \varphi \circ f$), entonces decimos que f y g son **topológicamente conjugadas**.*

Si f y g son topológicamente conjugadas se verificará entonces que $g^n \circ \varphi = \varphi \circ f^n$. La idea es la siguiente: a cada punto $x \in X$ arbitrario, le corresponderá mediante la aplicación φ un punto en $y \in Y$ que actuará como su "sombra", es decir, se moverá en el conjunto Y de la misma manera que lo hará x en X. Por ejemplo, si x es periódico de periodo r, entonces y será periódico de periodo r; si la órbita de x es densa en X, la de y es densa en Y, etc. En general, las propiedades dinámicas se conservarán. En otras palabras, los sistemas dinámicos topológicamente conjugados tienen los mismos comportamientos dinámicos.

1.2. Caos en el sentido de Devaney.

1.2.1. Transitividad topológica

Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Diremos que un punto $x \in X$ es un **punto de acumulación** de A si cualquier entorno U de x contiene un punto de A distinto de x, es decir, si $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Por otro lado, $x \in A \subset X$ es un **punto aislado** de A si existe un entorno U de x tal que $U \cap A = \{x\}$. Diremos que $A \subset X$ es **denso** en X si $\bar{A} = X$ o, equivalentemente, si $B \cap A \neq \emptyset$ para todo abierto $B \in X$. Diremos que X es **separable** si contiene un subconjunto numerable denso. Si X es un espacio métrico separable, entonces toda familia de abiertos disjuntos entre sí es numerable. Diremos que una colección β de conjuntos abiertos de X es una **base para la topología de X** si cualquier subconjunto abierto de X se puede escribir como unión de elementos de β. Es decir, si para cualquier abierto U de X y para todo $x \in U$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset U$. Supondremos en toda la sección que X es un espacio métrico sin puntos aislados.

Introduciremos ahora uno de los ingredientes necesarios para dar la definición de caos de Devaney: la transitividad topológica.

Definición 1.2.1. *Un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ se denomina* ***topológicamente transitivo*** *si, para todo par U, V de subconjuntos abiertos de X, existe algún $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

De manera intuitiva, lo que sugiere esta definición es que, si T es topológicamente transitiva, aplicando T una cantidad suficiente de veces, habrá puntos de cualquier región U de X que viajen a cualquier región V de X. Es decir, la dinámica se moverá por todo el espacio.

Proposición 1.2.2. *Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Son equivalentes:*

1. *T es topológicamente transitiva*
2. *Para cada subconjunto abierto U de X, el conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ es denso en X.*
3. *Para cada subconjunto abierto U de X, el conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ es denso en X.*

Demostración.

1) $\Leftrightarrow$ 2) T es topológicamente transitiva si y solo si para todo par $U, V \neq \emptyset$, $U, V \subset X$, existe $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Pero esto ocurre evidentemente si y solo si para todo $U \subset X$ abierto se tiene que $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ es denso en X.

1) $\Leftrightarrow$ 3) Notemos que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ si y solo si $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$. Luego utilizando el mismo razonamiento de antes se tiene la equivalencia buscada.

□

Proposición 1.2.3. *Sea T una función continua en un espacio métrico X. Entonces:*

1. *Si $x \in X$ tiene órbita densa sobre T, entonces para todo $n \geq 1$ cada $T^n x$ tiene órbita densa sobre T.*
2. *Si T tiene órbita densa entonces es topológicamente transitiva.*

Demostración.

" 1) " Es claro que en un espacio métrico sin puntos aislados, un conjunto denso sigue siendo denso incluso después de haberle quitado un conjunto finito de puntos. Por tanto, como por hipótesis $\operatorname{orb}(x, T)$ es densa, se tiene que

$$\operatorname{orb}(x, T) \setminus \{x, Tx, \ldots, T^{n-1}x\} = \{T^n x, T^{n+1}x, \ldots\}$$

es densa. Luego $\operatorname{orb}(T^n x, T) = \{T^n x, T^{n+1}x, \ldots\}$ es densa.

" 2) " Supongamos que $x \in X$ tiene órbita densa sobre T. Sean U y V abiertos no vacíos en X. Entonces, por la densidad de la órbita, cortará a los abiertos de X. En particular, $\text{orb}(x,T) \cap U \neq \emptyset$, es decir, existe algún $n \geq 0$ tal que $T^n x \in U$. Pero en 1) hemos visto que $T^n x$ también tiene órbita densa, luego utilizando el mismo razonamiento, existirá algún $m \geq n$ tal que $T^m x \in V$. Por tanto, se tiene que $T^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ ya que $T^m x = T^{m-n}(T^n x)$ con $T^m x \in V$ y $T^n x \in U$, es decir, T es topológicamente transitiva.

□

Veamos que, bajo ciertas condiciones, decir que T es topológicamente transitiva es equivalente a decir que para algún $x \in X$ la órbita de x sobre T es densa en X. Para ello, usaremos el siguiente resultado visto en la asignatura de Análisis Funcional (véase [5, pp. 263]):

> *Teorema de Baire.* Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces la intersección de cualquier sucesión de abiertos densos es un conjunto denso.

Teorema 1.2.4 (Teorema de la transitividad de Birkhoff)**.** *Sea T una aplicación continua en un espacio métrico completo y separable X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es topológicamente transitiva.*

2. *Existe algún $x \in X$ de manera que orb(x,T) es densa en X.*

Demostración.

2) $\Rightarrow$ 1) Visto en la proposición 1.2.3.

1) $\Rightarrow$ 2) Sea T topológicamente transitiva. Denotemos con $\Re(T)$ al conjunto de puntos en X que tienen órbita densa sobre T,

$$\Re(T) = \{x \in X : \text{orb}(x, T) \text{ densa sobre T}\}.$$

Como X es separable, admite un conjunto denso numerable $\{y_j : j \geq 1\}$. Sea $\{U_k\}_{k \geq 1}$ el conjunto de bolas abiertas centradas en y_j de radio $\frac{1}{m}$ con m natural. Sea V abierto, $x \in V$. Por ser V abierto existe $m > 0$ tal que $B(x, \frac{1}{m}) \subset V$. Ahora, como $\{y_j : j \geq 1\}$ es denso en X, existe j de manera que $y_j \in B(x, \frac{1}{2m})$. Luego, $x \in B(y_j, \frac{1}{2m}) \subset B(x, \frac{1}{m}) \subset V$. Por tanto, el conjunto $\{U_k\}_{k \geq 1}$ forma una base de la topología de X.

Entonces $x \in \Re(T)$ si y solo si para todo $k \geq 1$ existe $n \geq 0$ tal que $T^n x \in U_k$, y esto ocurre si y solo si para todo $k \geq 1$ existe $n \geq 0$ tal que $x \in T^{-n}(U_k)$. En otras palabras,

$$\Re(T) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k).$$

Como T es continua y topológicamente transitiva, podemos aplicar la proposición 1.2.2, obteniendo que cada conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$, $k \geq 0$ es abierto y denso. Aplicando el teorema de Baire, se tiene que $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ es un conjunto denso, luego $\Re(T)$ es denso, y en particular no vacío.

□

1.2.2. Definición de caos.

El segundo ingrediente que conforma la definición de caos de Devaney es la dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales.

Definición 1.2.5. *Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ tiene* ***dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales*** *si existe algún $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ con $d(x, y) < \varepsilon$ mientras que para algún $n_0 \geq 0$ se cumple que $d(T^{n_0}x, T^{n_0}y) > \delta$.*

En otras palabras, siempre podemos encontrar un punto tan cerca como queramos de cualquier $x \in X$ de manera que, a partir de un cierto momento, se acaben separando.

La idea de dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales está relacionada con la idea del efecto mariposa: pequeños cambios en las condiciones iniciales darán, a largo plazo, cambios tan grandes que la evolución del fenómeno será absolutamente distinta.

El último ingrediente para que un sistema dinámico T sea caótico en el sentido de Devaney es el siguiente: T debe tener un conjunto denso de puntos periódicos. Esto quiere decir que tan cerca de cada punto como queramos podemos encontrar otro punto de manera que, después de un cierto número de iteraciones volverá a su sitio.

Juntando los tres ingredientes vistos, obtenemos la definición de caos dada por Devaney en 1986.

Definición 1.2.6 (Caos Devaney, versión preliminar)**.** *Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ es* ***caótico (en el sentido de Devaney)*** *si satisface las siguientes condiciones:*

1. *T es topológicamente transitiva.*
2. *T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.*
3. *T tiene dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales.*

Unos años después de que Devaney diese esta definición se demostró que la condición 3) era en realidad una consecuencia de las dos primeras. El siguiente teorema se puede encontrar en [2].

Teorema 1.2.7 (Teorema de Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey)**.** *Sea X un espacio métrico. Si un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ es topológicamente transitivo y tiene un conjunto denso de puntos periódicos, entonces T tiene dependencia sensible en las condiciones iniciales (con respecto a cualquier métrica que defina la topología de X).*

Demostración.

Fijemos una métrica d definiendo la topología de X.

Veremos primero que existe una constante $\eta > 0$ de manera que para todo $x \in X$ existe un punto periódico p tal que $d(x, T^n p) \geq \eta \ \forall n \in \mathbb{N}$. En efecto, como X no tiene puntos aislados, entonces es un conjunto infinito, por lo que, usando que existe un conjunto denso de puntos periódicos, podemos encontrar dos puntos periódicos p_1, p_2 cuyas órbitas sean disjuntas. Por lo tanto, sea

$$\eta := \frac{1}{2}\inf\{d(T^m p_1, T^n p_2) : n, m \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Luego:

$$2\eta = \inf\{d(T^m p_1, T^n p_2) : n, m \in \mathbb{N}\} \leq d(T^m p_1, T^n p_2)\ \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Y utilizando la desigualdad triangular,

$$2\eta \leq d(T^m p_1, T^n p_2) \leq d(T^m p_1, x) + d(x, T^n p_2)\ \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Entonces, si para algún m $d(T^m p_1, x) < \eta$, se tiene que $d(x, T^n p_2) \geq \eta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o recíprocamente, si para algún n $d(x, T^n p_2) < \eta$ entonces se verifica $d(x, T^m p_1) \geq \eta$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, cualquier $x \in X$ está al menos a una distancia η de cualquier punto de la órbita de p_1, o de la órbita de p_2.

Vamos a demostrar ahora que T tiene dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta = \frac{\eta}{4}$. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, como los puntos periódicos de T son densos en X, existe un punto periódico q de periodo N tal que

$$d(x, q) < \min\{\varepsilon, \delta\} \tag{1.1}$$

(notemos que por tener q periodo N , $T^{lN}q = q$ para todo l).

Por lo visto anteriormente, existe también un punto periódico p tal que

$$d(x, T^n p) \geq \eta = 4\delta \text{ para } n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Por otro lado, como T es continua, existe algún entorno V de p tal que dado $y \in V$ se tiene que

$$d(T^n p, T^n y) < \delta \text{ para } n = 0, 1, \ldots, N. \tag{1.3}$$

Finalmente, podemos encontrar un punto z y algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, z) < \varepsilon$ y $T^k z \in V$. En efecto, por la transitividad topológica para todo par U, V de abiertos de X existe k tal que $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Luego, tomando $U = B(x, \varepsilon)$ y V el entorno anterior, existe k tal que $T^k(B(x, \varepsilon)) \cap V \neq \emptyset$. Por tanto, existe y verificando $y \in T^k(B(x, \varepsilon))$ (e $y \in V$). Esto implica que existe $z \in B(x, \varepsilon)$ tal que $T^k(z) = y$. Por tanto, hemos encontrado el punto z verificando $z \in B(x, \varepsilon)$ y $T^k z \in V$.

Ahora, sea j el entero que satisface $\frac{k}{N} \leq j < \frac{k}{N} + 1$, es decir, $k \leq jN < k + N$. Notemos que por (1.3) se tiene que $d(T^{jN-k}p, T^{jN-k}T^k z) < \delta$ ya que $jN - k < N$ y $T^k z \in V$.
Utilizando eso último junto con (1.1) y (1.2) y aplicando la desigualdad triangular obtenemos:

$$\begin{aligned} d(T^{jN}q, T^{jN}z) &= d(T^{jN}q, T^{jN-k}T^k z) = d(q, T^{jN-k}T^k z) \\ &\geq d(x, T^{jN-k}p) - d(T^{jN-k}p, T^{jN-k}T^k z) - d(x, q) \\ &> 4\delta - \delta - \delta = 2\delta. \end{aligned}$$

Luego $d(T^{jN}q, T^{jN}z) > 2\delta$. Y otra vez por la desigualdad triangular,

$$2\delta < d(T^{jN}q, T^{jN}z) \leq d(T^{jN}q, T^{jN}x) + d(T^{jN}x, T^{jN}z).$$

Por lo tanto, $d(T^{jN}q, T^{jN}x) > \delta$ o $d(T^{jN}x, T^{jN}z) > \delta$. Además hemos visto que $d(x, q) < \varepsilon$ (en 1.1) y $d(x, z) < \varepsilon$, luego concluimos que T tiene dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales.

□

Es posible suprimir entonces la condición de dependencia sensible en las condiciones iniciales y trabajar con la siguiente definición de caos.

Definición 1.2.8 (Caos Devaney)**.** *Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ es* ***caótico (en el sentido de Devaney)*** *si satisface las siguientes condiciones:*

1. *T es topológicamente transitiva.*
2. *T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.*

Ejemplo 1.2.9 (La función tienda)**.** *Un claro ejemplo de función caótica (Devaney) es la llamada función tienda, que viene dada por $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ donde:*

$$Tx = \begin{cases} 2x & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & si \quad x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{1.4}$$

Vamos a ver que T^n es una función afín en cada intervalo $[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$ si $m = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, con $T^n(\frac{m}{2^n}) = 0$ si m es par y $T^n(\frac{m}{2^n}) = 1$ si m es impar. De hecho vamos a demostrar que $T^n|_{[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]} : [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}] \longrightarrow [0,1]$ es un homeomorfismo. Procedamos por inducción:

- *Para $n = 1$ ($m \in \{0, 1\}$), es claro que $T : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow [0, 1]$ es homeomorfismo ya que en este intervalo $T(x) = 2x$. De manera análoga, es inmediato que $T : [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow [0, 1]$ también lo es ya que en este conjunto, $T(x) = 2 - 2x$.*

- *Suponemos ahora cierta la afirmación para $n = k$, y demostremos el caso $n = k + 1$. Sea $m \in \{0, 1, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$. Notemos que $[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}] \subset [0, \frac{1}{2}]$ si $m \leq 2^k - 1$ y $[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$ si $m \geq 2^k$. Diferenciemos estos dos casos:*

  - *Si $m \leq 2^k - 1$, entonces la función T^{k+1} se puede expresar como:*

    $$\left[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0, 1].$$

    Ambas funciones son homeomorfismos (T por el caso $n = 1$ y T^k por hipótesis de inducción), luego $T^{k+1}|_{[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}]} : [\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}] \longrightarrow [0, 1]$ es homeomorfismo.

  - *Si $m \geq 2^k$, entonces:*

    $$\left[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{2^{k+1} - m - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - m}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0, 1].$$

    Nuevamente es inmediato que la primera función es homeomorfismo. Y como $2^k \leq m \leq 2^{k+1} - 1$, entonces:

    $$\begin{aligned} &-2^k \geq -m \geq 1 - 2^{k+1} \Rightarrow \\ &2^{k+1} - 2^k - 1 \geq 2^{k+1} - m - 1 \geq 0 \Rightarrow \\ &2^k - 1 \geq 2^{k+1} - m - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

    De la primera desigualdad obtenemos que $2^k \geq 2^{k+1} - m$, luego $1 \geq \frac{2^{k+1} - m}{2^k}$, mientras que por la segunda desigualdad se tiene que $\frac{2^{k+1} - m - 1}{2^k} \geq 0$. Por lo tanto, la segunda función, gracias a la hipótesis de inducción, también es homeomorfismo, y se tiene también en este caso que $T^{k+1}|_{[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}]} : [\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}] \longrightarrow [0, 1]$ es homeomorfismo como buscábamos.

