UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EBAU2022 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTE: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el valor de a para el que $B^2=A$ (0,75 puntos)
b) Calcular la matriz inversa A^{-1} (0,75 puntos)
c) Para $a=0$, Encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX+B=C$ (1 punto)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 10\\ x+2y\ge 8\\ 2\le y\le x+6\\ x\le 6\end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)
b) Determine el punto de la región factible dónde la función $f(x,y)=-x+2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La ecuación de demanda de un determinado producto viene dado por la expresión $p=400-2q$, y su función de coste total es $C(q)=0,2q^2+4q+400$, dónde q es el número de unidades de dicho producto y p se expresa en euros por unidad. Determine:

a) La expresión de la función de beneficios de la empresa.
b) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.
c) El precio para el que el beneficio es máximo.
d) El beneficio máximo.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función $f(x)=\begin{cases} xe^x & si\quad x\le 0\\ ax+b & si\quad 0<x<1\\ 1+x\ln x & si\quad x\ge 1\end{cases}$,:

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio.
b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EBAU2022 - **JULIO**

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-4}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$:

a) Calcular la derivada $f'(x)$ (1 punto)

b) Calcular $\int f(x)\,dx$ (1 punto)

c) Calcular $\int_0^1 f(x)dx$ (0,5 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=4x-x^2$:

a) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=3$ (1 punto).

b) Calcule el área del recinto del apartado anterior. (1,5 puntos).

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $P(A)=0,3$ y $P(A\cap B)=0,12$:
   i. Calcular $P(B)$. (0,5 puntos)
   ii. Calcular $P(A\cup B)$. (0,5 puntos)
   iii. Calcular $P(\overline{A}\cap\overline{B})$. (0,5 puntos)

b) En una estación del AVE, el tiempo que tarda un viajero para acceder al tren desde que llega al control de equipajes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. Se tomó una muestra aleatoria de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 16 minutos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 90 %. (1 punto).

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EBAU2022 - **JULIO**

Criterios generales

Cada error de cálculo trivial se penalizará con 0,1 puntos y cada error de cálculo NO trivial con 0,2 puntos.

Criterios específicos

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, se pide:

d) Calcular el valor de a para el que $B^2=A$ (0,75 puntos)
e) Calcular la matriz inversa A^{-1} (0,75 puntos)
f) Para $a=0$, Encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX+B=C$ (1 punto)

Solución.

a) $B^2=\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+a^2 & 4a\\ 4a & a^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow a=1$ **(0,75 puntos)**

$|A|=20-16=4$

b) $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -4\\ -4 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ -1 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$ **(Cálculo determinante 0,25 p., la inversa 0,5 p.)**

c) $AX+B=C\Rightarrow X=A^{-1}(C-B)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ -1 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{7}{2}\\ \frac{3}{2} & 9\end{pmatrix}$ **(1 punto)**

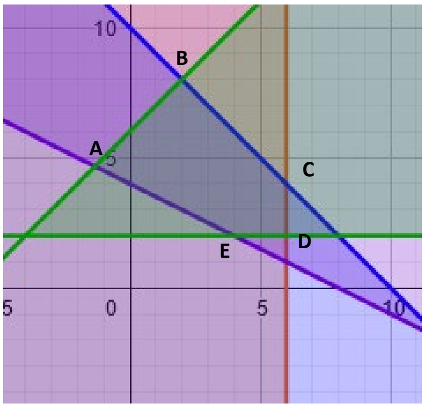
CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 10\\ x+2y\ge 8\\ 2\le y\le x+6\\ x\le 6\end{array}\right\}$$

c) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)
d) Determine el punto de la región factible dónde la función $f(x,y)=-x+2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor. (0,5 puntos)

Solución:

La región factible es **(0,5 puntos)**:



$$\left.\begin{aligned}
&A=\left(-\frac{4}{3},\frac{14}{3}\right)\Rightarrow f\left(-\frac{4}{3},\frac{14}{3}\right)=\frac{32}{3}\\
&B=(2,8)\Rightarrow f(2,8)=14\\
&C=(6,4)\Rightarrow f(6,4)=2\\
&D=(6,2)\Rightarrow f(6,2)=-2\\
&E=(4,2)\Rightarrow f(4,2)=0
\end{aligned}\right\}\Rightarrow Minimo: x=6, y=2$$

Vértices **(0,2 por vértice y valores: 0,5)**:

Solución **(0,5 puntos)**

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La ecuación de demanda de un determinado producto viene dado por la expresión $p=400-2q$, y su función de coste total es $C(q)=0,2q^2+4q+400$, dónde q es el número de unidades de dicho producto y p se expresa en euros por unidad. Determine:

e) La expresión de la función de beneficios de la empresa.
f) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.
g) El precio para el que el beneficio es máximo.
h) El beneficio máximo.

