EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—

EBAU2023 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTE: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, solo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z&=1\\ 2x+y+z&=1\\ x+ay+z&=2 \end{aligned}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a=0. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150€ para el tipo A y de 100€ los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000€ a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130€ y los de tipo B de 140€.

a) Si la empresa quiere maximizar su beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices. (1,5 puntos)
b) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo? (1 punto)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q)=q^3+3q+10$, donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es $p=30$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos)
b) El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1,5 puntos)
c) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{x} & si \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{8x-2}{2x} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio. (0,5 puntos)
b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio. (1 punto)
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—

EBAU2023 - **JUNIO**

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-2x+2$ y $g(x)=-x^2+6$. Calcular su área.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$ (1 punto).

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $x=1$ y $x=e$ (1,5 puntos).

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso del casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el 60 % de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el 30 % usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el 40 % las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.
   i. Calcule la probabilidad de que use casco de protección. (0,5 puntos)
   ii. Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa caso de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto).

b) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas Navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes, resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros. Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del 97%. (1 punto).

Criterios generales

Cada error de cálculo trivial se penalizará con 0,1 puntos y cada error de cálculo NO trivial con 0,2 puntos.

Criterios específicos

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ x+ay+z=2 \end{array}\right\} \text{ (2 puntos)}$$

Resolverlo para a=0. (0,5 puntos)

Solución.

La matriz ampliada es:

$$(A/b)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix};\ |A|=-a^2+3a-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=1 \end{cases} \textbf{(0,5 puntos)}$$

- Si $a \neq 2, a \neq 1 \Rightarrow rg(A)=rg(A/b)=3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. **(0,5 p.)**
- Si $a=1 \Rightarrow rg(A)=2$; $rg(A/b)=3 \Rightarrow$ Sistema Incompatible. **(0,5 p.)**
- Si $a=2 \Rightarrow rg(A)=2=rg(A/b) \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. **(0,5 p.)**

$$a=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ x+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-1 \\ z=2 \end{array}\right\} \textbf{(0,5 puntos)}$$

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150€ para el tipo A y de 100€ los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000€ a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130€ y los de tipo B de 140€.

a) Si la empresa quiere maximizar su beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices. (1,5 puntos)
b) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo? (1 punto)

Solución:

Sea x = número de smartwatch tipo A e y = número de smartwatch tipo B. El problema planteado es:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \ B(x,y)=130x+140y \\ s.a:\ \ 150x+100y\leq 6000 \\ \qquad x+y\geq 10 \\ \qquad y\leq x+10 \\ \qquad x\geq 0,\ y\geq 0 \end{array}\right\}\ \text{Planteamiento } \textbf{(0,6 puntos)}$$

La región factible es **(0,5 puntos)**:

$$\left.\begin{array}{l} A=(0,10)\Rightarrow B(0,10)=1.400 \\ B=(20,30)\Rightarrow B(20,30)=6.800 \\ C=(40,0)\Rightarrow B(40,0)=5.200 \\ D=(10,0)\Rightarrow B(10,0)=1.300 \end{array}\right\}\Rightarrow M.: x=20, y=30$$

Vértices **(0,1 por vértice);** Solución **(0,5 puntos)**

El beneficio máximo es: $B(20,30)=6.800$ **(0,5 puntos)**

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q) = q^3 + 3q + 10$, donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es $p = 30$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos)
b) El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1,5 puntos)
c) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

Solución:

a) La función de Beneficios será:

$B(q) = I(q) - C(q) = 30q - (q^3 + 3q + 10) = -q^3 + 27q - 10$ **(0,5 puntos)**

b) La función a maximizar será:

$Max\, B(q) = -q^3 + 27q - 10$

Derivamos la función para obtener el óptimo:

$$B'(q) = -3q^2 + 27 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 3 \\ q = -3 \end{cases}$$ **(0,5 puntos)**

$$B''(q) = -6q \Rightarrow \begin{cases} B''(3) = -18 < 0 \\ q = -3\ NO\ tiene\ sentido\ economico \end{cases}$$ **(1 punto)**

$q = 3$ es el nº de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa

c) Y tenemos: $B_{Max} = 44$ euros. **(0,5 puntos)**

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{x} & si \quad 0<x\leq 1 \\ \dfrac{8x-2}{2x} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio. (0,5 puntos)
b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio. (1 punto)
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)
Solución:

a) Para que la función sea continua los límites laterales deben coincidir con el valor de la función en el punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} 2+\sqrt{x}=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{8x-2}{2x}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=3$$

Luego la función es continua. **(0,5 puntos)**

b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio.