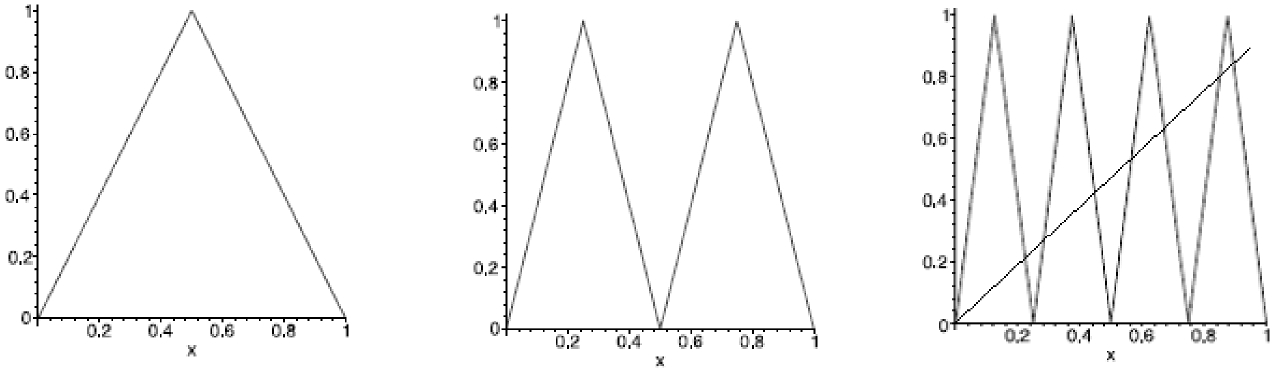

Figura 1.1: Gráfica T e iteraciones T^2 y T^3 de la función tienda

Veamos ahora que es una función caótica en el sentido de Devaney:

- *T es topológicamente transitiva. En efecto, sea $U \subset [0,1]$ abierto y no vacío. Tomando n suficientemente pequeño, podemos encontrar los puntos $\frac{m}{2^n}$ y $\frac{m+1}{2^n}$ en U, luego U contiene algún intervalo $J := [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$.Pero por lo visto anteriormente $T^n(J) = [0,1]$ (ya que hemos visto que $T^n|_J : J \longrightarrow [0,1]$ es un homeomorfismo), luego*

$$[0,1] = T^n(J) \subset T^n(U) \Rightarrow T^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall V \textit{ conjunto no vacío.}$$

- *T tiene un conjunto denso de puntos periódicos: si superponemos en la misma gráfica las funciones $T^n(x)$ y la recta diagonal $y = x$ es claro que en cada intervalo $[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$ ambas gráficas se cortan en un punto, llamémosle p. Este punto es un punto fijo de T^n (ya que se caracteriza por $T^n p = p$), o lo que es lo mismo, un punto periódico de T. Por tanto, como en cada intervalo J hay un punto periódico de periodo n, es claro que la "función tienda" tiene un conjunto denso de puntos periódicos.*

Observación 1.2.10. *T tiene un conjunto denso de puntos periódicos $\not\Rightarrow$ T topológicamente transitiva.*

Contrajemplo.
Tomemos la aplicación identidad $T = Id : X \longrightarrow X$ donde $Tx = x$. Claramente todos los puntos son periódicos de periodo 1, es decir, todos los puntos son fijos, luego T tiene un conjunto denso de puntos periódicos. Sin embargo, no hay ningún punto que tenga órbita densa. En efecto, dado $x \in X$, $\mathrm{orb}(x,T) = \{x, Tx, T^2x, \dots\} = \{x\}$ y es evidente que existe U abierto de X tal que $\{x\} \cap U = \emptyset$. Luego $\mathrm{orb}(x,T)$ no es densa en X, es decir, T no es topológicamente transitivo.

Observación 1.2.11. *T topológicamente transitiva $\not\Rightarrow$ T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.*

Contraejemplo: Rotación irracional.
Tomemos la aplicación $T_{\theta_0} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ de manera que $Tz = zz_0$ para cada $z \in \mathbb{S}^1$, es decir, z será de la forma $z = e^{2\pi i\theta}$ y $z_0 = e^{2\pi i\theta_0}$ donde θ_0 es irracional, $\theta \in [0,1]$. Por lo tanto, tendremos que $T(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i(\theta+\theta_0)}$ (por comodidad pondremos T en lugar de T_{θ_0}).

La idea para ver que todos los puntos $z \in \mathbb{S}^1$ tienen órbita densa (y por tanto, que T es topológicamente transitiva) es la siguiente: mediante la aplicación T, dado un vector con ángulo inicial $2\pi\theta$, se moverá en cada iteración el ángulo $2\pi\theta_0$ sobre la circunferencia unidad. Por lo tanto, como sumamos en cada iteración un irracional θ_0, el vector girará pero nunca volverá sobre sus propios pasos. Veamos una demostración más rigurosa: sabemos que $\mathrm{orb}(z,T) = \{z, zz_0, zz_0^2, \ldots\}$ y $\mathrm{orb}(z_0,T) = \{z_0, z_0^2, z_0^3, \ldots\}$. Como $T^n z = zz_0^n = zT^{n-1}z_0$, para demostrar que todo $z \in \mathbb{S}^1$ tiene órbita densa en $\mathbb{S}^1$ basta ver que $\mathrm{orb}(z_0,T) = \{e^{2\pi in\theta_0} : n = 0,1,2\ldots\}$ es densa (pues la órbita de z se obtiene girando la de z_0 un ángulo $2\pi\theta$, donde θ es tal que $z = e^{2\pi i\theta}$).

Para probar la densidad de $\mathrm{orb}(z_0,T)$ mostraremos que todo arco $A \subset \mathbb{S}^1$ se interseca con ella. Sea $A = \{e^{2\pi i\alpha} : \alpha \in [a,b]\}$ y digamos $b - a = \epsilon$. Como θ_0 es irracional, $\mathrm{orb}(z_0,T)$ es infinita. En efecto, si fuese finita, $z_0^n = T^{n-1}z_0 = T^{m-1}z_0 = z_0^m$ para n y m distintos, luego $2\pi in\theta_0 = 2\pi im\theta_0 + 2\pi ik$ para algún entero k, es decir, $n\theta_0 = m\theta_0 + k$, por lo que $\theta_0 = \frac{k}{n-m}$ sería racional y habríamos llegado a una contradicción.

Ahora, por ser $\mathbb{S}^1$ compacto, $\mathrm{orb}(z_0,T)$ tiene algún punto de acumulación, lo que implica que existen $T^n z_0$ y $T^m z_0$ ($n < m$) tan cercanos a dicho punto de acumulación (y por tanto tan próximos entre sí) que $T^m z_0 = wT^n z_0$, con $w = e^{2\pi i\delta}$ y $0 < |\delta| < \epsilon$. Nótese que $T^{m-n}z_0 = w$, y en general $T^{(m-n)j}z_0 = e^{2\pi ij\delta}$ para todo $j \geq 0$. Como cada par de puntos consecutivos $T^{(m-n)j}z_0$ y $T^{(m-n)(j+1)}z_0$ están separados por un ángulo $2\pi\delta$ y $|\delta| < \epsilon$, es obvio que alguno de los puntos $T^{(m-n)j}z_0$ estará en el arco A, que es lo que queríamos demostrar. Por lo tanto, T es topológicamente transitiva. Sin embargo, como ningún punto es periódico es claro que T no tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Observación 1.2.12. *Sí hay ciertos espacios en los que se verifica:*

$$T \text{ topológicamente transitiva} \Rightarrow T \text{ tiene un conjunto denso de puntos periódicos.}$$

Vamos a estudiar en qué espacios ocurre esto (los intervalos son el ejemplo típico). Para ello introduzcamos las siguientes definiciones.

Definición 1.2.13. *Sea X conexo y J subconjunto abierto de X. Decimos que J es un* ***intervalo que desconecta X*** *si es homeomorfo a un intervalo abierto de la recta real y, para cada $x \in J$, $X \setminus \{x\}$ tiene exactamente dos componentes conexas.*

Definición 1.2.14. *Sea X un espacio conexo y J un intervalo que desconecta X. Asumimos que J está dotado de un orden lineal "$\leq$". Dados $x \in J$ e $y \in X$ con $x \neq y$, escribimos $x < y$ (respectivamente $x > y$) si y solo si existe $z \in J$ tal que $x < z$ (resp. $x > z$) y z e y pertenecen a la misma componente conexa de $X \setminus \{x\}$.*

Conviene aclarar que cuando hablamos del orden lineal "$\leq$" nos referimos al orden inducido por el homeomorfismo entre J y el intervalo abierto de la recta real. Es decir, un elemento será menor que otro en J si lo es en la recta real.

Comencemos viendo un lema previo, similar a la propiedad de los valores intermedios con la particularidad de enunciarse en espacios conexos con intervalos que desconectan. Todo lo que exponemos a continuación se puede encontrar en [1] excepto el siguiente lema, que lo añadimos por claridad.

Lema 1.2.15. *Sea X un espacio conexo con un intervalo J que desconecta X y sea $T : X \longrightarrow X$ una función continua. Sean $a, b \in J$, $a < b$. Se verifica:*

1. *Si $T(a) > a$ y $T(b) < b$ entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $T(c) = c$, es decir, T tiene un punto fijo entre a y b.*

2. *Si $T(a) < a$ y $T(b) > b$ entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $T(c) = c$, es decir, T tiene un punto fijo entre a y b.*

Demostración.

"1)" Dado $x \in J$, si $T(x) < x$ (resp. $T(x) > x$) entonces existe $U \subset J$ entorno de x de manera que si $u \in U$ se cumple que $T(u) < u$ (resp. $T(u) > u$). En efecto, como suponemos que $T(x) < x$, por definición existe $z \in J$, $z < x$ tal que $T(x)$ y x están en diferentes componentes conexas de $X \setminus \{z\}$. Sea U entorno conexo de x. Sea $\delta = \min\{d(T(x), z), d(x, z)\} > 0$. No es restrictivo suponer que $\operatorname{diam}(T(U)) < \delta$ y $\operatorname{diam}(U) < \delta$. Entonces se tiene que $T(U) \cap \{z\} = \emptyset$ y $U \cap \{z\} = \emptyset$. Y como U y $T(U)$ son conexos (U por definición y $T(U)$ por ser la imagen por una función continua de un conexo) se tiene que cuando quitamos z, $T(U)$ está en la misma componente conexa de $T(x)$ y U en la misma componente conexa de x. Luego $T(u) < x$ para todo $u \in U$, lo que implica que $T(u) < v$ para todo $u \in U$ y para todo $v \in U$. En particular, $T(u) < u$ para todo $u \in U$. Definimos ahora el siguiente conjunto:

$$M = \{x \in [a,b] \ : \ T(x) \geq x\} \subset J.$$

Sabemos que M es no vacío (ya que $a \in M$) y $b \notin M$. Además, M es cerrado. En efecto, sea $(x_n) \subset M$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como para todo n $x_n \in M$, se tiene que $T(x_n) \geq x_n$, luego se verificará que $T(x) \geq x$. Por reducción al absurdo supongamos que no se satisface, es decir, suponemos $T(x) < x$. Entonces, por lo que hemos visto anteriormente existe U entorno de x tal que $T(u) < u$ para todo $u \in U$. Luego $T(x_n) < x_n$, con lo que llegaríamos a una contradicción. Por tanto, $x \in M$, es decir, M es cerrado.

Ahora, como M es cerrado, tiene un máximo. Sea $c = \max M$, $c < b$ (ya que $b \notin M$ y $c \in [a,b]$). Suponemos que $T(c) > c$, entonces por lo visto anteriormente existe $U \subset M$ entorno de c de manera que $T(u) > u$ para todo $u \in U$, con lo que llegaríamos a una contradicción (ya que habíamos supuesto que c era el máximo para el que ocurría ésto). Por tanto, T(c) = c como queríamos probar.

"2)" Definimos:

$$N = \{x \in [a,b] \ : \ T(x) \leq x\}.$$

Utilizando un argumento análogo al anterior obtenemos que existe $c \in [a,b]$ tal que $T(c) = c$.

□

Lema 1.2.16. *Sea X un espacio conexo con un intervalo J que desconecta X y sea $T : X \longrightarrow X$ una función continua. Supongamos que existen $x, y \in J$ y $n, m \geq 1$ tales que $T^n x, T^m y \in J$, $T^n x < x$ y $T^m y > y$. Entonces T tiene un punto periódico en el conjunto más pequeño que contiene a $\{x, y, T^n x, T^m y\}$.*

Demostración.

Comencemos suponiendo que existe $k > 1$ tal que $T^{kn}x > T^n x$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que k es el más pequeño posible satisfaciendo esta propiedad. Sea $j = (k-1)n$. Entonces, $T^j x \leq T^n x < x$ (la primera desigualdad por ser $j < k$ y la segunda por hipótesis), y por otro lado, por lo que hemos supuesto, $T^j(T^n x) = T^{kn} x > T^n x$. Como x y $T^n x$ pertenecen al intervalo J que desconecta X, aplicando el lema 1.2.15 (1) obtenemos que T^j tiene un punto fijo entre x y $T^n x$.

Supongamos ahora que existe $l > 1$ tal que $T^{lm}y < T^m y$. Utilizando un razonamiento análogo al anterior se tiene que T tiene un punto periódico entre y y $T^m y$.

Por último, supongamos que $T^{kn}x \leq T^n x$ y $T^{km}y \geq T^m y$ para todo $k > 1$. En particular tendremos que $T^{mn}x \leq T^n x < x$ y $T^{mn}y \geq T^m y > y$ luego, por el lema 1.2.15 (2) existe $c \in [x, y]$ tal que $T^{mn}c = c$.

Luego T^{mn} tiene un punto fijo entre x e y, es decir, T tiene un punto periódico entre x e y, lo que finaliza la prueba.

□

Teorema 1.2.17. *Sea X un espacio conexo con un intervalo que desconecta X y sea $T : X \longrightarrow X$ topológicamente transitiva. Entonces el conjunto de todos los puntos periódicos de T es denso en X.*

Demostración.

Sea K un intervalo que desconecta X y sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Como T es topológicamente transitiva y K y U son abiertos de X, existe k tal que $T^k(K) \cap U \neq \emptyset$, luego, $K \cap T^{-k}(U) \neq \emptyset$. Es decir, $K \cap T^{-k}(U)$ es un subconjunto abierto no vacío de X.

Sea J un subintervalo abierto de $K \cap T^{-k}(U)$ y sean $a, b, c, d \in J$ tales que $a < b < c < d$. Por la transitividad de T, existen $x, y \in (b, c)$ tales que $\mathrm{orb}(x, T)$, $\mathrm{orb}(y, T)$ son densas en X. Es decir, existen $n, m \geq 1$ tales que $T^n x \in (a, b)$, $T^m y \in (c, d)$, luego $T^n x < b < x$ e $y < c < T^m y$. Por tanto, en vista del lema anterior, existe un punto periódico z de T en J. Por tanto,

$$z \in K \cap T^{-k}(U) \Rightarrow \begin{cases} z \in T^{-k}(U) \Rightarrow T^k z \in U \\ z \in K \end{cases}$$

Y $T^k z$ es un punto periódico ya que, como z es un punto periódico, existe $r \geq 1$ tal que $T^r z = z$, luego $T^k(T^r z) = T^k z$, y por tanto $T^{r+k}z = T^k z$, lo que implica que $T^r(T^k z) = T^k z$. Se obtiene así que el conjunto de puntos periódicos de T es denso en X.

□

1.3. Caos en el sentido de Li-Yorke.

Trabajaremos con funciones continuas de la forma $T : X \longrightarrow X$, donde X es un espacio métrico.

Definición 1.3.1. *Sean $x, y \in X, x \neq y$. Decimos que (x, y) es un* ***par de Li-Yorke*** *si:*

1. $\displaystyle\limsup_{n \longrightarrow \infty} d(T^n x, T^n y) > 0.$
2. $\displaystyle\liminf_{n \longrightarrow \infty} d(T^n x, T^n y) = 0.$

Se dice que T es ***caótica en el sentido de Li-Yorke*** *si existe un conjunto $S \subset X$ no numerable (al que se le denomina usualmente "scrambled set") tal que dados $x, y \in S$, (x, y) es un par de Li-Yorke.*

A cada par de Li-Yorke le ocurre algo parecido a la dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales: cuando empezamos a iterar, a veces los puntos están muy cerca, otras muy lejos, y así sucesivamente.

Li y Yorke introdujeron además una tercera condición que debía cumplir todo par de Li-Yorke. Es la siguiente:

3. Para todo punto periódico p se verifica: $\limsup_{n\longrightarrow\infty} d(T^n x, T^n p) > 0$.

Sin embargo, es fácil demostrar que esta última condición es solo una consecuencia de las dos primeras, con lo cual, a día de hoy no se incluye en la definición.

Proposición 1.3.2. *Sea $T : X \longrightarrow X$ una función continua verificando las condiciones 1) y 2) de la definición 1.3.1. Entonces también se verifica la condición 3).*

Demostración.

Supongamos que no se verifica la condición 3). Entonces, para cada $x \neq y$ existen puntos periódicos p y q verificando:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(T^n x, T^n p) = 0, \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} d(T^n y, T^n q) = 0$$

Entonces:

- Si $p = q$, se tiene que $\lim_{n\longrightarrow\infty} d(T^n x, T^n y) = 0$, luego la condición 1) no se verifica.
- Si $p \neq q$, obviamente $\liminf_{n\longrightarrow\infty} d(T^n x, T^n y) > 0$, luego la condición 2) de la definición no se verifica.

□

T. Y. Li y J. A. Yorke publicaron en 1975 el artículo *Period three implies chaos* ([14]), donde introducían un resultado que afirmaba que toda función con un punto periódico de periodo 3 era automáticamente caótica. Este resultado tuvo una enorme repercusión, siendo uno de los desencadenantes del "boom" de los sistemas dinámicos discretos de los setenta. En esta sección probaremos dicho resultado, introduciendo antes algunos lemas necesarios para su demostración (véase [17]).