Solución:

a) La función de beneficios será:

$$B(q)=I(q)-C(q)=(400-2q)q-(0,2q^2+4q+400)=-2,2q^2+396q-400$$ **(0,5 p)**

b) Derivamos la función:

$$\begin{aligned}&B'(q)=-4,4q+396=0\Rightarrow q=90\\&B''(q)=-4,4<0\Rightarrow Maximo\end{aligned}$$ **(0,5+0,5 puntos)**

c) $p=400-2\times 90=220$ euros. **(0,5 puntos)**

d) $B_{Max}=B(90)=17.420$ **(0,5 puntos)**

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EBAU2022 - **JULIO**

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función $f(x)=\begin{cases} xe^{x} & si \quad x\le 0 \\ ax+b & si \quad 0<x<1 \\ 1+x\ln x & si \quad x\ge 1 \end{cases}$,:

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

Solución:

a) Para que la función sea continua los límites laterales deben coincidir con el valor de la función en el punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} ax+b=b \\ f(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow b=0 \quad \textbf{(0,75 puntos)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax+b=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1+x\ln x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=1 \Rightarrow a=1 \quad \textbf{(0,75 puntos)}$$

b) La ecuación de la recta tangente es: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ **(0,5 puntos)**

$f(1)=1$

$$f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}=1+\ln x \Rightarrow f'(1)=1$$

$y-1=1(x-1)\Rightarrow y=x$ **(0,5 puntos)**

Región de Murcia

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EBAU2022 - **JULIO**

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-4}$, calcule:

e) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados.
f) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
g) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
h) Máximos y mínimos locales.

Solución:

a) El dominio de la función. $Dom\, f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Puntos de corte: $(0,-1/4),(-1,0),(1,0)$

(0,75 puntos)

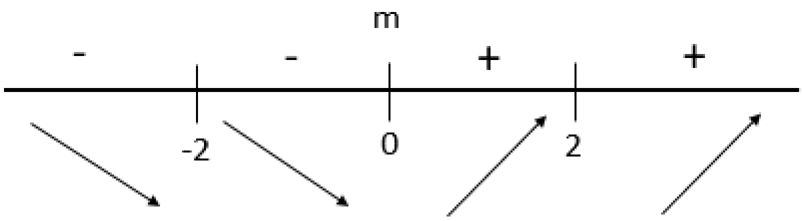
b) Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to\pm2}\dfrac{1-x^2}{x^2-4}=\infty\Rightarrow x=-2;\ x=2$

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{x^2-4}=-1\Rightarrow y=-1$

(0,5 puntos)

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

$$f'(x)=\frac{6x}{\left(x^2-4\right)^2}=0\Rightarrow x=0$$



Creciente: $(0,2)\cup(2,+\infty)$

Decreciente: $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

c) Máximos y mínimos locales. **(0,25 puntos)**

$$x=0\Rightarrow \min imo\ f(0)=-1/4\Rightarrow(0,-1/4)$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EBAU2022 - **JULIO**

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$:

d) Calcular la derivada $f'(x)$ (1 punto)

e) Calcular $\int f(x)\,dx$ (1 punto)

f) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$ (0,5 puntos)

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ (1 punto)

b) $\int f(x)\,dx=\dfrac{\ln(1+x^2)}{2}+K$ (1 punto)

c) $\int_0^1 f(x)\,dx=\left.\dfrac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_0^1=\dfrac{\ln 2}{2}$ (0,5 puntos)

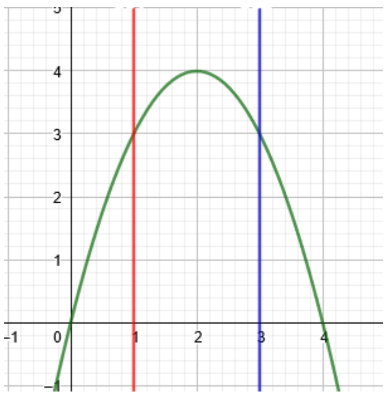
CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=4x-x^2$:

c) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=3$ (1 punto).

d) Calcule el área del recinto del apartado anterior. (1,5 puntos).

Solución:

La representación gráfica es **(1 puntos)**:



Expresar bien el área **(0,75 puntos)**:

$$A=\int_1^3\left(-x^2+4x\right)dx=-\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}\Bigg]_1^3=\frac{22}{3}$$

Calcular la primitiva **(0,5 puntos),** resultado final **(0,25 puntos)**

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

c) Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $P(A) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,12$

iv. Calcular $P(B)$. (0,5 puntos)

v. Calcular $P(A \cup B)$. (0,5 puntos)

vi. Calcular $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. (0,5 puntos)

d) En una estación del AVE, el tiempo que tarda un viajero para acceder al tren desde que llega al control de equipajes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. Se tomó una muestra aleatoria de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 16 minutos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 90%. (1 punto).

Solución:

a) i) Como son independientes: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow P(B) = \dfrac{0,12}{0,3} = 0,4$ **(0,5)**

ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,12 = 0,58$ **(0,5 puntos)**

iii) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,58 = 0,42$ **(0,5 puntos)**

b) $IC_{90\%} = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$; (expresión correcta 0,5 puntos)

Sustituimos los valores:

$IC_{90\%} = \left(16 - 1,645 \dfrac{2}{\sqrt{50}}, 16 + 1,645 \dfrac{2}{\sqrt{50}} \right) = (15,5347 \quad 16,4653)$ (resultado final 0,5 puntos)