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0 & si \quad 0<x<1 \\ \dfrac{1}{x^2}>0 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Luego es creciente en todo el dominio **(1 punto)**

c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

La ecuación de la recta tangente es: $y-f(2)=f'(2)(x-2)$ **(0,5 puntos)**

$$f'(2)=\frac{1}{4};\ f(2)=\frac{7}{2}\Rightarrow y-\frac{7}{2}=\frac{1}{4}(x-2)\Rightarrow y=\frac{x}{4}+3$$ **(0,5 puntos)**

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

Solución:

a) El dominio de la función. **(0,5 puntos)**

$$Dom\, f=\mathbb{R}-\{\pm 3\}$$; Punto de corte $(0,0)$

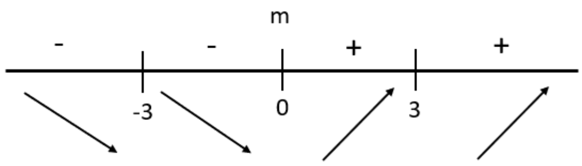
b) Asíntotas verticales y horizontales. **(0,5 puntos)**

Asíntotas verticales: $x=3;x=-3$

Asíntotas horizontales: $y=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{9-x^2}=-2$

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

$$f'(x)=\frac{36x}{(9-x^2)^2}=0\Rightarrow x=0$$



Creciente: $(0,3)\cup(3,+\infty)$

Decreciente: $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$

d) Máximos y mínimos locales. **(0,5 puntos)**

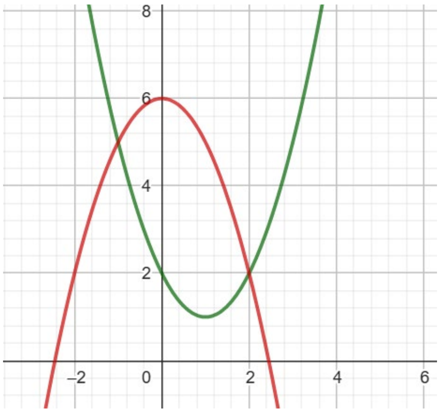
No hay Máximo

Mínimo: $x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow(0,0)$

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-2x+2$ y $g(x)=-x^2+6$. Calcular su área.

Solución:

La representación gráfica es **(1 puntos)**:



Expresar bien el área **(0,75 puntos)**:

$$A=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+6\right)-\left(x^2-2x+2\right)\right]dx=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx=-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x\Big]_{-1}^{2}=9u.$$

Calcular la primitiva **(0,5 puntos),** resultado final **(0,25 puntos)**

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$ (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $x=1$ y $x=e$ (1,5 puntos).

Solución:

a) $\int \dfrac{2\ln x}{x}\,dx=\left(Ln(x)\right)^2+k$ **(cálculo correcto de la primitiva 0,5 puntos; resultado final 0,5 puntos)**

b) $\int_1^e \dfrac{2\ln x}{x}\,dx=(\ln x)^2\Big]_1^e=\left(ln(e)\right)^2-Ln1=1$ **(expresar bien el área, 0,5 puntos; aplicar bien la regla de Barrow, 0,5 puntos; resultado final, 0,5 puntos)**

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso del casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el 60 % de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el 30 % usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el 40 % las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.

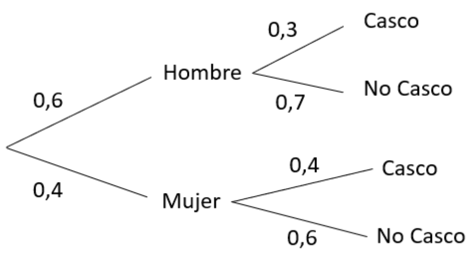
   i. Calcule la probabilidad de que use casco de protección. (0,5 puntos)

   ii. Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa caso de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes, resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros. Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del 97%. (1 punto).

Solución:

a) Hacemos el árbol:



$$P(Casco) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,34$$ **(0,5 puntos)**

$$P(Mujer\ /\ Casco) = \frac{P(Mujer \cap Casco)}{P(Casco)} = \frac{0,4 \times 0,4}{0,34} = 0,4706$$

(Expresión teorema de Bayes 0,5 puntos, resultado final 0,5 puntos)

b) $IC_{97\%} = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$; **(expresión correcta 0,4 puntos)**

Sustituimos los valores:

$$IC_{97\%} = \left(65 - 2,17\frac{10}{\sqrt{225}}, 65 + 2,17\frac{10}{\sqrt{225}} \right) = (63,5533 \quad 66,4466)$$

Para el 97% tenemos que: $z_{\alpha/2} = 2,17$ **(este valor 0,3)**

(resultado final 0,3 puntos)