Lema 1.3.3. *Sean J, K intervalos compactos, $K \subset T(J)$. Entonces existe $J' \subset J$ tal que $T(J') = K$.*

Demostración.

Ponemos $K = [c, d]$. Como $K \subset T(J)$, existen $a, b \in J$ tal que $T(a) = c$, $T(b) = d$. Suponemos por ejemplo $a < b$. Sean:

$$a' := \max\{x \in [a, b] : T(x) = c\}$$

$$b' := \min\{x \in [a', b] : T(x) = d\}$$

Entonces, tomando $J' = [a', b']$, es claro que $T(J') = K$.

□

Lema 1.3.4. *Supongamos que T tiene un punto periódico p de periodo 3. Entonces existen intervalos compactos J, K de manera que:*

i) $J \cap K = \emptyset$.

ii) $J \cup K \subset T^2(J) \cap T^2(K)$.

(Si se cumplen las condiciones i) y ii) se dice que T^2 *tiene una* ***herradura****).*

Demostración.

Denotemos $p_0 := p$, $p_1 := Tp$ y $p_2 := T^2p$. Reemplazando p_0 si es necesario por otro punto de su órbita, se puede considerar que p_0 está entre p_1 y p_2. Podemos suponer que $p_2 < p_0 < p_1$ (el caso $p_1 < p_0 < p_2$ es análogo). Entonces $T([p_0,p_1]) \supset [p_2,p_1] \supset [p_0,p_1]$, luego:

$$T^2([p_0,p_1]) \supset T([p_0,p_1]) \supset [p_2,p_1] \Rightarrow T^2([p_0,p_1]) \supset [p_2,p_1].$$

En particular, existe $d \in (p_0,p_1)$ tal que $T^2d = p_1$. Ahora, como $T^2([p_2,p_0]) \supset [p_2,p_1]$, en particular, existe $a \in (p_2,p_0)$ tal que $T^2a = d$. Por último, como $T^2([p_0,d]) \supset [p_2,p_1]$, existe $c \in (p_0,d)$ tal que $T^2c = a$.

Tomando entonces $J = [a,p_0]$, $K = [c,d]$ obtenemos:

i) $J \cap K = [a,p_0] \cap [c,d] = \emptyset$.

ii) $J \cup K = [a,p_0] \cup [c,d] \subset [a,p_1] \subset T^2([c,d])$

iii) $J \cup K = [a,p_0] \cup [c,d] \subset [p_2,d] \subset T^2([a,p_0])$

verificándose las dos condiciones del enunciado.

□

Lema 1.3.5. *Supongamos que* $T^n = g$ *tiene una herradura* $\{J,K\}$*. Entonces para todo* $\alpha \in \{0,1\}^k$ [1] *y para todo* $k = 1,2,\ldots$ *existe* J_α *compacto* ($\alpha = \alpha_1\ldots\alpha_k$) *tal que:*

i) $J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k i} \subset J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$.

ii) Para todo k*, los intervalos* J_α, $\alpha \in \{1,0\}^k$ *son disjuntos dos a dos.*

iii) $g(J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) = J_{\alpha_2\ldots\alpha_k}$.

Demostración.

Ponemos $J = J_0$, $K = J_1$ (herradura). Por el lema 1.3.3, existen $J_{00}, J_{01} \subset J$ tales que $g(J_{00}) = J$ y $g(J_{01}) = K$. Como J y K son disjuntos, se tiene que también $J_{00} \cap J_{01} = \emptyset$. De la misma manera se construyen $J_{10}, J_{11} \subset K$.

Trabajaremos ahora por inducción: supongamos que ya hemos construido los intervalos J_α, $\alpha \in \{0,1\}^k$ con las condiciones requeridas i), ii) y iii). Entonces, $g(J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) = J_{\alpha_2\ldots\alpha_k}$ (por la hipótesis de inducción iii)), y por i), $J_{\alpha_2\ldots\alpha_k 0} \subset J_{\alpha_2\ldots\alpha_k}$ y $J_{\alpha_2\ldots\alpha_k 1} \subset J_{\alpha_2\ldots\alpha_k}$. Aplicando ahora el lema 1.3.3, existen $J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0}$, $J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1} \subset J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ tales que $g(J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0}) = J_{\alpha_2\ldots\alpha_k 0}$ y $g(J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1}) = J_{\alpha_2\ldots\alpha_k 1}$. Como por la hipótesis de inducción ii), $J_{\alpha_2\ldots\alpha_k 0}$ y $J_{\alpha_2\ldots\alpha_k 1}$ son disjuntos, entonces $J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0}$ y $J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1}$ también lo serán, concluyendo así la prueba.

□

Teorema 1.3.6. *Supongamos que* T *tiene un punto periódico de periodo 3. Entonces* T *es caótica (Li-Yorke).*

[1] Sucesiones de longitud k formadas por ceros y unos.

Demostración.

Por hipótesis T tiene un punto periódico de periodo 3, luego aplicando el lema 1.3.4, $g = T^2$ tiene una herradura. Entonces, aplicando el lema 1.3.5, existe J_α compacto para cada $\alpha \in \{0,1\}^k$ con $k = 1, 2, \ldots$ en las condiciones de dicho lema.

Sea, para cada $\beta \in \{0,1\}^\infty$, el siguiente intervalo

$$J_\beta = \bigcap_{k=1}^{\infty} J_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}.$$

Este conjunto es no vacío, ya que se trata de una sucesión de intervalos compactos encajados (por el lema 1.3.5 i)). Notemos que, aplicando el lema 1.3.5 ii), si $\beta \neq \beta'$, entonces $J_\beta \cap J_{\beta'} = \emptyset$. Por otro lado, si $\beta = \beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots$ y $\beta' = \beta_2\ldots\beta_k\ldots$ entonces, por el lema 1.3.5 iii) $g(J_\beta) \subset J_{\beta'}$.

Definimos la siguiente relación de equivalencia en $\{0,1\}^\infty$:

$$\sim: \quad \beta \sim \beta' \text{ si y solo si existe } l \text{ tal que } \beta_k = \beta'_k \ \forall k \geq l$$

es decir, dos sucesiones serán equivalentes si a partir de un cierto momento coinciden. Cada clase de equivalencia $[\beta]$ para esta relación es numerable (ya que se trata de una unión numerable de conjuntos finitos).

Sea $\Omega \in \{0,1\}^\infty$ de manera que contiene exactamente a un representante de cada clase de equivalencia. Como $\{0,1\}^\infty$ es no numerable, entonces Ω también es no numerable.

Tenemos entonces que si $x_\beta \in J_\beta$, $x'_\beta \in J_{\beta'}$ con $\beta \neq \beta'$, $\beta, \beta' \in \Omega$ entonces se verifica: $\limsup_{n\longrightarrow\infty} |g^k(x_\beta) - g^k(x_{\beta'})| \geq L$, siendo $L > 0$ la distancia entre J_β y $J_{\beta'}$, positiva por ser disjuntos dos a dos (pero para que T sea caótica necesitamos además que el límite inferior sea 0).

Sabemos que hay un conjunto numerable de intervalos J_β no degenerados[2], luego el conjunto $\beta \in \{0,1\}^\infty$ tal que J_β es degenerado, es no numerable.

Sea $\gamma \in \{0,1\}^\infty$ tal que $J_\gamma = \{q\}$. Esto es equivalente a escribir que $|J_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k}| \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$.

Denotemos:

$$\Lambda := \{\gamma_1\beta_1\gamma_1\gamma_2\beta_2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\beta_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\beta_4\ldots\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_k\beta_k\ldots : \beta \in \Omega\} \subset \{0,1\}^\infty. \tag{1.5}$$

Como Ω es no numerable, Λ también es no numerable. Dado $\sigma \in \Omega$, elegimos $x_\sigma \in J_\sigma$. Ponemos:

$$S := \{x_\sigma : \sigma \in \Omega\}.$$

Entonces S es "scrambled", ya que:

- Por un lado, ya hemos visto que solo con la sucesión β ya garantizábamos la condición i) de la definición de caos en el sentido de Li-Yorke, luego dado $\sigma \neq \sigma'$ se sigue conservando:

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} |g^k(x_\sigma) - g^k(x_{\sigma'})| \geq L.$$

[2]Un **intervalo degenerado** es cualquier conjunto compuesto por un único número real. A cada intervalo que no cumpla esto le denominaremos **intervalo no degenerado**.

- Ahora, con la sucesión Λ definida como en 1.5, también se verifica:

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} |g^k(x_\sigma) - g^k(x_{\sigma'})| = 0$$

ya que, existirá una sucesión (k_n) de manera que

$$g^{k_n}(x_\sigma) \in J_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\beta_n^{x_\sigma}\ldots} \subset J_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}, \quad g^{k_n}(x_{\sigma'}) \in J_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\beta_n^{x_{\sigma'}}\ldots} \subset J_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}$$

luego $|g^{k_n}(x_\sigma) - g^{k_n}(x_{\sigma'})| \leq |J_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}| \longrightarrow 0.$

Por tanto, como $g = T^2$ es caótica en el sentido de Li-Yorke, en particular, T es caótica (Li-Yorke). $\square$

Ejemplo 1.3.7 (La función tienda)**.** *Veamos que la función $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida como en el ejemplo 1.2.9 es caótica en el sentido de Li-Yorke. Si superponemos en la misma gráfica las funciones $T^n x$ y la recta diagonal $y = x$ se puede ver que se intersecan 2^n veces, por tanto, T^n tiene exactamente 2^n puntos fijos. En particular, T^3 tiene 8 puntos fijos. Como T solo tiene dos puntos fijos, los otros 6 puntos fijos de T^3 corresponden a dos órbitas periódicas de periodo 3 de T (no pueden ser de periodo 2 porque entonces no serían puntos fijos para T^3). Por tanto, aplicando el teorema 1.3.6, se obtiene que T es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

Observación 1.3.8. *Para hablar de caos de Li-Yorke, muchos autores trabajan en funciones $T : X \longrightarrow X$, donde X es un espacio métrico compacto. Esto se debe a que, para que se conserve el caos (Li-Yorke) por conjugación topológica, es necesario estar en el ambiente de los espacios métricos compactos. Veámoslo mediante un ejemplo: sea $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $Tx = -2x$.*

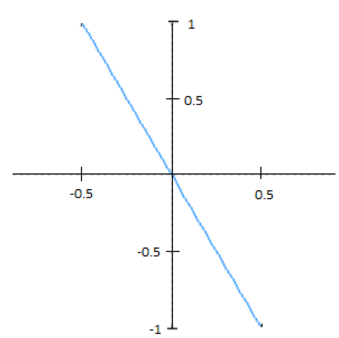

Figura 1.2: Gráfica de T.

Consideremos en $\mathbb{R}$ la métrica

$$d'(x,y) = |e^x - e^y|, \tag{1.6}$$

métrica equivalente a la usual de $\mathbb{R}$ $(d(x,y) = |x-y|)$. Llamemos S al conjunto de todos los números positivos, es decir, $S := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Dados $x_0, y_0 \in S$, se tiene que $T^n x_0 = (-2)^n x_0$ y $T^n y = (-2)^n y_0$. Por tanto, para la métrica definida en 1.6 se obtiene que $d'(T^n x_0, T^n y_0) = |e^{(-2)^n x_0} - e^{(-2)^n y_0}|$. Como x_0 e y_0 son positivos, cuando n es par la distancia se hace muy grande, mientras que cuando n es impar, la distancia tiende a 0. Por tanto, es claro que con esta métrica,

S es un conjunto *scrambled* para T. Sin embargo, utilizando la métrica usual es claro que no se verifica la segunda propiedad de la definición de par de Li-Yorke.

Obviamente hay una conjugación entre $(\mathbb{R}, d)$ y $(\mathbb{R}, d')$ (la conjugación es la identidad, las métricas dan la misma topología) pero no se conserva el caos en el sentido de Li-Yorke. Esto es debido a que no trabajamos en espacios métricos compactos.

1.4. Relación entre caos Devaney y caos Li-Yorke.

El objetivo de esta sección es demostrar que en el intervalo, si una función es caótica en el sentido Devaney, entonces también será caótica Li-Yorke. Sin embargo, veremos mediante un contraejemplo que el recíproco no es cierto.

Definición 1.4.1. *Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Se dice que T es* ***totalmente transitiva*** *si T^n es transitiva para todo $n \geq 1$.*

El primer paso para demostrar que el caos en el sentido de Devaney es más fuerte que el caos en el sentido de Li y Yorke es probar que si $T : I \longrightarrow I$ donde I es un intervalo es transitiva, entonces encontramos dos posibilidades: T es totalmente transitiva o el intervalo puede ser dividido en dos subintervalos de manera que en cada uno de ellos T^2 sea totalmente transitiva.

Lema 1.4.2. *Supongamos que T es transitiva pero no totalmente transitiva. Entonces existen un intervalo compacto J estrictamente contenido en I y $s \geq 1$ tales que $T^s(J) = J$.*

Demostración.

Como T no es totalmente transitiva existe $k \geq 1$ tal que $g := T^k$ no es transitiva. Por tanto existirán intervalos abiertos U, V tales que $g^m(U) \cap V = \emptyset$ para todo $m \geq 0$. Como T es transitiva, existe un punto x_0 cuya órbita $\{T^n x_0\}_{n=0}^{\infty}$ es densa en I (teorema 1.2.1), con lo que en particular visitará U. Como todos los puntos de la órbita de x_0 también tienen órbita densa (proposición 1.2.3), no es restrictivo suponer que $x_0 \in U$. Asimismo, la transitividad implica que el conjunto de los puntos periódicos de T es denso (teorema 1.2.17). Como los puntos periódicos de T y g son los mismos, existirán $p \in U$ y $r \geq 1$ tales que $g^r(p) = p$. Consideremos $h := g^r = T^{rk}$. Obviamente, p es un punto fijo de h y se tiene que

$$h^n(U) \cap V = g^{rn}(U) \cap V = \emptyset$$

para todo n. Como $p \in h^n(U)$ para todo $n \geq 0$, el conjunto $L' = \bigcup_{n=0}^{\infty} h^n(U)$ es un intervalo que no se interseca con V. Notemos que

$$h(L') = h(\bigcup_{n=0}^{\infty} h^n(U)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} h^{n+1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} h^n(U) \subset L',$$

así que $h(L) \subset L$ también será cierto para la clausura L de L'.

Probaremos que existe un subintervalo compacto J de L tal que $h(J) = J$. Como J no se interseca con V (pues L no lo hace), estará estrictamente contenido en I, lo que concluirá la demostración tomando $s = rk$. Para construir J, notemos que $h(L) \subset L$ implica $h^{n+1}(L) \subset h^n(L)$ para todo n, es decir, $\{h^n(L)\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia decreciente de intervalos compactos. Por tanto, $J := \bigcap_{n=0}^{\infty} h^n(L)$ también es un intervalo compacto (posiblemente degenerado). Pero si suponemos por reducción al absurdo que $J = \{q\}$, entonces $h^n x \to q$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in L$, y en particular $T^{ns} x_0 = h^n x_0 \to q$. Por continuidad, $T^{ns+i} x_0 \to T^i q$ para todo $0 \leq i < s$, así que el conjunto de puntos de acumulación de la sucesión $(T^n x_0)_{n=0}^{\infty}$ es $\{q, Tq, \dots, T^{s-1}q\}$, luego la órbita no es densa, una contradicción. Así pues J es un intervalo no degenerado.

Resta probar $h(J) = J$. Para empezar,

$$h(J) = h(\bigcap_{n=0}^{\infty} h^n(L)) \subset h(h^n(L)) = h^{n+1}(L)$$

para todo $n \geq 0$, así que

$$h(J) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} h^{n+1}(L) = \bigcap_{n=1}^{\infty} h^n(L) = \bigcap_{n=0}^{\infty} h^n(L) = J$$

(en la penúltima igualdad usamos que $h(L) \subset L$), esto es, $h(J) \subset J$.

Veamos ahora la otra inclusión. Dado $z \in J$, por la definición de J existirán puntos $x_n \in L$, $n \geq 1$, tales que $h^n x_n = z$. Denotemos $y_n = h^{n-1} x_n$. Entonces $y_n \in h^{n-1}(L)$ y $hy_n = z$ La sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, al estar en un compacto, ha de tener algún punto de acumulación $y \in I$, que por continuidad cumplirá $hy = z$. Pero, al ser la familia $\{h^n(L)\}_{n=0}^{\infty}$ decreciente, elegido arbitrariamente $n_0 \geq 0$ se tendrá que $y_n \in h^{n_0}(J)$ para cada $n > n_0$ y por tanto también $y \in h^{n_0}(J)$ (ya que $h^{n_0}(J)$ es compacto). Así pues, $y \in J$, con lo que hemos probado que $h(J) \supset J$, lo que concluye la demostración.

□

Se dice que un **intervalo** J es **periódico** de periodo r si $T^r(J) = J$ y los intervalos $\{T^n(J)\}_{n=0}^{r-1}$ son disjuntos dos a dos. El siguiente lema está extraído del articulo [3].

Lema 1.4.3. *Sea $T : I \to I$ continua, sea J un subintervalo compacto de I, y supongamos que $T^s(J) = J$ para algún entero positivo s (minimal). Entonces o bien J es periódico de periodo s o bien s es par y $J \cup T^{s/2}(J)$ es un intervalo periódico de periodo $s/2$.*

Demostración.

Comenzaremos probando que si $1 \leq r < s$ cumple $T^r(J) \cap J \neq \emptyset$ entonces $r = s/2$. Supongamos que no es así. No es restrictivo suponer $r < s/2$, lo que por la minimalidad de s implica (tras escribir $g = T^r$) que los intervalos J, $g(J)$ y $g^2(J)$ son distintos dos a dos. Entonces $g(J)$ no puede estar estrictamente contenido en J ni puede contener estrictamente a J , ya que si $g(J) \subsetneqq J$, entonces $g^2(J) \subset g(J) \subsetneqq J$, $g^3(J) \subset g^2(J) \subset g(J) \subsetneqq J$ y así sucesivamente, obteniendo que $g^s(J) \subsetneqq J$, en contradicción con el hecho de que $g^s(J) = J$ (llegaríamos a una contradicción análoga si $J \subsetneqq g(J)$). Por tanto, podemos por ejemplo suponer que $g(J)$ está a la derecha de J, es decir, existen puntos de $g(J)$ a la derecha de J, y J está a la izquierda de $g(J)$, es decir, hay puntos de J a la izquierda de $g(J)$.

Afirmamos que $g^2(J)$ está entonces a la derecha de $g(J)$. En efecto, si $g^2(J)$ estuviera a la izquierda de $g(J)$, entonces o bien $g^2(J)$ está a la derecha de J y se tiene que $g^s(J \cup g(J))$ está estrictamente contenido en $J \cup g(J)$, o bien $g^2(J)$ está a la izquierda de J y se tiene que $g^s(J \cup g(J))$ contiene estrictamente a $J \cup g(J)$; en ambos casos llegamos a una contradicción, ya que $g^s(J \cup g(J)) = g^s(J) \cup g^s(g(J)) = J \cup g(J)$.

Repitiendo el argumento obtenemos que $g^{m+1}(J)$ está a la derecha de $g^m(J)$ para cada j, lo cual es imposible ya que $g^s(J) = J$.

Por tanto, se obtiene que si $1 \leq r < s$ cumple $T^r(J) \cap J \neq \emptyset$ entonces $r = s/2$ y es fácil entonces deducir el enunciado. Sabemos que si $T^i(J) \cap T^j(J) \neq \emptyset$ con $0 \leq i < j \leq s-1$, tomando imágenes, $T^{i+1}(J) \cap T^{j+1}(J) \neq \emptyset$, luego $J \cap T^{j-i}(J) \neq \emptyset$ y por lo que acabamos de probar, $j - i = \frac{s}{2}$, es decir, los intervalos que se intersecan son precisamente los que se diferencian en $\frac{s}{2}$. Ahora, si suponemos que J no es periódico, entonces $T^i(J) \cap T^j(J) \neq \emptyset$ con $0 \leq i < j \leq s-1$, luego $J \cap T^{\frac{s}{2}}(J) \neq \emptyset$. Entonces $K := J \cup T^{\frac{s}{2}}(J)$ es un intervalo, $T(K) = T(J) \cup T^{\frac{s}{2}+1}(J)$ también lo es, y procediendo de la misma manera se obtiene que $T^{\frac{s}{2}}(K) = T^{\frac{s}{2}}(J) \cup T^s(J) = K$. Además, si por reducción al absurdo suponemos que $T^l(K) \cap T^m(K) \neq \emptyset$ con $0 \leq l < m < \frac{s}{2}$, entonces $(T^l(J) \cup T^{l+\frac{s}{2}}(J)) \cap (T^m(J) \cup T^{m+\frac{s}{2}}(J)) \neq \emptyset$, luego se tiene que cumplir una de estas condiciones:

- $T^l(J) \cap T^m(J) \neq \emptyset$, luego $m - l = \frac{s}{2}$,
- $T^{l+\frac{s}{2}}(J) \cap T^m(J) \neq \emptyset$, luego $l + \frac{s}{2} - m = \frac{s}{2}$, es decir $l - m = 0$,
- $T^l(J) \cap T^{m+\frac{s}{2}}(J) \neq \emptyset$, luego $m + \frac{s}{2} - l = \frac{s}{2}$, es decir, $m - l = 0$,
- $T^{l+\frac{s}{2}}(J) \cap T^{m+\frac{s}{2}}(J) \neq \emptyset$, luego $m + \frac{s}{2} - (l + \frac{s}{2}) = \frac{s}{2}$, es decir, $m - l = \frac{s}{2}$,

pero como ninguna de las cuatro es posible, se obtiene que K es periódico de periodo $\frac{s}{2}$. De la misma manera se ve que si K no es periódico, entonces J es periódico de perido s, con lo que se concluye la prueba.

$\square$

Teorema 1.4.4. *Sea $T : I = [a, b] \to I$ transitiva. Entonces o bien T es totalmente transitiva o existe $a < c < b$ (el único punto fijo de T) tal que $T([a, c]) = [c, b]$, $T([c, b]) = [a, c]$ y $T^2|_{[a,c]}$ es totalmente transitiva.*

Demostración.

Supongamos que T es transitiva pero no totalmente transitiva. Entonces, por el lema 1.4.2, existen un intervalo compacto J estrictamente contenido en I y $s \geq 1$ (que podemos suponer minimal) tales que $T^s(J) = J$. Apliquemos el lema 1.4.3 y consideremos las dos posibilidades. Si J es periódico de periodo s entonces existe un abierto V en I disjunto de todos los intervalos $\{T^n(J)\}_{n=0}^{s-1}$ (pues estos son disjuntos dos a dos y ninguno de ellos es todo I). Si U es el interior de J entonces $T^n(U) \cap V = \emptyset$ para todo n, lo que contradice la transitividad de T.

Por tanto debe ocurrir que s es par y $J \cup T^{s/2}(J)$ es un intervalo periódico de periodo $s/2$; de hecho, para no llegar a una contradicción como la de antes la única posibilidad es que $s = 2$ y $J \cup T(J) = I$. Sea $K = J \cap T(J)$. Como $T(K) \subset K$, la transitividad obliga a K sea degenerado a un punto c (ya que si K fuese no degenerado, sería un intervalo invariante). Si $a \in J$, entonces $J = [a, c]$, $T(J) = [c, b]$; si $b \in J$, entonces $J = [c, b]$, $T(J) = [a, c]$. En cualquiera de los casos, $T([a, c]) = [c, b]$ y $T([c, b]) = [a, c]$, con c el único punto fijo de T. Más aún, $G = T^2|_{[a,c]}$ es totalmente transitiva, porque si no lo fuera repetiríamos el razonamiento con G y encontraríamos d (el único punto fijo de G) tal que $G([a, d]) = [c, d]$, $G([c, d]) = [a, c]$. Esto es imposible porque c es también punto fijo de G.

$\square$

El siguiente paso es probar que si T o T^2 es totalmente transitiva, entonces T^n tiene una herradura.

Proposición 1.4.5. *Sea $T : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ una aplicación totalmente transitiva. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ y para todo intervalo no degenerado $J \subset [a,b]$ existe un entero N de manera que $T^n(J) \supset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ para todo $n \geq N$.*

Demostración.

Sea J un subintervalo no degenerado de $[a,b]$ y $\varepsilon > 0$. Sabemos que los puntos periódicos son densos en $[a,b]$ (por un caso particular del teorema 1.2.17), por tanto, existen puntos periódicos x, x_1, x_2 con $x \in J$, $x_1 \in (a, a+\varepsilon)$ y $x_2 \in (b-\varepsilon, b)$. Además, x_1 y x_2 pueden ser elegidos de manera que sus órbitas estén incluidas en (a,b) ya que hay a lo sumo una órbita periódica conteniendo a a (y respectivamente a b). Denotemos, para $i \in \{1,2\}$:

$$y_i := \min\{T^n x_i : n \geq 0\} \text{ y } z_i := \max\{T^n x_i : n \geq 0\}$$

Entonces $y_1 \subset (a, x_1] \subset (a, a+\varepsilon)$, $z_2 \in [x_2, b) \subset (b-\varepsilon, b)$ y $z_1, y_2 \in (a,b)$.

Sea k un múltiplo común de los periodos de x, y_1 e y_2. Ponemos $g = T^k$ y

$$K = \bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(J).$$

El punto $x \in J$ es fijado bajo la acción de g (ya que $T^k x = x$ por ser k múltiplo del periodo de x) y, por tanto, $g^n(J)$ contiene a x para todo $n \geq 0$. Esto implica que K es un intervalo. Además, como g es transitiva, K es denso en $[a,b]$, luego $(a,b) \subset K$. De aquí se sigue que $y_1, y_2, z_1, z_2 \in K$.

Para $i = 1, 2$, sean p_i y q_i enteros no negativos tales que $y_i \in g^{p_i}(J)$ y $z_i \in g^{q_i}(J)$. Ponemos $N := \max\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Como y_1, y_2, z_1, z_2 son puntos fijos de g, pertenecen a $g^N(J)$ luego, por conexión, $[y_i, z_i] \subset g^N(J) = T^{kN}(J)$ para $i = 1, 2$. De acuerdo con la definición de y_i, z_i, el intervalo $[y_i, z_i]$ contiene a la órbita entera de x_i. Una inducción trivial muestra que $[y_i, z_i] \subset T^n([y_i, z_i])$ para todo $n \geq 0$. Por tanto, se tiene que

$$[y_1, z_1] \cup [y_2, z_2] \subset T^n(J) \quad \text{para todo } n \geq kN.$$

Como $y_1 < a + \varepsilon$ y $z_2 > b - \varepsilon$, el hecho de que $T^n(J)$ sea conexo implica que $[a-\varepsilon, b+\varepsilon] \subset T^n(J)$ para todo $n \geq kN$, con lo que se concluye la prueba.

$\square$

Proposición 1.4.6. *Sea $T : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ una aplicación totalmente transitiva. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ de manera que T^n tiene una herradura.*

Demostración.

Sean $c, d \in [a,b]$, $c < d$. Tomamos $J = [a+\varepsilon, c]$ $K = [d, b-\varepsilon]$. Es claro que $J \cap K = \emptyset$ y además, aplicando la proposición 1.4.5 se tiene que

$$J \cup K = [a+\varepsilon, c] \cup [d, b-\varepsilon] \subset [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset T^n(J) \cap T^n(K)$$

para algún n, verificándose así que T^n tiene una herradura.

$\square$

Llegados a este punto, tenemos los ingredientes necesarios para probar que si hay caos en el sentido de Devaney entonces también habrá caos en el sentido de Li-Yorke. Se puede probar que este resultado es cierto en espacios métricos compactos sin puntos aislados (si el lector está interesado puede recurrir a [12]).

Teorema 1.4.7. *Sea $T : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ una función caótica en el sentido Devaney. Entonces T será caótica en el sentido Li-Yorke.*

Demostración.

Si T es caótica en el sentido de Devaney, en particular, T es topológicamente transitiva. Por tanto, aplicando el teorema 1.4.4 se tiene que T es totalmente transitiva o el intervalo puede ser dividido en dos subintervalos de manera que en cada uno de ellos T^2 sea totalmente transitiva. En cualquiera de los dos casos, aplicando la proposición 1.4.6 existe $n \in \mathbb{N}$ y $J \subset [a, b]$ compacto de manera que T^n tiene una herradura luego, razonando como en el teorema 1.3.6, T es caótica en el sentido de Li-Yorke, lo que finaliza la prueba.

□

Sin embargo, se puede ver mediante un contraejemeplo que el recíproco no es cierto.

Ejemplo 1.4.8. *Sea $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ la función definida como*

$$Tx = \begin{cases} x \quad si \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x - \frac{1}{2} \quad si \quad x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \frac{3}{4} - 2x \quad si \quad x \in (\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \tag{1.7}$$

Como se puede apreciar en la imagen 1.3, esta función a trozos actúa como la función tienda en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1]$, aunque en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ está definida como $y = x$. Hemos visto en este capítulo que la función tienda es caótica en el sentido Devaney y en el sentido Li-Yorke.

Sin embargo, veamos que la función T definida en 1.7 es caótica en el sentido de Li-Yorke pero no lo es en el sentido de Devaney.

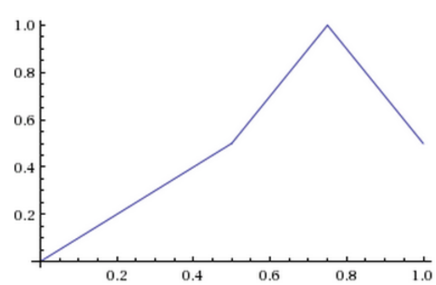

Figura 1.3: Gráfica T

T es caótica en el sentido de Li-Yorke, ya que en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1]$ la dinámica sigue siendo la misma que la de la función tienda. Por tanto, T tendrá al menos un punto de periodo 3 y será caótica en el sentido de Li-Yorke.

T no puede ser caótica en el sentido de Devaney ya que no existe ningún punto con órbita densa. En efecto, los puntos del intervalo $(\frac{1}{2}, 1]$, hagamos las iteraciones que hagamos, se quedarán

en ese mismo intervalo (ya que la aplicación actuará como la función tienda). Por otro lado, los puntos del intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ *son todos fijos. Por tanto, no habrá ningún punto cuya órbita se mueva por todo el intervalo.*

Capítulo 2

¿Caos lineal?

Después de haber estudiado en el capítulo anterior las dos nociones de caos y todas sus propiedades, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿El caos puede ser compatible con la linealidad? En este capítulo veremos que, en dimensión finita, esto no es posible.

2.1. Matriz de Jordan.

Comencemos recordando la noción de matriz de Jordan.

Definición 2.1.1. *Decimos que $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una **matriz de Jordan** si es de la forma*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}.$$

*A cada matriz J_i se le denomina **bloque de Jordan**, donde*

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor asociado de cada bloque.

Veamos mediante el siguiente teorema[1] que para matrices complejas es posible una "casi diagonalización" utilizando las matrices de Jordan.

Teorema 2.1.2. *Dada una matriz A con coeficientes complejos, existe una matriz P invertible de manera que $A = PJP^{-1}$, donde J es una matriz de Jordan.*

[1] No se demostrará ya que ha sido estudiado en la asignatura de Álgebra Conmutativa (se puede encontrar en [11]).

2.2. Espacios vectoriales topológicos.

Definición 2.2.1. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Llamamos* ***seminorma*** *a toda aquella aplicación $p : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisface, para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$,*

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,

2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

Si además se cumple que $p(x) = 0$ implica $x = 0$, entonces decimos que p es una ***norma****, y la denotamos como $\|\cdot\|$. Decimos que el par $(X, \|\cdot\|)$ es un* ***espacio normado****.*

Todo espacio normado admite la métrica natural $d(x, y) = \|x - y\|$. Una vez vistas las nociones de norma y seminorma, recordemos un resultado visto en la asignatura de Análisis Funcional(véase [5]). Todo lo expuesto en esta sección se puede encontrar en [16, pp. 15–17].

Teorema 2.2.2. *Si dos espacios normados tienen la misma dimensión (finita) entonces son isomorfos[2]. En otras palabras, dado $(X, \|\cdot\|)$ de dimensión m, se tiene que $(X, \|\cdot\|) \cong (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|)$.*

Hasta ahora hemos trabajado con espacios métricos, sin embargo, en el capítulo siguiente trabajaremos con unos espacios especiales, una generalización de los espacios normados: los espacios de Fréchet. Éstos serán espacios vectoriales que estarán dotados de una sucesión creciente de seminormas, en lugar de una norma. Por lo tanto, sería interesante enunciar el resultado anterior en un contexto más general, que englobe a los espacios de Fréchet. Este ámbito es el de los espacios vectoriales topológicos.

Definición 2.2.3. *Sea X un espacio vectorial dotado de una topología τ. Diremos que X es un* ***espacio vectorial topológico*** *si se verifican las siguientes propiedades:*

1. *X es Hausdorff[3].*

2. *Dados $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$, las aplicaciones*

$$\begin{array}{rccc} +: & X \times X & \longrightarrow & X \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{K} \times X & \longrightarrow & X \\ & (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha \cdot x \end{array}$$

son continuas.

[2]Decimos que dos espacios X e Y son isomorfos si existe $T : X \longrightarrow Y$ tal que T es isomorfismo lineal y homeomorfismo.

[3]Se dice que un espacio topológico (X, τ) es **Hausdorff** si para cada par de puntos distintos de X existen entornos disjuntos de los puntos.

Entonces, si X es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{C}$ de dimensión m, toda base de X induce un isomorfismo (lineal) de X en $\mathbb{C}^m$. Trabajaremos en el resto del capítulo con espacios vectoriales topológicos (para abreviar los denotaremos como e.v.t.). El teorema 2.2.7 probará que este isomorfismo es en realidad un homeomorfismo. En particular, X será metrizable, así que podemos usar en este contexto las nociones del capítulo 1. Veamos antes de dicho teorema los siguientes resultados:

Lema 2.2.4. *Sean X e Y espacios vectoriales topológicos. Si $\Lambda : X \longrightarrow Y$ es lineal y continua en el 0, entonces Λ es continua. Además, Λ es uniformemente continua en el siguiente sentido: a cada entorno W de 0 en Y le corresponde un entorno V de 0 en X de manera que:*

$$y - x \in V \quad \textit{implica que} \quad \Lambda y - \Lambda x \in W.$$

Demostración.

La continuidad de Λ en 0 muestra que $\Lambda V \subset W$ para algún entorno V de 0. Si ahora $y - x \in V$, por la linealidad de Λ se tiene que $\Lambda y - \Lambda x = \Lambda(y - x) \in W$. Por tanto, la aplicación Λ lleva el entorno $x + V$ de x al entorno $\Lambda x + W$ de Λx con lo que se obtiene que Λ es continua en x como buscábamos.

□

Proposición 2.2.5. *Sea Λ un funcional lineal en un espacio vectorial topológico X. Se verifica: si Λ está acotado en algún entorno V de 0 entonces Λ es continuo.*

Demostración.

Suponemos que Λ está acotado en algún entorno de 0. Entonces $|\Lambda x| < M$ para algún $M < \infty$ y para todo $x \in V$. Sea $r > 0$, denotemos $W = \frac{r}{M}V$. Entonces se verifica que $|\Lambda x| < r$ para todo $x \in W$. Por tanto, Λ es continuo en el 0, y por el lema 2.2.4 se tiene que Λ es continuo.

□

Proposición 2.2.6. *Si X es un espacio vectorial topológico y $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow X$ es lineal, entonces f es continua.*

Demostración.

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$ (todas las coordenadas de e_k son 0 menos su k-ésima coordenada, que es 1). Ponemos $u_k = f(e_k)$, para $k = 1, \ldots, n$. Entonces:

$$f(z) = z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n \quad \forall z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n.$$

La continuidad de f es una consecuencia inmediata del hecho de que la suma y la multiplicación por escalares son funciones continuas en X.

□

Nos encontramos entonces en condiciones de probar el siguiente resultado.

Teorema 2.2.7. *Sean n un entero positivo e Y un subespacio n-dimensional de un espacio vectorial topológico X. Entonces todo isomorfismo de $\mathbb{K}^n$ en Y es un homeomorfismo.*

Demostración.

Sea S la esfera que limita la bola abierta unitaria B de $\mathbb{K}^n$ (para la norma $\|\cdot\|_1$). Entonces, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in S$ si y solo si $\sum |z_i| = 1$, y $z \in B$ si y solo si $\sum |z_i| < 1$.

Suponemos que $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow Y$ es un isomorfismo. Esto significa que f es lineal, inyectiva y $f(\mathbb{K}^n) = Y$. Ponemos $K = f(S)$. Entonces, por la proposición 2.2.6, f es continua, luego K es compacto.

Como $f(0) = 0$ y f es inyectiva, se tiene que $0 \notin K$ (ya que $0 \notin S$) y, por tanto, existe un entorno V de 0 en X de manera que $V \cap K = \emptyset$ (ya que X es Hausdorff). Por la continuidad de la multiplicación por escalares, existen $\varepsilon_0 > 0$ y U entorno de 0 tales que $\varepsilon U \subset V$ para $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Sea $V' := \bigcup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_0} \varepsilon U$, entonces $V' \subset V$ y V' es equilibrado[4]. Se tiene entonces que el conjunto

$$E = f^{-1}(V') = f^{-1}(V' \cap Y)$$

es disjunto con S. Ahora, como f^{-1} es lineal, se tiene que E es también es equilibrado y por tanto conexo. Entonces, como $0 \in E$, se tiene que $E \subset B$ y esto implica que la función lineal f^{-1} lleva $V' \cap Y$ a B.

Como f^{-1} es una n-upla de funciones lineales en Y, el teorema 2.2.5 muestra que f^{-1} es continua. Por tanto, f es un homeomorfismo, con lo que se concluye la prueba.

□

2.3. Caos y linealidad en dimensión finita.

La proposición siguiente será fundamental para ver que cualquier aplicación lineal en un espacio normado de dimensión finita no es caótica en ninguno de los dos sentidos estudiados en el capítulo 1. La siguiente proposición se puede encontrar en [10, pp. 54–55].

Proposición 2.3.1. *Sean X un e.v.t. de dimensión finita y $T : X \to X$ lineal. Sea $x \in X$. Entonces o bien $T^n x \to 0$ cuando $n \to \infty$ o bien existe un entorno U de 0 tal que $T^n x \notin U$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración.

Por el teorema 2.2.7 hemos visto que existe un isomorfismo (es decir, un homeomorfismo lineal) que lleva X a $\mathbb{K}^m$, luego como las propiedades requeridas se conservan por isomorfismos, no es restrictivo suponer que X es $\mathbb{K}^m$. Si probamos entonces que o bien $T^n x \to 0$ o bien existe $k > 0$ tal que $\|T^n x\| \geq k$, se cumplen en particular las condiciones del teorema. En particular, T se puede representar mediante una matriz A. Trabajaremos entonces con la aplicación $A : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^m$. Queremos demostrar ahora que para cualquier vector $v \in \mathbb{K}^m$ se verifica $A^n v \longrightarrow 0$ o $\|A^n v\| \geq k$ para algún $k > 0$. Si conseguimos probar esto para cualquier vector complejo y para cualquier matriz compleja, en particular lo habremos probado para cualquier vector real y para cualquier matriz real. Por lo tanto, no es restrictivo suponer que $A \subset \mathbb{C}_{m\times m}$, es decir, $A : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$. Nos encontramos entonces en la situación del teorema 2.1.2, luego aplicando dicho teorema, existen una matriz P invertible y J matriz de Jordan de manera que $A = P \circ J \circ P^{-1}$, es decir, $P^{-1} \circ A = J \circ P^{-1}$ (en particular, A y J son topológicamente conjugadas). Tenemos entonces:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^m & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^m \\ \big\downarrow{\scriptstyle P^{-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle P^{-1}} \\ \mathbb{C}^m & \xrightarrow{J} & \mathbb{C}^m \end{array}$$

[4]Decimos que un conjunto $B \subset X$ es **equilibrado** (del inglés, 'balanced') si $\alpha B \subset B$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, con $|\alpha| \leq 1$.

Luego, por el mismo razonamiento aplicado anteriormente, no es restrictivo suponer que nuestra aplicación es de la forma $J : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ donde J es una matriz de Jordan (ya que si se cumplen las condiciones para J se cumplirán para la matriz A). Sabemos que las potencias de una matriz de Jordan se pueden calcular caja por caja, es decir,

$$J^n = \begin{pmatrix} J_1^n & & & \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m^n \end{pmatrix}$$

Luego, dado un vector $v \in \mathbb{C}^m$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$, se tiene que:

$$J^n v = \begin{pmatrix} J_1^n & & & \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1^n v_1 \\ J_2^n v_2 \\ \vdots \\ J_m^n v_m \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, considerando la norma $\|\cdot\|_1$, obtenemos que

$$\|J^n v\|_1 = \|J_1^n v_1\|_1 + \|J_2^n v_2\|_1 + \ldots \|J_m^n v_m\|_1$$

concluyendo así que si para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\|J_i^n v_i\|_1$ tiende a 0, entonces $\|J^n v\|_1$ tenderá a 0 y, de la misma manera, si existe algún i tal que $\|J_i^n v_i\|_1$ es mayor que alguna constante, entonces $\|J^n v\|_1$ también será mayor que una cierta constante. Por lo tanto, no es restrictivo suponer que J es de la forma

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

es decir, podemos trabajar con cajas de Jordan en lugar de con matrices de Jordan. Entonces, las potencias de J se pueden calcular explícitamente como

$$J^n = (\lambda I + N)^n \qquad \text{donde} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

e I es la identidad. La matriz N verifica que cada N^{i+1} tendrá la diagonal de unos un puesto más arriba que su potencia anterior N^i, luego llegará un momento en el que para un cierto k, N^k sea la matriz nula. Por otro lado, como λI es una matriz diagonal, hacer una potencia de λI equivale a elevar todos los términos de la diagonal a dicha potencia. Por lo tanto, dado $v \in \mathbb{C}^m$ se tiene, para $n \geq m-1$:

$$J^n v = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \dots & \binom{n}{m-1}\lambda^{n-m+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dots & \dots & \binom{n}{m-2}\lambda^{n-m+2} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \\ & & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ & & & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ & & & & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ \vdots \\ \\ v_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n v_1 + n\lambda^{n-1}v_2 + \ldots + \binom{n}{m-1}\lambda^{n-m+1}v_m \\ \lambda^n v_2 + n\lambda^{n-1}v_3 + \ldots + \binom{n}{m-2}\lambda^{n-m+2}v_m \\ \\ \vdots \\ \lambda^n v_{m-1} + n\lambda^{n-1}v_m \\ \lambda^n v_m \end{pmatrix}$$

Podemos diferenciar ahora los siguientes casos:

- Caso 1: $|\lambda| < 1$. Si esto ocurre, entonces $\lambda^n \longrightarrow 0$, luego en la m-ésima coordenada $\lambda^n v_m \longrightarrow 0$. Análogamente, en la $(m-1)$-ésima coordenada se tendrá que $\lambda^n v_{m-1} + n\lambda^{n-1}v_m \longrightarrow 0$ (ya que $\lambda^n v_{m-1} \longrightarrow 0$ y $\lambda^{n-1}v_m \longrightarrow 0$), y procediendo de la misma manera, concluimos que todas las coordenadas tienden hacia cero, por lo que $J^n v \longrightarrow 0$.

- Caso 2: $|\lambda| = 1$. Fijémonos en la primera entrada de $J^n v$, que es de la forma $\lambda^n v_1 + n\lambda^{n-1}v_2 + \ldots + \binom{n}{m-1}\lambda^{n-m+1}v_m$. Esta coordenada tiende a infinito en valor absoluto, ya que existe algún $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $v_i \neq 0$ (v no es el vector nulo), y de todos los sumandos no nulos, el que tenga un mayor exponente (que será el que mande sobre los demás) tenderá a infinito. Por lo tanto, $\|J^n v\| \longrightarrow \infty$. En particular, $\|J^n v\| \geq k$ para una cierta constante $k > 0$. Por otro lado, tendríamos un caso particular si $v_1 \neq 0$, pero $v_i = 0$ para $i = 2, \ldots, m$. En este caso la única entrada no nula de $J^n v$ sería la primera, constituida por un polinomio constante, y se obtendría entonces que $\|J^n v\| = \|v_1\| = k$.

- Caso 3: $|\lambda| > 1$. Procediendo de la misma manera que en el caso 2 obtenemos que existe una constante $k > 0$ de manera que $\|J^n v\| \geq k$.

Nos quedaría únicamente estudiar un caso particular: ¿qué ocurre cuando la matriz tiene tamaño 1 y $|\lambda| = 1$? Si $J = (\lambda)$ y $|\lambda| = 1$, entonces

$$\|J^n v\| = \|\lambda^n v\| = \|v\| = k.$$

Por lo tanto hemos probado que para algún $x \in X$ siempre se cumple alguna de estas dos condiciones: $T^n x \longrightarrow 0$ o existe una cierta constante $k > 0$ de manera que $\|T^n x\| \geq k$ para todo $n \geq 0$.

$\square$

Teorema 2.3.2. *Sea X un e.v.t. de dimensión finita, $T : X \longrightarrow X$ aplicación lineal. Entonces T no es caótica en el sentido de Devaney.*

Demostración.

Por la proposición 2.3.1 se verifica una de estas dos condiciones: para cada $x \in X$, $T^n x \longrightarrow 0$ o bien existe un entorno U de 0 tal que $T^n x \notin U$ para todo $n \geq 0$. Por tanto, trivialmente se obtiene que el conjunto $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ no es denso en X. Así pues, no puede haber caos lineal (Devaney) en dimensión finita ya que una de las condiciones de la definición de caos de Devaney dada en el capítulo 1 no se cumple.

$\square$

Para evitar problemas como los de la observación 1.3.8 del capítulo 1, cuando hablemos de caos en el sentido de Li-Yorke en el ámbito de la linealidad, convendrá usar distancias que cumplan $d(x+z, y+z) = d(x, z)$, es decir, invariantes por traslaciones.

Teorema 2.3.3. *Sea X un e.v.t. de dimensión finita, $T : X \longrightarrow X$ aplicación lineal. Entonces T no es caótica en el sentido de Li-Yorke (con respecto a ninguna métrica invariante por traslaciones que induzca la topología de X).*

Demostración.

Sean $x, y \in X$. Por la proposición 2.3.1 sabemos que para cada $x \in X$, $T^n x \longrightarrow 0$ o bien existe un entorno U de 0 tal que $T^n x \notin U$ para todo $n \geq 0$. Entonces:

- Como por linealidad $T^n(x) - T^n(y) = T^n(x-y)$, si se verifica que $T^n(x-y) \longrightarrow 0$ entonces es claro que no se verifica la primera condición de la definición de caos de Li y Yorke, pues $d(T^n(x-y), 0) = d(T^n x, T^n y)$ por ser distancia invariante por traslaciones.

- Ahora, si existe un entorno U de 0 de manera que $T^n(x-y) \notin U$ para todo $n \geq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $d(T^n(x-y), 0) > \delta$. En particular, se verifica que

  $$\liminf_{n \longrightarrow \infty} d(T^n(x-y), 0) > 0,$$

  luego no se cumple la segunda condición de la definición de caos de Li y Yorke.

$\square$

Por lo tanto, en dimensión finita no hay caos Devaney ni caos Li-Yorke. Podríamos entonces ir un poco más allá y hacernos la siguiente pregunta: ¿Ocurre lo mismo en dimensión infinita? Investigaremos esta cuestión en el próximo capítulo.

Capítulo 3

¡Caos lineal!

En este capítulo abordaremos a partir de [10, pp. 31–45], una vez visto que no puede haber caos en dimensión finita, qué ocurre cuando la dimensión es infinita.

3.1. Espacios de Fréchet.

Esta sección tiene como objetivo introducir al lector en los espacios de Fréchet, así como estudiar sus operadores elementales. Comencemos recordando algunos conceptos básicos en la teoría del análisis complejo:

Definición 3.1.1.

1. *Dado Ω abierto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, decimos que f es* ***derivable*** *en z_0 si existe*

$$\lim_{z \to +z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

2. *Si f es derivable en cada punto de Ω se dice que f es* ***holomorfa*** *en Ω y se denota como $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.*

Los siguientes dos ejemplos motivarán el concepto de espacio de Fréchet.

Ejemplo 3.1.2. *Denotemos al espacio de las funciones enteras como*

$$\mathscr{H}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : \ f \text{ holomorfa en } \mathbb{C}\}.$$

El concepto natural de convergencia en las funciones enteras es el de convergencia uniforme en todos los conjuntos compactos, es decir, tendremos que $f_k \longrightarrow f$ en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_n(f_k - f) \longrightarrow 0$ si $k \longrightarrow \infty$, donde

$$p_n(f) := \sup_{|z| \leq n} |f(z)|.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, K compacto y $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, denotemos:

$$U(f, K, \varepsilon) := \{g \in C(\Omega) : \sup_{x \in K} |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

Se define la topología τ en el espacio de las funciones holomorfas de la siguiente manera: si $\mathcal{F} \subset \mathscr{H}(\mathbb{C})$, diremos que $\mathcal{F} \in \tau$ cuando para cada $f \in \mathcal{F}$ existen un compacto K y un real positivo ε tales que $U(f, K, \varepsilon) \subset \mathcal{F}$. Esta topología recibe el nombre de topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Así, decir que (f_n) converge uniformemente sobre compactos a f es equivalente a escribir que (f_n) converge a f en la topología τ.

Ejemplo 3.1.3. *Denotemos al espacio de las sucesiones (reales o complejas) como*

$$w := \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_n : x_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\}.$$

El concepto natural de convergencia es el siguiente: $x^{(\nu)} \longrightarrow x$ en w si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_n(x^{(\nu)} - x) \longrightarrow 0$ si $\nu \longrightarrow \infty$, donde

$$p_n(x) := \sup_{1 \le k \le n} |x_k|.$$

Introduzcamos entonces la noción de espacio de Banach, ya que los espacios de Fréchet serán la generalización razonable de los espacios de Banach a un ámbito superior.

Definición 3.1.4. *Un **espacio de Banach** es un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ tal que junto a la métrica inducida por la norma $d(x, y) := \|x - y\|$ es un espacio métrico completo.*

Ejemplo 3.1.5. *Recordemos algunos espacios de Banach que serán utilizados más adelante:*

1. *Sea $1 \le p < \infty$. El espacio*

   $$l^p := \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

   dotado con la norma $\|x\| := (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ es un espacio de Banach separable.

2. *El espacio*

   $$l^{\infty} := \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

   cuya norma asociada es $\|x\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ es un espacio de Banach pero no es separable.

3. *El espacio*

   $$c_0 := \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \to +\infty} x_n = 0\} \subset l^{\infty}$$

   es un espacio de Banach separable cuya norma es la inducida por l^{∞}.

Trabajaremos más adelante con un caso particular de espacios de Banach: los espacios de Hilbert. Dado H un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, decimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \longrightarrow \mathbb{K}$ es un **producto escalar** si se verifica que, dados $x, y, z \in H$:

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. $\langle x, x \rangle \ge 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.

Así, si H está dotado de un producto escalar y $(H, \|\cdot\|)$ es de Banach, con $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, entonces decimos que H es un **espacio de Hilbert**.

El concepto de espacio de Fréchet generalizará el de espacio de Banach mediante la definición de una topología a través de una sucesión creciente $(p_n)_n$ de seminormas. Además, se supone que dicha sucesión es **separadora**, es decir, si $p_n(x) = 0$ para todo $n \geq 1$ implica que $x = 0$. Por lo tanto,

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x-y)\}, \quad x, y \in X \tag{3.1}$$

define una métrica en X. Una característica importante de esta métrica es que se verifica la traslación invariante, es decir,

$$d(x,y) = d(x+z, y+z), \quad \forall x, y, z \in X.$$

Podemos definir entonces la noción de espacio de Fréchet.

Definición 3.1.6. *Un **espacio de Fréchet** es un espacio vectorial X dotado con una sucesión creciente separadora $(p_n)_n$ de seminormas, que es completo en la métrica dada por (3.1).*

Así, todo espacio de Banach es un espacio de Fréchet pero el recíproco no siempre es cierto. Notemos que los espacios de Fréchet claramente no tienen puntos aislados.

Definición 3.1.7. *Sean X e Y espacios de Fréchet. Se dice que $T : X \longrightarrow Y$ es un **operador** si es una aplicación lineal continua. Al espacio de todos los operadores de X en Y se le denota como $\boldsymbol{L(X,Y)}$.*

Definición 3.1.8. *Un **sistema lineal dinámico** es un par (X,T) donde X es un espacio de Fréchet separable y $T : X \longrightarrow X$ un operador.*

A partir de ahora, a menos que indiquemos lo contrario, supondremos que todos los operadores están definidos en espacios separables de Fréchet.

Observación 3.1.9. *El espacio de las funciones enteras $\mathscr{H}(\mathbb{C})$, en el que definiremos algunos operadores, es un espacio de Frechet separable.*

Demostración.

Comencemos viendo la completitud. Dado $(f_n)_n$ de Cauchy en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$, tenemos que ver que la sucesión es convergente. Fijamos $\overline{B(0,N)}$. Como $(f_n)_n$ es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe n_ε tal que si $m, n \geq n_\varepsilon$ se verifica que $p_N(f_n - f_m) \leq \varepsilon$. En particular, implica que para todo $m, n \geq n_\varepsilon$, y para todo $x \in \overline{B(0,N)}$, se tiene que $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. Es decir, para todo $x \in \overline{B(0,N)}$, $(f_n(x))_n$ es de Cauchy, luego $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. Mas aún, $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en $B(0,N)$ donde $f : \overline{B(0,N)} \longrightarrow \mathbb{C}$. Haciendo tender N a infinito, existe $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_n \longrightarrow f$ sobre compactos. Solo quedaría demostrar entonces que f es holomorfa. Pero vimos en la asignatura de análisis complejo (véase [13]) el siguiente resultado:

> Si f_n es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω que converge, uniformemente sobre compactos, hacia una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$,

obteniendo así lo que buscábamos.

Veamos ahora la separabilidad. Dada $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, podemos escribir dicha función como una serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con radio de convergencia infinito. Así, el polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ converge uniformemente sobre compactos a $f(x)$, luego los polinomios son densos en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$. Además, los polinomios con coeficientes $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{Q}$ forman una familia numerable (y densa) en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$, lo que concluye la prueba.

□

3.2. Caos Devaney en dimensión infinita.

3.2.1. Operadores hipercíclicos.

Definición 3.2.1. *Un operador $T : X \longrightarrow X$ es **hipercíclico** si existe algún $x \in X$ cuya órbita sobre T es densa en X.*

A partir del teorema de Birkhoff (1.2.1) se obtiene entonces que un operador T es hipercíclico si y sólo si es topológicamente transitivo [1].

Los primeros ejemplos de operadores hipercíclicos fueron dados por G.D Birkhoff en 1929, G.R. MacLane en 1952 y S. Rolewicz en 1969. Estudiaremos a lo largo de la sección estos tres operadores y demostraremos que los tres son caóticos (Devaney).

Definición 3.2.2 (Operador de Birkhoff). *En el espacio $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ de las funciones enteras, definimos el **operador de Birkhoff** T_a como:*

$$T_a f(z) = f(z + a), \quad a \neq 0,\ a \in \mathbb{C}.$$

Claramente T_a es lineal y continuo. Comencemos viendo que este operador es hipercíclico. Para ello necesitamos introducir antes un resultado mediante el que veremos que toda función holomorfa en un cierto tipo de abierto será el límite de una sucesión de polinomios (con lo que quedará nuevamente de manifiesto que los polinomios son densos en el espacio de las funciones holomorfas en estos abiertos). Si el lector está interesado, puede encontrar la demostración de este teorema en [9].

Teorema 3.2.3 (Teorema de Runge). *Sea $K \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto tal que $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo. Sea f una función holomorfa en algún entorno de K y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una función polinómica h tal que*

$$\sup_{z \in K} |f(z) - h(z)| < \varepsilon.$$

Proposición 3.2.4. *El operador de Birkhoff es hipercíclico.*

Demostración.

[1] Notemos que los espacios de Fréchet no tienen puntos aislados.

Sean $U, V \subset \mathscr{H}(\mathbb{C})$ conjuntos arbitrarios abiertos no vacíos y fijemos $f \in U$, $g \in V$. Por la definición de la topología en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ (ejemplo 3.1.2), existen abiertos U' y V' tales que $f \in U' \subset U$ y $g \in V' \subset V$, un disco cerrado K centrado en 0 y un $\varepsilon > 0$ tal que una función entera h pertenece a U' (o a V') cuando

$$\sup_{z\in K} |f(z) - h(z)| < \varepsilon \quad (\text{o } \sup_{z\in K} |g(z) - h(z)| < \varepsilon \text{ respectivamente}).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ de manera que K y $K + na$ sean discos disjuntos. Consideramos la función definida como f en un entorno de K y como $z \mapsto g(z - na)$ en un entorno de $K + na$. Aplicando el teorema de Runge 3.2.3 se obtiene que existe un polinomio p tal que

i) $\sup_{z\in K} |f(z) - p(z)| < \varepsilon$

ii) $\sup_{z\in K+na} |g(z - na) - p(z)| < \varepsilon$

De i) se deduce directamente que $p \in U' \subset U$. Ahora, como $T_a^n p(z) = p(z + na)$ entonces, a partir de ii) se obtiene:

$$\sup_{z\in K} |g(z) - p(z + na)| = \sup_{z\in K} |g(z) - (T_a^n p)(z)| < \varepsilon,$$

es decir, $T_a^n p \in V' \subset V$. Como ya habíamos visto que además $p \in U$, se obtiene por definición que T_a es topológicamente transitiva. Por tanto, T_a es hipercíclico.

□

Definición 3.2.5 (Operador de MacLane)**.** *Se define el* ***operador de MacLane*** *como el operador que a cada función le hace corresponder su diferencial,*

$$D : f \longrightarrow f'$$

en el espacio $\mathscr{H}(\mathbb{C})$.

El operador de MacLane es continuo. En efecto, este hecho es una consecuencia inmediata del teorema de Weierstrass visto en la asignatura de Análisis Complejo (se puede encontrar en [13]), que enunciamos a continuación:

> *Teorema de Weierstrass.* Sea f_n es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω que converge, uniformemente sobre compactos, hacia una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que la sucesión de derivadas f_n^k converge, uniformemente sobre compactos, hacia la derivada f^k.

Proposición 3.2.6. *El operador de MacLane es hipercíclico.*

Demostración.

Como los polinomios son densos en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$, dados dos conjuntos abiertos no vacíos arbitrarios $U, V \subset \mathscr{H}(\mathbb{C})$, existen polinomios $p \in U$ y $q \in V$, con $p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ y $q(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^k$.

Sea $n \geq N + 1$ arbitrario. Consideramos el polinomio

$$r(z) = p(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{k!\, b_k}{(k+n)!} z^{k+n}$$

Se tiene que

$$Dr = p'(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{k!\, b_k}{(k+n-1)!}\, z^{k+n-1}$$
$$\dots$$
$$D^n r = p^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{k!\, b_k}{k!}\, z^k = p^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{N} b_k z^k$$

donde $p^{(n)}(z) = 0$ (ya que $n \geq N+1 > k$). Luego $D^n r = \sum_{k=0}^{N} b_k z^k = q$. Además, para cada $R > 0$ tenemos que

$$\sup_{|z|\leq R} |r(z) - p(z)| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{k!\, |b_k|}{(k+n)!}\, R^{k+n} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } \ n \to \infty.$$

Por lo tanto, si n es suficientemente grande, se tiene que $r \in U$ (por la definición de la topología en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$) y $D^n r \in V$ (ya que $q \in V$), luego D es topológicamente transitivo. Esto implica que D es hipercíclico, con lo que se concluye la prueba.

□

Definición 3.2.7 (Operador de Rolewicz). *Consideremos el espacio $X := l^p$, $1 \leq p < \infty$ o $X := c_0$. Sea $B : X \longrightarrow X$ tal que $B(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Se define el* ***operador de Rolewicz*** *como $T = \lambda B : X \longrightarrow X$, donde*

$$T(x_1, x_2, \dots) = \lambda(x_2, x_3, \dots), \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Claramente, T es lineal y continua.

Proposición 3.2.8. *El operador de Rolewicz es hipercíclico si $|\lambda| > 1$.*

Demostración.

Sean $U, V \subset X$ conjuntos abiertos no vacíos. Podemos encontrar $x \in U$ e $y \in V$ de la forma

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_N, 0, 0, \dots)$$

para algún $N \in \mathbb{N}$. Sea $n \geq N$ arbitrario, definimos $z \in X$ como:

$$z_k = \begin{cases} x_k \quad \text{si} \quad 1 \leq k \leq n \\ \lambda^{-n} y_{k-n} \quad \text{si} \quad n+1 \leq k \leq n+N \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3.2}$$

es decir, $z = (z_1, z_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda^{-n} y_1, \lambda^{-n} y_2, \dots, \lambda^{-n} y_N, 0, 0, \dots)$. Entonces, si $n \geq N$,

$$Tz = \lambda(x_2, \dots, x_n, \lambda^{-n} y_1, \dots, \lambda^{-n} y_N, 0, 0, \dots) = (\lambda x_2, \dots, \lambda x_n, \lambda^{1-n} y_1, \dots, \lambda^{1-n} y_N, 0, 0, \dots)$$
$$T^2 z = (\lambda^2 x_3, \dots, \lambda^2 x_n, \lambda^{2-n} y_1, \dots, \lambda^{2-n} y_N, 0, 0, \dots)$$
$$\dots$$
$$T^n z = (y_1, \dots, y_N, 0, 0, \dots) = y$$

En otras palabras, cuando n es suficientemente grande, $T^n z \in V$ (ya que $y \in V$). Además, $\|x - z\| = |\lambda|^{-n} \|y\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, es decir, cuando n es suficientemente grande, obtenemos además que $z \in U$. Esto demuestra que T es topológicamente transitiva, luego T es hipercíclico.

□

Observación 3.2.9. *Si $|\lambda| \leq 1$ la proposición 3.2.8 no se verifica.*

Demostración.

Si $|\lambda| \leq 1$, entonces

$$\| T^n x\| = |\lambda|^n \|B^n x\| \leq \|x\| \quad \forall x \in X, n \geq 0.$$

Por tanto, $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ no es denso en X, ya que existe $y \in X$ y $\varepsilon > 0$ verificando que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $T^n x \notin B(y, \varepsilon)$. En efecto, si $\|T^n x\| \leq \|x\| = k$ siempre podemos encontrar un vector $y \in X$ tal que $\|y\| > k + 1$. Por tanto, T no es hipercíclico.

□

3.2.2. Operadores caóticos.

A partir de la definición de caos en el sentido de Devaney estudiada en el capítulo 1, y conociendo la noción de hiperciclicidad, podemos reescribir ahora dicha definición de la siguiente manera:

Definición 3.2.10 (Caos Devaney lineal). *Decimos que un operador T es caótico (Devaney) si satisface las siguientes condiciones:*

1. *T es hipercíclico.*
2. *T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.*

Vamos a ver que, a diferencia de lo que estudiamos en el capítulo 1, cuando trabajamos con operadores, la hiperciclicidad por si sola implica la dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales.

Proposición 3.2.11. *Sea T un operador hipercíclico. Entonces T tiene dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales (con respecto a cualquier métrica invariante por traslaciones que induzca la topología de X).*

Demostración.

Sea d una métrica invariante por traslaciones de X que induce su topología. Sean $\delta, \varepsilon > 0$ y $x \in X$ arbitrarios. Consideramos los siguientes conjuntos abiertos no vacíos:

$$U := \{z \in X : d(0, z) < \varepsilon\}, \quad V := \{z \in X : d(0, z) > \delta\}.$$

Como T es topológicamente transitiva, existe $n \geq 0$ y $z \in U$ de manera que $T^n z \in V$.

Para el punto $y := x + z$ obtenemos entonces que $d(x, y) = d(0, z) < \varepsilon$ y $d(T^n x, T^n y) = d(T^n x, T^n x + T^n z) = d(0, T^n z) > \delta$. Luego T tiene dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales, con lo que se concluye la prueba.

□

Nos podríamos preguntar entonces si hiperciclicidad implica también la existencia de densidad de puntos periódicos. Veremos mediante un contraejemplo que esto no es cierto. Antes introduciremos un criterio (de Kitai, 3.2.14) que nos ayudará a la hora de identificar operadores hipercíclicos. Comencemos viendo una propiedad aún más fuerte que la hiperciclicidad.

Definición 3.2.12. *Un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ se denomina **mixing** si, para cada par de subconjuntos U, V abiertos no vacíos de X, existe algún $N \geq 0$ de manera que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$.*

Trivialmente se obtiene que *mixing* implica hiperciclicidad.

Lema 3.2.13 (Criterio de Godefroy-Shapiro)**.** *Sea T un operador. Suponemos que los subespacios*

$$X_0 := \operatorname{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \ \textit{ para algún } \lambda \textit{ con } |\lambda| < 1\}$$

$$Y_0 := \operatorname{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \ \textit{ para algún } \lambda \textit{ con } |\lambda| > 1\}$$

son densos en X. Entonces T es mixing y en particular, hipercíclico.

Demostración.

Sean U, V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por la densidad de X_0 e Y_0, podemos encontrar $x \in X_0 \cap U$ e $y \in Y_0 \cap V$. Estos vectores pueden expresarse como:

$$x = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k, \quad y = \sum_{k=1}^{m} b_k y_k$$

donde $Tx_k = \lambda_k x_k$, $Ty_k = \mu_k y_k$ para ciertos escalares $a_k, b_k, \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{K}$ con $|\lambda_k| < 1$ y $|\mu_k| > 1$, $k = 1, \ldots, m$. Se tiene entonces que

- $T^n x = \sum_{k=1}^{m} a_k \lambda_k^n x_k \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.
- $u_n := \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{1}{\mu_k^n} y_k \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$.
- $T^n u_n = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu_k^n \frac{1}{\mu_k^n} y_k = \sum_{k=1}^{m} b_k y_k = y$ para todo $n \geq 0$.

Luego, existe algún $N \in \mathbb{N}$ de manera que, para todo $n \geq N$, $x + u_n \in U$ (ya que $x \in U$ y $u_n \longrightarrow 0$) y $T^n(x + u_n) = T^n x + T^n u_n = T^n x + y \in V$ (ya que $y \in V$ y $T^n x \longrightarrow 0$). Por tanto, T es *mixing* y en consecuencia hipercíclico.

□

Teorema 3.2.14 (Criterio de Kitai)**.** *Sea T un operador. Si existen subconjuntos densos $X_0, Y_0 \subset X$ y una función $S : Y_0 \longrightarrow Y_0$ tal que, para todo $x \in X_0$, $y \in Y_0$ se verifica*

1. $T^n x \longrightarrow 0$
2. $S^n y \longrightarrow 0$
3. $TSy = y$

entonces T es mixing. En particular, T es hipercíclico.

Demostración.

De la demostración del criterio de Godefroy-Shapiro obtenemos las siguientes ideas: si se verifica

- $T^n x \longrightarrow 0$ para todo $x \in X_0$,
- para todo $y \in Y_0$ podemos encontrar una sucesión $(u_n)_n$ en X de manera que $u_n \longrightarrow 0$ y $T^n u_n = y$ para todo $n \geq 0$,

entonces se tiene que T es *mixing*. Definimos $u_n = S^n y$, donde $S : Y_0 \longrightarrow Y_0$. Entonces, si $S^n y \longrightarrow 0$ se tiene que $u_n \longrightarrow 0$ y si $TSy = y$ para todo $y \in Y_0$ obtenemos que $T^n u_n = y$. Por tanto, T es *mixing* y, en particular, hipercíclico.

□

La siguiente observación se puede encontrar en [8].

Observación 3.2.15. *T es hipercíclico $\not\Rightarrow$ T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.*

Contraejemplo.
Consideramos el espacio

$$l^2(v) = \{(x_n)_{n\geq 1} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 v_n < \infty\},$$

con el producto escalar definido como $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} v_n$ donde $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1}$ y $v = (v_n)$ es una sucesión de números positivos. La norma asociada a este producto escalar viene dada por $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 v_n)^{\frac{1}{2}}$. Se demuestra sin dificultad que $l^2(v)$ es un espacio de Hilbert (y por tanto de Banach con la norma $\|\cdot\|$) separable.

Tomemos la sucesión $v_n = \frac{1}{n}$. Consideremos la aplicación $T = B : l^2(v) \longrightarrow l^2(v)$ definida como $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Se verifica:

- T es lineal.
- T es continua. En efecto, sabemos que T es continua si y solo si existe $M > 0$ de manera que $\|Tx\| \leq M\|x\|$, es decir, si y solo si $(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}|^2 v_n)^{\frac{1}{2}} \leq M(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 v_n)^{\frac{1}{2}}$. Pero esto se deduce de $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$.

Por tanto, T es una aplicación lineal y continua, es decir, T es un operador.

Sean $X_0 = Y_0$ el conjunto de sucesiones de $l^2(v)$ que acaban en 0, es decir, el conjunto de sucesiones de la forma $(x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, \ldots, 0)$, luego claramente X_0 e Y_0 serán conjuntos densos. Llamemos $S : Y_0 \longrightarrow Y_0$ al operador que actúa como sigue: $S(x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, \ldots, 0) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, \ldots, 0)$. Entonces se verifica que, dados $x \in X_0$, $y \in Y_0$:

- $T^n x \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$ trivialmente.
- Sabemos que $v_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$. Por tanto, se tiene

  $$\|y\| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|^2}{n}, \qquad \|S^m y\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|^2}{n+m}$$

  que se irá haciendo más pequeño conforme m se vaya haciendo más grande. Luego $S^m y \longrightarrow 0$ si $m \longrightarrow \infty$, que es lo que queríamos probar.
- Por último, claramente $TSy = y$.

Por lo tanto, se verifican las tres condiciones del criterio de Kitai, luego T es hipercíclico.

Sin embargo, no existe ningún punto periódico $x = (x_n) \neq 0$. En efecto, si $x = (x_n)$ con algún término distinto de 0 es periódico entonces la sucesión (x_n) será periódica. Por otro lado, se tiene que $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n}$ es una serie divergente ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ lo es. Por tanto, obtenemos una contradicción con el hecho de que (x_n) es periódica.

Nuestro objetivo a partir de ahora será probar que los tres operadores estudiados en la sección anterior son caóticos (Devaney). Para ello solo tendremos que demostrar que cada uno de ellos tiene un conjunto denso de puntos periódicos, ya que en la sección 3.2.1 ya fue probada la condición i) de la definición 3.2.10.

Proposición 3.2.16. *El operador de Rolewicz es caótico Devaney.*

Demostración.

Sea $T = \lambda B$, $|\lambda| > 1$ el operador de Rolewicz en $X = l^p$, $1 \leq p < \infty$ o $X = c_0$. Veamos que T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Sabemos que $x \in X$ es periódico si y sólo si existe $N \in \mathbb{N}$ y $x_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, N$ tal que

$$x = (x_1, \ldots, x_N, \lambda^{-N}x_1, \ldots, \lambda^{-N}x_N, \lambda^{-2N}x_1, \ldots, \lambda^{-2N}x_N, \ldots)$$

ya que

$$\begin{aligned} T^N x &= \lambda^N(\lambda^{-N}x_1, \ldots, \lambda^{-N}x_N, \lambda^{-2N}x_1, \ldots, \lambda^{-2N}x_N, \ldots) = \\ &= (x_1, \ldots, x_N, \lambda^{-N}x_1, \ldots, \lambda^{-N}x_N, \lambda^{-2N}x_1, \ldots, \lambda^{-2N}x_N, \ldots) = \\ &= x \end{aligned}$$

Para ver que el conjunto de puntos periódicos es denso en X es suficiente aproximarlos a alguna sucesión finita $y = (y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)$. Eligiendo un punto periódico cuyas $N \geq n$ primeras coordenadas coincidan con las de y, vemos que

$$\|x - y\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|^{-jN} \|y\| \longrightarrow 0 \quad \text{si } N \longrightarrow \infty.$$

Por lo tanto, los operadores de Rolewicz son caóticos.

□

Observemos que para funciones lineales en espacios vectoriales arbitrarios X, el conjunto de los puntos periódicos de T, que denotaremos como $\mathrm{Per}(T)$, es un subespacio de X. En efecto, sean $x, y \in X$ puntos periódicos de T, es decir, $T^n x = x$ y $T^m y = y$ para ciertos $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces $T^{nm}(ax + by) = a(T^n)^m x + b(T^m)^n y = ax + by$ para ciertos $a, b \in \mathbb{K}$, luego $ax + by$ es un punto periódico.

Los siguientes resultados permitirán verificar que en algunas situaciones concretas, un operador dado (como será el caso del operador de Birkhoff y el de MacLane) tendrá un conjunto denso de puntos periódicos.

Proposición 3.2.17. *Sea T una función continua en un espacio de Frechet complejo X. Entonces el conjunto de puntos periódicos de T viene dado por*

$$\mathrm{Per}(T) = \mathrm{span}\{x \in X : Tx = e^{\alpha\pi i}x \textit{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\}.$$

Demostración.

" $\supseteq$ " Si $Tx = e^{\alpha\pi i}x$ con $\alpha = \frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$T^2x = T(e^{\frac{k}{n}\pi i}x) = e^{\frac{k}{n}\pi i}e^{\frac{k}{n}\pi i}x = e^{2\frac{k}{n}\pi i}$$

$$\dots$$

$$T^{2n}x = e^{2k\pi i}x = (\cos 2k\pi + i\,\mathrm{sen}\, 2k\pi)x = x$$

luego x es periódico. Como $\mathrm{Per}(T)$ es un subespacio, se tiene la afirmación.

" $\subseteq$ " Suponemos que $x \in \mathrm{Per}(T)$, es decir, $T^n x = x$. Descomponemos el polinomio $z^n - 1$[2] en el producto de monomios

$$z^n - 1 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\dots(z - \lambda_n).$$

Sea $p_k(z) := \prod_{j\neq k}(z - \lambda_j),\ 1 \leq k \leq n$ (de donde se deduce que $p_k(z)(z - \lambda_k) = z^n - 1$). Como todas las raíces $\lambda_k,\ k = 1, \dots, n$ son diferentes, el sistema $\{p_1, \dots, p_n\}$ de polinomios es una base del espacio de polinomios de grado estrictamente menor que n. En particular, existe $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$ tal que

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

por lo que, sustituyendo z por T obtenemos $I = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k(T)$. Por tanto, se tiene que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$$

donde $y_k := p_k(T)x$, $k = 1, \dots, n$. Ahora, como $p_k(T)(T - \lambda_k) = T^n - I$ y por hipótesis $T^n x = x$, se siguen las siguientes igualdades

$$(T - \lambda_k)y_k = (T - \lambda_k)p_k(T)x = (T^n - I)x = T^n x - x = 0$$

luego $Ty_k = \lambda_k y_k$. Por tanto, x pertenece al conjunto deseado.

$\square$

Para simplificar, denotaremos a partir de ahora a la función exponencial como $e_\lambda(z) = e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Lema 3.2.18. *Sea $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un conjunto con un punto de acumulación. Entonces el conjunto*

$$\mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

es denso en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$.

Demostración.

Suponemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\lambda_n \in \Lambda$ con $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ y $\lambda_n \neq \lambda$ para todo $n \geq 1$. Entonces, como el desarrollo de la función exponencial es $e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$, podemos escribir

$$e^{\lambda_n z} = e^{\lambda z}e^{(\lambda_n - \lambda)z} = e^{\lambda z} + e^{\lambda z}(\lambda_n - \lambda)z + e^{\lambda z}\frac{(\lambda_n - \lambda)^2 z^2}{2!} + \dots \tag{3.3}$$

[2] El polinomio $x^n - 1$ tiene por raíces todas las raíces n-ésimas de la unidad. Recordemos que las raíces n-ésimas de la unidad son todos los números complejos que dan 1 cuando son elevados a una cierta potencia n. Éstas son de la forma $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ con $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Por tanto, $e^{\lambda_n z} \longrightarrow e^{\lambda z}$ uniformemente sobre conjuntos compactos. Luego $e_\lambda \in \overline{\text{span}}\{e_{\lambda_n} : n \geq 1\}$.

Además, 3.3 también muestra que

$$\frac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z}}{\lambda_n - \lambda} = e^{\lambda z} z + e^{\lambda z} \frac{(\lambda_n - \lambda) z^2}{2!} + \dots$$

y, por tanto, $\frac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z}}{\lambda_n - \lambda} \longrightarrow z e^{\lambda z}$ uniformemente en conjuntos compactos. Luego también la función $z \longrightarrow z e^{\lambda z}$ pertenece a $\overline{\text{span}}\{e_{\lambda_n} : n \geq 1\}$. Continuando de la misma manera obtenemos que todas las funciones $z \longrightarrow z^k e^{\lambda z}$, $k \geq 0$, pertenecen a $\overline{\text{span}}\{e_{\lambda_n} : n \geq 1\}$.

Ahora, sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$. Se tiene entonces que

$$f(z) = e^{\lambda z}(e^{-\lambda z} f(z)) = e^{\lambda z}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k e^{\lambda z}$$

para determinados coeficientes $a_k \in \mathbb{C}$, $k \geq 0$ (ya que $e^{-\lambda z} f(z) \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, luego tiene desarrollo en serie de potencias), de manera que la convergencia tiene lugar en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$. Por tanto, $f \in \overline{\text{span}}\{e_{\lambda_n} : n \geq 1\}$ de donde se sigue trivialmente que $\text{span}\{e_{\lambda_n} : n \geq 1\}$ es denso en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$, como queríamos probar.

□

Nos encontramos ya en disposición de probar que los operadores de Birkhoff y MacLane son caóticos.

Proposición 3.2.19. *El operador de MacLane es caótico Devaney.*

Demostración.

Para el operador diferencial D se tiene que $D(e^{\lambda z}) = \lambda e^{\lambda z}$, luego e_λ es vector propio de D con valor propio λ. Por el lema 3.2.18, sabemos que el subespacio

$$\text{span}\{e_\lambda : \lambda = e^{\alpha \pi i} \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\}$$

es denso en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$. Aplicando la proposición 3.2.17 se obtiene

$$\text{Per}(D) = \text{span}\{x \in X : Dx = e^{\alpha \pi i} x \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\} \supset \text{span}\{e_\lambda : \lambda = e^{\alpha \pi i} \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\}$$

y, por tanto, $\text{Per}(D)$ es denso. Como ya vimos que D es hipercíclico, se puede concluir que el operador de MacLane es caótico Devaney.

□

Proposición 3.2.20. *El operador de Birkhoff es caótico Devaney.*

Demostración.

Para el operador traslación T_a, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se tiene que $T_a(e^{\lambda z}) = e^{\lambda(z+a)} = e^{\lambda a} e^{\lambda z}$, luego toda función e_λ es un vector propio de T_a con valor propio $e^{a\lambda}$. En particular, $e_{\frac{\alpha}{a}\pi i}$ es vector propio con valor propio $e^{\alpha \pi i}$ ($\alpha \in \mathbb{Q}$). Por el lema 3.2.18, sabemos que el subespacio

$$\text{span}\{e_\lambda : \lambda = \frac{\alpha}{a} \pi i \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\}$$

es denso en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ y por la proposición 3.2.17

$$\text{Per}(T_a) = \text{span}\{x \in X : T_a x = e^{\alpha \pi i} x \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\} \supset \text{span}\{e_\lambda : \lambda = \frac{\alpha}{a} \pi i \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\},$$

luego $\text{Per}(T_a)$ es denso. Como ya vimos que T_a es hipercíclico, se puede concluir que el operador de Birkhoff es caótico Devaney.

□

3.3. Caos Li-Yorke en dimensión infinita.

En esta sección estudiaremos qué ocurre en dimensión infinita con el caos en el sentido de Li-Yorke. X sigue denotando un espacio de Fréchet separable de dimensión infinita. Comencemos introduciendo algunas definiciones importantes en la sección.

Definición 3.3.1. *Dado un operador $T : X \longrightarrow X$ y un vector $x \in X$, decimos que x es un **vector irregular** de T si la sucesión $(T^n x)_{n\geq 0}$ no está acotada*[3]*, pero tiene una subsucesión convergiendo a cero.*

Definición 3.3.2. *Dado un operador $T : X \longrightarrow X$ y un vector $x \in X$, decimos que x es un **vector semi-irregular** de T si la sucesión $(T^n x)_{n\geq 0}$ no converge a cero, pero tiene una subsucesión convergiendo a cero.*

Nuestro objetivo a partir de ahora será probar que T es caótica en el sentido de Li-Yorke si y solo si admite un vector semi-irregular. Los resultados que exponemos a continuación se pueden encontrar en [4].

Lema 3.3.3. *Dado $T : X \longrightarrow X$ un operador, suponemos que $x \in X$ es un vector semi-irregular para T que no es irregular para T. Entonces existe un vector $y \in X$ irregular tal que $x + \beta y$ es irregular para todo $\beta \neq 0$.*

Demostración.

Sea $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión creciente de seminormas que induce la topología de X y d la distancia que definen. Para todo $\varepsilon > 0$, sea k tal que $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces $V = \{x \in X : p_1(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}, p_2(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, p_k(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$ es un cerrado absolutamente convexo[4] que cumple $V \subset B(0, \varepsilon)$, es decir, V es un entorno de 0. Por ser x un vector semi-irregular para T, la sucesión $(T^n x)$ no converge a 0, luego se verifica

$$T^n x \notin V \quad \text{para un número infinito de valores de } n. \tag{3.4}$$

Sea $(V_j)_{j\in\mathbb{N}_{\not{0}}}$ una base de entornos numerable de 0 en X tal que cada V_j es absolutamente convexo, cerrado y además se verifica

$$V_0 = V, \quad V_j + V_j \subset V_{j-1}, \quad T(V_j) \subset V_{j-1} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Por lo anterior, notemos que

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots \tag{3.6}$$

$$T^n(V_j) \subset V_{j-n} \quad \text{si } \; n \leq j. \tag{3.7}$$

$$V_p + V_{p+1} + \ldots + V_q \subset V_{p-1} \quad \text{si } \; 1 \leq p < q. \tag{3.8}$$

Ahora, como x no es un vector irregular de T, la sucesión $(T^n x)$ debe estar acotada. Por tanto, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n x \in rV \quad \text{para cada } \; n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

---

[3]Decimos que A está acotada si para todo V entorno de 0 existe r tal que $A \subset sV$ para todo $s \geq r$.

[4]Un conjunto es absolutamente convexo si es equilibrado y convexo, es decir, si $x, y \in V$ entonces $\alpha x + \beta y \in V$ para todo α, β verificando $|\alpha| + |\beta| \leq 1$. Por tanto, si V es absolutamente convexo se verifica que, para todo $a, b > 0$, $aV + bV = (a + b)V$ por ser convexo y $-aV = aV$ por ser equilibrado.

Definimos recursivamente una sucesión creciente $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_{\not{}}}$ de enteros no negativos de la siguiente manera:

$$c_0 = 0 \quad \text{ y } \quad c_k = k + 1 + r(c_0 + \ldots + c_{k-1})) \ \text{ para } k \geq 1.$$

Ahora, construimos inductivamente sucesiones $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots$ y $p_1 < p_2 < \ldots$ de enteros positivos de manera que para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $T^{n_k}x \in c_k^{-1}V_{m_{k-1}+p_{k-1}}$,
2. $T^{m_k}x \notin V$,
3. $T^{p_k}x \in V_k$,
4. $T^{p_k}(\sum_{j=1}^{k} c_jT^{n_j}x) \in V_k$,

donde $m_0 = p_0 = 0$. Por 3.4 y el hecho de que (T^nx) tiene una subsucesión convergiendo a 0 (por ser x semi-irregular) podemos elegir $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_1}x \in c_1^{-1}V_0$, $m_1 > n_1$ tal que $T^{m_1}x \notin V$, y $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{p_1}x \in V_1$ y $T^{p_1}(c_1T^{n_1}x) = c_1T^{n_1}T^{p_1}x \in V_1$.

Si $s \geq 2$ y n_k, m_k, p_k han sido elegidas para $1 \leq k \leq s-1$ entonces es suficiente elegir $n_s > m_{s-1}$ tal que $T^{n_s}x \in c_s^{-1}V_{m_{s-1}+p_{s-1}}$, $m_s > n_s$ tal que $T^{m_s}x \notin V$ y $p_s > p_{s-1}$ tal que $T^{p_s}x$ está tan cerca de 0 que 3) y 4) se siguen verificando poniendo s en lugar de k. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea

$$x_j := c_jT^{n_j}x.$$

Probaremos que $y = \sum x_j$ está bien definido y es irregular.

Por 1) se tiene que $x_j = c_jT^{n_j}x \in c_jc_j^{-1}V_{m_{j-1}+p_{j-1}} = V_{m_{j-1}+p_{j-1}}$ luego, utilizando además 3.6 y 3.8 se obtiene, si $2 \leq p < q$:

$$\sum_{j=p}^{q} x_j \in \sum_{j=p}^{q} V_{m_{j-1}+p_{j-1}} \subset V_p + V_{p+1} + \ldots + V_q \subset V_{p-1}.$$

Por tanto, las sumas parciales de las series $\sum x_j$ forman una sucesión de Cauchy en X, e $y = \sum x_j$ está bien definido. Probaremos que y es un vector irregular para T. Fijamos $k \geq 2$. Si $j \geq k+1$ entonces $x_j \in V_{m_{j-1}+p_{j-1}} \subset V_{j+p_k}$ (ya que $m_{j-1} + p_{j-1} > j + p_k$) y entonces, por 3.7 se obtiene que $T^{p_k}x_j \in V_j$. Por tanto, utilizando nuevamente 3.6 y 3.8,

$$\sum_{j=k+1}^{q} T^{p_k}x_j \in V_{k+1} + V_{k+2} + \ldots + V_q \in V_k$$

para cada $q > k+1$.

Como V_k es cerrado, tomando $q \longrightarrow \infty$ se tiene que

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} T^{p_k}x_j \in V_k.$$

Utilizando 4) y lo anterior, concluimos que

$$T^{p_k}y = T^{p_k}(\sum_{j=1}^{k} x_j) + \sum_{j=k+1}^{\infty} T^{p_k}x_j \in V_k + V_k.$$

Esto prueba que $T^{p_k}y \longrightarrow 0$ si $k \longrightarrow \infty$.

Notemos que:

$$T^{m_k-n_k}y = \sum_{j=1}^{k-1} T^{m_k-n_k}x_j + T^{m_k}(c_k x) + \sum_{j=k+1}^{\infty} T^{m_k-n_k}x_j \tag{3.10}$$

Veamos por separado qué ocurre con cada uno de estos sumandos.

Por 2), se tiene que

$$T^{m_k}(c_k x) \notin c_k V = (k + 1 + r(c_0 + \ldots + c_{k-1}))V. \tag{3.11}$$

Ahora para el primer sumando, utilizando 3.9 y la convexidad de V

$$\sum_{j=1}^{k-1} T^{m_k-n_k}x_j = \sum_{j=1}^{k-1} c_j T^{m_k-n_k+n_j}x \in \sum_{j=1}^{k-1}(c_j rV) \subset r(c_1 + \ldots + c_{k-1})V \tag{3.12}$$

Para el último sumando, si $j \geq k+1$ entonces $x_j \in V_{m_{j-1}+p_{j-1}} \subset V_{m_k-n_k+j-1}$ y entonces, por 3.7, $T^{m_k-n_k}x_j \in V_{j-1}$. Por tanto,

$$\sum_{j=k+1}^{q} T^{m_k-n_k}x_j \in V_k + V_{k+1} + \ldots + V_{q-1} \subset V_{k-1} \subset V$$

para cada $q > k+1$. Luego,

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} T^{m_k-n_k}x_j \in V. \tag{3.13}$$

Por tanto, utilizando 3.11, 3.12, 3.13 y la convexidad de V, podemos concluir que

$$T^{m_k-n_k}y \notin kV.$$

Esto muestra que la sucesión $(T^n y)$ no está acotada, luego y es un vector irregular para T. Fijado $\beta > 0$, como V es absolutamente convexo, $T^{m_k-n_k}(x+\beta y) \notin (r+\beta k)V$, luego $x + \beta y$ es irregular, con lo que se concluye la prueba.

□

Teorema 3.3.4. *Si $T : X \longrightarrow X$ es un operador, entonces todo entorno de un vector semi-irregular de T contiene un vector irregular de T.*

Demostración.

Supongamos que $x \in X$ es un vector semi-irregular de T. Pueden darse dos casos:

- Si x es irregular de T, entonces ya hemos acabado.
- Si x no es irregular de T, entonces el lema 3.3.3 implica la existencia de un vector y de manera que $x + \beta y$ es irregular para T para cada $\beta \neq 0$, lo que prueba el teorema.

□

Veamos ahora la caracterización mencionada para los operadores caóticos en el sentido de Li-Yorke.

Teorema 3.3.5. *Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es caótica en el sentido de Li-Yorke.*
2. *T admite un par de Li-Yorke.*
3. *T admite un vector semi-irregular.*
4. *T admite un vector irregular.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Trivial.

2) $\Rightarrow$ 3) Sean (a, b) un par de Li-Yorke de T. Por definición se tiene que

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} d(T^n a, T^n b) = 0 \quad \text{y} \quad \limsup_{n\longrightarrow\infty} d(T^n a, T^n b) > 0.$$

Entonces,

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} d(T^n(a-b), 0) = 0 \quad \text{y} \quad \limsup_{n\longrightarrow\infty} d(T^n(a-b), 0) > 0$$

que muestra que el vector $x := a - b$ es semi-irregular de T.

3) $\Rightarrow$ 4) Se tiene directamente aplicando el teorema 3.3.4.

4) $\Rightarrow$ 1) Si $x \in X$ es un vector irregular de T, entonces podemos tomar $S = \operatorname{span}\{x\}$. Por tanto, dados dos puntos distintos distintos $y, z \in S \subset X$, trivialmente se verifican las condiciones de la definición de caos en el sentido de Li-Yorke.

$\square$

Veamos ahora un resultado que será fundamental en la comparación entre caos en el sentido de Devaney y en el sentido de Li-Yorke.

Proposición 3.3.6. *Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador. Si T es hipercíclico entonces T es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

Demostración.

Si T es hipercíclico, entonces existe algún $x \in X$ cuya órbita sobre T es densa en X. En particular, esto significa que existe una subsucesión $(n_k)_k$ de manera que $T^{n_k}x \longrightarrow 0$ pero sin embargo, la propia sucesión no tiende a 0 ($T^n x \nrightarrow 0$). Luego x es un vector semi-irregular, y por la caracterización vista en el teorema 3.3.5 obtenemos que T es caótica en el sentido de Li-Yorke.

$\square$

Por lo tanto, en dimensión infinita, no solo caos en el sentido de Devaney implica caos en el sentido de Li-Yorke, sino que únicamente la condición de hiperciclicidad implica el caos de Li-Yorke.

Sin embargo, en dimensión infinita tampoco se cumple que caos en el sentido de Li-Yorke implique caos en el sentido de Devaney. Esto queda de manifiesto en el contraejemplo de la observación 3.2.15 visto en este capítulo, donde concluimos que T era hipercíclico, luego caótico en el sentido de Li-Yorke y sin embargo no tenía puntos periódicos, luego no se cumple una de las condiciones de la definición de caos en el sentido de Devaney.

Resumiendo, hemos visto que en dimensión infinita ambos tipos de caos existen. Además, el caos de Devaney implica el caos de Li-Yorke pero el recíproco no se cumple.

3.4. Dinámica en sistemas no lineales.

Definición 3.4.1. *Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Un subconjunto $Y \subset X$ se denomina* ***T-invariante*** *o* ***invariante sobre T*** *si $T(Y) \subset Y$.*

El objetivo de esta sección es mostrar que la dinámica lineal es "filosóficamente" tan complicada como la no lineal. El teorema 3.4.3 (que se puede encontrar en [7]) mostrará que toda función continua en un espacio métrico compacto es conjugada a la restricción de un operador lineal en algún conjunto invariante. Para todos los sistemas no lineales puede tomarse el mismo operador caótico. En otras palabras, la dinámica de todos los sistemas dinámicos compactos no lineales puede ser vista como un subconjunto de la dinámica de un solo operador caótico.

Definición 3.4.2. *Sean X_n espacios de Banach separables, $n \geq 1$. Para $1 \leq p < \infty$, definimos la* ***l^p-suma directa*** *de estos espacios como*

$$(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{l^p} = \{(x_n)_{n\geq 1} : x_n \in X, n \geq 1 \ y \ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty\}^5$$

dotado con la norma $\|(x_n)_n\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Teorema 3.4.3. *Existen un espacio de Hilbert separable H y un operador caótico $T : H \longrightarrow H$ con la siguiente propiedad: para toda función continua f de un espacio métrico compacto K en sí mismo existe un subconjunto T-invariante L de H de manera que f es conjugada a la restricción $T|_L$ de T en L. En otras palabras, existe un homeomorfismo $\Phi : K \longrightarrow L$ de manera que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & K \arrow[d, "\varphi"] \\ L \arrow[r, "T|_L"] & L \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración.

Sea $H = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} l^2)_{l^2}$ el espacio de todas las sucesiones $x = (x_n)_{n\geq 0}$ de elementos $x_n = (x_{n,k})_{k\geq 0}$ en l^2 de manera que $\|(x_n)_n\| := (\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$. Entonces, H es un espacio Hilbert separable.

Consideramos en H el operador de Rolewicz $T = \lambda B$ con $\lambda = 2$, es decir,

$$T : H \longrightarrow H \quad \text{donde} \quad T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = 2(x_2, x_3, \ldots).$$

Veremos en tres pasos que T tiene las propiedades deseadas.

[5]Este espacio también es un espacio de Banach separable.

- **Paso 1.** Definiremos un homeomorfismo $\Phi : K \longrightarrow L$ adecuado para un cierto compacto $L \subset H$.

  Asumimos que la métrica d de K está acotada por 1, ya que si es de otra manera podemos reemplazarla por la métrica equivalente $d'(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$.

  Como K es un espacio métrico compacto, toda sucesión de puntos de K admite una subsucesión que converge a un punto de K. Por tanto, podemos fijar una sucesión densa $(y_k)_{k\geq 0}$ en K, es decir, el conjunto $S = \{y_k : k \geq 0\}$ es denso en K (luego obtendremos que para todo $y \in K$ existe $(y_{k_l})_l \subset S$ de manera que $y_{k_l} \longrightarrow y$).

  Entonces, dado $x \in K$ definimos

$$\Phi\ (x) = \left(\left(\frac{1}{2^{k+n}} d(y_k, f^n(x))\right)_k\right)_n \in H$$

  Entonces, dados $x, y \in K$ y $N \geq 0$ que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x) - \Phi(y)\|^2 &= \sum_{k,n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{2^{k+n}} (d(y_k, f^n(x)) - d(y_k, f^n(y))) \right\|^2 \\
&= \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2(k+n)}} |(d(y_k, f^n(x)) - d(y_k, f^n(y)))|^2 \\
&\leq \sum_{k,n\leq N}^{\infty} \frac{1}{2^{2(k+n)}} |(d(y_k, f^n(x)) - d(y_k, f^n(y)))|^2 + \\
&\quad \sum_{\substack{k>N \text{ o} \\ n>N}}^{\infty} \frac{1}{2^{2(k+n)}} |(d(y_k, f^n(x)) + d(y_k, f^n(y)))|^2 \\
&\leq \sum_{k,n\leq N}^{\infty} \frac{1}{2^{2(k+n)}} |(d(y_k, f^n(x)) - d(y_k, f^n(y)))|^2 + \sum_{\substack{k>N \text{ o} \\ n>N}}^{\infty} \frac{4}{2^{2(k+n)}}.
\end{aligned}$$

  Esto se puede hacer arbitrariamente pequeño eligiendo primero N suficientemente grande y después y suficientemente cerca de x. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in K$ y $|x - y| < \delta$ entonces $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \varepsilon$, es decir, la aplicación $\Phi : K \longrightarrow H$ es continua.

  Además, Φ es inyectiva. En efecto, si $\Phi(x) = \Phi(y)$ se tiene que

$$\frac{1}{2^k} d(y_k, x) = \frac{1}{2^k} d(y_k, y) \quad \forall k \geq 0$$

  luego por la densidad de y_k se tiene que $x = y$.

  Por tanto, Φ es un homeomorfismo en un subespacio compacto L de H (ya que se trata de una aplicación continua inyectiva en un espacio compacto[6]).

- **Paso 2.** Mostraremos que $\Phi \circ f = T \circ \Phi$ y que L es invariante sobre T.

[6] Resultado estudiado en la asignatura de Topología; ver por ejemplo [15].

En efecto, para todo $x \in K$ se tiene que:

$$\Phi(f(x)) = ((\frac{1}{2^{k+n}} d(y_k, f^{n+1}(x)))_k)_n =$$
$$= 2((\frac{1}{2^{k+n+1}} d(y_k, f^{n+1}(x)))_k)_n = T(\Phi(x)).$$

Además, a partir de lo anterior, vemos que

$$T(L) = T(\Phi(K)) = \Phi(f(K)) \subset \Phi(K) = L.$$

es decir, L es invariante sobre T.

- **Paso 3.** El operador T es caótico en H (la demostración es análoga a la de las proposiciones 3.2.8 y 3.2.16).

Así, hemos visto que el operador T tiene todas las propiedades que buscábamos, por lo que se concluye la prueba.

□

Después de todo lo visto a lo largo de estos tres capítulos se puede concluir que: en el intervalo existe una relación fuerte entre el caos de Devaney y el de Li-Yorke, ya que el primero implica este último. Hemos visto que en dimensión finita no existe el caos lineal, sino que es un fenómeno infinito dimensional. Además, en dimensión infinita se sigue conservando que el caos en el sentido de Devaney implica el caos en el sentido de Li-Yorke. Por último, mediante este último teorema se concluye que las dinámicas lineales pueden ser tan complicadas como las dinámicas no lineales, introduciendo así nuestra última pieza de un puzzle en el que todo encaja a la perfección.

Bibliografía

[1] L. Alsedà, S. Kolyada, J. Llibre y L. Snoha. *Entropy and periodic points for transitive maps*. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 351 (1999) pp. 1551–1573.

[2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey. *On Devaney's definition of chaos*. Amer. Math. Monthly, Vol. 99 (1992) pp. 332–334.

[3] A. Barrio y V. Jiménez, *An almost everywhere version of Smítal's order-chaos dichotomy for interval maps*. J. Austral. Math. Soc., Vol. 85 (2008) pp. 29–50.

[4] N.C. Bernardes, A. Bonilla, V. Müller y A.Peris. *Li-Yorke chaos in linear dynamics*. Institute of Mathematics, Academic of Sciences of the Czech Republic, preprint no. 22–2012.

[5] B. Cascales, J. M. Mira, J. Orihuela y M. Raja. *Análisis Funcional*. Electolibris. Murcia, 2012.

[6] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Benjamin-Cummings. Menlo Park, 1986.

[7] N. S. Feldman. *Linear chaos?*. Washington and Lee University, 2001. (`http://home.wlu.edu/~feldmann/pdffiles/linearchaos.pdf`).

[8] G. Godefroy y J.H. Shapiro. *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*. J. Funct. Anal., Vol. 98 (1991) pp. 229–269.

[9] B. Green. *On Runge's theorem*. University of Oxford, 2012. (`http://people.maths.ox.ac.uk/greenbj/papers/runge.pdf`).

[10] K.G. Grosse-Erdmann y A. Peris Manguillot. *Linear Chaos*. Springer. Londres, 2011.

[11] E. Hernández. *Álgebra y geometría*. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, 1994.

[12] W. Huang y X. Ye. *Devaney's chaos or 2-scattering implies Li–Yorke's chaos*. Topology Appl., Vol. 117 (2002), pp. 259–272.

[13] S. Lang. *Complex Analysis*. Addison-Wesley. Massachussets, 1977.

[14] T. -Y. Li y J. A. Yorke. *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly, Vol. 82 (1975) pp. 985–992.

[15] J. R. Munkres. *Topología*. Pearson (Prentice-Hall). Madrid, 2002.

[16] W.Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill. Estados Unidos, 1991.

[17] S. Ruette. Chaos for continuous interval maps. *A survey of relationship between the various kinds of chaos*. Université Paris-Sud, 2015 (arXiv: 1504.03001).